

ÜBER DEN HABITUS DER KONFORMEN ABBILDUNG AM RANDE DES ABBILDUNGSBEREICHES.

VON

ALEXANDER OSTROWSKI

in BASEL.

Inhaltsübersicht.

	Seite
<i>Literaturzusammenstellung</i>	83
<i>Einleitung</i>	85

Teil I. Der Hauptfall des Randverzerrungssatzes.

§ 1.	<i>Bezeichnungen und Definitionen</i>	92
	1. Gleichmässigkeit bei $\overline{\text{Lim}}$ und $\underline{\text{Lim}}$. — 2. Konvergenz aus dem Innern des Einheitskreises. — 3. Konvergenz aus dem Innern eines allgemeinen Gebietes. — 4. L -Tangenten. — 5. Grenzstützen. — 6. Eckendefinition im Fall der allgemeinen Berandung.	
§ 2.	<i>Erste Ableitung der Poissondarstellung einer analytischen Funktion</i>	96
	7. Verhalten in einem Stetigkeitspunkt der Belegung. (Satz I). — 8. Beweis des Satzes I. — 9. Bemerkungen zum Satz I. — 10. Die Hilfsfunktion $g_0(z)$. (Sätze II, III).	
§ 3.	<i>Der Randverzerrungssatz</i>	100
	11. Formulierung des Randverzerrungssatzes. (Satz IV). — 12. Beweis unter zwei speziellen Annahmen. — 13. Zuendeführung des Beweises von Satz IV. — 14. Die Winkelstetigkeit der Drehung am Rande. (Satz V). — 15. Bemerkungen über die Bedeutung des Satzes V. — 16. Der Randverzerrungssatz unter der Annahme der Winkelproportionalität. (Satz IV°).	
§ 4.	<i>Bemerkungen zum Lindelöfschen Satz</i>	111
	17. Der Lindelöfsche Satz. (Satz VI). — 18. Übertragung des Lindelöfschen Satzes auf L -Tangentenecken. — 19. Der Lindelöfsche Satz für halbseitige Konvergenz. (Satz VII). — 20. Folgerungen aus Satz VII. (Lemmata 1 und 2, Zusätze 1 und 2 zum Satz VII).	
§ 5.	<i>Relative Konformität bei der Eckenabbildung</i>	116
	21. Die Längentreue im Kleinen. (Satz VIII). — 22. Beweis von (21, 2) bzw. (21, 2°) für $\gamma = \gamma_1$. — 23. Der Fall $\gamma \cong \gamma_1$. — 24. Winkeltreue bei der Dreiecksabbildung.	

(Satz IX). — 25. Beweis von Satz IX. — 26. Seitenähnlichkeit bei der Dreiecksabbildung. (Satz X). — 27. Beweis von a) für eine Dreiecks Umgebung. — 28. Beweis des Satzes X. — 29. Eine Bemerkung zum Satz X.

- § 6. *Vereinzelte Korollare zum Randverzerrungssatz* 128
 30. Satz von der Winkelableitung. (Satz XI). — 31. Verschärfung einer Ungleichung von Herrn S. WARSCHAWSKI. — 32. Asymptotisches Verhalten der höheren Ableitungen von $f(z)$.

Teil II. Ergänzungssätze zum Randverzerrungssatz.

- § 7. *Erste Erweiterung des Satzes I.* 131
 33. Formulierung des Satzes XII. (Satz XII). — 34. Beweis des Satzes XII.
- § 8. *Zweite Erweiterung des Satzes I. (Durchschnittsstetigkeit)* 133
 35. Asymptotische Abschätzungen von $I_n(z)$. — 36. Punkte der Durchschnittsstetigkeit von $\chi(\theta)$. (Satz XIII). — 37. Beweis von Satz XIII. — 38. Die Schwankung von $f(z)$ (Satz XIV).
- § 9. *Dritte Erweiterung des Satzes I. (Durchschnittsendlichkeit)* 141
 39. Abschätzung von $f^{(n)}(z)$ für einen speziellen Fall der Durchschnittsendlichkeit. — 40. Berücksichtigung der Gleichmässigkeit und allgemeiner Fall der Durchschnittsendlichkeit. — 41. Einfluss der Variablentransformationen auf die Durchschnittsendlichkeit. (Satz XV, Zusatz zum Satz XV). — 42. Transformation von $z = 1$ auf $z = e^{i\vartheta_0}$. — 43. Dritte Erweiterung des Satzes I. (Satz XVI). — 44. Beweis des Satzes XVI. — 45. Zusätze zum Satz XVI. (Zusätze 1, 2, 3, 4).
- § 10. *Eine Bedingung für die Darstellbarkeit durch das Poissonsche Integral* . . . 155
 46. Formulierung der Sätze. (Sätze XVII, XVIII). — 47. Hilfssätze. (Lemmata 3, 4, 5). — 48. Beweis der Sätze XVII, XVIII. Anwendung des Spiegelungsprinzips. — 49. Der Hauptteil von $f_1(z)$ für $z = 1$.
- § 11. *Erweiterungen des Randverzerrungssatzes* 163
 50. Bemerkungen über die gleichmässige Gültigkeit des Satzes IV. — 51. Der Fall einer Durchschnittstangente. — 52. Spezialisierung des Satzes XVI für $n = 1$. — 53. Die verallgemeinerten Voraussetzungen. — 54. Anwendung des Satzes XVI. — 55. Der verallgemeinerte Randverzerrungssatz. (Satz XIX, Zusatz zum Satz XIX). — 56. Der Fall eines allgemeinen Gebietes G . — 57. Der Fall eines Gebietes G mit einer Ecke in z_0 (Satz XX). — 58. Gleichmässige und allseitige Stetigkeit der Drehung am Rande. — 59. Das Analogon von (14, 3) unter den Voraussetzungen des Satzes XIX. — 60. Das Analogon von (14, 1) unter den Voraussetzungen des Satzes XIX. — 61. Herleitung des Lindelöfschen Satzes. — 62. Grössenordnung von $f(z)$ und $f'(z)$ (Sätze XXI, XXI°).
- § 12. *Ergänzungssätze zum Randverzerrungssatz für Spitzenabbildungen* 177
 63. Allgemeine Charakterisierung der Resultate. — 64. Relative Schwankung der absoluten Verzerrung am Rande (Satz XXII). — 65. Ein Gegenbeispiel. — 66. Vorbereitende Transformation von G . — 67. $\arg f'(z)$ bei der Abbildung einer L -Tangentenspitze. — 68. Das Verzerrungsverhältnis im Fall von L -Tangentenspitzen (Satz XXIII).

Literaturzusammenstellung.¹

- L. AHLFORS, (1) Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta societatis scientiarum Fennicae, Nova series A, 1, Nr. 9 (1930) pp. 1—40.
- L. BIEBERBACH, (1) Über die Kreisabbildung von schlichten nahezu kreisförmigen Bereichen, Sitzber. der Berl. Akad., Math. phys. Klasse (1924) pp. 181—188. — (2) Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, 2-te Auflage (1932).
- M. BIERNACKI, (1) Sur l'allure de la représentation conforme dans le voisinage d'un point exceptionnel, Mathematica, Cluj, Vol. V (1931) pp. 1—6.
- P. BESSONOFF et M. LAVRENTIEFF, (1) Sur l'existence de la dérivée limite, Bull. de la soc. math. de France, Vol. 58, fasc. I—II, pp. 175—198.
- H. BOHR, (1) Über streckentreue und konforme Abbildung, Math. Ztschr, Bd. 1 (1918) pp. 403—420.
- C. CARATHÉODORY, (1) Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildung, Schwarz-Festschrift (1914), 19—41. — (2) Conformal Representation, Cambridge Tracts, (1932). — (3) Über Winkelderivierte von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzber. der Berl. Akad., Math. phys. Klasse (1929) pp. 39—54.
- I. G. VAN DER CORPUT, (1) Über die Winkelableitung bei konformer Abbildung, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35 (1932) pp. 330—334.
- A. HOBORSKI, (1) Intégration de l'équation différentielle aux dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, Prace matematyczno-fizyczne, Tom XX, (1909) pp. 1—143. (Polnisch).
- W. GROSS, (1) Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen, Math. Ztschr. Bd. 2 (1918) pp. 241—294. — (2) Zum Verhalten der konformen Abbildung am Rande, Math. Ztschr. Bd. 3 (1919) pp. 44—64.
- O. D. KELLOG, (1) Harmonic functions and Greens integral, Transact. of the Americ. Math. Society 13 (1912) pp. 109—132.
- E. LANDAU und G. VALIRON, (1) A deduction from Schwarz' Lemma, Journ. of the London Math. Society 4, March (1929) pp. 162—163.
- M. LAVRENTIEFF, (1) Sur la représentation conforme, C. R. 184 (1927₁) pp. 1407—1409. — (2) Siehe Bessonoff-Lavrentieff (1).
- L. LICHTENSTEIN, (1) Zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete, Arch. der Math. u. Phys. (3) 25, (1917) pp. 179—180. — (2) Ueber das Poissonsche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials, Crelles J. Bd. 141 (1912) pp. 12—42.
- E. LINDELÖF, (1) Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle, C. R. du quatrième congrès des math. scand. à Stockholm (1916) pp. 59—90.

¹ Die in diesem Verzeichnis aufgeführten Arbeiten werden im Text nur mit der Angabe des Verfassers und der Nummer der Arbeit zitiert.

- D. MENCHOFF, (1) Sur la représentation conforme des domaines plans, *Math. Ann.* Bd. 95 (1926) pp. 641—670.
- P. MONTEL, (1) Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques et leurs applications, Paris 1927.
- R. NEVANLINNA, (1) Remarques sur le lemme de Schwarz, *C. R.* 188 (1929₁), 1027—1029. — (2) Ueber beschränkte analytische Funktionen, *Commentationes in honorem Ernesti Leonardi Lindelöf*, Helsinki (1929) pp. 1—75.
- A. OSTROWSKI, (1) Ueber die Bedeutung der Jensenschen Formel für die komplexe Funktionentheorie, *Acta litterarum ac scientiarum, Reg. Univ. Hung. Francisco Josph. T. I, Fasc. II* (1923), pp. 80—87. — (2) Über quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen, *Acta math.*, Bd. 53 (1930) pp. 181—266.
- P. PAINLEVÉ, (1) Sur la théorie de la représentation conforme, *C. R.* 112, (1891₁) pp. 653—657.
- R. REMAK, (1) Ueber winkeltreue und streckentreue Abbildung an einem Punkte und in der Ebene, *Rend. del circolo math. di Palermo*, Bd. 38 (1914) pp. 191—246.
- M. RIESZ, (1) Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions avec quelques remarques sur les géométries non-euclidiennes, *Kungl. Fysiogr. Sällsk. Lund. För.* 1 (1931).
- L. SCHLESINGER, (1) Automorphe Funktionen, Berlin 1924.
- T. SHIMIZU, (1) On the Domain of Indetermination of a Regular Function, *Japanese Journ. of Math.* Vol. VII (1930) pp. 275—300.
- W. SEIDEL, (1) Ueber die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, *Math. Ann.* Bd. 104 (1931) pp. 183—243.
- V. SMIRNOFF, (1) Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, *Math. Ann.* Bd. 107 (1932) pp. 313—323.
- G. VALIRON, (1) Siehe Landau und Valiron (1). — (2) Sur un théorème de Julia, étendant le lemme de Schwarz, *Bull. des sciences math.* (1929) pp. 70—76. — (3) Sur la dérivée angulaire dans la représentation conforme, *Bull. des sciences math.* 56 (1932) pp. 208—211.
- C. VISSER, (1) Sur la dérivée angulaire, *C. R.* 193 (1931₂) pp. 1388—1389. — (2) Ueber beschränkte analytische Funktionen und die Randverhältnisse bei konformer Abbildung, *Math. Ztschr.* Bd. 107 (1933) pp. 28—39.
- S. WARSCHAWSKI, (1) Ueber das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, *Math. Ztschr.* Bd. 35 (1932) pp. 321—456. — (2) Ueber einen Satz von Herrn O. D. Kellog, *Nachr. d. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse* (1932) pp. 73—86.
- J. WOLFF, (1) Sur la dérivée angulaire dans la représentation conforme, *C. R.* 190 (1930₁) pp. 575—576. — (2) Sur la dérivée angulaire, *C. R.* 191 (1930₂) pp. 921—923. — (3) Sur la fonction harmonique conjuguée d'une fonction harmonique bornée, *C. R.* 197 (1933₂) pp. 1180—1182.
- S. ZAREMBA, (1) Solution générale du problème de Fourier, *Acad. d. Wissenschaften, Krakau, Math.-nat. Klasse* (1905) pp. 69—168.

Einleitung.

Man nennt eine Abbildung einer vollen Umgebung ω eines Punktes z_0 durch eine in ω stetige Funktion $w = f(z)$ *konform* im Punkte z_0 , falls für $z \rightarrow z_0$ der Quotient $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ einem von 0 verschiedenen endlichen Grenzwert zustrebt.² Und offenbar kann diese Definition ohne weiteres auch dann benutzt werden, wenn ω eine *Teilumgebung* von z_0 ist, z. B., falls z_0 ein Randpunkt eines einfach zusammenhängenden Gebietes ist, in dem $f(z)$ stetig ist. Geometrisch lässt sich der in der Forderung der Existenz eines Grenzwertes von $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ steckende Sachverhalt zum Teil folgendermassen präzisieren:

Sind z_1, z_2 zwei in ω gelegene, gegen z_0 konvergierende Punkte, so sind zunächst die Dreiecke $\mathcal{A}_z = z_0 z_1 z_2$, $\mathcal{A}_w = w_0 w_1 w_2$, wo w_0, w_1, w_2 die Bildpunkte von z_0, z_1, z_2 sind, *in der Grenze ähnlich*, d. h. es gilt

$$(a) \quad \frac{w_1 - w_0}{w_2 - w_0} \sim \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}, \quad \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_0} \sim \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_0},$$

und die Differenzen entsprechender Winkel von \mathcal{A}_z und \mathcal{A}_w konvergieren gegen 0, solange sowohl der Winkel α_0 von \mathcal{A}_z bei z_0 als auch $\pi - \alpha_0$ oberhalb positiver Schranken bleiben.

Damit ist aber der Tatbestand der Konformität unserer Abbildung in z_0 nicht ausgeschöpft, da die »Grenzähnlichkeit« der Dreiecke $\mathcal{A}_z, \mathcal{A}_w$ auch dann bestehen kann, wenn der Quotient $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ den Grenzwert 0 oder ∞ , oder überhaupt keinen Grenzwert besitzt.

Wir wollen daher unsere Abbildung von ω als *relativ konform* im Punkte z_0 bezeichnen, wenn die »Grenzähnlichkeit« infinitesimaler Dreiecke an z_0, w_0 im oben gekennzeichneten Umfang besteht. Existiert aber ein endlicher und von 0 verschiedener Grenzwert von $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, so soll die Abbildung von ω als *absolut konform* in z_0 bezeichnet werden.

Sind nun $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ bzw. $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ die Winkel der Dreiecke $\mathcal{A}_z, \mathcal{A}_w$ resp. bei $z_0, z_1, z_2; w_0, w_1, w_2$, so heisst die Abbildung von ω *winkeltreu* in z_0 , wenn

² Die gegenseitige Abhängigkeit verschiedener Teilforderungen, die in der Forderung der Konformität stecken, untersuchen REMAK (1), BOHR (1), MENCHOFF (1).

$$\beta_0 - \alpha_0 \rightarrow 0$$

gilt. Und es genügt ferner, wie man leicht einsieht, für die relative Konformität der Abbildung bereits, dass alle drei Differenzen $\beta_0 - \alpha_0$, $\beta_1 - \alpha_1$, $\beta_2 - \alpha_2$ gegen 0 konvergieren und die sechs Grössen α_0 , α_1 , α_2 , $\pi - \alpha_0$, $\pi - \alpha_1$, $\pi - \alpha_2$ oberhalb einer positiven Schranke bleiben.

Als das wichtigste Resultat der vorliegenden Arbeit sehen wir nun die Feststellung an, dass, wenn bei konformer Abbildung zweier Gebiete G_1 , G in der z - bzw. w -Ebene aufeinander die Abbildung in zwei einander entsprechenden Randpunkten z_0 bzw. w_0 winkeltreu ist, sie dort auch relativ konform ist, wenn z_1 und z_2 auf eine wesentlich innerhalb G_1 liegende Winkelumgebung von z_0 beschränkt werden, d. h. auf eine solche Umgebung, die in einer gleichfalls noch innerhalb G_1 liegenden Winkelumgebung von z_0 mit gleicher Winkelhalbierenden aber grösserer Winkelöffnung enthalten ist — wir sagen in diesem Falle, dass z_1 und z_2 in G_1 gegen z_0 im Winkel konvergieren.

Ist $w = f(z)$ die unsere Abbildung vermittelnde analytische Funktion, so erweist sich die Tatsache der relativen Konformität der Abbildung als eine Folge der Tatsache, dass das Argument der Ableitung $f'(z)$ der Abbildungsfunktion einen Grenzwert besitzt, wenn z aus G_1 im Winkel gegen z_0 konvergiert; allerdings muss dabei beim Beweis der relativen Konformität mit einiger Sorgfalt verfahren werden, da ja die Seiten des Dreiecks \mathcal{A}_z sehr wohl auch das Aussengebiet von G_1 durchsetzen können — wenn der Rand von G_1 in z_0 eine Ecke der Öffnung $> \pi$ aufweist.

Ist G_1 das Innere K_z des Einheitskreises, so hat Hr. CARATHÉODORY³ bewiesen, dass die konforme Abbildung von G auf K_z in z_0 winkeltreu ist, wenn der Rand von G im Bildpunkt w_0 von z_0 eine Tangente besitzt. Ist darüber hinaus bekannt, dass der Rand von G auch in einer Umgebung von w_0 mit einer sich stetig drehenden Tangente versehen ist, so hat Hr. E. LINDELÖF⁴ gezeigt, dass dann auch $\arg f'(z)$ einem festen Grenzwert zustrebt, wenn z aus K_z gegen z_0 konvergiert, und z darf dabei sogar allseitig aus K_z gegen z_0 konvergieren. Andererseits hat Hr. LINDELÖF l. c. die gleiche Tatsache auch unter einer etwas schwächeren Annahme über den Rand von G in der Nähe von w_0 bewiesen, unter der Annahme nämlich, dass alle Sehnenrichtungen in der Nähe

³ CARATHÉODORY (1), pp. 38—41; (2), pp. 91—93; vgl. ferner LINDELÖF (1), pp. 85—87, ausführlicher dargestellt nach H. FEHR und A. PLESSNER in SCHLESINGER (1), pp. 157—161; W. GROSS (1), pp. 273—281.

⁴ LINDELÖF (1), pp. 87—90.

von w_0 gegen die Tangentenrichtung in w_0 konvergieren — wir werden in diesem Falle sagen, dass unsere Kurve in w_0 eine *L-Tangente* besitzt.

Hr. LINDELÖF hat auch aus seinem Satze gefolgert, dass unter den Voraussetzungen seines Satzes eine in z_0 mündende und sonst in K_z verlaufende Kurve, die in z_0 mit einer stetigen Tangente mündet, in eine ebensolche Kurve der w -Ebene übergeht. Man kann leicht darüber hinaus beweisen, dass auch eine in K_z verlaufende und in z_0 mit einer *L-Tangente* mündende Kurve unter den Voraussetzungen des Lindelöfschen Satzes wiederum in eine in w_0 mit einer *L-Tangente* mündende Kurve übergeht. Ferner gilt die oben festgestellte Tatsache der relativen Konformität unter den Voraussetzungen des Lindelöfschen Satzes sogar, wenn z_1 und z_2 in K_z *allseitig* gegen z_0 gehen.

Und diese Tatsachen lassen sich auch auf den Fall ausdehnen, dass nur einer der in w_0 zusammenstossenden Randzweige von G dort eine *L-Tangente* besitzt. In diesem Falle bleibt die relative Konformität erhalten, wenn z_1 und z_2 beliebig nahe an den entsprechenden Bogen des Einheitskreises herankommen — wir sagen dann, sie streben *halbseitig* an diesem Bogen gegen z_0 .

Bekanntlich braucht $f(z)$ nicht einmal unter den Voraussetzungen des Lindelöfschen Satzes für $z \rightarrow z_0$ eine von 0 und ∞ verschiedene Ableitung zu besitzen.⁵ Der Frage nach der Existenz des Grenzwertes von $f'(z)$, sowie von $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ wurde in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit gewidmet.⁶ Es handelt sich in diesen Arbeiten — bis auf die Arbeiten von LAVRENTIEFF, WARSCHAWSKI und WOLFF — um die Frage nach der Existenz der *Winkelderivierten* von $f(z)$, d. h. des Grenzwertes $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ für aus K_z gegen z_0 im Winkel strebendes z . Und es wurden hierfür verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt.

Für die relative Konformität der Abbildung in z_0 stellt sich aber, wie oben erwähnt, bereits die Winkeltreue in z_0 als notwendig und hinreichend heraus. Für die Winkeltreue der Abbildung ist andererseits im Falle allgemeiner Gebiete G, G_1 auf jeden Fall hinreichend, wenn G, G_1 in den betreffenden Randpunkten

⁵ Dies zeigt KELLOG (1), pp. 122 durch Betrachtung der Abbildungsfunktion $w = z \log z$.

⁶ Vgl. WOLFF (1), (2), (3), (4); CARATHÉODORY (3), sowie (2), pp. 94—97; LANDAU und VALIRON (1), VALIRON (2) und (3); LAVRENTIEFF (1) und (2); AHLFORS (1); WARSCHAWSKI (1) und (2); SEIDEL (1); VISSER (1), (2); M. RIESZ (1); VAN DER CORPUT (1); SMIRNOFF (1); R. NEVANLINNA (1) und (2).

Für die ersten Ansätze in dieser Richtung vgl. man PAINLEVÉ (1) sowie LICHTENSTEIN (1).

Ecken gleicher, von Null verschiedener Öffnung besitzen. Haben allgemeiner die Gebiete G, G_1 in w_0 bzw. z_0 Ecken von den Öffnungen γ, γ_1 , wo $\gamma > 0, \gamma_1 > 0$ ist, so ist, wie Hr. CARATHÉODORY l. c. bewiesen hat, die Abbildung in z_0 *winkelproportional*, d. h. zwei von z_0 ausgehende und ins Innere von G_1 weisende Linien-elemente, die in G_1 einen Winkel α miteinander bilden, gehen in zwei Linien-elemente über, die in G den Winkel $\frac{\gamma}{\gamma_1} \alpha$ einschliessen. In diesem allgemeineren Falle bleibt für $\gamma \neq \gamma_1$ die Tatsache der relativen Konformität natürlich nicht mehr richtig, es gilt aber auch in diesem Falle die Relation

$$(b) \quad \frac{w_1 - w_0}{w_2 - w_0} \sim \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

wenn das Verhältnis

$$(c) \quad \frac{|z_2 - z_0|}{|z_1 - z_0|}$$

zwischen festen positiven Schranken bleibt. Für $\arg f'(z)$ aber gilt im allgemeinen Falle, dass der Ausdruck

$$(d) \quad \arg f'(z) - \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) \arg (z - z_0)$$

einem festen Grenzwert zustrebt, wenn z aus G_1 im Winkel gegen z_0 konvergiert. Aus (b) folgt ferner die Relation

$$\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)} \rightarrow 1.$$

Besitzen aber die vier in z_0 und w_0 zusammenstossenden Randstücke von G_1 bzw. G dort L -Tangenten, so gilt (b) und die über (d) angegebene Tatsache auch, wenn z_1, z_2 bzw. z aus G_1 *allseitig* gegen z_0 streben. Allgemeiner, ist C_1 einer der beiden in z_0 zusammenstossenden Randzweige von G_1 , C der entsprechende Randzweig von G und besitzen C_1 und C in z_0 bzw. w_0 L -Tangenten, so bleiben die obigen Tatsachen richtig, wenn z_1, z_2 bzw. z *halbseitig* an C_1 gegen z_0 streben.

Die Existenz des Grenzwertes von (d) erschliessen wir nun aus einem Grenzwertsatz, den wir als den *Randverzerrungssatz* bezeichnen möchten. Er besagt im allgemeinen Falle, wenn $w = f(z)$ G_1 auf G abbildet, wo G_1 und G in den

einander entsprechenden Randpunkten z_0 bzw. w_0 Ecken von den Öffnungen γ_1, γ besitzen, dass

$$(e) \quad \frac{f'(z)}{\frac{f(z) - w_0}{z - z_0}} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1}$$

gilt, wenn z im Winkel gegen z_0 konvergiert, wobei $\gamma_1 > 0, \gamma \geq 0$ vorausgesetzt wird. Und diese Formel bleibt auch dann richtig, wenn über die Gebiete G_1 und G nur vorausgesetzt wird, dass die konforme Abbildung von G_1 auf G im Punkte z_0 winkelproportional mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{\gamma}{\gamma_1} > 0$ ist.⁷

Der Randverzerrungssatz ergibt sich nun seinerseits sehr leicht aus einem Satz von LICHTENSTEIN über die ersten Ableitungen des Poissonschen Integrals, wonach, wenn $P(r, \vartheta)$ der Wert eines Poissonschen Integrals im Innern des Einheitskreises E_z ist,

$$(f) \quad P'_r(r, \vartheta) = o\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad P'_\vartheta(r, \vartheta) = o\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

gilt, wenn der Punkt (r, ϑ) im Winkel gegen einen Stetigkeitspunkt des Integranden des Poissonschen Integrals strebt.⁸

Nachdem in § 1 der vorliegenden Abhandlung einige Bezeichnungen und Definitionen eingeführt werden, geben wir in § 2 einen neuen Beweis des Lichtensteinschen Satzes, wobei sich dieser Satz in einer insofern schärferen Fassung ergibt, als die Formeln (f) sogar für den Fall, dass (r, ϑ) *allseitig* aus dem Innern von E_z gegen einen Stetigkeitspunkt des Integranden konvergiert, nachgewiesen werden. Daraus wird nun im § 3 der Randverzerrungssatz (Sätze IV, IV^o) hergeleitet, und sodann die oben über den Ausdruck (d) angegebene Tatsache gefolgert (Satz V).

Der § 4 ist dem Lindelöfschen Satz gewidmet. Es werden verschiedene Folgerungen aus diesem Satz entwickelt, namentlich auch für den Fall der *halbseitigen Konvergenz*. Im § 5 wird für $\gamma = \gamma_1$ die relative Konformität der Abbildung bewiesen, und es wird für $\gamma \geq \gamma_1$ die Relation (b) hergeleitet. (Sätze VIII—X). § 6 bringt endlich einige vereinzelte Folgerungen aus den bisherigen Ergebnissen;

⁷ In zwei später im § 3 genau angegebenen Spezialfällen findet sich (e) bei VISSER (2).

⁸ LICHTENSTEIN (2), pp. 20—22. Wie in LICHTENSTEIN (1), p. 22 angegeben wird, findet sich der Satz für eine durchweg stetige Randwertfunktion bereits bei ZAREMBA (1) sowie HOBORSKI (1). In unserer Darstellung werden allerdings die Relationen (f) und ähnliche Relationen als auf die zur Potentialfunktion P gehörende analytische Funktion bezügliche Relationen formuliert.

so gestattet uns die Relation (b) zwei wichtige von Herrn S. WARSCHAWSKI in der ersten der oben (Fussnote 6) zitierten Abhandlungen hergeleitete Ungleichungen in einer bestimmten Richtung zu verschärfen. Ebenso ergeben sich Grenzrelationen für höhere Ableitungen von $f(z)$, wenn z im Winkel aus G_1 gegen z_0 konvergiert, wie z. B. die folgende (32, 3):

$$(z - z_0)^\nu \frac{f^{(\nu)}(z)}{f(z) - f(z_0)} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) \cdots \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - \nu + 1 \right), \quad \nu > 0.$$

Die im § 3 gegebene Herleitung des Randverzerrungssatzes gestattet noch nicht, den Lindelöfschen Satz mitherzuleiten. Hierzu ist es vielmehr erst nötig, den Randverzerrungssatz auf den Fall auszudehnen, dass die Ränder der abzubildenden Gebiete zwar nicht mehr notwendig Tangenten in z_0 bzw. w_0 besitzen, dass aber die Sehnenrichtungen in der Nähe von z_0 bzw. w_0 in relativ schmalen Winkelintervallen oszillieren. Die hier vorgenommene Erweiterung des Begriffes der Tangente zu demjenigen der *Grenzstütze einer Kurve* ist ganz analog zu der in der Theorie der reellen Funktionen vorgenommenen Erweiterung des Begriffes der Ableitung zu demjenigen einer derivierten Zahl.⁹ Wenn die Grenzstützen der Ränder von G und G_1 in w_0, z_0 von den Schenkeln gewisser Winkel mit den Öffnungen γ, γ_1 relativ wenig abweichen, weichen auch die Unbestimmtheitsgrenzen der linken Seite von (e) nur wenig von $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ ab. Aus dieser Tatsache, verbunden mit einer auf die Gleichmässigkeit der Grenzrelationen bezüglichen Ergänzung (verallgemeinerter Randverzerrungssatz, Satz XIX) lässt sich sodann der Lindelöfsche Satz unmittelbar herleiten (Nr. 61).

Zur Herleitung des verallgemeinerten Randverzerrungssatzes ist nun eine entsprechende Erweiterung des Lichtensteinschen Satzes (Satz I) vorzunehmen. Wir nehmen sie in drei Schritten vor. Das allgemeinste Resultat wird im Satze XVI nebst Zusätzen zu diesem Satz zusammengefasst. Auch ein Teil dieses verallgemeinerten Resultats ist bereits in der oben (Fussnote 8) zitierten Lichtensteinschen Abhandlung enthalten, nämlich der Fall der Durchschnittsstetigkeit von $\chi(\vartheta)$, (Satz XIII, für $n = 1$).

Wir haben allerdings in den §§ 7—9, in denen diese Erweiterungen des Lichtensteinschen Satzes vorgenommen werden, die Entwicklungen zum Teil weiter durchgeführt als für den unmittelbaren Zweck dieser Abhandlung notwendig

⁹ Implizite findet sich der Begriff der Grenzstützen bereits bei W. GROSS (2), pp. 276 ff. Gross spricht an der betreffenden Stelle (p. 278 unten) von »Richtungsgrenzen der Berandung».

gewesen wäre, um Wiederholungen bei späteren Untersuchungen zu vermeiden. Es sei hier noch auf den Satz XIV sowie den Zusatz 3 zum Satze XVI verwiesen, in denen eine, wie es scheint, bisher unbemerkt gebliebene Schwankungseigenschaft der konjugierten Funktion zum Poissonschen Potential angegeben wird. Der verallgemeinerte Randverzerrungssatz, sowie die sich daran anschliessenden Entwicklungen finden sich im § 11 der Abhandlung.

Der § 12 ist aber der Betrachtung des Falles $\gamma = 0$ (Spitzenabbildung) gewidmet. Die vorhergehenden Entwicklungen sind nämlich nur zum Teil für $\gamma = 0$ gültig, während die weiteren an den Randverzerrungssatz anschliessenden Betrachtungen nicht mehr in gleicher Weise durchgeführt werden können. Trotzdem bleiben einige Ergebnisse auch für $\gamma = 0$ richtig, einige andere allerdings erst, wenn vorausgesetzt wird, dass die in der Spitze zusammenstossenden Randzweige dort L -Tangenten besitzen. Die Beweise dieser Tatsachen benutzen zum Teil das in § 10 entwickelte Kriterium für die Darstellbarkeit eines Potentials durch das Poissonsche Integral, ein Kriterium, das hier noch besonders hervorgehoben sein möge, da in ihm ein neues und für manche Zwecke wichtiges Moment — Beschränktheit gewisser Flächenmittelwerte — benutzt wird.

Zum Schluss dieser Einleitung sei noch besonders auf eine kürzlich erschienene Abhandlung von Herrn C. VISSER¹⁰ hingewiesen, die einige Berührungspunkte mit der vorliegenden Abhandlung aufweist, worauf ich allerdings erst unmittelbar vor dem Abschluss des Manuskripts aufmerksam wurde. In der Abhandlung von Herrn Visser findet sich nämlich der Randverzerrungssatz für den Fall, dass G_1 mit dem Innern des Einheitskreises identisch und $\gamma = \pi$ ist, ferner für den Fall, dass G_1 wiederum mit dem Innern des Einheitskreises identisch ist und die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ in z_0 eine endliche und von 0 verschiedene Winkelderivierte besitzt, so dass also die Abbildung im Punkte z_0 absolut konform bei Annäherung im Winkel ist. Aus seinem Fall des Randverzerrungssatzes hat Herr VISSER den Satz XI dieser Abhandlung für den entsprechenden Fall gefolgert. Die auf $\arg f'(z)$ bezüglichen Folgerungen und die sich daran anschliessenden Entwicklungen enthält dagegen die Vissersche Abhandlung nicht. Ferner ergibt sich aus seinen Betrachtungen die obige Relation (b), allerdings unter der recht speziellen Annahme, dass die Punkte z_1 und z_2 auf einem zu z_0 symmetrischen Orthogonalkreise zum Einheitskreis der z -Ebene liegen.

¹⁰ VISSER (2).

Endlich hängen auch die allgemeinen analytischen Hilfssätze, die Herr VISSER benutzt, naturgemäss mit unseren Entwicklungen über den Lichtensteinschen Satz zusammen. An den betreffenden Stellen des Textes wird darauf jedesmal in den Fussnoten ausdrücklich hingewiesen werden.

Teil I. Der Hauptfall des Randverzerrungssatzes.

§ 1. Bezeichnungen und Definitionen.

1. *Gleichmässigkeit bei $\overline{\text{Lim}}$ und $\underline{\text{Lim}}$.* Wir werden im Folgenden vom Begriff der Gleichmässigkeit nicht nur bei der Konvergenz Gebrauch machen, sondern auch vom analogen Begriff bei Gleichheits- und Ungleichheitsbeziehungen, in denen neben den Grenzwerten auch $\overline{\text{Lim}}$ und $\underline{\text{Lim}}$ vorkommen. Wenn wir z. B. von der Relation

$$\underline{\text{Lim}}_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathcal{D}) \leq \varphi(\mathcal{D})$$

sagen, dass sie auf einer \mathcal{D} -Menge M gleichmässige gilt, so bedeutet dies, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $N(\varepsilon) > 0$ angegeben werden kann, dass für alle $n > N$ und für alle \mathcal{D} auf M

$$f_n(\mathcal{D}) \leq \varphi(\mathcal{D}) + \varepsilon$$

gilt.

2. *Konvergenz aus dem Innern des Einheitskreises.* Unter E werden wir in allen weiteren Ausführungen die Peripherie des Einheitskreises $|z| = 1$ verstehen; handelt es sich dabei um den Einheitskreis in der z - bzw. w -Ebene u. s. w., so werden wir, wenn es sich aus dem Zusammenhang nicht unmittelbar ergibt, auf welche Ebene E zu beziehen ist, die Bezeichnung E_z , bzw. E_w u. s. w. benutzen. Ebenso verstehen wir unter K das Innere des Einheitskreises und schreiben dafür, je nach der Ebene, in der K zu betrachten ist, K_z , K_w u. s. w.

Ist die Variable z auf das Innere von E_z beschränkt und ist $e^{i\vartheta_0}$ ein Punkt von E_z , so sagen wir, z konvergiere »im Winkel« gegen $e^{i\vartheta_0}$, wenn z gegen $e^{i\vartheta_0}$ strebt, dabei aber zwischen zwei vom Punkte $e^{i\vartheta_0}$ ausgehenden Sehnen von E_z bleibt. Wird aber das gegen $e^{i\vartheta_0}$ aus dem Innern von E_z konvergierende z keinerlei derartigen Bedingungen unterworfen, so sagen wir, z konvergiere »allseitig« gegen $e^{i\vartheta_0}$.

Endlich werden wir sagen, z konvergiere gegen $e^{i\vartheta_0}$ »halbseitig«, genauer *halbseitig an einem* in $e^{i\vartheta_0}$ endenden Kreisbogen C von E_z , wenn z dabei zwischen

dem Bogen C und einer von $e^{i\vartheta_0}$ ausgehenden Sehne von E_z bleibt. Analoges gilt für allgemeinere Gebiete.

3. *Konvergenz aus dem Innern eines allgemeinen Gebietes.* Es bestehe der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes G in der Umgebung eines Randpunktes P aus einem freien Jordanbogen. Es seien S_1, S_2 zwei von P ausgehende geradlinige Strecken, die bis auf P in G liegen. Es sei \mathcal{A} ein Dreieck mit der Spitze in P , das, bis auf den Punkt P , in G und zwar im Winkel zwischen den Strecken S_1, S_2 liegt, so dass es mit diesen Strecken nur den Punkt P gemeinsam hat. Ein solches Dreieck bezeichnen wir als eine *Dreiecks Umgebung* von P innerhalb G . Eine Vereinigungsmenge von endlich vielen Dreiecks umgebungen von P innerhalb G bezeichnen wir als eine *Winkelumgebung* von P innerhalb G . Strebt ein Punkt z so gegen P , dass es dabei in einer Winkel- bzw. Dreiecks umgebung von P innerhalb G bleibt, so sagen wir, z strebe aus dem Innern von G *im Winkel* bzw. *im Dreieck* gegen P . Ist aber $z \rightarrow P$ und keinerlei solchen Bedingungen unterworfen, bis auf die Forderung, dass z in G bleibt, so sagen wir, z konvergiere aus dem Innern von G *allseitig* gegen P .

Es sei endlich C ein in P mündender Randbogen von G . Es seien R_1, R_2 zwei von P ausgehende und bis auf P innerhalb G liegende Strecken. Es möge R_1 zwischen R_2 und C liegen. Man verbinde einen inneren Punkt von R_1 mit einem von P verschiedenen Punkt von C durch einen Jordanbogen, der bis auf seinen Schnittpunkt mit C ganz in G liegt. Durch diesen Jordanbogen wird ein Teilgebiet von G abgegrenzt, das zwischen R_1 und C liegt und P als Randpunkt besitzt. Ein solches Teilgebiet bezeichnen wir als eine *an C liegende halbseitige Umgebung* von P innerhalb G . Konvergiert nun ein Punkt z gegen P und bleibt er dabei in einer solchen halbseitigen Umgebung von P , so werden wir sagen, er konvergiere aus dem Innern von G *halbseitig* am Randbogen C gegen P .

4. *L-Tangenten.* Es sei Γ ($z = z(t)$, $0 \leq t \leq 1$) ein Jordanbogen. Wir sagen, er besitze im Punkte $t = 0$ eine Tangente (eigentlich Halbtangente) τ , wenn jedem noch so schmalen Winkel um den Halbstrahl τ mit der Spitze in $z(0)$ ein solches $\delta > 0$ zugeordnet werden kann, dass alle Punkte $z(t)$ mit $0 < t < \delta$ in diesem Winkel liegen. Lässt sich jedem positiven ε ein positives $\delta = \delta(\varepsilon)$ derart zuordnen, dass die Richtungen sämtlicher Sehnen des Teilbogens $0 \leq t \leq \delta$ von Γ mit der Richtung τ einen Winkel $\leq \varepsilon$ einschliessen, so werden wir sagen, Γ besitze im Punkte $t = 0$ eine *L-Tangente*.¹¹

¹¹ Der Begriff ohne Benennung kommt anscheinend zuerst bei LINDELÖF (1), p. 87 unten vor. CARATHÉODORY (2), p. 94 sagt, die Kurve sei an den betreffenden Stelle *glatt* (smooth).

Wird ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in $z(o)$ gelegt, in dem der Richtungstangens θ_0 von τ endlich ist und das in $z(o)$ einmündende Stück von Γ »zuletzt« etwa in der rechten Halbebene liegt, so besitzt Γ in der Umgebung von $z(o)$ die Gleichung $y = \varphi(x)$, und unsere Bedingung für die L -Tangente läuft dann auf die Bedingung hinaus, dass

$$(4, 1) \quad \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2}$$

gegen θ_0 konvergiert, wenn x_1 und x_2 unabhängig voneinander, aber ohne zusammenzufallen, gegen o abnehmen.

Man kann diese Bedingung noch anders fassen, wenn man den in der Theorie der reellen Funktionen gebräuchlichen Begriff der *derivierten Zahlen* benutzt. Nach einem Satz von DU BOIS-REYMOND fällt nämlich das Wertintervall des Differenzenquotienten (4, 1) für $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ mit dem kleinsten Intervall zusammen, das sämtliche Werte irgendeiner der vier derivierten Zahlen von $\varphi(x)$ für $a \leq x \leq b$ enthält. Daher läuft unsere Definition für die L -Tangente darauf hinaus, dass irgend eine (und damit jede) der vier derivierten Zahlen von $\varphi(x)$ für $x \downarrow o$ gegen θ_0 strebt.

5. *Grenzstützen.* Um unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems die entsprechende Bedingung formulieren zu können, führen wir den Begriff der *Grenzstützen* ein. Es sei Γ ($z = z(t)$) ein Jordanbogen, und man betrachte für $t > t_0$ die von $z(t_0)$ nach $z(t)$ gezogenen gerichteten Sehnen, deren analytische Richtungen¹² sich für $t > t_0$ stetig mit t ändern und nach Festlegung einer von diesen Richtungen für jedes $t > t_0$ eindeutig bestimmt sind. Wird die analytische Richtung der Sehne von $z(t_0)$ nach $z(t)$ mit $\theta(t)$ bezeichnet, und ist

$$\theta^+ = \overline{\text{Lim}}_{t \downarrow t_0} \theta(t), \quad \theta^- = \underline{\text{Lim}}_{t \downarrow t_0} \theta(t),$$

so nennen wir, falls θ^+ , θ^- endlich sind, die von $z(t_0)$ ausgehenden Halbstrahlen mit den analytischen Richtungen θ^+ , θ^- die *rechtsseitigen Grenzstützen* des entsprechenden in $z(t_0)$ endenden Bogens und den Winkel zwischen den analytischen

¹² Unter der *analytischen Richtung* eines Vektors verstehen wir seinen Winkel mit einer festen Richtung, wobei aber zwei um ein von o verschiedenes Vielfaches von 2π verschiedene Winkel *verschiedene* analytische Richtungen festsetzen — die Richtungen werden also eigentlich auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus aufgetragen.

Richtungen θ^+ , θ^- den (rechtsseitigen) *Stützenschwankungswinkel* in $z(t_0)$. Er ist also gleich $\theta^+ - \theta^-$.

Offenbar kann man θ^+ , θ^- auch anders definieren. Man denke sich zwei Kurvenbögen C^+ , C^- , die in $z(t_0)$ einmünden und dort bestimmte Tangenten besitzen. Haben diese Tangenten die analytischen Richtungen $\theta^+ + \varepsilon$, $\theta^- - \varepsilon_1$, mit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, so liegt »zwischen« C^+ , C^- das gesamte Stück von Γ mit $t_0 < t < t_0 + \delta$ für hinreichend kleine δ . Sind aber die Tangentenrichtungen von C^+ , C^- etwa $\theta^+ - \varepsilon$, $\theta^- + \varepsilon_1$, mit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, so gibt es für jedes noch so kleine positive δ Punkte $z(t)$ mit $t_0 < t < t_0 + \delta$, die nicht »zwischen« C^+ , C^- liegen. Und es ist unmittelbar klar, wie die entsprechenden Formulierungen lauten, wenn $\theta^+ = +\infty$ oder $\theta^- = -\infty$ ist. Ganz analog werden die *linksseitigen Grenzstützen* und der linksseitige *Stützenschwankungswinkel* in $z(t_0)$ mit Hilfe des zweiten in $z(t_0)$ mündenden Bogens definiert.

Aus dem Gesagten geht aber nunmehr unmittelbar hervor, dass bei einer konformen Abbildung einer Umgebung von $z(t_0)$ auch die Grenzstützen von Γ um den gleichen Winkel gedreht werden, wie die direkt vorgegebenen Linienelemente, und daher insbesondere die beiderseitigen *Stützenschwankungswinkel* unverändert bleiben. Und das Gleiche gilt natürlich auch dann, wenn nur eine Teilumgebung von $z(t_0)$ winkeltreu in $z(t_0)$ abgebildet wird, wie dies z. B. bei konformer Abbildung in der Nähe des Randes der Fall sein kann, sofern die beiden Grenzstützen des betrachteten Teilbogens von Γ in der entsprechenden Winkelumgebung liegen. Endlich ist es klar, wie diese Formulierungen abzuändern sind, wenn die in Frage kommenden Abbildungen nicht mehr winkeltreu, sondern nur *winkelproportional* sind. Auch dann werden die Richtungen der Grenzstützen in gleicher Weise transformiert, wie die Richtungen gewöhnlicher Tangenten, und die *Stützenschwankungswinkel* mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor multipliziert, wie die Winkel zwischen gewöhnlichen Linienelementen.

6. *Eckendefinition im Fall der allgemeinen Berandung.* Man pflegt bei der Betrachtung der Tangente oder Ecke in einem Randpunkt eines einfach zusammenhängenden Gebietes G in der Regel stillschweigend vorauszusetzen, dass der Rand des Gebietes in der Umgebung des betreffenden Randpunktes einen Jordanbogen bildet. Man kann nun mit Hilfe der Theorie der Randelemente (der Carathéodoryschen Primenden) eine Parameterdarstellung für den Rand von G erhalten, an Hand deren in vielen Fällen sowohl der Begriff der Tangente und

Ecke als auch der Begriff der Grenzstützen verallgemeinert werden kann.¹⁴ Es mag indessen für das Folgende genügen, wenn wir eine auf einen hinreichend allgemeinen Fall anwendbare Definition einer Ecke geben.

Wir werden sagen, der Rand von G bilde in einem Randpunkt P eine Ecke, wenn es zwei von P ausgehende Halbstrahlen τ_1, τ_2 gibt, derart, dass wenn man beliebig schmale Winkel um diese Halbstrahlen bildet, alle Randpunkte von G , die hinreichend nahe bei P liegen, sich auf diese beiden Winkel verteilen. Die Halbstrahlen τ_1, τ_2 werden als die beiden *Halbtangenten* an den Rand von G im Punkte P bezeichnet. Hat einer der beiden Winkel, die durch τ_1 und τ_2 gebildet werden, die Öffnung $\gamma\pi$ und die Eigenschaft, dass es in ihm Kreissektoren mit der Spitze in P gibt, deren Winkel bei P beliebig nahe an den Winkel zwischen τ_1 und τ_2 herankommen und deren Inneres ganz in G liegt, so werden wir sagen, dass der Rand von G von der betreffenden Seite eine Ecke von der inneren Öffnung $\gamma\pi$ besitzt. Es kann natürlich auch der andere Winkel $2\pi - \gamma\pi$ zugleich ein innerer Winkel »von der anderen Seite« sein, wenn der Punkt P ein Doppelpunkt des Randes ist. γ könnte allerdings auch den Wert 0 haben; in diesem Falle ist der Punkt P von der betreffenden Seite längs eines Jordanbogens L erreichbar, es gibt aber kein Dreieck mit der Spitze in P , dessen Inneres ganz in G liegt und zugleich beliebig an P benachbarte Punkte von L enthält.

§ 2. Erste Ableitung der Poissondarstellung einer analytischen Funktion.

7. *Verhalten in einem Stetigkeitspunkt der Randfunktion. Satz I.* Es sei $\chi(\vartheta)$ eine im Intervall $(-\pi, \pi)$ beschränkte messbare Funktion, die für $\vartheta = \vartheta_0$ stetig ist. Denkt man sich $\chi(\vartheta)$ durch die Forderung der Periodizität mit der Periode 2π für alle Werte von ϑ fortgesetzt, so möge

$$(7, 1) \quad |\chi(\vartheta) - \chi(\vartheta_0)| < \lambda(\vartheta - \vartheta_0)$$

sein, wo die gerade Funktion $\lambda(x)$ zwischen 0 und π monoton ist, für $x \downarrow 0$ $\lambda(x) \downarrow 0$ gilt, $\lambda(\pi) = C$ und für $x > \pi$ $\lambda(x) = C$ ist. — Offenbar kann für unser $\chi(\vartheta)$ stets eine solche Funktion $\lambda(x)$ gefunden und insbesondere so gewählt werden, dass C gleich der oberen Grenze von $|\chi(\vartheta) - \chi(\vartheta_0)|$ ist. — Bildet man mit Hilfe des Poissonschen Integrals eine zu $\chi(\vartheta)$ gehörende analytische Funktion

¹⁴ Vgl. hierzu W. GROSS (1), pp. 276, 277.

$$(7, 2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta + ic,$$

wo c eine reelle Konstante ist, so gilt für die Ableitung

$$(7, 3) \quad f'(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta} - z)^2} \chi(\vartheta) d\vartheta$$

von $f(z)$, wenn z allseitig aus K_z gegen $e^{i\vartheta_0}$ strebt:

$$(7, 4) \quad (1 - |z|)f'(z) \rightarrow 0,$$

und darüber hinaus, $z = r e^{i(\varphi + \vartheta_0)}$, $\pi \geq \varphi \geq -\pi$ gesetzt,

$$(7, 5) \quad (1 - r)|f'(z)| < \lambda((1 - r)k + |\varphi|) + 3 \frac{C}{k}, \quad 1 > r > \frac{\pi}{6},$$

wo für k eine beliebige Zahl > 1 eingesetzt werden kann.

8. *Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $\vartheta_0 = 0$ vorausgesetzt werden. Aus (7, 3) folgt, da man $\chi(\vartheta)$ durch $\chi(\vartheta) - \chi(\vartheta_0)$ ersetzen kann,

$$(8, 1) \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda(\vartheta) d\vartheta}{|z - e^{i\vartheta}|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\lambda(\vartheta + \varphi) d\vartheta}{r^2 - 2r \cos \vartheta + 1}.$$

Hier ist der Nenner gleich

$$(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \geq (1 - r)^2 + \frac{4}{\pi^2} r \vartheta^2,$$

so dass nach der Einführung der neuen Integrationsvariablen $x = \frac{2\vartheta \sqrt{r}}{\pi(1-r)}$ aus (8, 1)

$$|f'(z)| < \frac{1}{2(1-r)\sqrt{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\left(\frac{\pi x(1-r)}{2\sqrt{r}} + \varphi\right)}{1 + x^2} dx$$

folgt. Setzen wir zur Abkürzung $1 - r = \rho$ und beachten, dass $\lambda(x)$ gerade und monoton ist, so folgt weiter

$$(8, 2) \quad \sqrt{r} \varrho |f'(z)| \leq \int_0^{\infty} \lambda \left(\frac{\pi \varrho x}{2 \sqrt{r}} + |\varphi| \right) \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^K + \int_K^{\infty},$$

wo K vorläufig beliebig, aber > 1 sei. Hier gilt aber, wegen der Monotonie von $\lambda(x)$:

$$\int_0^K \leq \lambda \left(\frac{\pi \varrho K}{2 \sqrt{r}} + |\varphi| \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} K,$$

$$\int_K^{\infty} \leq C \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} K \right) = C \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{K}.$$

Nun gilt für $0 < x < 1$: $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x < x$. Daher ergibt sich schliesslich für $\varrho |f'(z)|$ aus (8, 2) die Abschätzung durch

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\pi}{2} \lambda \left(\frac{\pi \varrho K}{2 \sqrt{r}} + |\varphi| \right) + \frac{C}{\sqrt{r} K},$$

oder, wenn $r > \frac{\pi}{6}$ vorausgesetzt und $K = \frac{2 \sqrt{r} k}{\pi}$, $k > 1$, gesetzt wird, (7, 5),

w. z. b. w.

9. *Bemerkungen zum Satz I.* Je nach dem Typus der Funktion $\lambda(x)$ kann man k in (7, 5) verschieden spezialisieren. Ist z. B. $\lambda(x) \leq C|x|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, so setze man $k = \varrho^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$ und es ergibt sich

$$\varrho |f'(z)| \leq \lambda \left(\varrho^{\frac{1}{1+\alpha}} + |\varphi| \right) + 3 C \varrho^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad \varrho \leq 1 - \frac{\pi}{6}.$$

Der Satz I liefert eine Abschätzung von $f'(z)$, sobald $f(z)$ sich in der Form (7, 2) darstellen lässt. Dies ist z. B. bekanntlich immer der Fall, wenn $\Re f(z)$ in K_z *absolut beschränkt* ist. Ist von einer Funktion $f(z)$ bekannt, dass sie in K_z regulär und dass ihr Realteil auf $K_z + E_z$ *stetig* ist, so folgt daraus erst recht, wenn $\Re f(e^{i\vartheta}) = \chi(\vartheta)$ gesetzt wird, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta + ic$$

gilt, wo c eine reelle Konstante ist. Daher gilt für jede solche Funktion die Formel (7, 4) für allseitig aus K_z gegen E_z konvergierendes z .

10. Die Hilfsfunktion $g_0(z)$. Satz II. Wird unter $g_0(z) = \lg \frac{1+z}{1-z}$ für $|z| < 1$ diejenige Bestimmung des Logarithmus verstanden, die für $z = 0$ verschwindet, so gilt

$$(10, 1) \quad |\Im g_0(z)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{für } |z| < 1,$$

$$(10, 2) \quad \Im g_0(z) - \psi \rightarrow 0 \quad \text{für } |z| < 1, z \rightarrow 1,$$

$$(10, 3) \quad \Im g_0(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < \vartheta < \pi, \\ -\frac{\pi}{2}, & 0 > \vartheta > -\pi, \end{cases}$$

wo $\psi = -\arg(1-z)$ ist mit $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Ferner ist $\frac{1}{i}g_0(z)$ durch das Poissonsche Integral (7, 2) mit $\Im g_0(e^{i\vartheta})$ als Belegungsfunktion $\chi(\vartheta)$ darstellbar. Endlich gilt:

$$(10, 4) \quad \frac{g_0(z)}{-\lg|1-z|} \rightarrow 1; \quad (1-z)^n g_0^{(n)}(z) \rightarrow (n-1)!,$$

wenn z aus dem Innern von E_z allseitig gegen $z = 1$ konvergiert.

(10, 1), (10, 3) ergeben sich daraus, dass $w = \frac{1+z}{1-z}$ das Innere von E_z auf die Halbebene $\Re w > 0$ so abbildet, dass dabei $z = -1$ in $w = 0$ übergeht. (10, 2) folgt aus

$$\arg \frac{1+z}{1-z} = \arg(1+z) + \psi \quad \text{wegen } \arg(1+z) = o(1)$$

für $z \rightarrow 1$. (10, 4) endlich ergibt sich direkt aus

$$g_0^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!}{(1-z)^n} + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+z)^n}.$$

Satz III. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen von Satz II gilt, $z = re^{i\vartheta}$ gesetzt, für $0 \leq r < 1$ und $\vartheta \rightarrow 0$

$$(10, 5) \quad \frac{1-|z|}{|1-z|} = \cos \psi + O(\vartheta),$$

$$(10, 6) \quad 1 - |z| = (1 - z)e^{i\psi} \cos \psi + O(\vartheta).$$

Denn wendet man den Sinussatz auf das Dreieck $ze^{i\vartheta}1$ der Fig. 1 an, so ergibt sich

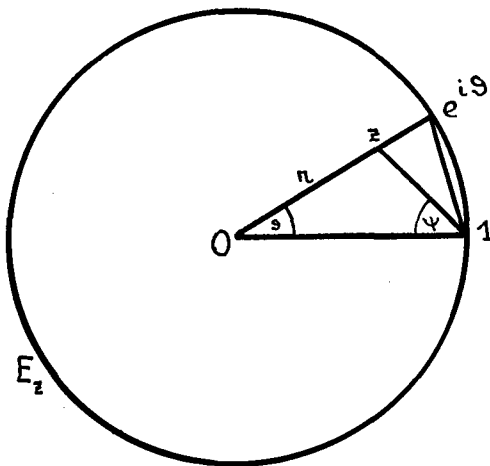


Fig. 1.

$$(10, 7) \quad \frac{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}{1 - r} = \frac{\sin(\vartheta + \psi)}{\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \psi\right)}, \quad \frac{1 - r}{|1 - z|} = \frac{\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \psi\right)}{\cos \frac{\vartheta}{2}},$$

und aus der zweiten Formel (10, 7) folgt wegen $\cos \frac{\vartheta}{2} = 1 + O(\vartheta^2)$ und $\cos\left(\psi + \frac{\vartheta}{2}\right) - \cos \psi = \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - 1\right) \cos \psi - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \psi = O(\vartheta)$ die Behauptung unmittelbar.

§ 3. Der Randverzerrungssatz.

11. *Formulierung des Randverzerrungssatzes. Satz IV.* Es möge $w = f(z)$ ein schlichtes einfach zusammenhängendes Gebiet G_1 in der z -Ebene auf ein schlichtes Gebiet G in der w -Ebene konform abbilden. Der Rand des Gebietes G_1 möge in einem Punkte z_0 eine Ecke von der Öffnung γ_1 ($0 < \gamma_1 \leq 2\pi$) nach dem Innern von G_1 bilden. Im entsprechenden Punkte w_0 möge der Rand des Gebietes G gleichfalls eine Ecke von der Öffnung γ ($0 \leq \gamma \leq 2\pi$) bilden. Dann gilt

$$(11, 1) \quad \frac{f'(z)}{\frac{f(z) - w_0}{z - z_0}} = 1 + (z - z_0)g'(z); \quad g(z) = \operatorname{Igr} \frac{f(z) - w_0}{z - z_0};$$

$$(11, 2) \quad (z - z_0)g'(z) \rightarrow \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_1};$$

$$(11, 3) \quad \frac{f'(z)}{\frac{f(z) - w_0}{z - z_0}} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1},$$

wobei die Formeln (11, 2) und (11, 3) für $z \rightarrow z_0$ gelten, wenn z aus dem Innern von G_1 im Winkel gegen z_0 strebt.¹⁵

Die Randverzerrungsformel (11, 1) ergibt sich in allen Fällen unmittelbar aus

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)e^{g(z)}$$

durch Differentiation. Andererseits sind offenbar die Formeln (11, 2) und (11, 3) äquivalent.

12. *Beweis unter zwei speziellen Annahmen.* Wir nehmen zuerst an, dass G_1 identisch mit K_z ist und dass die Funktion

$$(12, 1) \quad \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0}$$

bei stetiger Fortsetzung im Innern von G gleichmässig beschränkt bleibt. Unter diesen beiden Annahmen soll der Beweis des Satzes IV in dieser Nummer erbracht werden.

Offenbar darf dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, dass $z_0 = 1$, $w_0 = 0$ ist und die innere Winkelhalbierende des Randwinkels von G bei w_0 in die negative reelle Axe weist, so dass die beiden Tangenten an den Rand von G im Nullpunkt, vom Nullpunkt aus durchlaufen, mit der positiven reellen Axe die Winkel $\pi - \frac{\gamma}{2}$ bzw. $\pi + \frac{\gamma}{2}$ bilden.

Nun folgt aus der Voraussetzung über γ , dass bei geeigneter Wahl der Bestimmung von (12, 1) in K_z für $\vartheta \downarrow 0$ bzw. $\vartheta \uparrow 0$

$$\arg \frac{f(e^{i\vartheta}) - w_0}{z - 1}$$

¹⁵ Für $\gamma = \gamma_1 = \pi$, $G_1 = K_z$ findet sich die Formel (11, 3) in VISSER (2), p. 34, (Satz 7).

gegen die Werte $\pi - \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ bzw. $\pi + \frac{\gamma}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$ konvergiert. Daher ergibt sich, dass bei geeigneter Wahl der Bestimmung von $g(z)$ die Randfunktion $\chi_1(\mathcal{D})$ von $\Re \frac{1}{i} g(z)$ in der Nähe des Nullpunktes für $\mathcal{D} \rightarrow 0$ rechtseitig gegen $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ und linkseitig gegen $-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$ konvergiert.

Andererseits besitzt nach Satz II die Funktion

$$(12, 2) \quad \Re i \frac{\gamma - \pi}{\pi} g_0(z)$$

eine Randfunktion, die für $\mathcal{D} \downarrow 0$ bzw. $\mathcal{D} \uparrow 0$ die gleichen Grenzwerte $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ bzw. $-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$ wie $\Re \frac{1}{i} g(z)$ hat. Daher besitzt der Realteil der Funktion

$$(12, 3) \quad g^*(z) = \frac{1}{i} g(z) - i \frac{\gamma - \pi}{\pi} g_0(z)$$

eine für $z = 1$ stetige und in K_z absolut beschränkte Randfunktion, sodass nach Satz I (vgl. die Bemerkungen in Nr. 9) $(1 - |z|) g^*(z)$ gegen 0 konvergiert, wenn z allseitig in K_z gegen 1 strebt. Daher folgt nach (10, 5), wenn z im Winkel aus dem Innern von K_z gegen 1 strebt,

$$g'(z) = \frac{\pi - \gamma}{\pi} g'_0(z) + o\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

oder endlich nach (10, 4) für $n = 1$

$$(12, 4) \quad g'(z) = \frac{\gamma - \pi}{\pi} \frac{1}{z-1} + o\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

13. *Zuendeführung des Beweises von Satz IV.* Es sei nun noch immer G_1 identisch mit K_z , dagegen möge (12, 1) nicht mehr bei stetiger Fortsetzung ins Innere von K_z gleichmäßig beschränkt bleiben. Es sei dann G^* ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das auf K_z abbildbar ist, G enthält und den beiden folgenden Bedingungen genügt:

Erstens: Ist $w = H(z)$ die Abbildungsfunktion von G^* auf K_z , so bleibt

$$\arg \frac{H(z) - w_0}{z - z_0}$$

bei stetiger Fortsetzung in K_z absolut beschränkt.

Zweitens: Ist U eine hinreichend kleine Umgebung von z_0 auf E_z , und sind M, M^* die bei unseren Abbildungen von G, G^* auf K_z der Randmenge U von K_z resp. entsprechenden Folgen von Randelementen von G bzw. G^* , so sind M und M^* identisch und werden im gleichen Sinne durchlaufen — mit andern Worten, die Ränder von G und G^* fallen in der Umgebung des betreffenden Randpunktes w_0 zusammen.

Bei der Abbildung $w = H(z)$ möge G auf ein Teilgebiet K' von K_z abgebildet werden. Der Rand von K' enthält offenbar den Kreisbogen U . Es sei nun w_1 der Punkt von G , der bei der Abbildung $w = f(z)$ dem Mittelpunkt von K_z entspricht, und es sei z_1 der Punkt von K' , in den w_1 durch die Abbildung $w = H(z)$ übergeführt wird. Es sei nun $\varphi(z)$ die in K_z reguläre Funktion, die K_z auf K' so abbildet, dass $z = 0$ in z_1 übergeführt wird und z_0 in sich übergeht. Dann gilt offenbar

$$f(z) = H(\varphi(z)).$$

Nun ist bekanntlich $\varphi(z)$ im Innern des Kreisbogens U regulär und hat dort eine von 0 verschiedene Ableitung. Daher gilt

$$(13, 1) \quad \frac{\varphi'(z)}{\frac{\varphi(z) - z_0}{z - z_0}} \rightarrow 1,$$

wenn z aus K_z im Winkel gegen z_0 strebt. Setzt man aber $\zeta = \varphi(z)$, so strebt dann auch ζ aus K_z im Winkel gegen z_0 . Dann gilt aber nach dem in Nr. 12 bewiesenen

$$(13, 2) \quad \frac{H'(\zeta)}{\frac{H(\zeta) - z_0}{\zeta - z_0}} \rightarrow \gamma.$$

Multiplizieren wir nun die beiden Formeln (13, 1) und (13, 2), so ergibt sich offenbar (11, 3), womit also der Satz IV für $G_1 \equiv K_z$ bewiesen sein wird, sobald die Existenz eines Gebietes G^* mit den obigen Eigenschaften feststeht. Ein solches Gebiet G^* kann man aber z. B. wie folgt herstellen: Es sei U eine hinreichend kleine Umgebung von z_0 auf E_z . Zeichnet man nun in der w -Ebene zwei Winkelräume von der Öffnung $\frac{\pi}{2}$, deren Winkelhalbierende resp. die Halbtangenten an den Rand von G in w_0 sind, so folgt aus der Existenz dieser Halbtangenten in w_0 , dass, wenn U klein genug ist, die den Punkten von U entsprechenden Rand-

elemente von G innerhalb dieser Winkelräume enthalten sind. Ist daher V die Menge der dann den Punkten von U entsprechenden Randelemente und ist G^* das G enthaltende einfach zusammenhängende Gebiet, das aus der w -Ebene nach Entfernung aller Punkte von V entsteht, so genügt G^* allen unseren Forderungen, da die Schwankung von $\arg(w - w_0)$ auf V bei stetiger Fortsetzung absolut höchstens gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. — *Damit ist nunmehr der Satz IV unter der Annahme $G_1 \equiv K_z$ bewiesen.*

Es ist noch von Interesse hervorzuheben, dass in einem sehr allgemeinen Spezialfall das Gebiet G^* *gleichmässig* für alle Punkte eines Randbogens von G gebildet werden kann. Denn es sei $\bar{\Gamma}$ ein im Rand von G als freies Randstück enthaltener Jordanbogen, inklusive seiner Endpunkte, der die Ebene nicht zerlegt; Γ sei der offene Jordanbogen, der aus den inneren Punkten von $\bar{\Gamma}$ besteht und es sei endlich Γ' ein abgeschlossener Teilbogen von Γ . Es seien \bar{M}, M' die Bögen von E_z die $\bar{\Gamma}, \Gamma'$ entsprechen. Durchläuft nun z_0 alle Punkte von M' und w_0 die entsprechenden Punkte von Γ' , so kann man jedesmal als das Gebiet G^* das Gebiet annehmen, das aus der w -Ebene nach Entfernung von $\bar{\Gamma}$ entsteht, sofern man über das Verhalten der Funktion $f(z)$ auf E_z die Zusatzvoraussetzung macht, dass das Argument von $f(z) - f(z_0)$ für alle z_0 auf M' und z auf \bar{M} gleichmässig absolut beschränkt bleibt, sobald $z \neq z_0$ hinreichend nahe an z_0 liegt. Das heisst also, sofern es zwei positive Konstanten $C, \delta < 1$ gibt, derart, dass

$$(13, 3) \quad |\arg(f(z) - f(z_0))| < C$$

gilt, sobald z_0 auf M' und z auf \bar{M} liegen und $|z - z_0| < \delta$ ist. Dabei muss natürlich $\arg(f(z) - f(z_0))$ stetig in die beiden in z_0 aneinanderstossenden und in diesem Punkte offenen Teilstücke von \bar{M} fortgesetzt werden bei geeigneter, von einem z_0 zum andern eventuell variablen Festlegung des Zweiges. (Mit andern Worten: es handelt sich um die Schwankung von $\arg(f(z) - f(z_0))$ auf den beiden Stücken von \bar{M} .)

Um nun zu beweisen, dass unser Gebiet G^* die erste beim obigen Beweis postulierte Eigenschaft besitzt, genügt es zu zeigen, dass unter unseren Voraussetzungen es eine positive Konstante C^* gibt, derart, dass

$$(13, 4) \quad |\arg(f(z) - f(z_0))| < C^*$$

gilt, für alle z_0 auf M' und alle $z \neq z_0$ auf \bar{M} , wenn auf jedem der Teilstücke

von \bar{M} die gleiche Bestimmung des Arguments angenommen wird, wie in der Formel (13, 3).

Wäre dies aber nun nicht richtig, so müsste es zwei Punktfolgen $z_0^{(n)}, z^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ geben, wo $z_0^{(n)}$ in M' , $z^{(n)}$ in \bar{M} liegen und $|\arg(f(z^{(n)}) - f(z_0^{(n)}))| > n$ ist. Wir können dann offenbar ferner voraussetzen, dass $z^{(n)} \rightarrow \zeta$, $z_0^{(n)} \rightarrow \zeta_0$ gilt, wo ζ, ζ_0 in \bar{M} bzw. M' liegen. Es sei nun $N > 2C$ und so gross, dass für $n > N$ bereits

$$|z^{(n)} - \zeta| < \frac{\delta}{4}, \quad |z_0^{(n)} - \zeta_0| < \frac{\delta}{4}$$

gilt; dann liegt kein $z^{(n)}$ für $n > N$ im Bereich $|z - \zeta_0| < \frac{\delta}{2}$, da sonst

$|\arg(f(z^{(n)}) - f(z_0^{(n)}))| < C < n$ wäre. Entfernt man daher aus \bar{M} die $\frac{\delta}{2}$ -Umgebung von ζ_0 , so müssen alle Punkte $z^{(n)}$ mit $n > N$ auf einem und demselben der beiden Kreisbögen M_1, M_2 liegen, in die \bar{M} zerfällt, etwa auf M_1 , wobei derjenige der beiden Punkte $\zeta_0 e^{\pm i \frac{\delta}{2}}$, der auf M_1 liegt, mit ζ_1 bezeichnet sei. Es sei nun der Bildbogen von M_1 in der w -Ebene mit Γ_1 bezeichnet und es seien die Bildpunkte von $\zeta_0, \zeta, \zeta_1, z_0^{(n)}, z^{(n)}$ in der w -Ebene

$$\eta_0, \eta, \eta_1, w_0^{(n)}, w^{(n)}.$$

Dann folgt aus der Ungleichung (13, 3), dass die Ordnung des zwischen η_1 und $w^{(n)}$ enthaltenen Bogens von Γ_1 in bezug auf $w_0^{(n)}$ grösser als $n - C$ ist und daher ins Unendliche konvergiert, wenn n über alle Grenzen wächst, während dabei $w_0^{(n)}$ gegen den Punkt η_0 geht, der ausserhalb Γ_1 liegt. Dies ist aber unmöglich, wie aus dem folgenden Hilfssatz folgt:

Hilfssatz. Es sei J ($w = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$) ein Jordanbogen in der w -Ebene, w_0 ein nicht auf J liegender Punkt. Dann gibt es zwei positive Zahlen D, ε , derart, dass die Ordnung jedes in J enthaltenen Jordanbogens in bezug auf einen beliebigen Punkt aus der ε -Umgebung von w_0 absolut genommen unterhalb D bleibt.

Beweis des Hilfssatzes. Es sei d die Distanz des Punktes w_0 von der abgeschlossenen Punktmenge der Punkte von J . Wir wählen $\varepsilon = \frac{d}{2}$. Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von $\varphi(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ gibt es ein positives δ , so dass für $0 \leq t < t' \leq 1$ und $t' - t < \delta$ stets

$$|\varphi(t') - \varphi(t)| < \frac{d}{4}$$

ist.

Ist nun

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, \quad t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

so ist der ganze Bogen von J zwischen $t_{\nu-1}$ und t_ν im Kreise um den Punkt $\varphi(t_{\nu-1})$ mit dem Radius $\frac{d}{4}$ enthalten. Da aber die Distanz von $\varphi(t_{\nu-1})$ von jedem Punkt der $\frac{d}{2}$ -Umgebung von w_0 nicht kleiner als $\frac{d}{2}$ ist, hat dieser Teilbogen in Bezug auf jeden Punkt dieser Umgebung höchstens die Ordnung $\frac{\pi}{6}$, und da dasselbe auch für jedes Teilstück eines solchen Teilbogens gilt, ist die Ordnung jedes in J enthaltenen Jordanbogens in Bezug auf jeden Punkt der $\frac{d}{2}$ -Umgebung von w_0 höchstens $n \frac{\pi}{6} = D$, w. z. b. w.

Um uns endlich von der Annahme $G_1 \equiv K_z$ zu befreien und damit den Satz IV unter den allgemeinsten Voraussetzungen zu beweisen, ist zu beachten, dass nach dem bereits Bewiesenen der Satz IV sowohl auf die Abbildungsfunktion von K_z auf G_1 als auch auf die Abbildungsfunktion von K_z auf G angewandt werden kann. Aus der Gestalt der Formel (11, 3) ergibt sich aber dann, dass diese Formel auch für die Abbildungsfunktion von G_1 auf G gilt — sofern noch bewiesen wird, dass bei der Abbildung von K_z auf G_1 eine Winkelumgebung von z_0 in K_z in einen Bereich übergeht, der eine Winkelumgebung des entsprechenden Punktes von G_1 enthält und in einer solchen Winkelumgebung enthalten ist — und umgekehrt. Diese Tatsache wird aber in Nr. 15 als eine unmittelbare Folgerung des Randverzerrungssatzes erkannt werden. Und zwar wird dabei für den Fall, dass eines der Gebiete mit K_z identisch ist, auch der Randverzerrungssatz nur in diesem Falle gebraucht werden, der ja dann im Obigen bereits vollständig bewiesen ist. Damit wird aber auch der Beweis des Satzes IV im allgemeinen Falle erbracht worden sein.

14. *Die Winkelstetigkeit der Drehung am Rande. Satz V. Unter den Voraussetzungen des Satzes IV gilt für $\gamma_1 > 0$, $\gamma > 0$:*

$$(14, 1) \quad \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) \arg(z - z_0) + c + \varepsilon(z - z_0),$$

$$(14, 2) \quad \arg f'(z) = \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) \arg(z - z_0) + c + \varepsilon_1(z - z_0),$$

$$(14, 3) \quad \arg f'(z) - \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} = \varepsilon_2(z - z_0),$$

wo die Konstante c dadurch festgelegt wird, dass die Richtung der Winkelhalbierenden der Ecke von G_1 bei z_0 in die Richtung der Winkelhalbierenden der Ecke von G bei w_0 übergeht, und $\varepsilon(z - z_0)$, $\varepsilon_1(z - z_0)$, $\varepsilon_2(z - z_0)$ gegen Null konvergieren, wenn z aus dem Innern von G_1 im Winkel gegen z_0 strebt; $\varepsilon(z - z_0)$ konvergiert gegen Null auch bei allseitiger Konvergenz von z aus G_1 gegen z_0 . — (14, 1) gilt auch für $\gamma = 0$.

Beim Beweis der obigen Behauptungen darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, dass erstens $\gamma_1 = \pi$ und $G_1 = K_z$ ist, da man wiederum die Abbildung von G_1 auf G »auf dem Umwege über K_z « durchführen kann; dass zweitens $z_0 = 1$, $w_0 = 0$ ist und die Winkelhalbierende der Ecke (bzw. die entsprechende Spitztangente für $\gamma = 0$) von G bei w_0 in die negative reelle Axe weist. Dann gilt für das Argument von $\frac{f(z) - w_0}{(z - z_0)^{\gamma/\pi}}$, wenn z gegen $z_0 = 1$ längs E_z geht, bei geeigneter Wahl der in K_z stetigen Argumente

$$(14, 4) \quad \arg \frac{f(z) - w_0}{(z - z_0)^{\gamma/\pi}} \rightarrow \pi - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = \pi + \frac{\gamma}{2} - \frac{3\pi\gamma}{2\pi} = \pi - \gamma.$$

Da aber die Funktion $\arg \frac{f(z) - w_0}{(z - z_0)^{\gamma/\pi}}$ in K_z in der Umgebung von $z_0 = 1$ eine beschränkte Potentialfunktion ist, gilt (14, 4) auch, wenn z in K_z allseitig gegen $z_0 = 1$ konvergiert. Dabei ist aber

$$\arg (z - z_0)^{\frac{\gamma}{\pi}} = \frac{\gamma}{\pi} \arg (z - z_0), \quad \frac{\pi}{2} < \arg (z - z_0) < \frac{3\pi}{2}.$$

Daraus folgt erstens, wenn z aus K_z allseitig gegen 1 strebt,

$$\arg (f(z) - w_0) = \frac{\gamma}{\pi} \arg (z - z_0) + \pi - \gamma + \varepsilon(z - z_0),$$

wo $\varepsilon(z - z_0)$ nach 0 konvergiert. Danach gilt (14, 1) für $\gamma \geq 0$. Zweitens aber liefert die Formel (11, 3) des Randverzerrungssatzes für $\gamma > 0$, wenn dort rechts und links die Argumente verglichen werden,

$$\arg f'(z) - \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \rightarrow 0,$$

wenn eine geeignete Bestimmung von $\arg f'(z)$ festgelegt wird und z aus K_z im Winkel gegen 1 geht. Dies ist aber gerade (14, 3), und aus (14, 3) und (14, 1) folgt (14, 2) unmittelbar.

Für $\gamma = \gamma_1$ ergibt sich aus (14, 2) insbesondere, dass $\arg f'(z)$ bei Annäherung im Winkel an z_0 einem Grenzwert zustrebt, eine Tatsache, die deshalb besonders interessant ist, weil ein Grenzwert von $f(z)$ selbst bekanntlich nicht einmal zu existieren braucht, wenn die in z_0 und w_0 zusammenstossenden Randstücke dort stetige Tangenten besitzen.

15. *Bemerkungen über die Bedeutung des Satzes V.* In der Formel (14, 1) steckt die »Winkelproportionalität« bei unserer Abbildung im Punkte z_0 bzw. w_0 . Dies bedeutet: Sind L_1, L_2 zwei in G_1 verlaufende und in z_0 einmündende Jordanbögen, die in z_0 Tangenten besitzen, so sind die Bilder von L_1, L_2 ganz analog beschaffene Kurven L'_1, L'_2 , und der Winkel, den L'_1, L'_2 in w_0 miteinander bilden, ist gleich dem Winkel der Kurvenbögen L_1, L_2 in z_0 , multipliziert mit $\frac{\gamma}{\gamma_1}$. Für $\gamma = \gamma_1$ haben wir die *Winkeltreue*.

Wir haben zwar beim Beweis des Randverzerrungssatzes von dieser Winkelproportionalität bereits Gebrauch gemacht, indessen nur um den allgemeinen Fall auf den Fall $G_1 \equiv K_z$ zurückzuführen. Daher enthält unsere Herleitung der Winkelproportionalität für $G_1 \equiv K_z$ sicher keinen Zirkelschluss. Beim Beweis des Randverzerrungssatzes wurde aber von der Winkelproportionalität nur für den speziellen Fall $G_1 \equiv K_z$ Gebrauch gemacht. — Aus der Winkelproportionalität bei der Abbildung von G_1 auf G folgt nun unmittelbar: *Konvergiert eine Punktfolge z_ν aus G_1 im Winkel gegen z_0 , so konvergiert auch die Bildpunktmenge w_ν aus G im Winkel gegen w_0 ; liegen alle z_ν von einem ν an in einer Dreiecks Umgebung von z_0 , so liegen auch alle w_ν von einem ν an in einer Dreiecks Umgebung von w_0 .*

Nach dem Obigen wird die Drehung eines vom Punkt z_0 ausgehenden und innerhalb des Tangentenwinkels der Ecke bei z_0 liegenden Linienelements durch (14, 1) geliefert. Aus (14, 3) folgt, dass auch $\arg f'(z)$ denselben Grenzwert wie $\arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0}$ besitzt, wenn z in G_1 längs einer, jenes Linienelement tangierenden Kurve gegen z_0 strebt. Durch $\arg f'(z)$ wird aber die Drehung der Linienelemente in G_1 und daher insbesondere längs jener Kurve geliefert. Daraus folgt, dass eine in z_0 einmündende Kurve C_z , die in z_0 eine stetige Tangente

besitzt und deren Tangentenrichtung in z_0 *innerhalb* des Tangentenwinkels liegt, wiederum in eine solche Kurve C_w übergeht.

Machen wir nun allgemein die Annahme, dass die Kurve C_z im Punkte z_0 eine L -Tangente besitzt, und liegt die Tangente an C_z in z_0 *innerhalb* des Tangentenwinkels der Ecke in z_0 , so folgt nunmehr aus dem am Schluss von Nr. 5 Gesagten, dass auch die Bildkurve C_w im Punkte w_0 eine L -Tangente besitzt.

Für $\gamma = \gamma_1$ kann der Inhalt von (14, 3) folgendermassen geometrisch umschrieben werden: Man betrachte eine Winkelumgebung D von z_0 in G_1 , und es seien z_1, z_2 zwei Punkte aus D , w_1, w_2 ihre Bildpunkte in G . Man betrachte die Dreiecke $\mathcal{A}_z = z_0 z_1 z_2$, $\mathcal{A}_w = w_0 w_1 w_2$, und es seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ ihre Ecken bei $z_0, z_1, z_2, w_0, w_1, w_2$. Dann erfährt die Ecke von \mathcal{A}_z bei z_0 die durch $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0}$ gegebene Drehung, während die Drehung der Winkel bei z_1, z_2 durch $\arg f'(z_1), \arg f'(z_2)$ gegeben ist. Und aus der Formel (14, 2) folgt, wie wir zeigen werden, dass für innerhalb D gegen z_0 konvergierende z_1, z_2 die Dreiecke $\mathcal{A}_z, \mathcal{A}_w$ in bezug auf die Winkel »in der Grenze« ähnlich sind, d. h.

$$(15, 1) \quad \beta_0 - \alpha_0 \rightarrow 0, \beta_1 - \alpha_1 \rightarrow 0, \beta_2 - \alpha_2 \rightarrow 0$$

ist. Dies ist namentlich dann wichtig, wenn die Winkel bei z_0, z_1, z_2 oberhalb einer positiven Schranke bleiben. Den Beweis von (15, 1) führen wir hier zunächst unter der speziellen Voraussetzung, dass D eine *Dreiecks*umgebung ist, so dass das Innere von \mathcal{A}_z , bzw. \mathcal{A}_w in G_1 bzw. G enthalten ist, sobald z_1 und z_2 nahe genug bei z_0 liegen. Der Beweis im allgemeinen Falle wird später in der Nummer 25 (Satz IX der Nr. 24) erbracht werden.

In der Tat: entsprechen den Strecken $z_0 z_1, z_1 z_2, z_2 z_0$, in der w -Ebene die Kurvenbögen C_2, C_0, C_1 , so folgt aus dem Rolleschen Satz, dass die Strecken $w_0 w_1, w_1 w_2, w_2 w_0$ parallel sind zu den Richtungen von Tangenten an C_2, C_0, C_1 in gewissen Punkten, die etwa $\zeta_2, \zeta_0, \zeta_1$ innerhalb der Strecken $z_0 z_1, z_1 z_2, z_2 z_0$ entsprechen. Nach (14, 2) ergeben sich daher die Richtungen der drei Seiten von \mathcal{A}_w aus den Richtungen der entsprechenden Seiten von \mathcal{A}_z durch Drehungen um Winkel, die sich von der Konstanten c in (14, 2) jeweils um $\varepsilon_1(\zeta_2 - z_0), \varepsilon_1(\zeta_0 - z_0), \varepsilon_1(\zeta_1 - z_0)$ unterscheiden. Daraus folgt aber (15, 1) unmittelbar.

Es sei noch bemerkt, dass, wenn die Punkte z_0, z_1, z_2 auf einer Geraden liegen und etwa z_1 zwischen z_0 und z_2 liegt, die Winkel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ die Werte $0, \pi, 0$ haben. Analoges gilt in der w -Ebene.

16. *Der Randverzerrungssatz unter der Annahme der Winkelproportionalität.* Wir haben in Nr. 11 vorausgesetzt, dass G und G_1 in w_0, z_0 Ecken besitzen. Nun lässt sich bekanntlich die Winkelproportionalität — bei Annäherung im Winkel — auch unter gewissen allgemeineren Voraussetzungen herleiten.¹⁶ Es ist daher von Interesse zu zeigen, dass der Randverzerrungssatz und die Behauptungen des Satzes V bereits dann in einem bestimmten Umfang gelten, wenn nur bekannt ist, dass die Abbildung von G_1 auf G im Punkte z_0 bei Annäherung im Winkel winkelproportional ist. Wir behaupten nämlich:

Satz IV°. *Es möge $w = f(z)$ ein Gebiet G_1 in der z -Ebene mit einem erreichbaren Randpunkt z_0 und dem Rand R_1 auf ein Gebiet G in der w -Ebene mit dem Rand R abbilden, wobei z_0 einem gleichfalls erreichbaren Randpunkt w_0 entsprechen möge. Es seien L'_1, L''_1 zwei auf $G_1 + R_1$ verlaufende Jordanbögen, die in z_0 einmünden und dort Tangenten s'_1, s''_1 besitzen, derart, dass in der Nähe von z_0 zwischen L'_1, L''_1 nur Punkte von G_1 liegen. Der innere Winkel zwischen s'_1 und s''_1 sei $\gamma_1 > 0$. Es mögen L'_1, L''_1 durch $w = f(z)$ auf zwei Jordanbögen L', L'' abgebildet werden, die in w_0 einmünden und dort Tangenten s', s'' besitzen, die miteinander den innern Winkel γ bilden. Ist dann D eine Winkelumgebung von z_0 in G_1 , die zwischen L'_1, L''_1 liegt, deren Begrenzung jedoch mit s'_1, s''_1 nur den Punkt z_0 gemeinsam hat, so gelten, wenn z gegen z_0 durch das Innere von D strebt, die Formeln (11, 1), (11, 2), (11, 3), (14, 1) und, wenn $\gamma > 0$ ist, (14, 2), (14, 3). Die Formel (14, 1) gilt dabei auch dann, wenn z gegen z_0 strebt und dabei nur der Bedingung unterworfen bleibt, zwischen L'_1, L''_1 zu bleiben. Insbesondere besitzt also $\arg f'(z)$ für $\gamma = \gamma_1$ einen Grenzwert, wenn z über D , d. h. im Winkel, gegen z_0 strebt.¹⁷*

Zum Beweis verbinde man einen von z_0 verschiedenen Punkt von L'_1 mit einem von z_0 verschiedenen Punkt von L''_1 durch einen Jordanbogen C , der, bis eventuell auf seine Endpunkte, ganz innerhalb von G_1 verläuft und weder mit L'_1 noch mit L''_1 Punkte gemeinsam hat. Durch C wird aus dem zwischen L'_1, L''_1 liegenden Stück von G_1 ein Gebiet G_1^* herausgeschnitten, dessen Berandung aus C und Teilbogen von L'_1 und L''_1 besteht und in z_0 eine Ecke mit der innern Öffnung γ_1 besitzt. G_1^* wird nach unserer Voraussetzung durch $w = f(z)$ auf ein

¹⁶ Es lässt sich sogar in gewissen Fällen, wo der Rand von G in w_0 nicht einmal eine Tangente besitzt und $G_1 \equiv K_z$ ist, die Existenz einer von 0 und ∞ verschiedenen Winkelableitung beweisen. CARATHÉODORY (3), pp. 4, 17—18, (2), p. 97; AHLFORS (1), p. 40.

¹⁷ Im Fall $G_1 \equiv K_z$, wenn über die Voraussetzungen von Satz IV° hinaus $f(z)$ in z_0 eine (eventuell auch unendliche) Winkelderivierte besitzt, findet sich die Formel (11, 3) bei VISSER (2), p. 35. (Satz 8).

Teilgebiet G^* von G abgebildet, dessen Berandung im Bildpunkte w_0 von z_0 eine Ecke der Öffnung γ hat. Wendet man nun die Sätze IV, V auf die Gebiete G_1^* , G^* an, so ergeben sich unsere Behauptungen unmittelbar.

§ 4. Bemerkungen zum Lindelöfschen Satz.

17. *Der Lindelöfsche Satz.* Die in der Formel (14, 2) für $\gamma = \gamma_1$ enthaltene Existenz des Grenzwertes von $\arg f'(z)$ bei Konvergenz im Winkel gegen z_0 ist für den speziellen Fall, dass $G_1 \equiv K_z$ ist und der Rand von G in w_0 eine L -Tangente besitzt, bereits von Herrn E. Lindelöf festgestellt worden, und zwar hat sich in diesem Falle die Existenz von $\text{Lim } \arg f'(z)$ sogar bei *allseitiger* Annäherung an z_0 aus K_z ergeben. Offenbar ist hier die Beschränkung $G_1 = K_z$ unwesentlich, da man ja die Abbildung von G_1 auf G immer auf dem Umwege über K_z ausführen kann. Wir können daher den Lindelöfschen Satz folgendermassen formulieren:

Satz VI. (Der Lindelöfsche Satz.) Es möge $w = f(z)$ ein schlichtes einfach zusammenhängendes Gebiet G_1 der z -Ebene auf ein schlichtes Gebiet G in der w -Ebene konform abbilden. Der Rand R_1 von G_1 möge in einem Randpunkt z_0 mit einer L -Tangente versehen sein, und dasselbe möge für den Rand R von G im Bildpunkt w_0 von z_0 gelten. Dann strebt $\arg f'(z)$ gegen einen endlichen Grenzwert, wenn z aus dem Innern von G_1 allseitig gegen z_0 konvergiert.

Der Lindelöfsche Satz gilt insbesondere, wenn die Ränder von G_1 , G in z_0 bzw. w_0 stetige Tangenten besitzen. Für diesen Fall lässt er sich mit der gleichen Methode herleiten wie oben (14, 2), wenn man beim Beweis des Satzes I auf die Gleichmässigkeit der Konvergenz auf geeigneter \mathfrak{J} -Menge achtet. Um indessen den Lindelöfschen Satz für den Fall einer L -Tangente mit herzuleiten, muss die ganze Grundlage der Untersuchung erweitert werden, und er wird sich daher bei unserer Methode erst im zweiten Teil dieser Abhandlung (Nr. 61) ergeben. Um aber Wiederholungen zu vermeiden, sollen bereits im ersten Teil dieser Abhandlung verschiedene Folgerungen aus diesem Satz mitentwickelt werden, und wir wollen daher zuerst einige Verallgemeinerungen des Lindelöfschen Satzes angeben.

Es sei zu allererst bemerkt, dass im Falle, wo G_1 und G in z_0 bzw. w_0 L -Tangenten besitzen, die in Nr. 15 angegebene Folgerung aus der Existenz von $\text{Lim } \arg f'(z)$ über die Abbildung von Kurven mit L -Tangenten offenbar

sogar bei *allseitiger* Konvergenz gegen z_0 gilt. Ist also C_z eine auf der Menge $G_1 + R_1$ verlaufende Jordankurve, die in z_0 mit einer L -Tangente mündet, so mündet auch ihre auf $G + R$ verlaufende Bildkurve in w_0 mit einer L -Tangente. Über die Formel (15, 1) in diesem Fall vgl. den Satz IX.

18. *Übertragung des Lindelöfschen Satzes auf L-Tangentenecken.* Die Behauptung des Lindelöfschen Satzes besagt einfach, dass (14, 2) und daher alle drei Formeln (14, 1), (14, 2), (14, 3) bei *allseitiger* Konvergenz von z gegen z_0 gelten, und in dieser Formulierung lässt sich der Lindelöfsche Satz auch auf den Fall übertragen, dass G und G_1 in w_0 bzw. z_0 zwar nicht notwendig L -Tangenten, wohl aber Ecken von den Öffnungen $\gamma > 0, \gamma_1 > 0$ bilden, derart, dass die beiden im Punkte w_0 zusammenstossenden Jordanbogen dort L -Tangenten besitzen und das Gleiche für die in z_0 zusammenstossenden Randstücke von G_1 gilt. Beim Beweis genügt es offenbar wiederum vorauszusetzen, dass $\gamma_1 = \pi$ ist. Für $\gamma_1 = \pi$ aber lässt sich die zu beweisende Tatsache wohl am einfachsten feststellen, wenn man durch eine gebrochene Potenztransformation die Öffnung des Winkels bei w_0 gleich π macht. In der Tat können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $w_0 = 0$ ist und die Winkelhalbierende der inneren Ecke von G bei w_0 in die negative reelle Axe weist. Dann wird das Gebiet G durch die Transformation $w' = w^{\frac{\pi}{\gamma}}$ bei geeigneter Wahl der Bestimmung von $w^{\frac{\pi}{\gamma}}$ in ein solches Gebiet G' übergeführt, dass bei $w' = 0$ eine Ecke der Öffnung π , d. h. eine Tangente vorliegt. Und da unsere Transformation winkelpropportional ist, so folgt aus dem am Schlusse der Nr. 5 Gesagten, dass auch die beiden im Punkte $w' = 0$ zusammenstossenden Randstücke von G' dort L -Tangenten besitzen und daher also das ganze Randstück von G' in $w' = 0$ eine L -Tangente hat. Für das Gebiet G' gilt also

$$\arg \frac{dw'}{dz} = c + \varepsilon_0(z - z_0),$$

wo $\varepsilon_0(z - z_0)$ bei allseitiger Konvergenz von z aus G_1 gegen z_0 gegen 0 strebt. Daraus folgt weiter, wegen (14, 1), auf w' als Funktion von z angewandt:

$$\arg w = \frac{\gamma}{\pi} \arg(z - z_0) + \frac{\gamma}{\pi} c + \frac{\gamma}{\pi} \varepsilon(z - z_0),$$

$$\arg f'(z) = \left(1 - \frac{\pi}{\gamma}\right) \arg w + c + \varepsilon_0(z - z_0),$$

$$\arg f''(z) = \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right) \arg(z - z_0) + \frac{\gamma}{\pi} c + \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1\right) \varepsilon(z - z_0) + \varepsilon_0(z - z_0).$$

Dies sind aber die Formeln (14, 1), (14, 2) für $\gamma_1 = \pi$, in denen nunmehr in der Tat, wie behauptet, die ε -Glieder bei *allseitiger* Konvergenz von z gegen z_0 gegen 0 streben.¹⁸ Und dasselbe gilt natürlich auch für (14, 3).

Die damit bewiesene Übertragung des Lindelöfschen Satzes auf *L*-Tangentenecken ist im allgemeineren Satz der nächsten Nr. enthalten.

19. *Der Lindelöfsche Satz für halbseitige Konvergenz.* Wir wollen endlich beweisen, dass der Lindelöfsche Satz in der verallgemeinerten Formulierung der Nr. 18 »zur Hälfte« erhalten bleibt, wenn unter obigen Voraussetzungen schon der eine der in z_0 zusammenstossenden Randbogen von G_1 — er sei mit C_1 bezeichnet — und der entsprechende Randbogen C von G in z_0 bzw. w_0 *L*-Tangenten besitzen. In diesem Falle darf nämlich z *halbseitig* am Bogen C_1 gegen z_0 gehen. Wir formulieren den Satz wie folgt:

Satz VII. Es möge $w = f(z)$ ein schlichtes einfach zusammenhängendes Gebiet G_1 der z -Ebene mit einer Ecke von der Öffnung $\gamma_1 > 0$ in einem Randpunkte z_0 auf ein schlichtes Gebiet G in der w -Ebene konform abbilden, wobei der Ecke in z_0 eine Ecke im Bildpunkte w_0 von der Öffnung $\gamma > 0$ entspricht. Es möge einer der beiden in z_0 zusammenstossenden Randbogen von G_1 — er sei mit C_1 bezeichnet — in z_0 eine *L*-Tangente besitzen, ebenso wie sein Bildbogen C im Punkte w_0 . Dann gelten die Formeln (14, 1), (14, 2), (14, 3), wenn z *halbseitig* am Bogen C_1 aus G_1 gegen z_0 konvergiert.

Beim Beweis darf offenbar vorausgesetzt werden, dass das Gebiet G_1 mit dem Kreissektor identisch ist, der aus dem Einheitskreis K_z durch die beiden unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ zur negativen reellen Axe geneigten Radien herausgeschnitten wird. Der Punkt z_0 sei in diesem Falle der Nullpunkt, und C_1 sei einer der beiden Begrenzungsradien von G_1 . — In der Tat kann ja die Abbildung von G_1 auf G »auf dem Umwege« über einen solchen Bereich stets durchgeführt werden.

Ebenso kann auch das Gebiet G in geeignet spezialisierter Gestalt angenommen werden. Denn erstens kann G durch ein Teilgebiet G' ersetzt werden, das zwischen den beiden in w_0 zusammenstossenden Randbogen und einem bei w_0 verlaufenden Querschnitt von G liegt. Denn bekanntlich — wir haben von einer analogen Tatsache bereits oben Gebrauch gemacht — ist die Abbildungsfunktion von G' auf G_1 in der Form darstellbar $f(\varphi(z))$, wo $\varphi(z)$ und $\varphi'(z)$ in

¹⁸ Der Beweis für den Lindelöfschen Fall $G_1 \equiv K_z$, $\gamma = \pi$ ist natürlich noch unmittelbarer.

z_0 und auf einer Umgebung von z_0 stetig und von o verschieden sind. Entspricht nämlich G' bei der Abbildung von G auf G_1 das Teilgebiet G'_1 des Kreissektors G_1 , so vermittelt $u = \varphi(z)$ die Abbildung von G_1 auf G'_1 . Dem Randbogen C möge bei G' etwa C' entsprechen. Wir verlängern nun C' längs der Tangente in w_0 und bilden ein einfach zusammenhängendes Gebiet G^* , das das Gebiet G' im Innern enthält und zu dessen Rand als freies Randstück C' mit einem Stück der verlängerten Tangente gehört, so dass also der Rand von G^* in w_0 eine L -Tangente besitzt. Wird nun G^* etwa auf die obere Hälfte des Einheitskreises in der u -Ebene abgebildet, derart, dass dabei w_0 in $u = 0$ übergeht, so wird dabei G' auf ein Gebiet G'' abgebildet, in dem das Bild C'' von C' geradlinig ist. Und man kann bekanntlich die Abbildung von G^* auf jenes Gebiet der u -Ebene so einrichten, dass einer der beiden in der reellen u -Achse liegenden Radien von E_u das Bild von C' darstellt. Es genügt nun offenbar unsern Satz für das so entstandene Gebiet G'' zu beweisen. Wir dürfen daher von vornherein annehmen, dass das Gebiet G in der oberen Halbebene liegt, dass ferner $w_0 = 0$ und C eine der beiden Strecken zwischen $w = 0$ und $w = 1$ bzw. $w = 0$ und $w = -1$ ist. Wird nun aber ein solches Gebiet G durch $w = f(z)$ auf das vorhin angegebene Gebiet G_1 abgebildet, so entspricht dabei der geradlinigen Strecke C einer der beiden Begrenzungsradien des Kreissektors G_1 , nämlich C_1 . Man »verdoppele« nun das Gebiet G durch Spiegelung an C und bezeichne das so entstehende Gebiet mit Γ ; ebenso »verdoppele« man G_1 durch Spiegelung an C_1 und bezeichne die so entstehende Halbkreisscheibe mit Γ_1 . Aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip folgt aber nunmehr, dass die Funktion $f(z)$ zugleich die konforme Abbildung von Γ_1 auf Γ derart vermittelt, dass dabei z_0 in w_0 übergeht. Wendet man nun auf diese Abbildung die Formeln (14, 1), (14, 2), (14, 3) an, so gelten sie auf jeden Fall in einem Winkel um C_1 , woraus sich unsere Behauptung unmittelbar ergibt.

20. *Folgerungen aus Satz VII.* Es ist nun klar, dass die am Schluss der Nr. 17 für den Fall von L -Tangenten angegebene Tatsache auch unter den Voraussetzungen des Satzes VII für am Randbogen C_1 halbseitig gegen z_0 konvergierende z erhalten bleibt. Mit andern Worten: Es sei C_z eine in G_1 verlaufende und in z_0 mündende einfache Kurve, die in z_0 eine L -Tangente besitzt und in einer an C_1 liegenden halbseitigen Umgebung von z_0 innerhalb G_1 verläuft. Dann besitzt auch ihre Bildkurve in G im Punkte w_0 eine L -Tangente. Und hier darf C_z auch mit C_1 Punkte gemein haben.

Ebenso gilt für $\gamma = \gamma_1 > 0$ die in Nr. 15 erläuterte »Winkelähnlichkeit in der Grenze« des Dreiecks $z_0 z_1 z_2$ mit dem Dreieck $w_0 w_1 w_2$, dessen Ecken Bildpunkte von z_0, z_1, z_2 sind, wenn z_1, z_2 *halbseitig* an C_1 gegen z_0 konvergieren, d. h. die Formel (15, 1) bleibt auch jetzt richtig. Wir beweisen sie hier allerdings unter speziellen Voraussetzungen und werden den allgemeinen Fall erst im Satze IX formulieren und beweisen.

Lemma 1. Es sei D unter den Voraussetzungen des Satzes VII eine halbseitige Umgebung von z_0 an C_1 , deren Winkelöffnung γ_0 bei z_0 positiv und kleiner als π ist. z_1, z_2 sei ein Paar untereinander verschiedener Punkte aus der Menge $D + C_1$, die gegen z_0 konvergieren, w_1, w_2 seien die Bildpunkte von z_1 und z_2 in G . Dann ist die Strecke $w_1 w_2$ gegen die Strecke $z_1 z_2$ um den Winkel $c + \varepsilon(z_1, z_2)$ gedreht, wo $\varepsilon(z_1, z_2)$ gegen 0 konvergiert, wenn z_1 und z_2 gegen z_0 streben, und c die Konstante der Formel (14, 2) ist.

Zum Beweis beachte man vor allem, dass, sobald z_1, z_2 nahe genug bei z_0 liegen, auch das Punktepaar w_1, w_2 innerhalb einer Halbumgebung von w_0 an C bleibt, deren Winkelöffnung bei w_0 beliebig nahe an γ_0 und daher insbesondere positiv und kleiner als π gewählt werden kann. Daher kann man beim Beweis die Gebiete G und G_1 miteinander vertauschen. Andererseits kann man die Abbildung von G_1 auf G auf dem Umwege über einen Sektor des Einheitskreises ausführen, wobei C_1 einem Radius dieses Kreises entspricht. Daher darf beim Beweis von vornherein vorausgesetzt werden, dass C_1 eine geradlinige Strecke ist.

Es sei nun D^* eine weitere halbseitige Umgebung von z_0 an C_1 , die D enthält und deren Winkelöffnung bei z_0 grösser als γ_0 ist. Sobald z_1 und z_2 nahe genug bei z_0 liegen, bleibt dann die Strecke $z_1 z_2$ sicher innerhalb $D^* + C_1$. Liegt höchstens einer der Punkte z_1, z_2 auf C_1 , so liegen alle *inneren* Punkte der Strecke $z_1 z_2$ *innerhalb* D^* . Ist Γ die Bildkurve der Strecke $z_1 z_2$ in der w -Ebene, so hat ihre Sehne $w_1 w_2$ nach dem Rolleschen Satz die gleiche Richtung wie die Tangente an Γ in einem innern Punkt dieses Bogens, der einem innern Punkte ζ der Strecke $z_0 z_1$ entspricht. Daher ergibt sich nach (14, 2) die Richtung von $w_1 w_2$ aus der Richtung von $z_1 z_2$ durch Drehung um den Winkel $c + \varepsilon_1(\zeta - z_0)$, woraus unsere Behauptung ohne weiteres folgt.

Liegen aber *beide* Punkte z_1, z_2 auf C_1 , so ist die Richtung von $z_1 z_2$ zugleich diejenige von C_1 . Die Strecke $w_1 w_2$ ist dann eine Sehne an die Kurve C ; die Richtung von $w_1 w_2$ konvergiert daher nach der Annahme, dass C in w_0 eine

L -Tangente besitzt, gegen die Richtung der Tangente an C in w_0 . In diesem Falle aber ergibt sich unsere Behauptung unmittelbar aus dem Satze VII.

Aus Lemma 1 folgt nunmehr:

Lemma 2. Wird über die Voraussetzungen von Lemma 1 hinaus vorausgesetzt, dass die Punkte z_1, z_2 nicht nur voneinander sondern auch von z_0 verschieden sind, so gelten die Formeln (15, 1), wenn z_1, z_2 über $D + C_1$ gegen z_0 konvergieren.

Denn zum Beweis genügt es, das Lemma 1 auf jedes der drei Punktepaare $z_0, z_1; z_0, z_2; z_1, z_2$ anzuwenden.

Endlich sei noch folgendes bewiesen:

Zusatz 1 zum Satz VII. Es mögen in der Formulierung des Satzes VII die Jordanbogen C und C_1 durchweg mit Tangenten versehen sein, die in den Punkten z_0 bzw. w_0 L -Tangenten sind, und es sei $\gamma = \gamma_1$. Dann bilden die längs des Bogens C_1 im Winkel existierenden Grenzwerte von $\arg f'(z)$ eine Funktion des Punktes auf C_1 , die in z_0 stetig ist. Ist in der Tat α der Grenzwert von $\arg f'(z)$ in z_0 und ε eine beliebig kleine positive Zahl, so gibt es eine halbseitige Umgebung H von z_0 an C_1 , derart, dass für alle z aus H $|\arg f'(z) - \alpha| < \varepsilon$ ist. Ist dann C_1^* ein an z_0 anstossendes Stück von C_1 , das zum Rand von H gehört, und ist z' irgend ein innerer Punkt von C_1^* , so liegt die Innennormale auf C_1 in z' zunächst in H . Daher genügt der längs der Normalen sicher existierende Grenzwert $\arg f'(z')$ von $\arg f'(z)$ in z' der Ungleichung

$$|\arg f'(z') - \alpha| \leq \varepsilon,$$

wie behauptet. Insbesondere folgt:

Zusatz 2 zum Satz VII. Haben unter den Voraussetzungen des Satzes VI zwei einander entsprechende Jordansche Randbogen C_1 und C von G_1 bzw. G durchweg sich stetig drehende Tangenten, so ist die Grenzfunktion von $\arg f'(z)$ eine stetige Funktion auf dem Bogen C_1 .¹⁹

§ 5. Relative Konformität bei der Eckenabbildung.

21. Die Längentreue im Kleinen.

Satz VIII. Es sei unter den Voraussetzungen des Satzes IV $\gamma > 0, \gamma_1 > 0; c_1, c_2$ seien zwei beliebige positive Konstanten mit $c_1 < c_2$. D sei eine Winkelumgebung von z_0 in G_1 .

¹⁹ Vgl. für diese Formulierung WARSCHAWSKI (1), p. 406.

a) Ist dann $z_1, z_2, z_1 \neq z_2$ ein Punktepaar aus D mit

$$(21, 1) \quad c_1 \leq \left| \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| \leq c_2,$$

so gilt

$$(21, 2) \quad \frac{f(z_1) - w_0}{f(z_2) - w_0} \sim \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right)^{\frac{\gamma}{\eta}},$$

$$(21, 3) \quad \frac{f'(z_2)}{f'(z_1)} \sim \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right)^{\frac{\gamma}{\eta} - 1},$$

wenn z_1 und z_2 über D , d. h. im Winkel, gegen z_0 konvergieren.

b) Wird im Falle a) die Voraussetzung (21, 1) ersetzt durch

$$(21, 1^0) \quad \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \rightarrow 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \rightarrow \infty,$$

so sind die Formeln (21, 2), (21, 3) zu ersetzen durch

$$(21, 2^0) \quad \frac{f(z_1) - w_0}{f(z_2) - w_0} \rightarrow 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(z_1) - w_0}{f(z_2) - w_0} \rightarrow \infty.^{20}$$

c) Sind w_1, w_2 die den Punkten z_1, z_2 aus D entsprechenden Punkte aus G , so ist Bedingung (21, 1) äquivalent mit

$$(21, 4) \quad d_1 \leq \left| \frac{w_1 - w_0}{w_2 - w_0} \right| \leq d_2$$

für positive Konstanten d_1, d_2 , wobei die Äquivalenz so zu verstehen ist, dass zu festen c_1, c_2 solche positive d_1, d_2 gefunden werden können, dass (21, 4) eine Folge von (21, 1) ist, und umgekehrt, zu festen positiven d_1, d_2 positive c_1, c_2 derart wählbar sind, dass (21, 1) aus (21, 4) folgt. Ebenso ist jede Bedingung (21, 1⁰) äquivalent mit der entsprechenden Bedingung (21, 2⁰).

²⁰ Man kann offenbar die auf (21, 1), (21, 2), (21, 1⁰), (21, 2⁰) bezüglichen Behauptungen dahin zusammenfassen, dass wenn z_1 und z_2 im Winkel gegen z_0 konvergieren und $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \rightarrow \lambda$ ist, dann auch $\frac{f(z_1) - w_0}{f(z_2) - w_0} \rightarrow \lambda^{\frac{\gamma}{\eta}}$ gilt. Es ist leicht zu sehen, dass hieraus die ganze Behauptung (21, 2) unter der Voraussetzung (21, 1) unmittelbar hergeleitet werden kann.

d) Hat ein an z_0 anstossendes Randstück C_1 von G_1 in z_0 eine L-Tangente, ebenso wie sein Bildbogen C in w_0 und gilt für z_1, z_2 aus einer halbseitigen Umgebung H von z_0 an C_1 in G_1 (21, 1), bzw. (21, 1°), so darf in den Behauptungen a), b), c), die Formel (21, 3) ausgenommen, die Winkelumgebung D durch H ersetzt werden. Und dabei dürfen z_1 und z_2 auch auf C_1 liegen. — Haben alle vier in z_0 und w_0 zusammenstossenden Randbogen von G_1 und G dort L-Tangenten, so darf in dieser Formulierung die Umgebung H durch eine allseitige Umgebung von z_0 in G_1 ersetzt werden, zu der dabei auch noch die Randpunkte von G_1 , die zugleich zum Rand dieser Umgebung gehören, hinzugezählt werden können.

e) Gelten anstatt den Voraussetzungen des Satzes IV die Voraussetzungen des Satzes IV° der Nr. 16, so bleiben die Behauptungen a), b), c) richtig, wenn die Winkelumgebung D den in der Formulierung von IV° angegebenen Bedingungen genügt.²¹

22. Beweis von (21, 2) bzw. (21, 2°) für $\gamma = \gamma_1$. Es sei zunächst bemerkt, dass (21, 3) aus (21, 2) wegen (11, 3) ohne weiteres folgt, so dass im Falle a) nur (21, 2) zu beweisen ist. Ferner ist die Relation (21, 4) offenbar eine unmittelbare Folge aus (21, 2) und (21, 1). Beachtet man, dass nach dem in Nr. 15 Gesagten für $z_1 \prec D, z_2 \prec D$, sobald z_1 und z_2 nahe genug bei z_0 liegen, auch w_1, w_2 in einer Winkelumgebung von w_0 in G liegen, so folgt aus (21, 4) umgekehrt (21, 1), wenn man die Rollen von z und w vertauscht.

Wir haben daher nur (21, 2), (21, 2°) unter entsprechenden Voraussetzungen zu beweisen. — Es seien nun wieder $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \beta_0, \beta_1, \beta_2$ die Winkel der Dreiecke $z_0 z_1 z_2, w_0 w_1 w_2$ resp. bei $z_0, z_1, z_2; w_0, w_1, w_2$. Beim Beweis von (21, 2) und (21, 2°) in den Fällen a), b) dürfen wir annehmen, dass z_1, z_2 in einer und derselben Dreiecks-umgebung von z_0 in G_1 liegen — da man sonst zwischen z_1 und z_2 nur endlich viele Punkte einzuschalten braucht, derart, dass zwei aufeinanderfolgende dieser Punkte in einer und derselben Dreiecks-umgebung von z_0 in G_1 liegen. (Man beachte, dass die zu beweisende Behauptung in dem Sinne transitiv ist, dass, wenn sie für z_1, z_2 und z_2, z_3 gilt, sie auch für z_1, z_3 richtig ist). Daher dürfen wir die Gültigkeit von (15, 1) voraussetzen — für den Fall einer Dreiecks-umgebung haben wir ja in Nr. 15 diese Formel bewiesen. — Ferner kann durch Einschaltung weiterer Punkte in endlicher Anzahl erreicht werden, dass der

²¹ Für $G_1 \equiv K_2, \gamma = \pi$ und wenn z_1 und z_2 auf einem in Bezug auf z_0 symmetrischen Orthogonalkreis von E_z liegen, ist die dann aus (21, 2) folgende Relation $\frac{|f(z_1) - w_0|}{|f(z_2) - w_0|} \rightarrow 1$ mit einer in VISSER (2), p. 32 (Satz 4) hergeleiteten äquivalent.

Winkel α_0 zwischen δ und $\frac{\delta}{4}$ bleibt, wo δ eine beliebig aber fest gewählte positive Zahl mit $\delta < \frac{\gamma}{2}$, $\delta < \frac{\pi}{2}$ ist.²² Dann gilt $\pi - \delta \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi - \frac{\delta}{4}$. Nun liefert der Sinussatz

$$(22, 1) \quad \left| \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}.$$

Aus (21, 1) folgt daher, dass beide Winkel α_1, α_2 (kleiner als $\pi - \frac{\delta}{4}$ und) grösser als eine positive Schranke bleiben, die nur von c_1, c_2 abhängt. Daher bleiben wegen (15, 1) auch die Winkel β_1, β_2 oberhalb einer positiven Schranke und überschreiten $\pi - \frac{\delta}{4}$ nicht, sobald z_1, z_2 nahe genug bei z_0 liegen, woraus wegen (22, 1) nach dem Sinussatz folgt

$$(22, 2) \quad \left| \frac{f(z_1) - w_0}{f(z_2) - w_0} \right| = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \sim \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \left| \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right|,$$

w. z. b. w.

Wird aber eine der Relationen (21, 1°) vorausgesetzt, so folgt, dass entweder $\alpha_2 \rightarrow 0$ gilt und $\sin \alpha_1$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt, oder $\alpha_1 \rightarrow 0$ gilt und $\sin \alpha_2$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt. Dann gilt also entweder

$$\left| \frac{w_1 - w_0}{w_2 - w_0} \right| = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \rightarrow 0,$$

oder

$$\left| \frac{w_1 - w_0}{w_2 - w_0} \right| = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \rightarrow \infty,$$

womit (21, 2°) bewiesen ist. —

Offenbar führt nun die gleiche Überlegung auch im Falle d) zum Ziel; wir dürfen wiederum annehmen, dass z_1, z_2 in einer halbseitigen Umgebung von z_0 an C_1 liegen, deren Öffnung kleiner ist als π , und zu der noch die inneren Punkte von C_1 hinzuzuzählen sind. Daher gelten auch hier die Relationen (15, 1) nach dem im Lemma 2 der Nr. 20 Bewiesenen. Ebenso darf wieder an-

²² Wenn z. B. der Winkel zwischen $z_0 z_1$ und $z_0 z_2$ kleiner ist als $\frac{\delta}{4}$, wähle man für z' einen solchen Punkt (ausserhalb des Winkelraumes zwischen den Halbstrahlen an z_0 durch z_1 bzw. z_2), dass der Winkel zwischen $z_0 z'$ und $z_0 z_1$ etwa gleich $\frac{\delta}{2}$ ist.

genommen werden, dass α_0 zwischen δ und $\frac{\delta}{4}$ für ein geeignetes positives δ mit $\delta < \frac{\gamma}{2}$, $\delta < \frac{\pi}{2}$ liegt. Dann sind aber alle weiteren Schlüsse unverändert anwendbar.

Und damit ist offenbar auch der Fall erledigt, in dem alle vier in z_0 und w_0 zusammenstossenden Randbogen von G_1 und G dort L -Tangenten besitzen. —

23. *Der Fall $\gamma \geq \gamma_1$.* Der Fall endlich, dass γ und γ_1 untereinander (und von Null) verschieden sind, lässt sich auf den oben behandelten zurückführen, wenn man die z -Ebene der Transformation $u = (z - z_0)^{\frac{\gamma}{\gamma_1}}$ unterwirft. Besitzen im Falle d) einige der in z_0 zusammenstossenden Randstücke von G_1 in diesem Punkte L -Tangenten, so gilt nach dem in Nr. 5 Bemerkten das Gleiche auch für das aus G_1 vermöge unserer Transformation hervorgehende Gebiet, so dass (21, 2) bzw. (21, 2°) auch bei halbseitiger oder allseitiger Konvergenz von z_1 und z_2 gegen z_0 gilt, wobei z_1 und z_2 auch Randpunkte von G_1 durchlaufen dürfen, dem Fall d) entsprechend. Aus dem Randverzerrungssatz ergibt sich ferner, dass gleichzeitig mit (21, 2) im Falle a) auch die Relation (21, 3) gilt. Die Behauptungen von c) ergeben sich ganz analog wie oben.

Was endlich den Fall e) anbetrifft, so ergeben sich die in diesem Falle ausgesprochenen Behauptungen unmittelbar, wenn man das zum Beweis des Satzes IV° Gesagte berücksichtigt. Damit ist der Satz VIII vollständig bewiesen. —

Um nun analoge Aussagen über $\frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_0}$ herleiten zu können, müssen wir erst die Gültigkeit der Relationen (15, 1) im allgemeinsten Falle diskutieren. Wir fassen das Resultat im Satz IX zusammen, dessen Beweis auf dem Satz VIII für $\gamma = \gamma_1$ beruht.

24. *Winkeltreue bei der Dreiecksabbildung. Satz IX.* Es sei unter den Voraussetzungen des Satzes IV $\gamma = \gamma_1 > 0$. D sei eine Winkelumgebung von z_0 in G_1 . z_1, z_2 sei ein Punktepaar aus D , wobei z_0, z_1, z_2 untereinander verschieden sind. Es seien w_1, w_2 die Bildpunkte von z_1, z_2 in G und $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \beta_0, \beta_1, \beta_2$ seien die Winkel der Dreiecke $z_0 z_1 z_2, w_0 w_1 w_2$ resp. bei $z_0, z_1, z_2; w_0, w_1, w_2$. Dann gilt, wenn z_1, z_2 gegen z_0 konvergieren,

$$(24, 1) \quad \beta_0 - \alpha_0 \rightarrow 0, \quad \beta_1 - \alpha_1 \rightarrow 0, \quad \beta_2 - \alpha_2 \rightarrow 0.$$

Hat aber ein in z_0 mündender Randbogen C_1 von G_1 dort eine L -Tangente, ebenso wie sein Bildrandbogen von G , so darf in der obigen Behauptung D durch eine halbseitige Umgebung H von z_0 an C_1 ersetzt werden, wobei zu H noch die inneren Punkte von C_1 hinzugezählt werden dürfen. Haben ferner alle vier in z_0 zusammenstossenden Randbogen von G_1 und G dort L -Tangenten, so bleibt (24, I) für $\gamma < 2\pi$ richtig, wenn z_1, z_2 gegen z_0 über das Innere und den Rand von G_1 konvergieren. Ist aber dann $\gamma = 2\pi$, so gilt (24, I), wenn z_1, z_2 gegen z_0 über das Innere und den Rand von G_1 konvergieren und wenn dabei für keine Unterfolge von Punktepaaren z_1, z_2 mit $z_1 \rightarrow z_0, z_2 \rightarrow z_0, \alpha_0 \rightarrow 0, \left| \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| \rightarrow 1$ gilt und zugleich die Strecke $z_1 z_2$ beide in z_0 zusammenstossenden Randbogen von G_1 trifft.

25. *Beweis.* Wäre eine der Behauptungen unseres Satzes falsch, so liesse sich nach dem Auswahlssatz eine Folge von Punktepaaren z_1, z_2 mit $z_1 \rightarrow z_0, z_2 \rightarrow z_0$ finden, die der in Frage kommenden Bedingung für z_1 und z_2 genügt und für die eine der Differenzen $\beta_0 - \alpha_0, \beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2$ einen von Null verschiedenen Grenzwert besitzt. Und das Gleiche würde dann für jede unendliche Unterfolge einer solchen Folge gelten. Eine solche Unterfolge $z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) können wir nun aber nach dem Häufungsstellensatz auf jeden Fall derart herausgreifen, dass für sie erstens alle sechs Winkel $\alpha_0^{(\nu)}, \alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}; \beta_0^{(\nu)}, \beta_1^{(\nu)}, \beta_2^{(\nu)}$ Grenzwerte besitzen, die wir mit $A_0, A_1, A_2; B_0, B_1, B_2$ bezeichnen wollen; dass zweitens

$$\left| \frac{z_2^{(\nu)} - z_0}{z_1^{(\nu)} - z_0} \right| \rightarrow q_1, \quad \left| \frac{w_2^{(\nu)} - w_0}{w_1^{(\nu)} - w_0} \right| \rightarrow q$$

gilt wo q, q_1 auch unendlich sein können, aber auf jeden Fall nach dem Satz VIII $q = q_1$ ist; dass drittens die Richtungen der Halbstrahlen $z_0 z_1^{(\nu)}, z_0 z_2^{(\nu)}; w_0 w_1^{(\nu)}, w_0 w_2^{(\nu)}$ wo $w_0, w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}$ die Bilder von $z_0, z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}$ sind, gegen die Richtungen der Halbstrahlen σ'_1, σ''_1 in der z -Ebene bzw. σ', σ'' in der w -Ebene konvergieren. Und wir haben daher nur zu untersuchen, unter welchen Umständen für eine solche Folge von Punktepaaren eine der Differenzen $B_0 - A_0, B_1 - A_1, B_2 - A_2$ von Null verschieden sein kann.

Es sei zuförderst bemerkt, dass nach (14, I) sicher $A_0 = B_0$ ist. Ist nun $A_0 = B_0 = \pi$, so muss offenbar $B_1 = A_1 = B_2 = A_2 = 0$ sein. Es sei nun $0 < A_0 = B_0 < \pi$. Dann verschwindet von einem ν an keiner der Winkel $\alpha_1^{(\nu)}, \beta_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \beta_2^{(\nu)}$. Der Sinussatz, angewandt auf die Dreiecke $z_0 z_1^{(\nu)} z_2^{(\nu)}, w_0 w_1^{(\nu)} w_2^{(\nu)}$, liefert

$$(25, 1) \quad \left| \frac{z_1^{(\nu)} - z_0}{z_2^{(\nu)} - z_0} \right| = \frac{\sin \alpha_2^{(\nu)}}{\sin \alpha_1^{(\nu)}} \rightarrow q, \quad \left| \frac{w_1^{(\nu)} - w_0}{w_2^{(\nu)} - w_0} \right| = \frac{\sin \beta_2^{(\nu)}}{\sin \beta_1^{(\nu)}} \rightarrow q.$$

Andererseits aber können, wegen $0 < A_1 + A_2 = B_1 + B_2 = \pi - A_0 < \pi$, $\sin A_1$ und $\sin A_2$ nicht zugleich verschwinden, ebenso wie $\sin B_1$ und $\sin B_2$. Daher gilt sicher

$$(25, 2) \quad \frac{\sin A_2}{\sin A_1} = q = \frac{\sin B_2}{\sin B_1}.$$

Und hieraus folgt $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$ unmittelbar für $q = 0$ oder $q = \infty$. Ist aber q von 0 und ∞ verschieden, so folgt bekanntlich aus (25, 2)

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A_2 - A_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A_2 + A_1}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B_2 - B_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B_2 + B_1}{2}}$$

oder $\operatorname{tg} \frac{A_2 - A_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{B_2 - B_1}{2}$, $A_2 - A_1 = B_2 - B_1$, $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$. Es bleibt nur noch der Fall $A_0 = B_0 = 0$ zu untersuchen.

Für $A_0 = B_0 = 0$ ist der Fall $q \neq 1$ sofort zu erledigen. Wir können dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $q < 1$ ist. Wäre nun etwa $0 < A_1 < \pi$, so würde daraus folgen, wegen $A_2 = \pi - A_1 - A_0$, nach (25, 1)

$$q = \frac{\sin A_2}{\sin A_1} = \frac{\sin(\pi - A_1)}{\sin A_1} = 1,$$

entgegen der Annahme. Daher muss A_1 gleich 0 oder π sein, für $q < 1$ also, da dann von einem ν an, wegen (25, 1), die $\alpha_1^{(\nu)}$ gegenüberliegende Seite des Dreiecks $z_0 z_1^{(\nu)} z_2^{(\nu)}$ grösser als die andere an z_0 anstossende Seite ist, $A_1 = \pi$, $A_2 = 0$. Genau ebenso ergibt sich $B_1 = \pi$, $B_2 = 0$, womit (24, 1) auch in diesem Falle bewiesen ist.

Es sei $A_0 = B_0 = 0$, $q = 1$. Fällt dann die gemeinsame Grenzrichtung σ'_1, σ''_1 in das Innere des Eckenwinkels von G_1 bei z_0 , so folgt (24, 1) aus dem am Schlusse von Nr. 15 Gesagten (vgl. (15, 1)). Fällt ferner die gemeinsame Richtung σ'_1, σ''_1 in eine der beiden Tangentenrichtungen der Ecke von G_1 in z_0 , sind aber die beiden Tangentenrichtungen dieser Ecke verschieden (ist also $\gamma_1 < 2\pi$), so bleiben, wenn der zugehörige Randbogen von G_1 mit C_1 bezeichnet wird und H eine Halbumbgebung von z_0 an C ist, $z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}$ für hinreichend grosse ν in $H + C$,

und in diesem Falle folgt die Behauptung des Satzes aus dem Lemma 2 der Nr. 20.

Es sei nun $\gamma_1 = 2\pi$, es möge aber jede Strecke $z_1^{(\nu)} z_2^{(\nu)}$ nur einen der beiden in z_0 zusammenstossenden Randbogen von G_1 treffen. Ferner seien H', H'' irgendwie gewählte halbseitige Umgebungen von z_0 an den in z_0 zusammenstossenden Randbogen C_1', C_1'' von G_1 . Dann müssen von einem ν an beide Punkte $z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}$ in einer und derselben, vielleicht mit ν variablen, der beiden Mengen $H' + C_1', H'' + C_1''$ liegen. Nach dem Auswahlssatz dürfen wir dann annehmen, dass alle Punktepaare $z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}$ in einer festen dieser Mengen liegen, etwa in $H' + C_1'$. Dann ergibt sich aber unsere Behauptung wiederum aus dem Lemma 2 der Nr. 20.

Damit ist der Satz IX vollständig bewiesen. Was aber den in seiner Formulierung angegebenen Ausnahmefall anbetrifft, so ist es leicht, sich an einem Beispiel zu überzeugen, dass in ihm der Satz IX in der Tat nicht zu gelten braucht.

Hierzu betrachte man den Einheitskreis K_z der z -Ebene, der aber längs des nach $z=1$ führenden Radius aufgeschnitten wird. Wird das so entstehende Gebiet K_z^* und das analoge Gebiet in der w -Ebene mit K_w^* bezeichnet, so bilde man K_z^* auf K_w^* derart ab, dass $z=0$ in $w=0$ übergeht, dass aber vom Nullpunkt verschiedene und ihm genügend benachbarte, einander gegenüberliegende Punkte auf den beiden Ufern des Einschnittes von K_z^* jedesmal in zwei Randpunkte von K_w^* übergehen, die nicht mehr einander gegenüberliegen. — Hierzu genügt es die Abbildungsfunktion so zu wählen, dass sie nicht die Form $w = z$ hat. —

Es seien nun z_1, z_2 zwei von z_0 verschiedene, einander gegenüberliegende Punkte der beiden Ufer des Einschnittes von K_z^* . Ihre Bildpunkte in K_w^* seien w_1, w_2 und es mögen z_1, z_2 so nahe beim Nullpunkt liegen, dass w_1, w_2 auch auf den beiden Ufern des Einschnittes von K_w^* liegen. Es liege etwa w_1 näher zum Nullpunkt als w_2 . Sind dann w_1', w_2' hinreichend nahe bei w_1, w_2 liegende Punkte von K_w^* aus den entsprechenden Halbumgebungen von w_1, w_2 , so unterscheiden sich die Winkel des Dreiecks $0 w_1' w_2'$ beliebig wenig $0, \pi, 0$. Die entsprechenden Punkte z_1', z_2' in der Nähe von z_1, z_2 lassen sich offenbar aber so wählen, dass die analogen Winkel des Dreiecks $0 z_1' z_2'$ sich beliebig wenig von $0, 0, \pi$ unterscheiden.

26. *Seitenähnlichkeit bei der Dreiecksabbildung.* Wir sind nunmehr imstande, die dem Satz VIII entsprechenden Tatsachen über das asymptotische Verhalten der z_0, w_0 gegenüberliegenden Seiten der Dreiecke $z_0 z_1 z_2, w_0 w_1 w_2$ zu formulieren und zu beweisen.

Satz X. Es sei unter den Voraussetzungen des Satzes IV $\gamma = \gamma_1 > 0$. c sei eine beliebige positive Konstante. D sei eine Winkelumgebung von z_0 in G_1 . $z_1, z_2, z_1 \neq z_2$, sei ein Punktepaar aus D mit $z_1 \rightarrow z_0, z_2 \rightarrow z_0$ und

$$(26, 1) \quad \left| \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| \leq c.$$

Es sei $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$.

a) *Es gilt*

$$(26, 2) \quad \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_0} \sim \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_0}.$$

b) *Hat ein an z_0 anstossendes Randstück C_1 von G_1 in z_0 eine L-Tangente, ebenso wie sein Bildbogen in w_0 , und ist H eine Halbumgebung von C_1 in G_1 , so bleibt (26, 2) richtig, wenn die Winkelumgebung D durch die Menge $H + C_1$ ersetzt wird, wenn dabei für keine Unterfolge von Punktepaaren z_1, z_2 $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \rightarrow 1$ gilt.*

c) *Haben alle vier in z_0 und w_0 zusammenstossenden Randbogen von G_1 und G dort L-Tangenten, so darf in der obigen Formulierung die Winkelumgebung D durch eine allseitige Umgebung von z_0 in G_1 ersetzt werden, zu der dabei auch noch die Randpunkte von G_1 , die zugleich zum Rand dieser Umgebung gehören, hinzugezählt werden können, sofern für keine Unterfolge von Punktepaaren z_1, z_2 $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \rightarrow 1$ gilt.*

Bemerkungen. 1) Legt man die Voraussetzungen des Satzes IV^o zugrunde, so bleibt für $\gamma = \gamma_1$ die Behauptung a) des Satzes X richtig, wenn D den in jenem Satz formulierten Bedingungen genügt. Und ebenso bleibt die Behauptung b) richtig, wenn unter D eine entsprechend zu definierende halbseitige Umgebung eines der in der Formulierung von IV^o eingeführten Jordanbogen L'_1, L''_1 verstanden wird. — In der Tat folgt aus der Formulierung des Satzes IV^o, dass man in diesem Falle unsere Behauptungen ohne weiteres aus dem Satz X herleiten kann.

2) Beim Beweis von (26, 2) genügt es in allen Fällen des Satzes X, nur die Äquivalenz der absoluten Beträge zu beweisen (wovon in der nächsten Nummer, beim Beweis eines Spezialfalles von a) Gebrauch gemacht werden wird):

$$(26, 3) \quad \left| \frac{\frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_0}}{z_1 - z_2} \right| \rightarrow 1,$$

da ja der auf die Argumente der beiden Seiten von (26, 2) bezügliche Teil der Behauptung im Satze IX enthalten ist.

27. *Beweis von a) für eine Dreiecks Umgebung.* Wir beweisen zuerst a) für den Spezialfall, dass D eine Dreiecks Umgebung ist und über (26, 1) hinaus die Voraussetzung (21, 1) mit positiven c_1, c_2 gilt. Es genügt zu beweisen, dass

$$(27, 1) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{\frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_0}}{z_1 - z_2} \right| \leq 1$$

ist, da daraus, wenn man die Gebiete G_1 und G miteinander vertauscht, sich eine symmetrische Ungleichung für den Lim und damit (26, 3) unmittelbar ergibt. Nun ist aber die Länge der Strecke $w_1 w_2$ höchstens gleich der Länge des Bildbogens von $z_1 z_2$. Daher folgt

$$|w_1 - w_2| \leq \int_{z_1}^{z_2} \left| \frac{dw}{dz} \right| dz,$$

wo geradlinig von z_1 nach z_2 zu integrieren ist. Hier lässt sich aber $\left| \frac{dw}{dz} \right|$ auf Grund des Randverzerrungssatzes (vgl. (11, 3)) durch

$$(1 + \varepsilon) \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right|$$

abschätzen, wo ε , ebenso wie später $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, eine Funktion von z_1 und z_2 ist, die mit $z_1 - z_0$ und $z_2 - z_0$ gleichmässig nach 0 konvergiert. Daher ergibt sich nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$|w_1 - w_2| \leq (1 + \varepsilon_1) |z_1 - z_2| \left| \frac{w' - w_0}{z' - z_0} \right|,$$

wo z' ein Punkt der Strecke $z_1 z_2$ ist und w' sein Bildpunkt. Nun ist die Be-

dingung (21, 1) des Satzes VIII offenbar auch für das Punktepaar z', z_2 erfüllt, so dass in (21, 2) z_1 durch z' , $f(z_1)$ durch w' ersetzt werden kann. Daher ergibt sich weiter

$$|w_1 - w_2| \leq (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) |z_1 - z_2| \left| \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} \right|,$$

womit (27, 1) bewiesen ist.

28. *Beweis des Satzes X.* Wenn (26, 3) nicht gilt, gibt es nach dem Auswahlprinzip eine den entsprechenden Voraussetzungen genügende Folge von Punktepaaren, für die die linke Seite von (26, 3) einen von 1 verschiedenen evtl. unendlichen Grenzwert hat. Und dies gilt dann auch für jede unendliche Unterfolge dieser Folge. Wir dürfen daher annehmen, dass für die Folge von Punktepaaren $z_1^{(v)}, z_2^{(v)}$ folgendes zutrifft:

1) Sind $w_1^{(v)}, w_2^{(v)}$, die Bilder von $z_1^{(v)}, z_2^{(v)}$, so konvergieren die sechs Winkel $\alpha_0^{(v)}, \alpha_1^{(v)}, \alpha_2^{(v)}$; $\beta_0^{(v)}, \beta_1^{(v)}, \beta_2^{(v)}$ der Dreiecke $z_0 z_1^{(v)} z_2^{(v)}$, $w_0 w_1^{(v)} w_2^{(v)}$ resp. gegen A_0, A_1, A_2 ; B_0, B_1, B_2 , wo nach (24, 1) $A_0 = B_0, A_1 = B_1, A_2 = B_2$ ist.

$$2) \quad (28, 1) \quad \frac{z_1^{(v)} - z_0}{z_2^{(v)} - z_0} \rightarrow q, \quad \frac{w_1^{(v)} - w_0}{w_2^{(v)} - w_0} \rightarrow q_1, \quad q = q_1,$$

wo q wegen (26, 1) von ∞ verschieden ist. Dass die beiden Grenzwerte bei 2) identisch sind, folgt aus dem Satz VIII und $A_0 = B_0$.

3) Die Richtungen der Halbstrahlen $z_0 z_1^{(v)}, z_0 z_2^{(v)}$; $w_0 w_1^{(v)}, w_0 w_2^{(v)}$ konvergieren gegen die Richtungen der Halbstrahlen σ'_1, σ''_1 in der z -Ebene bzw. σ', σ'' in der w -Ebene.

Ist nun $q \neq 1$, so folgt aus den Formeln

$$\frac{w_2^{(v)} - w_1^{(v)}}{w_2^{(v)} - w_0} = 1 - \frac{w_1^{(v)} - w_0}{w_2^{(v)} - w_0} \rightarrow 1 - q,$$

$$\frac{z_2^{(v)} - z_1^{(v)}}{z_2^{(v)} - z_0} = 1 - \frac{z_1^{(v)} - z_0}{z_2^{(v)} - z_0} \rightarrow 1 - q$$

(26, 2) unmittelbar. Für $q = 1$ aber kommt nur der Fall a) in Betracht. Hier muss dann nach 3) der Halbstrahl $\sigma'_1 = \sigma''_1$ in einer Winkel-, daher auch in einer Dreiecksumgebung von z_0 liegen, sodass in diesem Falle (26, 3) aus dem in Nr. 27 Bewiesenen folgt. Damit ist der Beweis des Satzes X vollendet.

29. *Eine Bemerkung zum Satz X.* Wird unter den Annahmen des Satzes X

$$(29, 1) \quad \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_0} \rightarrow 0$$

vorausgesetzt, so folgt, wenn man auf beiden Seiten dieser Relation 1 addiert und den Satz VIII berücksichtigt,

$$(29, 2) \quad \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \rightarrow 1, \quad \frac{w_1 - w_0}{w_2 - w_0} \rightarrow 1,$$

und daher, wenn von den beiden Seiten der letzten Relation 1 abgezogen wird,

$$(29, 3) \quad \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_0} \rightarrow 0.$$

Dabei darf hierin das Punktepaar z_1, z_2 , je nach den Annahmen über die Beschaffenheit des Randes, über eine Winkelumgebung bzw. eine halbseitige oder allseitige Umgebung von z_0 gegen z_0 konvergieren.

§ 6. Vereinzelte Korollare zum Randverzerrungssatz.

30. *Satz von der Winkelableitung. Satz XI.* Unter den Voraussetzungen des Satzes IV sei $\gamma > 0$ und es möge der Grenzwert

$$(30, 1) \quad \text{Lim} \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} = \lambda$$

existieren, wenn z aus dem Innern von G_1 im Winkel gegen z_0 konvergiert, mag dabei λ endlich oder unendlich sein. Dann gilt

$$(30, 2) \quad f'(z) \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1} \lambda,$$

wenn z im Winkel gegen z_0 strebt. Umgekehrt folgt (30, 1) aus (30, 2).²³

Der Satz XI ist eine unmittelbare Folge der Formel (II, 3) des Randverzerrungssatzes. Dass (30, 2) aus (30, 1) folgt, ist für endliche λ und $\gamma_1 = \pi$ ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes von VALIRON, dessen Beweis von AHLFORS

²³ Für $G_1 = E_z$, $\gamma = \gamma_1 = \pi$ findet sich dieser Satz bei VISSER (2), p. 37 unten.

ausführlich entwickelt wurde.²⁴ Für $\lambda = \infty$ dagegen sind die beiden angegebenen Tatsachen neu.

Wenn λ endlich ist, folgt aus

$$\frac{f(z) - w_0}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z f'(z) dz,$$

die Gültigkeit von (30, 2) vorausgesetzt,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} = \frac{\gamma}{\gamma_1} \lambda.$$

Daher muss wegen (30, 1) für $\gamma \neq \gamma_1$ entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = \infty$ sein. Es wird sich übrigens später ergeben, dass (30, 1) und (30, 2) für $\gamma > \gamma_1$ stets mit $\lambda = 0$ gelten und für $\gamma < \gamma_1$ stets mit $\lambda = \infty$. (Vgl. Satz XXI, Nr. 62.)

Über den Fall $\gamma = 0$ vgl. Nr. 68.

31. *Verschärfung einer Ungleichung von Herrn S. Warschawski.* Herr S. Warschawski hat vor einigen Jahren die folgende Tatsache gefunden²⁵:

Es sei C eine geschlossene Jordankurve in der w -Ebene, die in einem Randpunkt w_0 eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau < 2$, besitzt. $z = \varphi(w)$ bildet das Innere G von C auf E_z konform ab. W bezeichne den von zwei von w_0 ausgehenden, symmetrisch zur Winkelhalbierenden der Ecke in w_0 verlaufenden Strahlen gebildeten

Winkel der Öffnung 2ψ , $0 \leq \psi < \frac{\pi\tau}{2}$. Genügt dann C in der Nähe von w_0 einer gewissen Bedingung — der Bedingung der »linearen Unbewalltheit« — so gibt es drei positive Konstanten K, K', q , unter denen K, K' von ψ unabhängig sind, sowie zu jedem $w \neq w_0$ auf C mit $|w - w_0| \leq q$ zwei positive Zahlen R, R' , die mit $w \rightarrow w_0$ gegen 0 konvergieren, so dass für alle Punkte c in W und G mit $|c - w_0| = R$, und alle Punkte c' in W und G mit $|c' - w_0| = R'$ die Relation gilt:

$$(31, 1) \quad K \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_0)|}{|c - w_0|^{1/\tau}} \cos^2 \frac{\psi}{\tau} \leq \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_0)|}{|w - w_0|^{1/\tau}} \leq K' \frac{|\varphi(c') - \varphi(w_0)|}{|c' - w_0|^{1/\tau}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\psi}{\tau}}$$

Mit Hilfe des Satzes VIII sieht man nun leicht ein, dass in dieser Ungleichung die Faktoren $\cos^2 \frac{\psi}{\tau}$ und $\frac{1}{\cos^2 \frac{\psi}{\tau}}$ weggelassen werden können, wenn man

²⁴ Vgl. VALIRON (2), p. 72; AHLFORS (1), pp. 28—29.

²⁵ WARSCHAWSKI (1), pp. 361, 369.

die Konstanten K, K' mit gewissen Faktoren multipliziert, die gegen 1 konvergieren, wenn c und c' gegen w_0 streben.

In der Tat ergibt sich, wenn $c = c_0$ und $c' = c_0'$ auf der Winkelhalbierenden des Eckenwinkels in w_0 angenommen werden, da dann ja $\psi = 0$ gesetzt werden kann,

$$(31, 2) \quad K \frac{|\varphi(c_0) - \varphi(w_0)|}{|c_0 - w_0|^{1/\tau}} \leq \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_0)|}{|w - w_0|^{1/\tau}} \leq K' \frac{|\varphi(c_0') - \varphi(w_0)|}{|c_0' - w_0|^{1/\tau}}.$$

Andererseits folgt aus (21, 2)

$$(31, 3) \quad \frac{|\varphi(c_0) - \varphi(w_0)|}{|c_0 - w_0|^{1/\tau}} = \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_0)|}{|c - w_0|^{1/\tau}} (1 + \varepsilon),$$

und

$$(31, 4) \quad \frac{|\varphi(c_0') - \varphi(w_0)|}{|c_0' - w_0|^{1/\tau}} = \frac{|\varphi(c') - \varphi(w_0)|}{|c' - w_0|^{1/\tau}} (1 + \varepsilon'),$$

wo ε' und ε gegen 0 streben, wenn c_0, c_0' gegen w_0 konvergieren. Setzt man nun (31, 3) und (31, 4) in (31, 2) ein, so ergibt sich unsere Behauptung sofort.²⁶

32. *Asymptotisches Verhalten der höheren Ableitungen von $f(z)$.* Unter den Voraussetzungen des Satzes VIII lässt sich aus den Relationen (21, 2) und (21, 3) eine interessante Folgerung ziehen. Wir setzen

$$z_1 = z, \quad z_2 = z + t(z_0 - z),$$

so dass

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = 1 - t$$

ist. Strebt nun z gegen z_0 innerhalb eines Winkelraumes mit der Spitze in z_0 , dessen Schenkel zur Winkelhalbierenden der inneren Ecke von G_1 in z_0 unter einem Winkel $\omega < \frac{\gamma_1}{2}$ geneigt sind, und schränkt man t auf den Bereich

$$|t| \leq \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1}{2} - \omega \right)$$

²⁶ Es ist übrigens klar, dass die Formel (21, 2) des Satzes VIII im zweiten Unterfall des Falles d) dieses Satzes eine wesentliche Verschärfung der Warschawskischen Ungleichungen liefert, wenn die Kurve C in w_0 eine L -Tangente besitzt, bzw. wenn dies für die beiden in w_0 zusammenschliessenden Bogen von C zutrifft. — Wie ich von Hrn. WARSCHAWSKI nach Mitteilung des obigen Resultats erfahre, ergibt es sich auch direkt aus einem neuen von ihm inzwischen gefundenen Beweis seines Satzes.

ein, so bleibt auch z_2 in einer Winkelumgebung von z_0 , sobald z nahe genug bei z_0 liegt. Zugleich sind dann die Bedingungen (21, 1) erfüllt, so dass wegen (21, 2) und (21, 3)

$$(32, 1) \quad \frac{f(z + t(z_0 - z)) - f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \rightarrow (1 - t)^{\frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

$$(32, 2) \quad \frac{f'(z + t(z_0 - z))}{f'(z)} \rightarrow (1 - t)^{\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1}$$

gilt, wenn z im Winkel gegen z_0 strebt, und zwar *gleichmässig* in einer Umgebung von $t = 0$, deren Radius allerdings von der Winkelumgebung von z_0 abhängig ist, innerhalb deren z bleibt. Daher müssen in (32, 1) und (32, 2) auch die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von t links gegen die entsprechenden Koeffizienten rechts konvergieren. Die Koeffizienten bei t^v links und rechts sind aber resp.

$$\frac{(z_0 - z)^v}{v!} \frac{f^{(v)}(z)}{f(z) - f(z_0)}, \quad (-1)^v \binom{\frac{\gamma}{\gamma_1}}{v},$$

$$\frac{(z_0 - z)^v}{v!} \frac{f^{(v+1)}(z)}{f'(z)}, \quad (-1)^v \binom{\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1}{v},$$

so dass sich schliesslich für $v > 0$

$$(32, 3) \quad (z - z_0)^v \frac{f^{(v)}(z)}{f(z) - f(z_0)} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) \cdots \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - v + 1 \right),$$

$$(32, 4) \quad (z - z_0)^v \frac{f^{(v+1)}(z)}{f'(z)} \rightarrow \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 2 \right) \cdots \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - v \right)$$

ergibt, wenn z im Winkel gegen z_0 konvergiert. — Man übersieht übrigens sofort, dass die Formeln (32, 2), (32, 4) aus (32, 1), (32, 3) direkt vermöge der Formel (11, 3) des Randverzerrungssatzes folgen.

Dabei war bisher $\gamma > 0$ vorausgesetzt. Wir werden aber in der Nr. 64 beweisen, dass die Relation (21, 2) auch dann richtig bleibt, wenn unter den Voraussetzungen des Satzes VIII $0 = \gamma < \gamma_1$ ist. Daher gelten die Formeln (32, 1) und (32, 3) auch für $\gamma = 0$. Was aber die Formel (21, 3) anbetrifft, so gilt sie, wie wir in der Nr. 68 beweisen werden, auch für $\gamma = 0$, sofern die in z_0 und w_0 zusammenstossenden Randzweige von G_1 und G dort L -Tangenten besitzen. Daher gelten die Formeln (32, 2), (32, 4), sobald diese letzten Voraussetzungen erfüllt sind, auch für $0 = \gamma < \gamma_1$.

Teil II. Ergänzungssätze zum Randverzerrungssatz.

§ 7. Erste Erweiterung des Satzes I.

33. *Formulierung des Satzes XII.* Aus der Formel (7, 5) folgt sofort, dass, wenn die Funktion $\chi(\mathcal{D})$ des Satzes I auf einer \mathcal{D}_0 -Menge M gleichmässig stetig ist, dann auch die Relation (7, 4) gleichmässig für alle Punkte von M gilt. Denn es ist klar, dass man dann für alle Punkte \mathcal{D}_0 von M mit einer gemeinsamen Funktion $\lambda(\mathcal{D})$ — mit einem gemeinsamen »Lipschitzschen Modul« — auskommen kann. Andererseits ist es unerheblich, dass die Funktion $\chi(\mathcal{D})$ im *ganzen Intervall* $(-\pi, \pi)$ beschränkt ist, da es offenbar nur auf ihr Verhalten in der Nähe der Punkte von M ankommt. Und ebenso wenig braucht die Darstellbarkeit von $f(z)$ in der Gestalt (7, 2) vorausgesetzt zu werden, wenn $\chi(\mathcal{D})$ als Randwert im Winkel von $\Re f(z)$ in der Umgebung der Punkte von M vorausgesetzt wird.

Wir werden daher unsere Formulierung des Satzes I in folgender Weise erweitern:

Satz XII: Es sei $f(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre analytische Funktion, und es sei M eine solche Punktmenge auf E_z , dass $\Re f(z)$ für ein festes $\varepsilon > 0$ in der ε -Umgebung jedes Punktes von M innerhalb von K_z gleichmässig beschränkt ist, in der ε -Umgebung eines jeden Punktes von M auf E_z die Randwerte von $\Re f(z)$ bei Annäherung im Winkel existieren, bis auf Punkte einer gewissen auf E_z gelegenen Nullmenge, und eine in den Punkten von M gleichmässig stetige Funktion bilden. Dann gilt für $f'(z)$ bei allseitiger Annäherung aus K_z gegen die Punkte von M gleichmässig

$$(33, 1) \quad f'(z) = o\left(\frac{1}{1 - |z|}\right).$$

Hier kann M natürlich auch aus einem einzigen Punkt bestehen.

34. *Beweis.* In der Tat folgt aus den Voraussetzungen des Satzes XII, dass man auf E_z endlich viele getrennte, etwa zyklisch geordnete abgeschlossene Kreisbogen B_1, B_2, \dots, B_m derart angeben kann, dass erstens die Menge M samt ihren Häufungsstellen aus lauter innern Punkten der Kreisbogen B_μ besteht und dass zweitens $\Re f(z)$ in der Umgebung der abgeschlossenen Kreisbogen B_1, \dots, B_m innerhalb von E_z gleichmässig beschränkt ist. Bedeutet nun allgemein B_μ^* den zwischen B_μ und $B_{\mu+1}$ bzw. B_m und B_1 liegenden Kreisbogen von E_z , so lassen

sich die Endpunkte von jedem B_μ^* durch einen bis auf seine Endpunkte ganz innerhalb von E_z verlaufenden Kreisbogen α_μ verbinden, auf dem $\Re f(z)$ gleichmässig beschränkt ist. Bildet man nun das Innere des von den Kreisbogen B_μ und α_μ begrenzten Flächenstückes konform auf das Innere des Einheitskreises in der w -Ebene ab, so ist die Abbildungsfunktion $w = F(z)$ bekanntlich innerhalb der Kreisbogen B_μ regulär, und der absolute Betrag ihrer Ableitung ist in der Nähe der Punkte von M gleichmässig nach oben und unten durch positive Zahlen beschränkt. Daher geht $f(z)$ in eine Funktion $f_1(w)$ über, für die die Randfunktion von $\Re f_1(w)$ in der w -Ebene gleichmässig beschränkt und auf der ganzen Punktmenge M_1 , die der Menge M entspricht, gleichmässig stetig ist. Daher ist $f_1(w)$ in der w -Ebene evtl. nach Abzug einer geeigneten rein imaginären Konstanten durch das Poissonsche Integral vom Typus (7, 2) darstellbar, so dass nach Satz I die zu (7, 4), (7, 5) analogen Relationen gleichmässig in allen Punkten von M_1 gelten. Nach dem über die Ableitung der Abbildungsfunktion Gesagten gilt aber dann, wegen $f'(z) = f'_1(w) F'(z)$, auch die Relation (7, 4) bei allseitiger Annäherung an die Punkte von M gleichmässig auf M , wie behauptet.

§ 8. Zweite Erweiterung des Satzes I. (Durchschnittsstetigkeit).

35. *Asymptotische Abschätzungen von $I_n(z)$.* Für das Folgende brauchen wir eine Abschätzung des Integrals

$$(35, I) \quad I_n(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(1 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + r^2)^{\frac{n+2}{2}}}, \quad z = r e^{i\varphi}, \quad \frac{\pi}{4} > \varphi > -\frac{\pi}{4}, \quad n \geq 0.$$

Führen wir hier $\vartheta - \varphi = \vartheta_1$ als neue Integrationsvariable ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \cos \varphi \int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{n+2}{2}}} + \sin \varphi \int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \\ &= \cos \varphi J_1 + \sin \varphi J_2. \end{aligned}$$

Hier lässt sich aber J_1 direkt ausintegrieren, und man erhält für $n > 0$

$$-\frac{1}{rn} \frac{1}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{n}{2}}} \Big|_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} = \frac{1}{rn} \frac{1}{|1 - z|^n} - \frac{1}{rn} \frac{1}{(1 - 2r \sin \varphi + r^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Für $n = 0$ ergibt sich analog

$$\frac{1}{2r} \operatorname{I}g \left(1 - 2r \cos \vartheta + r^2 \right) \Big|_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

Zusammenfassend folgt:

$$(35, 2) \quad J_1 = \frac{1 + \varepsilon_1^{(n)}(z)}{n} \frac{1}{|1 - z|^n}, \quad n > 0; \quad J_1 = (1 + \varepsilon_1(z)) \operatorname{I}g \frac{1}{|1 - z|}, \quad n = 0,$$

wo $\varepsilon_1^{(n)}, \varepsilon_1(z)$, ebenso wie später $\varepsilon_2(z), \varepsilon_3(z), \dots$ gegen Null konvergieren, wenn z gegen 1 strebt. Für das Integral J_2 erhalten wir

$$(35, 3) \quad J_2 = \int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2} - \varphi} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{n+2}{2}}} + O \left(\int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2} - \varphi} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{(1 - 2r \cos \vartheta + r^2)^{\frac{n+2}{2}}} \right),$$

da, wie man leicht nachprüft, für $-\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{4}$

$$\cos \vartheta - \cos \frac{\vartheta}{2} = O \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) = O \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

ist. Die Integrale rechts in (35, 3) aber gehen, $\sin \frac{\vartheta}{2} = \gamma, 1 - r = \rho$ gesetzt, über in

$$2 \int_{-\sin \frac{\varphi}{2}}^{\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \frac{d\gamma}{(V \rho^2 + 4r\gamma^2)^{n+2}} \quad \text{bzw.} \quad 2 \int_{-\sin \frac{\varphi}{2}}^{\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \frac{\gamma^2 d\gamma}{(V \rho^2 + 4r\gamma^2)^{n+2}}.$$

Setzt man aber hier $2\sqrt{r}\gamma = \rho x$, so verwandeln sich diese Integrale in

$$\frac{2\sqrt{r} \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{2\sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}} \frac{1}{\rho} \int_{\frac{2\sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}}{\rho}}^{\rho} \frac{dx}{(1 + x^2)^{\frac{n+2}{2}}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2\sqrt{r} \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{2\sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}} \frac{1}{4r^2 \rho^{n-1}} \int_{\frac{2\sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}}{\rho}}^{\rho} \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^{\frac{n+2}{2}}},$$

so dass für $n \geq 0$

$$(35, 4) \quad J_2 = \frac{1 + \varepsilon_2(z)}{e^{n+1}} \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}} + \operatorname{sgn} \varphi \int_0^e \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}} \right) + O \left(\frac{1}{e^{n-1}} \int_1^e \frac{dx}{x^n} \right)$$

ist.

Ist nun, wie im Satz III (Nr. 10), $\psi = -\arg(1-z)$, $\frac{\pi}{2} > \psi > -\frac{\pi}{2}$, so ergibt sich unter Benutzung der Formel (10, 5)

$$(35, 5) \quad e^n I_n(z) = \frac{\cos^n \psi}{n} + \frac{(1 + \varepsilon_3(z)) \varphi}{e} \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}} + \operatorname{sgn} \varphi \int_0^e \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}} \right) + \varepsilon_4(z), \quad n > 0. \text{ }^{27}$$

$$(35, 6) \quad I_0(z) = (1 + \varepsilon_5(z)) \lg \left| \frac{1}{1-z} \right| + \frac{\varphi}{e} (1 + \varepsilon_6(z)) \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}}{e} \right) \right).$$

In (35, 5) konvergiert der erste Summand rechts sicher gegen Null, falls mit $z \rightarrow 1$ zugleich $|\psi|$ gegen $\frac{\pi}{2}$ strebt. Sein $\overline{\operatorname{Lim}}$ ist aber auf jeden Fall $\leq \frac{1}{n}$. Der zweite Summand in (35, 5) und (35, 6) verhält sich aber verschieden, je nachdem φ — und damit auch ψ — positiv oder negativ ist. Ist φ positiv, so liegt der Wert der Klammer zwischen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}} \quad \text{und} \quad 2 \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}}, \quad n \geq 0.$$

Bleibt dann $|\psi|$ kleiner als eine feste Zahl $< \frac{\pi}{2}$ — dies läuft darauf hinaus, dass

²⁷ Die Werte des Integrals $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}}$ sind bekanntlich

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n-2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n-2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

je nachdem ob n gerade oder ungerade > 1 ist. Für $n = 1$ ist sein Wert = 1.

z im Winkel gegen 1 strebt — so ist dann, wegen der ersten Formel (10, 7), wenn dort ϑ durch ϱ ersetzt wird, $\frac{\varrho}{\rho} = \operatorname{tg} \psi + O(\varrho)$, so dass

$$(35, 7) \quad \varrho^n I_n(z) = \frac{\cos^n \psi}{n} + \operatorname{tg} \psi \int_{-\psi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx + \varepsilon_7(z), \quad |\psi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0, \quad n > 0;$$

$$(35, 8) \quad I_0(z) = (1 + \varepsilon_8(z)) \lg \left| \frac{1}{1-z} \right|, \quad |\psi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0$$

wird.²⁸ Und die gleichen Formeln gelten auch für negative ϱ , solange z gegen 1 im Winkel strebt.

Wir erhalten daher insbesondere für $z \rightarrow 1$, $n > 0$, $|\psi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$:

$$(35, 9) \quad \varrho^n I_n(z) \leq \gamma_n(\delta) + \varepsilon_7(z),$$

$$(35, 90) \quad \gamma_n(\delta) \leq \frac{1}{n} + \operatorname{ctg} \delta \int_{-\frac{\pi}{2} + \delta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx.$$

Nähert sich aber ψ dem Werte $\frac{\pi}{2}$, so nimmt der Faktor $\frac{\varrho}{\rho}$ und mit ihm die rechten Seiten von (35, 7) und (35, 90) beliebig grosse Werte an.

Ist dagegen ϱ negativ und kommt dann ψ dem Werte $-\frac{\pi}{2}$ beliebig nahe, so sind die Integrale in den Klammern rechter Hand in (35, 5) und (35, 6) $O\left(\left(\frac{\varrho}{\varphi}\right)^{n+1}\right)$, so dass sich wegen (10, 7) ergibt:

$$(35, 91) \quad \varrho^n I_n(z) = O(\cos^n \psi) + \varepsilon_8(z), \quad -\frac{\pi}{4} > \psi > \frac{\pi}{2}, \quad n > 0,$$

$$(35, 92) \quad I_0(z) = (1 + \varepsilon_9(z)) \lg \left| \frac{1}{1-z} \right|, \quad \frac{\pi}{2} - \delta > \psi > -\frac{\pi}{2}$$

²⁸ Das Integral $\int_{-\operatorname{tg} \psi}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}}$ geht nämlich durch die Substitution $x = \operatorname{tg} y$ in das Integral

$$\int_{-\psi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n y \, dy \text{ über.}$$

Für das Integral aber

$$(35, 93) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{|\sin \vartheta| d\vartheta}{(1 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + r^2)^{\frac{n+2}{2}}} = I_n(\bar{z})$$

gelten offenbar die gleichen Abschätzungen (35, 9)—(35, 92), wenn in ihnen φ und ψ durch $-\varphi$, $-\psi$ ersetzt werden.

36. *Punkte der Durchschnittsstetigkeit von $\chi(\vartheta)$. Satz XIII. Es sei $\chi(\vartheta)$ eine im Intervall $(-\pi, \pi)$ nach LEBESGUE integrierbare Funktion, für die die Relation gilt*

$$(36, 1) \quad \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \chi(\vartheta) d\vartheta \rightarrow \chi(\vartheta_0), \quad \vartheta \rightarrow \vartheta_0.$$

Bildet man mit Hilfe des Poissonschen Integrals die Funktion

$$(36, 2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta,$$

so gilt für ihre n -te Ableitung, $n \geq 1$,

$$(36, 3) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} \chi(\vartheta) d\vartheta}{(e^{i\vartheta} - z)^{n+1}},$$

wenn z aus dem Innern von E_z im Winkel gegen $z_0 = e^{i\vartheta_0}$ strebt:

$$(36, 4) \quad (z - z_0)^n f^{(n)}(z) \rightarrow 0.$$

Die Behauptung gilt gleichmäßig für eine Punktmenge M von Punkten $e^{i\vartheta_0}$ auf E_z , für die $\chi(\vartheta)$ gleichmäßig beschränkt ist und die Relation (36, 1) gleichmäßig gilt. Dabei ist natürlich zu verlangen, dass die Winkel, innerhalb deren z jeweils gegen $e^{i\vartheta_0}$ strebt, gleiche Öffnungen haben und ähnlich in bezug auf die entsprechenden Radien liegen.²⁹

37. *Beweis.* Nach Voraussetzung ist das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(\vartheta)| d\vartheta$ beschränkt,

²⁹ Für $n = 1$ findet sich (36, 4) in LICHTENSTEIN (2), p. 20.

und wir können offenbar $\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(\vartheta)| d\vartheta \leq \frac{1}{2}$ annehmen. Ebenso können wir an-

nehmen, dass $|\chi(\vartheta)| \leq \frac{1}{2}$ auf der ganzen Menge M gilt. Wir denken uns nun die Funktion $\chi(\vartheta)$ über die ganze Zahlengerade fortgesetzt auf Grund der Forderung der Periodizität mit der Periode 2π und bilden die Funktion

$$(37, 1) \quad \Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} [\chi(\vartheta + \vartheta_0) - \chi(\vartheta_0)] d\vartheta, \quad -\pi < \vartheta \leq \pi.$$

Dann liefert die partielle Integration

$$(37, 2) \quad f(z) - \chi(\vartheta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(\vartheta+\vartheta_0)} + z}{e^{i(\vartheta+\vartheta_0)} - z} [\chi(\vartheta + \vartheta_0) - \chi(\vartheta_0)] d\vartheta = \\ = \frac{iz}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(\vartheta+\vartheta_0)}}{(e^{i(\vartheta+\vartheta_0)} - z)^2} \Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(\vartheta+\vartheta_0)} + z}{e^{i(\vartheta+\vartheta_0)} - z} \Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) \Big|_{-\pi}^{\pi}.$$

Hier ist aber das letzte Glied auf der rechten Seite gleich

$$\frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(\pi+\vartheta_0)} + z}{e^{i(\pi+\vartheta_0)} - z} (\Phi_{\vartheta_0}(\pi) - \Phi_{\vartheta_0}(-\pi)) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\vartheta_0} - z}{e^{i\vartheta_0} + z} \int_{-\pi}^{\pi} (\chi(\vartheta + \vartheta_0) - \chi(\vartheta_0)) d\vartheta = \\ = \left(\frac{2z_0}{z + z_0} - 1 \right) \kappa, \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(\vartheta) d\vartheta - \chi(\vartheta_0).$$

Daher ergibt sich durch n -malige Differentiation von (37, 2)

$$(37, 3) \quad f^{(n)}(z) = \frac{(n+1)! iz}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} z_0}{(e^{i\vartheta} z_0 - z)^{n+2}} \Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) d\vartheta + \\ + \frac{n! ni}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} z_0}{(e^{i\vartheta} z_0 - z)^{n+1}} \Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) d\vartheta + (-1)^n 2z_0 n! \kappa \frac{1}{(z + z_0)^{n+1}}.$$

Es genügt daher zu beweisen, dass aus $\Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) = o(\vartheta)$ für $\vartheta \rightarrow 0$

$$(1-z)^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta}-z)^{n+2}} \Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) d\vartheta = o(1)$$

folgt, wenn z im Winkel gegen 1 strebt. Setzt man aber $\Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) = \vartheta \Psi(\vartheta)$, so folgt für $z = r e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} \Phi_{\vartheta_0}(\vartheta) d\vartheta}{(e^{i\vartheta}-z)^{n+2}} \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\vartheta| |\Psi(\vartheta)| d\vartheta}{(r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + 1)^{\frac{n+2}{2}}}$$

Ist nun $|\Psi(\vartheta)| \leq \varepsilon$ für $|\vartheta| \leq d$, $\frac{\pi}{2} > d > 0$, und beachten wir, dass für alle ϑ nach der Annahme $|\Phi_{\vartheta_0}(\vartheta)| \leq 1$ ist, so folgt

$$(37, 4) \quad \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\vartheta \Psi(\vartheta) d\vartheta}{(r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + 1)^{\frac{n+2}{2}}} \right| \leq 2 \int_d^{\pi} \frac{d\vartheta}{(r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + 1)^{\frac{n+2}{2}}} + \\ + 2\varepsilon \int_0^d \frac{\vartheta d\vartheta}{(r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + 1)^{\frac{n+2}{2}}}$$

Da aber für $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ stets $\vartheta < \frac{\pi}{2} \sin \vartheta$ ist und das erste Integral rechter Hand in (37, 4) für $z \rightarrow 1$ gegen eine endliche, nur von d abhängige Konstante strebt, folgt weiter wegen (35, 9)

$$\overline{\text{Lim}} (1-r)^n \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\vartheta \Psi(\vartheta) d\vartheta}{(r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + 1)^{\frac{n+2}{2}}} \right| \leq \pi \varepsilon \gamma_n(\delta),$$

wenn z derart im Winkel gegen 1 strebt, dass $|\psi| = |\arg(1-z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ bleibt.

Und da hier ε beliebig klein angenommen werden kann, folgt wegen (35, 90) die Behauptung des Satzes.

38. *Die Schwankung von $f(z)$.* Bildet man unter den Voraussetzungen von Satz XIII die Funktion (36, 2) für $|z| < 1$, so konvergiert $\Re f(z)$ nach Fatou, wenn z im Winkel gegen $e^{i\vartheta_0}$ strebt, gegen $\chi(\vartheta_0)$. Dagegen braucht dann be-

kanntlich $\Im f(z)$ keinem Grenzwert zuzustreben; es sind vielmehr für die Existenz des Grenzwertes von $\Im f(z)$ weitere Zusatzbedingungen nötig. Wir wollen nun eine Aussage beweisen, die bereits unter den Voraussetzungen von Satz XIII für $\Im f(z)$ oder, was auf das Gleiche hinausläuft, für $f(z)$ selbst gilt. Sie liefert Aufschluss über die Schwankung der Werte von $f(z)$ in der Nähe von $e^{i\vartheta_0}$.

Satz XIV: Unter den Voraussetzungen von Satz XIII gilt, wenn z_1, z_2 im Winkel gegen $z_0 = e^{i\vartheta_0}$ streben und zugleich $\left| \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_1} \right|$ zwischen beliebigen aber festen positiven Schranken bleibt,

$$(38, 1) \quad f(z_1) - f(z_2) \rightarrow 0,$$

und die Relation (38, 1) gilt ebenso wie der Satz XIII gleichmässig für eine Menge M der Punkte \mathcal{D}_0 , für die die Voraussetzungen über $\chi(\vartheta)$ gleichmässig gelten.

Beweis: Es sei ε eine beliebige positive Zahl. Sind dann die Punkte z_1, z_2 bereits so nahe bei z_0 , dass für jeden Punkt z der Strecke $z_1 z_2$ die Relation

$$(38, 2) \quad |f'(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1 - |z|}$$

gilt, so folgt

$$(38, 3) \quad |f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz \right| \leq \varepsilon \frac{|z_2 - z_1|}{m},$$

wo m der kleinste Wert von $1 - |z|$ für einen der Punkte der Strecke $z_1 z_2$ ist. Nun wird aber für eine innerhalb von E_z gelegene Strecke die kürzeste Distanz von E_z stets für einen der Endpunkte der Strecke erreicht, da eine Strecke ja stets innerhalb eines Kreises liegt, in dem ihre beiden Endpunkte liegen. Ist daher etwa $m = 1 - |z_1|$, so folgt aus (38, 3) weiter

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &\leq \varepsilon \frac{|z_0 - z_1| + |z_0 - z_2|}{1 - |z_1|} \leq \varepsilon C \frac{|z_0 - z_2| + |z_0 - z_1|}{|z_0 - z_1|} \leq \\ &\leq \varepsilon C \left(1 + \frac{|z_0 - z_2|}{|z_0 - z_1|} \right), \end{aligned}$$

wo die Konstante C allein vom Winkel abhängt, innerhalb dessen z_1 und z_2 gegen z_0 streben. Nach Voraussetzung über den Quotienten $\left| \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_1} \right|$ aber folgt hieraus die Behauptung, da ε beliebig klein gewählt werden kann.

Aus dem Satz XIV folgt leicht der bekannte Satz von PRINGSHEIM, dass, wenn die Fourierreihe von $\chi(\vartheta)$ in $\vartheta = \vartheta_0$ konvergiert, die zu $\chi(\vartheta)$ konjugierte Funktion in $\vartheta = \vartheta_0$ keine einfache Sprungsingularität haben kann. Sonst würde nämlich $f(z)$ längs jeder von $e^{i\vartheta_0}$ ausgehenden Sehne einen Grenzwert haben, der sich linear mit dem Sehnenwinkel änderte, was dem Satz XIV widerspricht. — Zu einer analogen Fragestellung vgl. J. WOLFF, (3).

§ 9. Dritte Erweiterung des Satzes I (Durchschnittsendlichkeit).

39. *Abschätzung von $f^{(n)}(z)$ für einen speziellen Fall der Durchschnittsendlichkeit.* Wir wollen nun die Funktion

$$(39, 1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta$$

und ihre Ableitungen für $z \rightarrow 1$ unter der Voraussetzung abschätzen, dass $\chi(\vartheta)$ zwischen $-\pi$ und π nach Lebesgue integrabel ist und, $\int_0^{\vartheta} \chi(\vartheta) d\vartheta = \mathfrak{D}(\vartheta)$ gesetzt,

$$(39, 2) \quad \overline{\text{Lim}}_{\vartheta} \frac{\mathfrak{D}(\vartheta)}{\vartheta} = \pm k_+, \quad k_+ \geq 0, \text{ für } \vartheta \downarrow 0,$$

$$(39, 3) \quad \underline{\text{Lim}}_{\vartheta} \frac{\mathfrak{D}(\vartheta)}{\vartheta} = \pm k_-, \quad k_- \geq 0, \text{ für } \vartheta \uparrow 0$$

ist, d. h. also unter der Voraussetzung, dass die vier derivierten Zahlen von $\mathfrak{D}(\vartheta)$ an der Stelle $\vartheta = 0$ die Werte $\pm k_+$ für die rechtsseitigen bzw. $\pm k_-$ für die linksseitigen derivierten Zahlen haben.

Man beachte zuerst, dass, wenn wir die Integrationsgrenzen in (39, 1) durch $-\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2}$ ersetzen, $f(z)$ sich um einen an der Stelle $z = 1$ regulären Summanden ändert, so dass alle Ableitungen dieses Summanden für $z \rightarrow 1$ sich endlichen Grenzwerten nähern. Wir dürfen daher für die hier herzuleitenden Abschätzungen annehmen, dass $\chi(\vartheta)$ ausserhalb des Intervalls $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ verschwindet. Dann ergibt sich für $f(z)$ und $f^{(n)}(z)$, ähnlich wie beim Beweise des Satzes XIII, durch partielle Integration und die darauf folgende Differentiation, wenn wir zugleich $\mathfrak{D}(\vartheta) = \sin \vartheta \Psi(\vartheta)$ setzen:

$$(39, 4) \quad f(z) = \frac{iz}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\vartheta} \sin \vartheta \Psi(\vartheta) d\vartheta}{(e^{i\vartheta} - z)^2} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{i+z}{i-z} \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{i-z}{i+z} \Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right),$$

$$(39, 5) \quad \frac{\pi}{(n+1)!} f^{(n)}(z) = iz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\vartheta} \sin \vartheta \Psi(\vartheta) d\vartheta}{(e^{i\vartheta} - z)^{n+2}} + \frac{ni}{n+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\vartheta} \sin \vartheta \Psi(\vartheta) d\vartheta}{(e^{i\vartheta} - z)^{n+1}} + \\ + \frac{i}{n+1} \left(\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(i-z)^{n+1}} - (-1)^n \frac{\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{(i+z)^{n+1}} \right).$$

Hier sind nach Voraussetzung für $\vartheta \downarrow 0$ bzw. $\vartheta \uparrow 0$ die vier Unbestimmtheitsgrenzen von $\Psi(\vartheta)$ gleich $\pm k_+$ bzw. $\pm k_-$. Es sei nun C eine obere Schranke von $|\Psi(\vartheta)|$ in $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, so lässt sich dazu nach Voraussetzung ein solches $\delta > 0$ finden, dass $|\Psi(\vartheta)| \leq k_+ + \varepsilon$ für $0 < \vartheta \leq \delta$ und $|\Psi(\vartheta)| \leq k_- + \varepsilon$ für $-\delta \leq \vartheta < 0$ ist. Dann ergibt sich aus (39, 4), $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| < \frac{\pi}{4}$ gesetzt, wegen $|z \pm i| > \sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{r} |f(z)| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin \vartheta| |\Psi(\vartheta)| d\vartheta}{|e^{i\vartheta} - z|^2} + \frac{4C}{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} + \int_{-\delta}^0 + \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4C}{r},$$

$$\frac{\pi}{r} |f(z)| \leq C \left(\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} \right) \frac{|\sin \vartheta| d\vartheta}{|e^{i\vartheta} - z|^2} + (k_+ + \varepsilon) \int_0^{\delta} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{|e^{i\vartheta} - z|^2} + (k_- + \varepsilon) \int_{-\delta}^0 \frac{|\sin \vartheta| d\vartheta}{|e^{i\vartheta} - z|^2} + \frac{4C}{r}$$

oder endlich

$$\frac{\pi}{r} |f(z)| < C \left(\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} \right) \frac{|\sin \vartheta| d\vartheta}{|e^{i\vartheta} - z|^2} + (k_+ + \varepsilon) I_0(z) + (k_- + \varepsilon) I_0(\bar{z}) + \frac{4C}{r}.$$

Genau ebenso erhalten wir aus (39, 5)

$$\frac{\pi}{(n+1)!} |f^{(n)}(z)| \leq Cr \left(\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} \right) \frac{|\sin \vartheta| d\vartheta}{|e^{i\vartheta} - z|^{n+2}} + C \left(\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} \right) \frac{|\sin \vartheta| d\vartheta}{|e^{i\vartheta} - z|^{n+1}} +$$

$$+ (k_+ + \varepsilon)(I_n(z) + I_{n-1}(z)) + (k_- + \varepsilon)(I_n(\bar{z}) + I_{n-1}(\bar{z})) + \frac{2^{n+2} C}{n+1}.$$

Benutzen wir nunmehr die in Nr. 35 hergeleitete Abschätzung (35, 8) für $I_0(z)$, so ergibt sich für $z \rightarrow 1$, $|z| < 1$:

$$\pi |f(z)| \leq (k_+ + k_- + 2\varepsilon + \varepsilon_{10}(z)) \lg \frac{1}{|1-z|}, \quad |\arg(1-z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0.$$

Daher ergibt sich wegen der Willkür von ε für das aus dem Innern von E_z im Winkel gegen 1 konvergierende z

$$(39, 6) \quad \overline{\text{Lim}} \pi \frac{|f(z)|}{-\lg |1-z|} \leq k_+ + k_-.$$

Ganz analog ergibt sich unter Benutzung der Relation (35, 7), wenn z aus E_z im Winkel gegen 1 konvergiert,

$$(39, 7) \quad \overline{\text{Lim}} \left(\frac{\pi}{(n+1)!} (1-|z|)^n |f^{(n)}(z)| - k_+ K_n(\psi) - k_- K_n(-\psi) \right) \leq 0$$

mit

$$(39, 8) \quad K_n(\psi) = \frac{\cos^n \psi}{n} + \text{tg } \psi \int_{-\psi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

40. *Berücksichtigung der Gleichmässigkeit und allgemeiner Fall der Durchschnittsendlichkeit.* Wir haben bei der obigen Herleitung offenbar nur benutzt, dass

$$(40, 1) \quad \overline{\text{Lim}} \frac{|\Phi(\vartheta)|}{\vartheta} \leq k_+ \text{ für } \vartheta \downarrow 0, \quad \overline{\text{Lim}} \frac{|\Phi(\vartheta)|}{|\vartheta|} \leq k_- \text{ für } \vartheta \uparrow 0$$

gilt, und es ist ferner aus der Herleitung klar, dass die Relationen (39, 6) und (39, 7) *gleichmässig* für alle Funktionen $\chi(\vartheta)$ gelten, für die die Relationen (40, 1) gleichmässig gelten — da dann zu einem gegebenen ε das zugehörige δ gleichmässig gefunden werden kann —, und die darüber hinaus gleichmässig beschränkt sind, da dann auch die Schranke C für $|\Psi(\vartheta)|$ gleichmässig wählbar ist.

Wir wollen nun die oben zugrunde gelegten Voraussetzungen folgendermassen erweitern: $\chi(\vartheta)$ soll wieder im Intervall $(-\pi, \pi)$ nach LEBESGUE integrierbar sein und es soll ferner, $\Phi(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \chi(\vartheta) d\vartheta$ gesetzt, gelten:

$$(40, 2) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{\Phi(\vartheta)}{\vartheta} - g_+ \right| \leq k_+ \quad \text{für } \vartheta \downarrow 0;$$

$$(40, 3) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{\Phi(\vartheta)}{\vartheta} - g_- \right| \leq k_- \quad \text{für } \vartheta \uparrow 0.$$

Mit andern Worten, für $\vartheta = 0$ sollen die rechtsseitigen derivierten Zahlen von $\Phi(\vartheta)$ im Intervall $\langle g_+ - k_+, g_+ + k_+ \rangle$ und die linksseitigen im Intervall $\langle g_- - k_-, g_- + k_- \rangle$ liegen. g_+, g_-, k_+, k_- sollen dabei endliche Zahlen sein, die beiden letzteren nicht negativ. Es sei ferner $g_+ - g_- = \mathcal{A}$ gesetzt.

Da die Addition einer Konstanten zu $\chi(\vartheta)$ sich nur darin äussert, dass $f(z)$ sich um eine additive Konstante ändert, dürfen wir, ohne \mathcal{A}, k_+ und k_- zu ändern, voraussetzen, dass $g_+ + g_-$ gleich Null ist, so dass $g_+ = -g_- = \frac{\mathcal{A}}{2}$ gilt.

Nun besitzt aber nach Satz II der Realteil von $-\frac{\mathcal{A}}{\pi} i g_0(z)$ auf der oberen bzw. unteren Hälfte von E_z die Randwerte $\frac{\mathcal{A}}{2}$ bzw. $-\frac{\mathcal{A}}{2}$. Daher gelten für

$$(40, 4) \quad f^*(z) = f(z) + \frac{\mathcal{A}}{\pi} i g_0(z)$$

die Voraussetzungen (40, 1), unter denen die Relationen (39, 6) und (39, 7) gelten. Somit erhalten wir wegen (10, 4), (10, 5)

$$(40, 5) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{\pi f(z)}{-\lg(1-z)} + i \mathcal{A} \right| \leq k_+ + k_-,$$

$$(40, 6) \quad \overline{\text{Lim}} \left\{ \left| \frac{\pi}{(n+1)!} (1-|z|)^n f^{(n)}(z) + \frac{i \mathcal{A} e^{in\psi}}{n(n+1)} \cos^n \psi \right| - k_+ K_n(\psi) - k_- K_n(-\psi) \right\} \leq 0,$$

und die Relationen (40, 5), (40, 6) gelten offenbar gleichmässig für alle Funktionen $\chi(\vartheta)$, für die die Relationen (40, 2) und (40, 3) gleichmässig gelten und die darüber hinaus gleichmässig beschränkt sind.

41. *Einfluss gewisser Variabelntransformationen auf die Durchschnittsendllichkeit. Satz XV. Es sei $f(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ für $x > 0$ nach LEBESGUE integrierbar, und es möge für $x \downarrow 0$*

$$\overline{\text{Lim}} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx = G, \quad \underline{\text{Lim}} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx = g$$

sein.

Es sei $\varphi(y)$ eine für $y \geq 0$ zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$, $\varphi(y) > 0$, und es möge $\varphi(y)$ die Eigenschaft haben, dass vermöge der Abbildung $x = \varphi(y)$ in der Umgebung des Nullpunktes einer y -Nullmenge eine x -Nullmenge entspricht und umgekehrt. (Diese letzte Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn φ eine in der Umgebung von $y = 0$ reguläre analytische Funktion von y mit $\varphi'(0) \neq 0$ ist) Dann besitzt für $y \downarrow 0$ der Quotient

$$\frac{1}{y} \int_0^y f(\varphi(y)) dy$$

wiederum die Unbestimmtheitsgrenzen G, g .

Beweis: Aus den über $\varphi(y)$ gemachten Voraussetzungen folgt

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{\varphi(y)} \int_0^y f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy \sim \frac{1}{\varphi'(0)} \frac{1}{y} \int_0^y f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy.$$

Es genügt daher zu beweisen, dass die Differenz

$$\frac{1}{y \varphi'(0)} \int_0^y f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy - \frac{1}{y} \int_0^y f(\varphi(y)) dy$$

für $y \downarrow 0$ gegen Null konvergiert. Der absolute Betrag dieser Differenz ist aber höchstens gleich

$$\frac{1}{y |\varphi'(0)|} \int_0^y |f(\varphi(y))| |\varphi'(y) - \varphi'(0)| dy,$$

und dies ist, wegen

$$\varphi'(y) - \varphi'(0) = O(y),$$

Über den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches. 145
wiederum gleich

$$O\left(\int_0^y |f(\varphi(y))| dy\right) = o(1),$$

da $f(\varphi(y))$ nach LEBESGUE integrierbar ist.

Aus unserem Beweis ergibt sich zugleich ohne weiteres der folgende

Zusatz zum Satz XV. Es sei $f(x)$ nach LEBESGUE integrierbar in einem Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ und es mögen für jeden Punkt x_0 einer in $\langle x_1, x_2 \rangle$ enthaltenen Punktmenge M die Relationen gelten:

$$(41, 1) \quad \overline{\text{Lim}} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x) dx = G(x_0),$$

$$(41, 2) \quad \underline{\text{Lim}} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x) dx = g(x_0)$$

für $x \rightarrow x_0$, wobei für jeden Punkt x_0 entweder $x \downarrow x_0$ oder $x \uparrow x_0$ oder beides — und dann evtl. mit verschiedenen G, g — gelten soll. Gelten nun diese Relationen gleichmässig für alle Punkte x_0 von M , werden über die Funktion $x = \varphi(y)$ die analogen Voraussetzungen wie im Satz XV gemacht und wird $\varphi'(y)$ darüber hinaus als positiv vorausgesetzt, so gelten für die Funktion $f(\varphi(y))$ die zu (41, 1), (41, 2) analogen Relationen gleichmässig auf der entsprechenden y -Menge.

42. Transformation von $z = 1$ auf $z = e^{i\vartheta_0}$. Wir haben in den Nrn. 39, 40 ϑ von links bzw. von rechts gegen 0 gehen lassen. Es ist aber klar, dass genau analoge Resultate gelten, wenn sich die Voraussetzungen (40, 2), (40, 3) auf $\vartheta \downarrow \vartheta_0$ bzw. $\vartheta \uparrow \vartheta_0$ beziehen, wobei dann ϑ in den Nennern durch $\vartheta - \vartheta_0$ und $\Phi(\vartheta)$ durch $\Phi(\vartheta) - \Phi(\vartheta_0)$ zu ersetzen ist, so dass also nunmehr für $\vartheta = \vartheta_0$ die rechtsseitigen derivierten Zahlen von $\Phi(\vartheta)$ im Intervall $\langle g_+ - k_+, g_+ + k_+ \rangle$ und die linksseitigen im Intervall $\langle g_- - k_-, g_- + k_- \rangle$ liegen. Dann multipliziert sich in (40, 6) $f^{(n)}(z)$ mit $e^{in\vartheta_0}$, und zum Faktor $(1 - |z|)^n$ kommt noch der Faktor $e^{in\vartheta_0}$ hinzu. (40, 5) und (40, 6) gelten aber nunmehr, wenn z im Winkel aus dem Innern von E_z gegen $e^{i\vartheta_0}$ strebt. Dabei ist natürlich unter ψ jetzt $-\arg(1 - ze^{-i\vartheta_0})$ zu verstehen, und in (40, 5) ist $\lg(1 - z)$ durch $\lg(1 - ze^{-i\vartheta_0})$ zu ersetzen.

43. *Dritte Erweiterung des Satzes I.* Nunmehr ist ohne weiteres eine Erweiterung des Satzes XIII auf den Fall der Durchschnittsendllichkeit möglich, wobei wir zugleich die geometrischen Voraussetzungen des Satzes XII zugrunde legen. Wir formulieren unser Resultat wie folgt:

Satz XVI. Es sei $f(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre analytische Funktion, und es sei M eine solche Punktmenge auf E_z , dass für ein festes $\varepsilon > 0$ in der ε -Umgebung jedes Punktes von M innerhalb K_ε $|\Re f(z)|$ gleichmässig beschränkt $\leq C$ ist. Die dann nach FATOU in der ε -Umgebung der Menge M auf E_z bis auf eine Nullmenge beim Grenzübergang im Winkel existierende und gleichmässig beschränkte Randfunktion von $\Re f(z)$ sei mit $\chi(\vartheta)$ bezeichnet. Für jeden Punkt $e^{i\vartheta_0}$ von M mögen

nun die vier derivierten Zahlen von $\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \chi(\vartheta) d\vartheta$ im Intervall $\langle g_+(\vartheta_0) - k_+(\vartheta_0), g_+(\vartheta_0) + k_+(\vartheta_0) \rangle$ für die rechtsseitigen, im Intervall $\langle g_-(\vartheta_0) - k_-(\vartheta_0), g_-(\vartheta_0) + k_-(\vartheta_0) \rangle$ für die linksseitigen derivierten Zahlen liegen, und es mögen überdies die Relationen

$$(43, 1) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \chi(\vartheta) d\vartheta - g_+(\vartheta_0) \right| \leq k_+(\vartheta_0) \text{ für } \vartheta \downarrow \vartheta_0,$$

$$(43, 2) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{1}{\vartheta - \vartheta_0} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \chi(\vartheta) d\vartheta - g_-(\vartheta_0) \right| \leq k_-(\vartheta_0) \text{ für } \vartheta \uparrow \vartheta_0$$

gleichmässig für alle ϑ_0 auf M gelten. Dann gilt, wenn z aus dem Innern von E_z im Winkel gegen die Punkte von M strebt, gleichmässig für alle Punkte $e^{i\vartheta_0}$ von M und für $|\arg(1 - ze^{-i\vartheta_0})| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$, $\mathcal{A}(\vartheta_0) = g_+(\vartheta_0) - g_-(\vartheta_0)$ gesetzt:

$$(43, 3) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{\pi f(z)}{-\lg(1 - ze^{-i\vartheta_0})} + i\mathcal{A}(\vartheta_0) \right| \leq k_+(\vartheta_0) + k_-(\vartheta_0),$$

$$(43, 4) \quad \overline{\text{Lim}} \left\{ \left| \frac{\pi}{(n+1)!} (1 - |z|)^n e^{in\vartheta_0} f^{(n)}(z) + \frac{i\mathcal{A}(\vartheta_0) e^{in\psi}}{n(n+1)} \cos^n \psi \right| - \right. \\ \left. - k_+(\vartheta_0) K_n(\psi) - k_-(\vartheta_0) K_n(-\psi) \right\} \leq 0,$$

wo $\psi = -\arg(1 - ze^{-i\vartheta_0})$ ist und $K_n(\psi)$ die Bedeutung (39, 8) hat.

44. *Beweis:* Es sei $C_1 > C$ eine positive Konstante derart, dass $|\Re f(z)| < C_1$ für $|z| \leq 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Man bilde wie beim Beweis von Satz XII endlich viele zyklisch angeordnete abgeschlossene Kreisbogen B_1, \dots, B_m auf E_z , die die Menge M samt ihren Häufungsstellen ganz im Innern enthalten und selbst im Innern der $\frac{\varepsilon}{4}$ -Umgebung von M enthalten sind. Ist allgemein B_μ^* der zwischen B_μ und $B_{\mu+1}$ bzw. zwischen B_m und B_1 liegende Kreisbogen von E_z , so lassen sich die Endpunkte jedes B_μ^* durch einen Kreisbogen α_μ verbinden, der bis auf seine Endpunkte ganz innerhalb von E_z verläuft und auf dem $|\Re f(z)|$ gleichmässig beschränkt $\leq C_1$ ist. Es möge nun die Funktion $w = F(z)$ das von den Kreisbögen B_μ und α_μ begrenzte Flächenstück konform auf das Innere von E_w abbilden, etwa so, dass ein bestimmtes Linienelement im Nullpunkt wiederum in ein solches übergeht. Bekanntlich ist $F(z)$ regulär innerhalb der Kreisbogen B_μ und es gibt zwei positive Konstanten $c_1, c_2, c_1 < c_2$, derart, dass der absolute Betrag von $F'(z)$ in einer ε_1 -Umgebung von M zwischen c_1 und c_2 liegt. Durch unsere Transformation möge nun $f(z)$ in $f_1(w)$ übergehen, so dass $f(z) = f_1(F(z))$ ist. Die Randfunktion von $\Re f_1(w)$ auf E_w sei mit $\chi_1(\vartheta)$, $w = re^{i\vartheta}$, bezeichnet. Dann ist $\chi_1(\vartheta) = \chi(\varphi(\vartheta))$, wo $\varphi(\vartheta)$ innerhalb der Bildbogen der Bogen B_1, \dots, B_m monoton wachsend ist und eine positive Ableitung besitzt, deren Werte auf der ganzen Bildmenge M_1 von M zwischen zwei positiven Schranken c_3 und $c_4, c_3 < c_4$, enthalten sind. Entspricht einem Punkte ϑ_0 von M ein Punkt ϑ'_0 von M_1 , so folgt

aus dem Satze XV, dass die vier derivierten Zahlen von $\int_{\vartheta'_0}^{\vartheta} \chi_1(\vartheta) d\vartheta$ für $\vartheta = \vartheta'_0$ in

den Intervallen $\langle g_+(\vartheta_0) - k_+(\vartheta_0), g_+(\vartheta_0) + k_+(\vartheta_0) \rangle, \langle g_-(\vartheta_0) - k_-(\vartheta_0), g_-(\vartheta_0) + k_-(\vartheta_0) \rangle$ liegen.

Andererseits ist $|\chi_1(\vartheta)| \leq C_1$ auf der ganzen Kreislinie E_w . Daher können unsere oben hergeleiteten Resultate (40, 5), (40, 6) (vgl. Nr. 42) auf jeden Punkt ϑ'_0 der Menge M_1 und die Funktion $f_1(w)$ angewandt werden und gelten gleichmässig für alle Punkte dieser Menge. Dabei steht allerdings in den (40, 5) und (40, 6) entsprechenden Relationen zunächst $-\lg(1 - we^{-i\vartheta'_0})$ bzw. $(1 - |w|)^n e^{in\vartheta'_0}$, wo w der Bildpunkt von z innerhalb E_w ist. Nun folgt aber aus der Existenz einer absolut nach oben und unten gleichmässig positiv beschränkten Ableitung von $F(z)$ in allen Punkten $e^{i\vartheta_0}$ von M und einer gewissen Umgebung von M auf E_z erstens, dass

$$(44, 1) \quad \lg(1 - w e^{i\vartheta_0}) \sim \lg(1 - z e^{i\vartheta_0}),$$

und zwar gleichmässig in einer Umgebung von M gilt. Daher ergibt sich (43, 3) ohne weiteres. Aus dem gleichen Grunde ist, wenn z gegen $e^{i\vartheta_0}$ aus K_z im Winkel strebt,

$$(44, 2) \quad \frac{1 - |w|}{1 - |z|} \rightarrow |F'(e^{i\vartheta_0})|.$$

Ferner folgt aus $f(z) = f_1(F(z))$ durch n -malige Differentiation

$$f^{(n)}(z) = f_1^{(n)}(w) (F'(z))^n + O(f_1'(w)) + O(f_1''(w)) + \dots + O(f_1^{(n-1)}(w)),$$

oder, wenn man mit $(1 - |z|)^n$ multipliziert und (44, 2) beachtet,

$$(1 - |z|)^n f^{(n)}(z) = (1 - |w|)^n f_1^{(n)}(w) e^{in \arg F'(e^{i\vartheta_0})} + O(1 - |z|).$$

Andererseits wird durch die konforme Abbildung $w = F(z)$ die zur Kreislinie E_z im Punkte $e^{i\vartheta_0}$ tangierende Richtung in die Richtung der entsprechend orientierten Tangente zur Kreislinie E_w im Punkte $e^{i\vartheta_0}$ übergeführt, so dass

$$\arg F'(e^{i\vartheta_0}) \equiv \vartheta'_0 - \vartheta \pmod{2\pi}$$

sein muss. Daher ergibt sich schliesslich

$$(1 - |w|)^n f_1^{(n)}(w) e^{in\vartheta'_0} = (1 - |z|)^n f^{(n)}(z) e^{in\vartheta_0} + O(1 - |z|).$$

Setzen wir dies ein, so ergibt sich aus dem auf die w -Ebene bezüglichen Resultat die Formel (43, 4).

45. *Zusätze zum Satz XVI.* Wir nehmen nun an, dass die Funktion $\chi(\vartheta)$ auf einem abgeschlossenen Bogen Γ von E_z durchweg beschränkt ist, und zwar mögen ihre Werte innerhalb eines Intervalls von der Länge D liegen. Dann kann man gleichmässig für alle Punkte ϑ_0 von Γ $k_+ = k_- = \frac{D}{2}$ setzen und als $g_+ = g_-$ den Mittelpunkt jenes Intervalls annehmen, so dass $\mathcal{A} = 0$ ist. Betrachten wir dann nur radiale Annäherung an die inneren Punkte von Γ , so kann in (43, 3), (43, 4) $\psi = 0$ gesetzt werden, und man erhält, da $K_n(0) = \frac{1}{n}$ ist,

$$\overline{\text{Lim}} \frac{|f(z)|}{-\lg(1 - |z|)} \leq \frac{D}{\pi},$$

$$\overline{\text{Lim}} (1 - |z|)^n |f^{(n)}(z)| \leq \frac{(n-1)! (n+1) D}{\pi}.$$

Da aber diese Relationen für jeden ganz innerhalb Γ liegenden abgeschlossenen Bogen Γ^* gleichmässig gelten, gelten sie auch gleichmässig, wenn z aus dem Innern von E_z allseitig gegen Γ^* strebt. So erhalten wir den

Zusatz 1 zum Satze XVI. Ist unter den Voraussetzungen des Satzes XVI die Schwankung von $\chi(\mathfrak{D})$ auf einem in M liegenden Bogen Γ von E_z höchstens gleich D , so gilt, wenn z gegen einen ganz innerhalb von Γ liegenden abgeschlossenen Teilbogen Γ^ aus dem Innern von E_z allseitig strebt:*

$$(45, 1) \quad \overline{\text{Lim}} \frac{|f(z)|}{- \lg(1 - |z|)} \leq \frac{D}{\pi},$$

$$(45, 2) \quad \overline{\text{Lim}} (1 - |z|)^n |f^{(n)}(z)| \leq \frac{(n-1)!(n+1)D}{\pi}.$$

Insbesondere gelten die Relationen (45, 1) und (45, 2), wenn z allseitig gegen einen Punkt $e^{i\vartheta_0}$ strebt, falls $\Re f(z)$ in einer Umgebung von $e^{i\vartheta_0}$ beschränkt ist und unter D die Schwankung von $\chi(\mathfrak{D})$ im Punkte \mathfrak{D}_0 verstanden wird.

Wir betrachten andererseits unter den Voraussetzungen von Zusatz 1 ein Punktepaar z_1, z_2 , das aus dem Innern von E_z gegen den Bogen Γ^* derart konvergiert, dass dabei

$$(45, 3) \quad \frac{z_2 - z_1}{1 - |z_1|} \rightarrow 0$$

gilt. Wegen $1 - |z_1| - |z_2 - z_1| \leq 1 - |z_2| \leq 1 - |z_1| + |z_2 - z_1|$ folgt aus (45, 3)

$$(45, 4) \quad \frac{1 - |z_2|}{1 - |z_1|} \rightarrow 1, \quad \frac{z_2 - z_1}{1 - |z_2|} \rightarrow 0.$$

Nun gilt, wegen (45, 2) mit $n = 1$,

$$(45, 5) \quad |f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz \right| = O\left(\frac{|z_2 - z_1|}{\text{Min}(1 - |z|)}\right),$$

wo $\text{Min}(1 - |z|)$ für die Strecke $z_1 z_2$ zu nehmen ist. Offenbar wird aber die kürzeste Distanz eines Punktes der Strecke $z_1 z_2$ von E_z in einem der Endpunkte der Strecke erreicht. Aus (45, 3) und (45, 4) folgt daher $f(z_2) - f(z_1) \rightarrow 0$. Wir erhalten den

Zusatz 2 zum Satz XVI. Unter den Voraussetzungen von Zusatz 1 gilt für ein Punktepaar z_1, z_2 , das aus dem Innern von E_z so gegen I^ konvergiert, dass (45, 3) gilt, die Relation*

$$(45, 6) \quad f(z_2) - f(z_1) \rightarrow 0,$$

und zwar gleichmässig, wenn (45, 3) gleichmässig gilt.

Es mögen nun für alle Punkte $e^{i\vartheta_0}$ der Menge M die drei Funktionen $k_+(\vartheta_0)$, $k_-(\vartheta_0)$, $\mathcal{A}(\vartheta_0)$ durchweg verschwinden. Dann liefert (43, 4) für $n = 1$ die Relation

$$f'(z) = o\left(\frac{1}{1 - |z|}\right),$$

gleichmässig für alle Punkte $e^{i\vartheta_0}$ von M . Da aber der Beweis des Satzes XIV nur von dieser Relation Gebrauch macht, bleibt (38, 1) auch unter unseren Voraussetzungen richtig, und wir erhalten den

Zusatz 3 zum Satze XVI. Verschwinden unter den Voraussetzungen des Satzes XVI die Grössen $k_+(\vartheta_0)$, $k_-(\vartheta_0)$, $\mathcal{A}(\vartheta_0)$ für alle Punkte von M , so gilt, wenn z_1 und z_2 aus K_z im Winkel gegen einen Punkt $z_0 = e^{i\vartheta_0}$ von M so konvergiert, dass $\left|\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_1}\right|$ zwischen beliebigen aber festen positiven Schranken bleibt,

$$(45, 61) \quad f(z_2) - f(z_1) \rightarrow 0,$$

und diese Relation gilt gleichmässig für die ganze Menge M .

Lässt man in der Formulierung von Zusatz 3 die Annahme, dass $\mathcal{A}(\vartheta_0)$ verschwindet, fallen, so kann man die folgende Überlegung anstellen. Der Einfachheit halber sei $\vartheta_0 = 0$. Dann genügt die Differenz

$$(45, 62) \quad f(z) - \frac{\mathcal{A}}{i\pi} g_0(z),$$

wo $g_0(z)$ die Hilfsfunktion des Satzes II ist, allen Voraussetzungen des Zusatzes 3 zum Satz XVI. Es folgt, wenn $\left|\frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}\right|$ zwischen festen positiven Schranken bleibt, wegen $1 + z_1 \rightarrow 2$, $1 + z_2 \rightarrow 2$,

$$(45, 63) \quad f(z_2) - f(z_1) - \frac{\mathcal{A}}{i\pi} \lg\left(\frac{1 - z_1}{1 - z_2}\right) \rightarrow 0.$$

Nun wird K_z durch die Transformation $z = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$ abgebildet auf die Halbebene $\Re \zeta > 0$. Setzen wir

$$(45, 64) \quad f\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right) = F(\zeta),$$

so liefert (45, 63)

$$F(\zeta_2) - F(\zeta_1) + i \frac{\Delta}{\pi} \lg \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \rightarrow 0,$$

wenn ζ_1 und ζ_2 so ins Unendliche gehen, dass

$$|\arg \zeta_1| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad |\arg \zeta_2| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0$$

und $0 < c_1 \leq \left| \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right| \leq c_2 < \infty$ ist.

Wie lauten nun die (43, 1) und (43, 2) entsprechenden Bedingungen — mit $k_+ = k_- = 0$ für $F(\zeta)$? Wir setzen $\vartheta_0 = 0$ voraus. Dann entspricht dem Punkt $z = e^{i\vartheta}$ von E_z der Punkt it auf der imaginären Axe mit $t = \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}$. Es sei nun $u = \frac{1}{t}$, $\Re F(it) = \psi(u)$. Wegen $u = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ ist der Satz XV anwendbar, so dass die Relationen (43, 1) und (43, 2) in

$$\frac{1}{u} \int_0^u \psi(u) du \rightarrow \begin{cases} g_+ & \text{für } u \downarrow 0, \\ g_- & \text{für } u \uparrow 0 \end{cases}$$

übergehen. Diese beiden Relationen gehen aber, wenn nunmehr $t = \frac{1}{u}$ als neue Integrationsvariable eingeführt wird, in die Bedingungen

$$t \int_t^\infty \Re F(it) \frac{dt}{t^2} \rightarrow g_+, \quad t \uparrow \infty,$$

$$t \int_t^{-\infty} \Re F(it) \frac{dt}{t^2} \rightarrow g_-, \quad t \downarrow -\infty$$

über.³⁰ Setzen wir endlich $F(\zeta) = \frac{1}{i} \lg G(\zeta)$, so ergibt sich die folgende Formulierung:

Korollar zum Zusatz 3. Es sei $G(\zeta)$ eine für $\Re \zeta > 0$ reguläre analytische nirgends verschwindende Funktion, für die im Bereich $\Re \zeta > 0$, $|\zeta| > C_0$ die Gesamtschwankung von $\arg G(\zeta)$ gleichmässig beschränkt ist. Die dann in den Punkten $\zeta = it$ der imaginären Axe nach Fatou für hinreichend grosse $|t|$ bis auf eine t -Nullmenge beim Grenzübergang im Winkel existierende und gleichmässig beschränkte Grenzfunktion von $\arg G(\zeta)$ sei mit $\arg G(it)$ bezeichnet. Gilt dann für $t \uparrow \infty$ bzw. $t \downarrow -\infty$

$$t \int_t^{\infty} \arg G(it) \frac{dt}{t^2} \rightarrow g_+, \quad t \int_t^{-\infty} \arg G(it) \frac{dt}{t^2} \rightarrow g_-,$$

so gilt, $g_+ - g_- = \Delta$ gesetzt, wenn ζ_1 und ζ_2 so ins Unendliche konvergieren, dass

$$|\arg \zeta_1| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad |\arg \zeta_2| \leq \frac{\pi}{2} - \delta,$$

$$c_1 \leq \left| \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right| \leq c_2$$

für beliebig aber fest gewählte positive δ , c_1 , c_2 ist, die Relation

$$(45, 65) \quad \frac{G(\zeta_2)}{G(\zeta_1)} \sim \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{\frac{\Delta}{\pi}}.$$

Zusatz 4 zum Satze XVI. Unter den Voraussetzungen des Satzes XVI gilt, wenn z im Winkel gegen die Punkte $e^{i\theta_0}$ von M strebt,

³⁰ An sich involviert die Existenz des LEBESGUESCHEN Integrals zugleich die absolute Integrierbarkeit des Integranden, so dass, um Aequivalente der Bedingungen (43, 1), (43, 2) für unendliches Integrationsintervall zu erhalten, eigentlich noch die Voraussetzung der absoluten Konvergenz des betreffenden Integrals hinzugenommen werden müsste. In unserem Falle wird aber im Satz XVI die Beschränktheit von $\Re f(z)$ in der Nähe von $z=1$ vorausgesetzt. Dem entspricht aber die gleichmässige Beschränktheit von $F(\zeta)$ für hinreichend grosse ζ , sodass die absolute Konvergenz unserer Integrale aus der Messbarkeit der Integranden folgt.

³¹ Für $|\zeta_1| = |\zeta_2|$ ergibt sich aus (45, 65), wenn auf beiden Seiten die absoluten Beträge verglichen werden, die Relation $|G(\zeta_2)| \sim |G(\zeta_1)|$, die in VISSER (I), p. 32, als Satz 4 formuliert wird, unter der speziellen Voraussetzung, dass $\arg G(it) \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ resp. für $t \rightarrow \pm \infty$ gilt, sodass Δ insbesondere $= \pi$ ist.

$$(45, 7) \quad \Im f(z) = \frac{\mathcal{A} + \Theta(k_+(\vartheta_0) + k_-(\vartheta_0))}{\pi} \lg |1 - ze^{i\vartheta_0}| + o(\lg |1 - ze^{i\vartheta_0}|),$$

und unter der Voraussetzung

$$(45, 8) \quad |\mathcal{A}(\vartheta_0)| > k_+(\vartheta_0) + k_-(\vartheta_0)$$

die Formel

$$(45, 9) \quad \Im f(z) \rightarrow -\operatorname{sgn} \mathcal{A} \infty,$$

wobei $-1 \leq \Theta \leq 1$ bleibt; (45, 7) gilt unter gleichen Voraussetzungen gleichmässig wie der Satz XVI, während (45, 9) gleichmässig gilt, wenn ausserdem vorausgesetzt wird, dass $|\mathcal{A}(\vartheta_0)| - k_+(\vartheta_0) - k_-(\vartheta_0)$ oberhalb einer festen positiven Schranke bleibt.

Denn aus (43, 3) folgt, wenn beide Seiten dieser Gleichung mit $-\lg(1 - ze^{i\vartheta_0})$ multipliziert werden,

$$(45, 91) \quad f(z) = \frac{i\mathcal{A}(\vartheta_0) + \Theta_1(k_+(\vartheta_0) + k_-(\vartheta_0))}{\pi} \lg(1 - ze^{i\vartheta_0}) + o(\lg(1 - ze^{i\vartheta_0}))$$

mit $|\Theta_1| \leq 1$. Hieraus aber ergibt sich (45, 7) sofort, wenn die Imaginärteile auf beiden Seiten verglichen werden und der Imaginärteil von Θ_1 mit Θ bezeichnet wird.

(45, 9) folgt aber unter der Voraussetzung (45, 8) aus (45, 7) sofort.

Es sei endlich betont, dass der Satz XVI und die Zusätze 3 und 4 zu diesem Satz insbesondere dann ohne Weiteres angewandt werden dürfen, wenn bekannt ist, dass $\underline{\operatorname{Lim}} \chi(\vartheta)$ für $\vartheta \downarrow \vartheta_0$ bzw. $\vartheta \uparrow \vartheta_0$ im Intervall $\langle g_+(\vartheta_0) - k_+(\vartheta_0), g_+(\vartheta_0) + k_+(\vartheta_0) \rangle$ bzw. im Intervall $\langle g_-(\vartheta_0) - k_-(\vartheta_0), g_-(\vartheta_0) + k_-(\vartheta_0) \rangle$ liegt.

§ 10. Eine Bedingung für die Darstellbarkeit durch das Poissonsche Integral.

46. *Formulierung der Sätze.* Bei der Untersuchung von Spitzenabbildungen ($\gamma = 0$) werden wir vom folgenden Satz Gebrauch zu machen haben:

Satz XVII. Es sei $f(z) = U(z) + iV(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre analytische Funktion, für deren Realteil $U(z)$ das Integral

$$(46, 1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 |U(re^{i\vartheta})| r dr d\vartheta$$

existiert. Der Imaginärteil $V(z)$ möge, wenn z allseitig aus K_z gegen die Punkte $e^{i\vartheta}$ des Einheitskreises konvergiert, mit eventueller Ausnahme eines ϑ -Wertes ϑ_0 , gegen eine Funktion $\chi(\vartheta)$ konvergieren, die in jedem von $e^{i\vartheta_0}$ verschiedenen Punkte des Einheitskreises stetig und auf E_z gleichmässig beschränkt sei. Dann hat $f(z)$ die Gestalt

$$(46, 2) \quad f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta + h(z), \quad h(z) = iu \frac{e^{i\vartheta_0} + z}{e^{i\vartheta_0} - z} + v,$$

wo u, v gewisse reelle Konstanten sind. — Die Umkehrung ist klar.

Unser Beweis des Satzes XVII reicht zugleich zum Beweis des folgenden allgemeineren Satzes aus:

Satz XVIII: Es sei $e^{i\vartheta_0}$ ein Punkt, der im Innern eines offenen Kreisbogens Γ von E_z liegt. σ sei eine Kreisbogensichel, deren Rand erstens aus Γ und zweitens aus einem die Endpunkte von Γ verbindenden, sonst ganz innerhalb K_z verlaufenden Kreisbogens besteht. (Für $\Gamma = E_z$ ist $\sigma = K_z$.) Es sei $f(z) = U(z) + iV(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre analytische Funktion, für deren Realteil $U(z)$ das Integral

$$(46, 3) \quad \int_{\sigma} \int_{\sigma} |U(re^{i\vartheta})| r dr d\vartheta,$$

über das Innere von σ erstreckt, existiert. Der Imaginärteil $V(z)$ möge, wenn z allseitig aus K_z gegen die Punkte $e^{i\vartheta}$ von Γ konvergiert, mit eventueller Ausnahme von $\vartheta = \vartheta_0$, gegen eine Funktion $\chi(\vartheta)$ konvergieren, die in jedem von $e^{i\vartheta_0}$ verschiedenen Punkte von Γ stetig und auf Γ gleichmässig beschränkt ist. Dann hat $f(z)$ die Gestalt

$$(46, 4) \quad f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta + h(z), \quad h(z) = iu \frac{e^{i\vartheta_0} + z}{e^{i\vartheta_0} - z} + v + E(z),$$

wo $\chi(\vartheta)$ für ϑ -Werte, für die $e^{i\vartheta}$ ausserhalb Γ liegt, gleich 0 zu setzen und $E(z)$ eine in K_z und auf Γ reguläre analytische Funktion mit $E(e^{i\vartheta_0}) = 0$ ist, wobei $E(z)$ auf Γ reell ist und für $\Re E(z)$ die auf (46, 3) bezügliche Bedingung erfüllt ist.

47. *Hilfssätze.* Dem Beweis dieser Sätze schicken wir drei einfache Hilfssätze voraus.

Lemma 3. Ist $\chi(\vartheta)$ eine im Intervall $(-\pi, \pi)$ beschränkte nach LEBESGUE integrierbare Funktion mit $|\chi(\vartheta)| \leq C$ und bildet man daraus mit Hilfe des Poissonschen Integrals die zugehörige analytische Funktion

$$(47, 1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta = U(z) + iV(z),$$

so sind für $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ die Integrale

$$(47, 2) \quad \int_0^1 |f(re^{i\vartheta})| dr, \quad \int_0^1 |U(re^{i\vartheta})| dr, \quad \int_0^1 |V(re^{i\vartheta})| dr$$

höchstens gleich γC , und die Integrale

$$(47, 3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 |f(re^{i\vartheta})| r dr d\vartheta, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 |U(re^{i\vartheta})| r dr d\vartheta, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 |V(re^{i\vartheta})| r dr d\vartheta$$

höchstens $\gamma_1 C$, wo γ, γ_1 positive absolute Konstanten sind.

Beweis von Lemma 3: Es genügt, die Behauptung nur für die ersten Integrale (47, 2) bzw. (47, 3) zu beweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $C = 1$ angenommen werden. Dann ergibt sich aus (47, 1)

$$|f(re^{i\vartheta})| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{|e^{i\varphi} - re^{i\vartheta}|} \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{|e^{i\varphi} - r|}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\int_0^1 |f(re^{i\vartheta})| dr \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(r - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}}.$$

Hier ergibt sich für das innere Integral, wenn man $r - \cos \varphi = x \sin \varphi$ setzt,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(r - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}} &= \int_{-\operatorname{ctg} \varphi}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{lg}(\sqrt{x^2 + 1} + x) \Big|_{-\operatorname{ctg} \varphi}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \operatorname{lg} \left(\frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{lg} \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \operatorname{ctg} \varphi \right). \end{aligned}$$

Setzen wir daher

$$(47, 4) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \lg \frac{1 + \sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \gamma,$$

so folgt

$$(47, 5) \quad \int_0^1 |f(re^{i\vartheta})| dr \leq \gamma,$$

und damit ist die auf (47, 2) bezügliche Behauptung bewiesen. Aus (47, 5) folgt aber

$$(47, 6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 |f(re^{i\vartheta})| r dr d\vartheta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \gamma d\vartheta = 2\pi\gamma = \gamma',$$

womit auch die auf das erste Integral (47, 3) bezügliche Behauptung bewiesen ist.

Lemma 4. Es gilt für $|z| \uparrow 1$

$$(47, 7) \quad \Phi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\vartheta}{|z - e^{i\vartheta}|} = 2 \lg \frac{1}{1 - |z|} + O(1).$$

Beim Beweis darf offenbar z positiv $= |z|$ vorausgesetzt werden. Dann aber nimmt unser Integral die Gestalt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}}$$

an. Dies ist ein elliptisches Integral, so dass man die Behauptung auch der Theorie der elliptischen Integrale unmittelbar entnehmen kann. Sie lässt sich aber leicht direkt verifizieren. Es sei $z = 1 - h$, $h > 0$. Dann verwandelt sich (47, 7) in

$$2 \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{h^2 + 4(1-h) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}}.$$

Führen wir hier $\sin \frac{\vartheta}{2} = x$ als neue Variable ein, so geht (47, 7) über in

$$4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{h^2 + 4(1-h)x^2}} = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1.$$

Das zweite Integral ist aber offenbar $O(1)$ für $h \downarrow 0$. Im ersten aber ändern wir das Integral nur um $O(1)$, wenn wir $\sqrt{1-x^2}$ durch 1 ersetzen, da $1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = O(x^2)$ für $x \downarrow 0$ ist. Führen wir dann $y = \frac{2x}{h}$ als neue Variable ein, so ergibt sich

$$\Phi(z) = 2 \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{dy}{\sqrt{1+(1-h)y^2}} + O(1).$$

Hier ist aber das unbestimmte Integral gleich

$$\frac{1}{\sqrt{1-h}} \lg (\sqrt{1-h}y + \sqrt{1+(1-h)y^2}),$$

so dass sich für das bestimmte Integral ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{1-h}} \lg \left(\frac{\sqrt{1-h}}{h} + \sqrt{\frac{1-h}{h^2} + 1} \right) = \lg \frac{1}{h} + O(1),$$

und daher (47, 7), w. z. b. w.

Lemma 5. Das Integral

$$(47, 8) \quad \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r d\vartheta dr}{|1-z|}, \quad z = re^{i\vartheta},$$

konvergiert. — Dies folgt sofort aus dem Lemma 4, wenn man beide Seiten von (47, 7) mit r multipliziert und nach r von 0 bis 1 integriert.

48. *Beweis der Sätze XVII, XVIII; Anwendung des Spiegelungsprinzips.*
Es genügt, den Satz XVIII zu beweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

dürfen wir $\vartheta_0 = 0$ annehmen. Man bilde mit Hilfe der Randfunktion $\chi(\vartheta)$ von $V(z)$ auf Γ das Integral

$$(48, 1) \quad f^*(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta,$$

wobei $\chi(\vartheta)$ ausserhalb Γ gleich 0 zu setzen ist. Dann besitzt der Imaginärteil der Funktion $f^*(z)$ in jedem Stetigkeitspunkt der Funktion $\chi(\vartheta)$, d. h. nach Voraussetzung in jedem von 0 verschiedenen Punkte $e^{i\vartheta}$ von Γ den Randwert $\chi(\vartheta)$. Andererseits ist für den Realteil von $f^*(z)$ wegen der gleichmässigen Beschränktheit von $\chi(\vartheta)$ das (47, 3) entsprechende Integral beschränkt. Daraus folgt, wenn $f(z) - f^*(z) = f_1(z) = U_1(z) + i V_1(z)$ gesetzt wird, dass einerseits das über das Innere von σ erstreckte Integral

$$(48, 2) \quad \int_{\sigma} \int |U_1(re^{i\vartheta})| r dr d\vartheta = C < \infty$$

ist und andererseits der Imaginärteil $V_1(z)$ in jedem von $z = 1$ verschiedenen Punkt des Bogens Γ den Randwert 0 besitzt.

Es sei σ' das Spiegelbild von σ in Bezug auf E_z . Das aus σ , σ' und I bestehende Gebiet sei mit σ^* bezeichnet. Für $\Gamma \equiv E_z$ ist offenbar σ^* mit der ganzen Riemannschen Kugel identisch. — Vermöge des Schwarzschen Spiegelungsprinzips lässt sich $f_1(z)$ in das Gebiet σ^* fortsetzen, als eine in σ^* bis eventuell auf $z = 1$ eindeutige und reguläre Funktion, die in jedem Punkt $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ von σ' für $|z| < 1$ den Wert $\overline{f_1(z)} = U_1(z) - i V_1(z)$ besitzt. Führen wir aber im Integral (48, 2) $r' = \frac{1}{r}$ als neue Integrationsvariable ein, so verwandelt es sich in das über das $r' e^{i\vartheta}$ -Gebiet σ' erstreckte Integral

$$(48, 3) \quad \int_{\sigma'} \int \left| \frac{U_1\left(\frac{1}{r'} e^{i\vartheta}\right)}{r'^4} \right| r' dr' d\vartheta.$$

Hier ist nach dem Obigen $U_1\left(\frac{1}{r'} e^{i\vartheta}\right) = U_1(r' e^{i\vartheta})$. Lassen wir nun im Integral (48, 3) die Striche bei r' weg, so ergibt sich, dass für unsere in das Innere von σ^* bis auf $z = 1$ fortgesetzte Potentialfunktion $U_1(z)$ auch das Integral

$$(48, 4) \quad \int \int_{\sigma^*} \frac{|U_1(re^{i\vartheta})|}{r^4} r dr d\vartheta = C$$

ist. Daraus folgt aber die Existenz zweier positiver Zahlen ϱ, C_1 derart, dass die Kreisscheibe $|z - 1| \leq \frac{1}{\varrho}$ ganz in σ^* liegt und

$$(48, 5) \quad \int \int_{|z-1| \leq \frac{1}{\varrho}} |U_1(z)| r dr d\vartheta \leq C_1.$$

gilt.

Wir schicken nunmehr den Punkt $z = 1$ durch die Transformation $\zeta = \frac{1}{z-1}$ ins Unendliche. Dann geht $f_1(z)$ in $f_1\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) = G(\zeta)$, eine für $0 < \varrho \leq |\zeta| < \infty$ eindeutige und reguläre Funktion von ζ , über. Wir werden nun zuerst beweisen, dass $G(\zeta)$ im Unendlichen höchstens einen Pol zweiter Ordnung hat.

Denn setzt man $G(\zeta) = U_2(\zeta) + i V_2(\zeta)$, wo $U_2(\zeta) = U_1\left(1 + \frac{1}{\zeta}\right)$ ist, so folgt aus (48, 5), wegen $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{-1}{\zeta^2}$,

$$\int \int_{|z-1| \leq \frac{1}{\varrho}} |U_1(z)| r dr d\vartheta = \int \int_{|\zeta| \geq \varrho} |U_2(\zeta)| \frac{1}{|\zeta|^4} d\tau \leq C_1,$$

wo $d\tau$ das Flächenelement in der ζ -Ebene ist. Hieraus folgt aber für beliebige grosse positive $R \geq 2\varrho$

$$\int \int_{\varrho \leq |\zeta| \leq R} |U_2(\zeta)| d\tau \leq R^4 \int \int_{\varrho \leq |\zeta| \leq R} |U_2(\zeta)| \frac{1}{|\zeta|^4} d\tau \leq R^4 C_1.$$

Es sei nun $g(\zeta)$ der Hauptteil von $G(\zeta)$ in der Umgebung des unendlich fernen Punktes. $g(\zeta)$ ist auf jeden Fall eine ganze Funktion von ζ , und es darf $g(0) = 0$ vorausgesetzt werden. Setzt man nun $g(\zeta) = U^*(\zeta) + i V^*(\zeta)$, so folgt aus der obigen Ungleichung offenbar

$$(48, 6) \quad \int \int_{2\varrho \leq |\zeta| \leq R} |U^*(\zeta)| d\tau \leq C_2 R^4,$$

für eine positive Konstante C_2 , da ja die Differenz $G(\zeta) - g(\zeta)$ für $|\zeta| \geq 2\varrho$ ihrem absoluten Betrage nach beschränkt bleibt.

Es sei nun ϱ_1 eine positive Zahl $\geq 4\varrho$. Drückt man den Wert der ganzen Funktion $g_1(u) = g(\varrho_1 u)$ in den Punkten des Kreises $|u| \leq \frac{1}{2}$ durch die Werte ihres Realteiles $U^*(\varrho_1 e^{i\vartheta})$ auf der Kreislinie $|u| = 1$ vermöge der Formel

$$(48, 7) \quad g(\varrho_1 u) = g_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + u}{e^{i\vartheta} - u} U^*(\varrho_1 e^{i\vartheta}) d\vartheta$$

aus, so gilt $\left| \frac{e^{i\vartheta} + u}{e^{i\vartheta} - u} \right| \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$. Daher folgt für alle ζ mit $|\zeta| \geq 2\varrho$ und

$$2|\zeta| \leq \varrho_1$$

$$(48, 8) \quad |g(\zeta)| \leq \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |U^*(\varrho_1 e^{i\vartheta})| d\vartheta.$$

Für ein beliebiges ζ mit $|\zeta| = r > 2\varrho$ integriere man die Relation (48, 8) nach ϱ_1 zwischen den Grenzen $2r$ und $3r$. Dann folgt

$$(48, 9) \quad r|g(\zeta)| \leq \frac{3}{2\pi} \int_{2r}^{3r} \int_{-\pi}^{\pi} |U^*(\varrho_1 e^{i\vartheta})| d\vartheta d\varrho_1.$$

Hier ist das Doppelintegral wegen (48, 6) ($d\tau = \varrho_1 d\vartheta d\varrho_1$) höchstens gleich

$$\frac{1}{2r} \int_{2r}^{3r} \int_{-\pi}^{\pi} |U^*(\varrho_1 e^{i\vartheta})| \varrho_1 d\vartheta d\varrho_1 \leq \frac{1}{2r} C_2 (3r)^4 = O(r^3),$$

sodass also für $\zeta \rightarrow \infty$ $g(\zeta) = O(|\zeta|^3)$ gilt und daher $g(\zeta)$ ein höchstens quadratisches Polynom in ζ ist, wie behauptet.

49. *Der Hauptteil von $f_1(z)$ für $z = 1$.* Nach dem Obigen hat $f_1(z)$ die Gestalt

$$(49, 1) \quad f_1(z) = \frac{a}{(1-z)^2} + \frac{b}{1-z} + c + E(z), \quad E(1) = 0,$$

wo $E(z)$ in σ^* regulär ist. Nun folgt aus der vorausgesetzten Konvergenz des Integrals (46, 3) unter Berücksichtigung der Lemmata 3 und 5, dass das Integral

$$(49, 2) \quad \int_{|z| \leq 1} \int \left| \Re \frac{a}{(1-z)^2} \right| d\vartheta dr, \quad z = re^{i\vartheta},$$

auch konvergent sein muss. Es sei $a = |a|e^{i\alpha}$. Beachtet man, dass der Kreis-sektor $|z-1| < 1$, $|\arg(1-z)| < \frac{\pi}{4}$ in K_z enthalten ist, so folgt, $1-z = \rho e^{i\varphi}$ gesetzt, dass das Integral

$$\int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|a| |\cos(\alpha - 2\varphi)|}{\rho^2} d\varphi d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos(\alpha - 2\varphi)| d\varphi \int_0^1 \frac{|a| d\rho}{\rho^2}$$

konvergieren muss, was offenbar nur für $a = 0$ möglich ist.

Damit nimmt $f_1(z)$ die Gestalt an

$$\frac{b}{1-z} + c + E(z),$$

sodass für $z = e^{i\vartheta}$, $b = i\rho e^{i\beta}$, $\rho \leq 0$, $0 \leq \beta < \pi$, wegen $\frac{1}{1-e^{i\vartheta}} = \frac{i}{2} \frac{e^{-i\frac{\vartheta}{2}}}{\sin \frac{\vartheta}{2}}$,

$$f_1(e^{i\vartheta}) = \frac{-\rho e^{i(\beta-\frac{\vartheta}{2})}}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} + c + E(e^{i\vartheta}),$$

$$(49, 3) \quad \Im f_1(e^{i\vartheta}) = \frac{\rho}{2} \frac{\sin\left(\frac{\vartheta}{2} - \beta\right)}{\sin \frac{\vartheta}{2}} + \Im c + \Im E(e^{i\vartheta}) = 0$$

für $e^{i\vartheta}$, $\vartheta \neq 0$, auf Γ gilt. Da aber hier der Nenner des ersten Gliedes für $\vartheta \rightarrow 0$ in der ersten Ordnung verschwindet, muss auch der Zähler für $\vartheta = 0$ verschwinden, und aus $\sin \beta = 0$ folgt, wegen $0 \leq \beta < \pi$, dass β verschwindet, sodass ib reell sein muss. Dann aber nimmt die linke Seite von (49, 3) den Wert $\frac{\rho}{2} + \Im c + \Im E(e^{i\vartheta})$ an, sodass, für $\vartheta \rightarrow 0$, wegen $E(1) = 0$,

$$\Im c = -\frac{b}{2i}, \quad \Im E(e^{i\vartheta}) = 0 \text{ für } e^{i\vartheta} \text{ auf } \Gamma$$

ist. Für diesen Wert von $\Im c$ nimmt aber nunmehr $f_1(z)$, wenn $u = \frac{c}{2} = \frac{b}{2i}$, $v = \Re c$ gesetzt wird, die Gestalt an:

$$f_1(z) = iu \frac{1+z}{1-z} + v + E(z), \quad E(1) = 0,$$

womit der Satz XVIII bewiesen ist.

§ 11. Erweiterungen des Randverzerrungssatzes.

50. *Bemerkungen über die gleichmässige Gültigkeit des Satzes IV.* Unter welchen Umständen gelten nun die Formeln (11, 2), (11, 3) *gleichmässig* für eine Randpunktmenge M von G_1 ? Wir wollen $G_1 \equiv K_z$ annehmen, so dass $\gamma_1 = \pi$ ist. Greifen wir nun auf den Beweis des Satzes IV zurück, so sehen wir, dass der auf die Funktion (12, 2) bezügliche Bestandteil der linken Seite von (11, 2) sicher gleichmässig gegen $\frac{\gamma - \pi}{\pi}$ konvergiert, da γ ja absolut beschränkt ist. Es kommt also nur darauf an, ob das Produkt $(1 - |z|)g^*(z)$ gleichmässig gegen Null konvergiert, wenn z im Winkel gegen die Punkte z_0 von M strebt. Um nun (7, 5) anzuwenden, genügt es nicht, vorauszusetzen, dass der Realteil von $g^*(z)$ auf E_z in den Punkten von M gleichmässig stetig ist, was ja darauf hinausläuft, dass für z_0 auf der Menge M die Funktionen

$$(50, 1) \quad \arg \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

gegen ihre rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerte *gleichmässig* konvergieren, wenn z jeweils längs E_z gegen z_0 strebt. Es muss vielmehr ausserdem noch vorausgesetzt werden, dass die Funktionen (50, 1) in K_z in ihrer Gesamtheit gleichmässig beschränkt sind. Dies wird aber sicher dann gewährleistet, wenn man das Gebiet G^* der Nr. 13 so wählen kann, dass $|\varphi'(z)|$ in allen Bildpunkten von M zwischen festen positiven Schranken bleibt. Und dies ist nach dem in Nr. 13 Gesagten z. B. dann der Fall, wenn M ein abgeschlossener zusammenhängender Bogen von E_z ist, dessen Bild ganz *im Innern* eines offenen Jordanschen Randbogens von G liegt. Unter diesen Voraussetzungen aber gelten die Formeln (11, 2) und (11, 3) in der Tat *gleichmässig*, wenn z jeweils gegen z_0 innerhalb

eines Winkels strebt, dessen Schenkel — zwei von z_0 ausgehende Sehnen von E_z — etwa feste positive Winkel mit der Tangente an E_z in z_0 bilden.

51. *Der Fall einer Durchschnittstangente.* Eine erste Verallgemeinerungsmöglichkeit des Randverzerrungssatzes wird durch die Tatsache nahe gelegt, dass die Relation (7, 4) nach Satz XIII ja bereits aus der *Durchschnittsstetigkeit* von $\chi(\vartheta)$, d. h. aus der Gültigkeit von (36, 1) gefolgert werden kann. Wird bei der Herleitung des Randverzerrungssatzes von dieser allgemeineren Tatsache Gebrauch gemacht, so kann man die Relationen (11, 2) und (11, 3), etwa $G_1 = E_z$ gesetzt, beweisen, wenn

$$\arg \frac{f(e^{i\vartheta}) - w_0}{z - 1}$$

»im Durchschnitt« gegen $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ bzw. $-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$ konvergiert, oder also, wenn die Richtungen der von w_0 ausgehenden Sehnen der Berandung von G »im Durchschnitt« gegen gewisse Richtungen konvergieren, sofern ihre Schwankung beschränkt bleibt. In diesem Falle ist also sogar die Existenz der Tangenten nicht wesentlich. Es ist indessen zu beachten, dass dabei von der Parameterdarstellung des Randes von G Gebrauch zu machen ist, bei der der Parameter eben erst durch die konforme Abbildung festgelegt wird, so dass man eine solche Erweiterung des Randverzerrungssatzes erst dann als einen wirklichen Einblick in den Zusammenhang zwischen dem Verhalten von $f(z)$ und dem geometrischen Charakter der Berandung von G in der Nähe von w_0 ansehen kann, wenn eine Formulierung für die Existenz einer »Durchschnittstangente« gegeben wird, die von der rein differentialgeometrisch zu charakterisierenden Parameterdarstellung abhängt. Für gewisse spezielle Zwecke mag dagegen diese Erweiterung von Interesse sein.

52. *Spezialisierung von Satz XVI für $n = 1$.* Dagegen ist eine andere Verschärfung unserer Sätze von Bedeutung, in der der Begriff der Tangente durch denjenigen der *Grenzstützen* ersetzt wird.

Wir wollen zuerst den Satz XVI für $n = 1$ und $z_0 = e^{i\vartheta_0}$ spezialisieren und etwas umformen. Wegen (39, 8) ist

$$(52, 1) \quad K_1(\psi) = \cos \psi + \operatorname{tg} \psi \int_{-\psi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \cos \psi + \operatorname{tg} \psi (1 + \sin \psi) =$$

$$= \frac{\cos \psi}{1 - \sin \psi} = \frac{1 + \sin \psi}{\cos \psi}.$$

Andererseits liefert die Formel (10, 6), wenn in ihr z durch $z e^{-i\vartheta_0} = \frac{z}{z_0}$ ersetzt wird,

$$(52, 2) \quad 1 - |z| = (1 - z e^{-i\vartheta_0}) e^{i\psi} \cos \psi = (z_0 - z) e^{-i\vartheta_0} e^{i\psi} \cos \psi.$$

Tragen wir (52, 1) und (52, 2) in die Formel (43, 4) des Satzes XVI ein, so ergibt sich

$$\overline{\text{Lim}} \left\{ \left| \pi (z_0 - z) e^{i\psi} \cos \psi f'(z) + i \mathcal{A}(\vartheta_0) e^{i\psi} \cos \psi \right| - \frac{2}{\cos \psi} [k_+ (1 + \sin \psi) + k_- (1 - \sin \psi)] \right\} \leq 0,$$

oder aber (über die Bedeutung von ψ vgl. Nr. 48)

$$(52, 3) \quad (z_0 - z) f'(z) = \frac{-i \mathcal{A}(\vartheta_0)}{\pi} + \frac{2\Theta}{\pi} \left(\frac{k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k_-}{1 + \sin \psi} \right) + \varepsilon(z - z_0),$$

wo $\varepsilon(z - z_0)$ gegen 0 strebt, wenn z gegen z_0 im Winkel konvergiert, und Θ eine Grösse ist, deren absoluter Betrag 1 nicht überschreitet.

53. *Die verallgemeinerten Voraussetzungen.* Es sei nun P ein einfacher Randpunkt eines endlichen einfach zusammenhängenden Gebietes G in der w -Ebene, und der Rand von G möge in der Nähe von P eine Jordankurve bilden. Entspricht $P = w_0$ bei der konformen Abbildung auf das Innere von E_z dem Punkt $z = z_0 = e^{i\vartheta_0}$, so sind damit die beiden Randbogen C_- , C_+ , die in P zusammenstossen, gewissen Halbumbgebungen von $z = z_0$ auf E_z mit $z = e^{i\vartheta}$, $\vartheta < \vartheta_0$ bzw. $\vartheta > \vartheta_0$ zugeordnet, so dass man bei positivem Umlauf um das Innere von G von C_- auf C_+ übertritt. Es mögen nun die Bogen C_- , C_+ im Punkte w_0 Grenzstützen besitzen, die in den Winkeln $|\arg(w - w_0) - h_-| \leq k_-$ bzw. $|\arg(w - w_0) - h_+| \leq k_+$ mit endlichen h_- , h_+ , k_- , k_+ liegen. Dabei sollen die Winkelbestimmungen insbesondere so gewählt werden, dass sie auch längs eines in der Umgebung von w_0 liegenden, C_- mit C_+ verbindenden Querschnittes von G stetig bleiben. Sind insbesondere $h_- \pm k_-$, $h_+ \pm k_+$ die Winkel der Richtungen der vier Grenzstützen selbst mit der positiven reellen Axe, so ist $h_+ - h_- = -\gamma$ eine negative Zahl; denn die beiden Grenzstützen an C_- werden in die entsprechend gelegenen Grenzstützen an C_+ durch Drehung um w_0 in *negativer* Richtung übergeführt (nämlich durch das Innere von G), und daher bildet die Winkelhalbierende der beiden Grenzstützen an C_+ einen kleineren Winkel mit der positiven reellen Axe als die Winkelhalbierende der beiden Grenzstützen an C_- . Im allgemeineren Fall kann aber $\gamma = h_- - h_+$ auch 0 oder

Über den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches. 165
 negativ werden. Endlich soll $|\arg(w - w_0)|$ bei stetiger Fortsetzung unterhalb
 einer festen Schranke bleiben, wenn w den ganzen Rand von G durchläuft.

54. *Anwendung des Satzes XVI.* Strebt nun ϑ monoton wachsend gegen
 ϑ_0 , so folgt

$$(54, 1) \quad h_- - k_- \leq \overline{\text{Lim}} \arg(f(e^{i\vartheta}) - w_0) \leq h_- + k_-,$$

und da dabei $\arg(e^{i\vartheta} - z_0) \rightarrow \vartheta_0 - \frac{\pi}{2}$ gilt, folgt

$$(54, 2) \quad \left| \overline{\text{Lim}} \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} - h_- + \vartheta_0 - \frac{\pi}{2} \right| \leq k_-, \quad z = e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \uparrow \vartheta_0.$$

Da anderseits für $\vartheta \downarrow \vartheta_0$ $\arg(e^{i\vartheta} - z_0) \rightarrow \vartheta_0 - 3\frac{\pi}{2}$ ist, folgt analog

$$(54, 3) \quad \left| \overline{\text{Lim}} \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} - h_+ + \vartheta_0 - 3\frac{\pi}{2} \right| \leq k_+, \quad z = e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \downarrow \vartheta_0.$$

Daher ist für $g_+ = h_+ - \vartheta_0 + 3\frac{\pi}{2}$, $g_- = h_- - \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{A} = h_+ - h_- + \pi$ die

Formel (52, 3) auf die Funktion

$$\frac{1}{i} g(z) = \frac{1}{i} \lg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0}$$

anwendbar, und wir erhalten

$$(54, 4) \quad \frac{1}{i} (z_0 - z) g'(z) = -i \frac{h_+ - h_- + \pi}{\pi} + \frac{2\Theta}{\pi} \left(\frac{k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k_-}{1 + \sin \psi} \right) + \varepsilon(z - z_0),$$

oder für $h_- - h_+ = \gamma$,

$$(54, 5) \quad \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} = 1 + (z - z_0) g'(z) = \frac{\gamma}{\pi} + \frac{2\Theta}{\pi} \left(\frac{k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k_-}{1 + \sin \psi} \right) + \varepsilon_1(z - z_0),$$

und diese Relation gilt gleichmässig auf einem ϑ_0 -Bogen M , auf dem die Voraussetzungen über $\arg(w - w_0)$ gleichmässig gelten und die Grössen h_- , h_+ , k_- , k_+ gleichmässig beschränkt sind, sofern dabei $|\psi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$ bleibt. —

Schalten wir nun, genau wie in Nr. 13 beim Beweis des Satzes IV ein Gebiet G^* dazwischen, so ergibt sich endlich, dass die Voraussetzung der Beschränktheit von $|\arg(w-w_0)|$ für alle Randpunkte w von G unwesentlich ist. —

Es seien nun z. B. längs eines \mathcal{J}_0 -Bogens M auf E_z gleichmässig die Relationen (54, 2) und (54, 3) erfüllt mit festen, von \mathcal{J}_0 unabhängigen Werten von k_+ und k_- und mit gleichmässig beschränkten h_+ und h_- , für die durchweg längs M $h_- - h_+ = \pi$ gilt; ist dann M_1 ein abgeschlossener, ganz im Innern von M liegender Bogen, so folgt aus (54, 5) für $\psi = 0$ die Relation

$$(54, 6) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{\frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} - 1}{z - z_0} \right| \leq 2 \frac{k_+ + k_-}{\pi},$$

gleichmässig, wenn z radial gegen die Punkte z_0 von M_1 strebt.

55. *Der verallgemeinerte Randverzerrungssatz.* Wir fassen unsere obigen Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

Satz XIX: Es bestehe der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes G der w -Ebene in der Nähe eines Randpunktes $P = w_0$ aus zwei Jordanbögen C_- , C_+ , wobei man in w_0 beim positiven Umlauf um das Innere von G von C_- auf C_+ übertritt. Die Randbögen C_- , C_+ mögen in P Grenzstützen besitzen, die in den Winkelräumen

$$(55, 1) \quad |\arg(w-w_0) - h_-| \leq k_- \text{ bzw. } |\arg(w-w_0) - h_+| \leq k_+$$

mit endlichen h_- , h_+ , k_- , k_+ liegen, wenn die Winkelbestimmungen längs eines in der Umgebung von w_0 liegenden Querschnitts von G stetig bleiben. Bildet dann $w = f(z)$ das Innere von K_z konform auf das Innere von G ab, und entspricht dabei $z_0 = e^{i\vartheta_0}$ dem Punkte w_0 , so gilt, wenn z aus dem Innern von K_z im Winkel gegen z_0 strebt,

$$(55, 2) \quad (z - z_0)g'(z) = \frac{\gamma}{\pi} - 1 + \frac{2\Theta}{\pi} \left(\frac{k_+}{1 - \sin\psi} + \frac{k_-}{1 + \sin\psi} \right) + \\ + \varepsilon(z - z_0), \quad g(z) = \lg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0},$$

$$(55, 3) \quad \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} = \frac{\gamma}{\pi} + \frac{2\Theta}{\pi} \left(\frac{k_+}{1 - \sin\psi} + \frac{k_-}{1 + \sin\psi} \right) + \varepsilon(z - z_0), \\ \frac{f'(z)}{z - z_0}$$

Über den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches. 167

wo $\gamma = h_- - h_+$, $\psi = -\arg(1 - z e^{-i\vartheta_0})$, $|\Theta| \leq 1$ ist und $\varepsilon(z - z_0)$ gegen 0 konvergiert, wenn z so gegen z_0 strebt, dass dabei $|\psi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$ bleibt.

Zusatz zum Satz XIX: Sind für feste k_+ , k_- die Voraussetzungen dieses Satzes längs eines freien abgeschlossenen Jordanbogens C des Randes von G gleichmässig erfüllt, sind dabei h_+ , h_- gleichmässig beschränkt und gilt durchweg $h_- - h_+ = \pi$, so gilt, wenn M_1 der Bildbogen von C ist, gleichmässig auf M_1

$$(55, 4) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{f'(z)}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} - 1 \right| \leq 2 \frac{k_+ + k_-}{\pi},$$

wenn z aus dem Innern von K_z radial gegen z_0 auf M_1 strebt.

Endlich folgt unter den Voraussetzungen des Satzes XIX für

$$(55, 5) \quad \gamma > 2(k_+ + k_-)$$

nach (55, 3) aus dem Bestehen einer der beiden Relationen

$$(55, 6) \quad f'(z) \rightarrow \infty, \quad \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \rightarrow \infty$$

das Bestehen der anderen, solange ψ auf einen Bereich

$$(55, 7) \quad \frac{2k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{2k_-}{1 + \sin \psi} \leq \gamma - \delta, \quad \delta > 0$$

beschränkt bleibt. Besitzt aber für (55, 5) $f'(z)$ oder $\frac{f(z) - w_0}{z - z_0}$ bei Konvergenz im Winkel einen Grenzwert oder endlichen Limsup. bzw. Liminf., so folgen aus (55, 3) entsprechende Schranken für Limsup. bzw. Liminf. des anderen Ausdrucks, solange ψ auf einen Bereich (55, 7) beschränkt bleibt. — Und genau das Gleiche gilt offenbar für die drei Relationenpaare

$$(55, 8) \quad f'(z) \rightarrow 0, \quad \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \rightarrow 0;$$

$$(55, 9) \quad \overline{\text{Lim}} |f'(z)| < \infty, \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \right| < \infty;$$

$$(55, 99) \quad \underline{\text{Lim}} |f'(z)| > 0, \quad \underline{\text{Lim}} \left| \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \right| > 0.$$

56. *Der Fall eines allgemeinen Gebietes G_1 .* Wir haben im Satze XIX die Abbildung eines Gebietes G auf das Innere von E_z betrachtet, anstatt, wie im Satze IV, auch das Gebiet G_1 allgemein zu wählen. Man kann nun in einem gewissen Umfang auch den Satz XIX auf den Fall ausdehnen, dass das zugrunde gelegte Gebiet in der z -Ebene nicht das Innere von E_z ist, sondern ein Gebiet G_1 von ähnlicher Beschaffenheit wie G . Sind dann die entsprechenden Konstanten für das Gebiet G_1 etwa $\gamma_1 > 0$, k'_+ , k'_- , so kann man die Abbildung von G_1 auf G durch »Vermittlung« der Abbildung auf das Innere von E_ζ in der ζ -Ebene ausführen. Wird der Winkel ψ auf die ζ -Ebene bezogen, so ergibt sich durch Division der beiden (54, 5) entsprechenden Relationen

$$(56, 1) \quad \frac{f'(z)}{\frac{f(z) - w_0}{z - z_0}} = \frac{\gamma + 2 \Theta \left(\frac{k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k_-}{1 + \sin \psi} \right) + \varepsilon(w - w_0)}{\gamma_1 + 2 \Theta_1 \left(\frac{k'_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k'_-}{1 + \sin \psi} \right) + \varepsilon_1(z - z_0)},$$

wo $|\Theta| \leq 1$, $|\Theta_1| \leq 1$ ist. Ist nun $\gamma_1 > 2(k'_+ + k'_-)$, so kann man für die Werte von ψ , für die

$$(56, 2) \quad \gamma_1 > \frac{2k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{2k_-}{1 + \sin \psi} + \delta, \quad \delta > 0$$

ist, die obige Relation auf die Form bringen:

$$(56, 3) \quad \frac{f'(z)}{\frac{f(z) - w_0}{z - z_0}} = \frac{\gamma + 2 \Theta \left(\frac{k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k_-}{1 + \sin \psi} \right)}{\gamma_1 + 2 \Theta_1 \left(\frac{k'_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k'_-}{1 + \sin \psi} \right)} + \varepsilon(z - z_0).$$

Die Hauptschwierigkeit bei der Anwendung dieser Formel besteht darin, dass der Winkel ψ ja nicht in der z - sondern in der ζ -Ebene gemessen werden muss. Nun besteht, wie wir bald zeigen werden, auch im Falle, wenn k'_+ und k'_- nicht verschwinden, noch eine gewisse angenäherte Winkelproportionalität bei der Abbildung von G_1 auf das Innere von E_ζ , die allerdings um so weniger ausgesprochen ist, je grösser die Werte von k'_+ , k'_- sind. Immerhin lassen sich wenigstens im Falle relativ kleiner k'_+ , k'_- Schranken für ψ aus den Werten des entsprechenden Winkels in der z -Ebene ermitteln, mit deren Hilfe dann der Anwendungsbereich der Formel (56, 3) abgegrenzt werden kann.

57. *Der Fall eines Gebiets G_1 mit einer Ecke in z_0 .* In dem Falle aber, wo $k'_+ = k'_- = 0$ ist, wo also G_1 im Punkte z_0 eine Ecke der Oeffnung $\gamma_1 > 0$ bildet, ergibt sich aus der Formel (56, 3) ohne Weiteres

$$(57, 1) \quad \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} = \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{2\Theta}{\gamma_1} \left(\frac{k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k_-}{1 + \sin \psi} \right) + \varepsilon(z - z_0),$$

$$\frac{z - z_0}{z - z_0}$$

solange $|\psi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ ist. Hierbei ist allerdings unter ψ noch der in der ζ -Ebene zu messende Winkel zu verstehen. Nun wird aber (vgl. Nr. 15) bei der konformen Abbildung von G_1 auf das Innere von E_ζ jeder innerhalb G_1 gelegene Winkel mit dem Scheitelpunkt in z_0 beim Übergang zur ζ -Ebene im Verhältnis $\frac{\pi}{\gamma_1}$ vergrößert — es besteht die sogenannte *Winkelproportionalität* bei der Eckenabbildung — und es wird die ins Innere von G_1 weisende Richtung der Winkelhalbierenden des Eckenwinkels von G_1 bei z_0 in die radiale Richtung beim entsprechenden Punkt ζ_0 auf E_ζ übergeführt. Versteht man daher unter ψ nunmehr den Winkel des Vektors $z - z_0$ mit der »inneren« Winkelhalbierenden des Eckenwinkels von G_1 bei z_0 , so muss in der zuletzt hergeleiteten Formel ψ durch $\frac{\pi}{\gamma_1} \psi$ ersetzt werden, und ψ ist nunmehr der Bedingung zu unterwerfen $|\psi| \leq \frac{\gamma_1}{2} - \delta, \delta > 0$.

Wir formulieren das Ergebnis als

Satz XX: Wird das Gebiet G des Satzes XIX in der w -Ebene auf das Gebiet G_1 des Satzes IV in der z -Ebene mit Hilfe der Funktion $w = f(z)$ konform abgebildet und versteht man unter ψ den Winkel, den die Richtung von z_0 nach z mit der inneren Winkelhalbierenden des Eckenwinkels von G_1 bei z_0 bildet, so gilt

$$(57, 2) \quad \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} = \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{2\Theta}{\gamma_1} \left(\frac{k_+}{1 - \sin \frac{\pi \psi}{\gamma_1}} + \frac{k_-}{1 + \sin \frac{\pi \psi}{\gamma_1}} \right) + \varepsilon(z - z_0), \quad |\Theta| \leq 1,$$

$$\frac{z - z_0}{z - z_0}$$

wo $\varepsilon(z - z_0)$ gegen 0 konvergiert, wenn z so aus dem Innern von G_1 im Winkel gegen z_0 strebt, dass $|\psi| \leq \frac{\gamma_1}{2} - \delta, \delta > 0$ bleibt.

58. *Gleichmässige und allseitige Stetigkeit der Drehung am Rande.* Aus dem Beweis des Satzes V ergibt sich, wenn $G_1 \equiv K_z$ angenommen wird, dass die Formeln (14, 1), (14, 2), (14, 3) *gleichmässig* für alle Punkte z_0 eines Bogens M von E_z gelten, wie er in Nr. 50 charakterisiert wurde, wenn dabei z gegen z_0 in der dort gekennzeichneten Weise konvergiert. Die Konstante c ist dabei natürlich von z_0 abhängig.

Daraus folgt insbesondere für $\gamma = \pi$, wenn der Rand G in der Umgebung von w_0 *eine durchweg stetige Tangente* besitzt, dass die Gleichung (14, 2) für die Punkte eines gewissen Bogens von E_z um z_0 , bei radialer Approximation etwa, gleichmässig gilt. Die Konstante c ist dabei gleich dem Winkel zwischen den innern Normalen in den einander entsprechenden Randpunkten von E_z und G und ist daher stetig auf einem Bogen von E_z um z_0 . Daraus folgt, dass (14, 2) für einen geeigneten derartigen Bogen um z_0 und insbesondere für den Punkt z_0 selbst auch bei *allseitiger* Annäherung aus dem Innern von E_z richtig bleibt.

Durch zweimalige Anwendung dieses Resultats ergibt sich ferner: Haben unter den Voraussetzungen des Satzes IV die Ränder von G_1 und G in den Punkten z_0, w_0 stetige Tangenten, so dass insbesondere $\gamma = \gamma_1 = \pi$ ist, so bleibt die Formel (14, 2) auch richtig, wenn z aus dem Innern von G_1 *allseitig* gegen z_0 konvergiert. Dies ist ein Spezialfall des Lindelöfschen Satzes (Satz VI).

59. *Das Analogon von (14, 3) unter den Voraussetzungen des Satzes XIX.* Wir legen nunmehr die Voraussetzungen des Satzes XIX zugrunde. Um dann in der Formel (55, 3) dieses Satzes die Argumente rechts und links vergleichen zu können, müssen wir voraussetzen, dass

$$(59, 1) \quad \gamma > 2(k_+ + k_-)$$

ist. Dann gibt es positive δ , für die die Menge der ψ mit

$$(59, 2) \quad \gamma \geq \frac{2k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{2k_-}{1 + \sin \psi} + \delta, \quad \delta > 0$$

nicht leer ist. Für entsprechende z gilt dann (bei geeigneter Argumentfestlegung)

$$\arg f'(z) - \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} = \arg \left(1 + \frac{2\Theta}{\gamma} \left(\frac{k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k_-}{1 + \sin \psi} \right) \right) + \varepsilon_1(z - z_0).$$

Nun gilt für $|\zeta| < 1$

$$\arg(1 + \zeta) \leq \arcsin |\zeta|$$

(dies ergibt sich sofort, wenn man vom Nullpunkt aus eine Tangente an den Kreis um den Punkt 1 mit dem Radius $|\zeta|$ legt). Hieraus folgt weiter

$$(59, 3) \quad \left| \arg f'(z) - \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \right| \leq \arcsin \left(\frac{2}{\gamma} \left(\frac{k_+}{1 - \sin \psi} + \frac{k_-}{1 + \sin \psi} \right) \right) + \varepsilon(z - z_0),$$

wo $\varepsilon(z - z_0)$ gegen 0 konvergiert, wenn z so nach z_0 strebt, dass dabei $\psi = -\arg \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)$ im Bereich (59, 2) bleibt. Hier ist der arcus sinus auf jeden Fall höchstens gleich

$$\arcsin \left(1 - \frac{\delta}{\gamma} \right).$$

Die Formel (59, 3) gilt also jedenfalls, wenn z gegen z_0 innerhalb eines hinreichend schmalen Winkels um den in z_0 mündenden Radius konvergiert.

Ferner gilt die Formel (59, 3) gleichmässig, d. h. $\varepsilon(z - z_0)$ konvergiert gegen 0 gleichmässig für einen z_0 -Bogen M_1 auf E_z , der den Voraussetzungen des Satzes zum Satz XIX genügt, wenn für ein festes ψ -Intervall die Relationen (59, 2) mit festem $\delta > 0$ erfüllt sind, und z gegen z_0 jeweils innerhalb des entsprechenden ψ -Winkels konvergiert.

60. *Das Analogon von (14, 1) unter den Voraussetzungen des Satzes XIX.* Andererseits gelten unter den Voraussetzungen des Satzes XIX die Formeln (54, 2) und (54, 3). Beachtet man nun, dass für jedes $z_0 = e^{i\vartheta_0}$

$$(60, 1) \quad \psi = \psi(z_0, z) = -\arg \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) = -\Im \lg \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)$$

eine innerhalb und auf E_z beschränkte Potentialfunktion von z ist, die auf E_z für $\vartheta \downarrow \vartheta_0$ bzw. $\vartheta \uparrow \vartheta_0$ die Grenzwerte $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ besitzt, so ergeben sich für die Funktion

$$(60, 2) \quad P(z) = \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} - \frac{h_+ + h_-}{2} - \pi + \vartheta_0 - \frac{\pi - \gamma}{\pi} \psi(z_0, z), \quad \gamma = h_- - h_+,$$

die Relationen

$$(60, 3) \quad \overline{\lim}_{\vartheta \uparrow \vartheta_0} |P(z)| \leq k_+ \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim}_{\vartheta \uparrow \vartheta_0} |P(z)| \leq k_-.$$

Aus (60, 3) folgt aber weiter, dass die Potentialfunktion

$$P_1(z) = P(z) - \frac{k_+ + k_-}{2} - \frac{k_+ - k_-}{\pi} \psi(z_0, z)$$

nach oben beschränkt ist und für $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}_0$ auf E_z einen nicht positiven Limes superior besitzt. Ist daher $\varphi_1(z)$ eine innerhalb E_z reguläre Funktion mit dem Realteil $P_1(z)$, so bleibt $e^{\varphi_1(z)}$ im Innern von E_z beschränkt, und die Randwerte von $|e^{\varphi_1(z)}|$ auf E_z haben für $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}_0$ einen Limes superior, der ≤ 1 ist. Daher gilt, wenn z aus dem Innern von E_z *allseitig* gegen z_0 konvergiert, $\overline{\text{Lim}} |e^{\varphi_1(z)}| \leq 1$, und daher

$$\overline{\text{Lim}} \left(P(z) - \frac{k_+ + k_-}{2} - \frac{k_+ - k_-}{\pi} \psi(z_0, z) \right) \leq 0.$$

Genau ebenso ergibt sich

$$\underline{\text{Lim}} \left(P(z) + \frac{k_+ + k_-}{2} + \frac{k_+ - k_-}{\pi} \psi(z_0, z) \right) \geq 0.$$

Dies bedeutet aber, dass man $P(z)$ in der Form schreiben kann

$$(60, 4) \quad P(z) = \Theta \left(\frac{k_+ + k_-}{2} + \frac{k_+ - k_-}{\pi} \psi(z_0, z) \right) + \varepsilon(z - z_0),$$

wo $|\Theta| \leq 1$ ist und $\varepsilon(z - z_0)$ gegen 0 konvergiert, wenn z aus dem Innern von E_z *allseitig* gegen z_0 strebt. Da andererseits nach Definition von

$$\psi(z_0, z) = -\arg \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) = \arg z_0 - \arg(z_0 - z),$$

wegen $\arg(z - z_0) - \arg(z_0 - z) = -\pi^{32}$, $\arg z_0 = \mathfrak{D}_0$,

$$(60, 5) \quad \psi(z_0, z) = \mathfrak{D}_0 - \pi - \arg(z - z_0)$$

gilt, folgt aus (60, 2), dass unter den Voraussetzungen des Satzes XIX

³² Man beachte, dass diese Formel dann richtig ist, wenn $\arg(z_0 - z)$, $\arg(z - z_0)$ so festgelegt werden, dass $\arg(z_0 - z)$ im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2} + \mathfrak{D}_0, \frac{\pi}{2} + \mathfrak{D}_0\right)$ und $\arg(z - z_0)$ im Intervall $\left(-\frac{3\pi}{2} + \mathfrak{D}_0, -\frac{\pi}{2} + \mathfrak{D}_0\right)$ bleiben. Offenbar sind bei diesen Festlegungen unsere Argumentfunktionen für alle z aus K_z stetig.

$$(60, 6) \quad \arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} = \left(\frac{\gamma}{\pi} - 1 \right) \arg (z - z_0) + c + P(z)$$

ist, wo $c = \frac{3h_- - h_+}{2} - \frac{\gamma}{\pi} \vartheta_0$ ist und für $P(z)$ die Relation (60, 4) gilt. Und die Relation (60, 4) gilt hier *gleichmässig* für einen z_0 -Bogen M_1 auf E_z , wenn für ihn die Voraussetzungen des Zusatzes zum Satze XIX erfüllt sind und die Relationen (54, 2) und (54, 3) *gleichmässig* gelten.

Es sei noch hervorgehoben, dass bei der Herleitung der Formeln (60, 4), (60, 6), weder von der Annahme (59, 1) noch überhaupt von der Annahme, dass $\gamma > 0$ ist, Gebrauch gemacht worden.³³

61. *Herleitung des Lindelöfschen Satzes.* Damit sind unter den Voraussetzungen des Satzes XIX die zu (14, 1) und (14, 3) analogen Formeln aufgestellt, aus denen offensichtlich sich ohne weiteres die zu (14, 2) analoge Formel ergibt. Wesentlich ist an diesen Formeln, dass die von k_+ und k_- abhängigen Gliederaggregate etwa für $\psi = 0$ gegen 0 konvergieren, wenn dies für k_+ und k_- der Fall ist. Daraus folgt, ähnlich wie in Nr. 58, dass, wenn der Rand von G unter den Voraussetzungen des Satzes XIX im Punkte z_0 eine *L-Tangente* besitzt, die Formel (14, 2) für *allseitig* gegen z_0 konvergierende z gilt — der Lindelöfsche Satz. —

62. *Größenordnung von $f(z)$ und $f'(z)$.*

Satz XXI. Unter den Voraussetzungen von Satz IV gilt, wenn z gegen z_0 im Winkel konvergiert,

$$(62, 1) \quad \frac{\lg |f(z) - w_0|}{\lg |z - z_0|} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1}, \quad \gamma \geq 0,$$

und für $\gamma > 0$

$$(62, 2) \quad \frac{\lg |f'(z)|}{\lg |z - z_0|} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1} - 1, \quad \gamma > 0.$$

Für $\gamma = 0$ aber gilt

$$(62, 3) \quad \overline{\text{Lim}} \frac{\lg |f'(z)|}{\lg \frac{1}{|z - z_0|}} \leq 1,$$

³³ Das Hauptresultat (60, 4), (60, 6) dieser Nummer findet sich im Prinzip bei W. GROSS (1) pp. 273—279.

$$(62, 4) \quad \underline{\text{Lim}}_{z_0} \frac{\lg \left| \int_{z_0}^z |f'(u)| du \right|}{\lg \frac{1}{|z - z_0|}} \geq 0.$$

Beweis: Beim Beweis von (62, 1) genügt es, $G_1 \equiv K_z$, $\gamma_1 = \pi$ anzunehmen, da, wegen $\gamma_1 > 0$, (62, 1) sich durch Division der beiden analogen Formeln ergibt, die sich auf die Abbildung von G und G_1 auf das Innere des Einheitskreises beziehen. Dann aber folgt (62, 1) unmittelbar aus dem Satz XXI°, der weiter unten in dieser Nummer bewiesen wird.

(62, 2) ergibt sich für $\gamma > 0$, wenn man die Formel (11, 3) logarithmiert:

$$\lg |f'(z)| - \lg |f(z) - w_0| + \lg |z - z_0| - \lg \frac{\gamma}{\gamma_1} \rightarrow 0,$$

durch $\lg |z - z_0|$ dividiert und (62, 1) berücksichtigt:

$$\frac{\lg |f'(z)|}{\lg |z - z_0|} - \frac{\gamma}{\gamma_1} + 1 \rightarrow 0.$$

Für $\gamma = 0$ aber folgt aus (11, 3)

$$\lg |f'(z)| - \lg |f(z) - w_0| + \lg |z - z_0| \rightarrow -\infty.$$

Dividieren wir aber die linke Seite durch $\lg \frac{1}{|z - z_0|}$, so bleibt auf jeden Fall der $\overline{\text{Lim}}$ der linken Seite nicht positiv. Wegen (62, 1) folgt dann (62, 3).

Um aber (62, 4) zu beweisen, gehe man von der Formel

$$(62, 5) \quad f(z) - w_0 = \int_{z_0}^z f'(u) du$$

mit geradlinigem Integrationsweg aus und beachte, dass, wegen (62, 1), für $\gamma = 0$

$$|f(z) - w_0| \geq |z - z_0|^\varepsilon$$

für beliebig kleine positive ε gilt, sobald z , in einer festen Winkelumgebung von z_0 in G_1 bleibend, nahe genug an z_0 herankommt. Daher liefert (62, 5) für hinreichend kleine $|z - z_0|$:

$$|z - z_0|^\varepsilon \leq \left| \int_{z_0}^z |f'(u)| du \right|,$$

$$\frac{\lg \left| \int_{z_0}^z |f'(u)| du \right|}{\lg \frac{1}{|z - z_0|}} \geq -\varepsilon,$$

woraus, da ε beliebig klein angenommen werden kann, (62, 4) ohne weiteres folgt.

Aus (62, 1) folgen die am Schlusse der Nr. 30 angegebenen Tatsachen über (30, 1) und (30, 2) ohne weiteres.

Satz XXI°. Unter den Voraussetzungen des Satzes XIX gilt, wenn z gegen z_0 im Winkel konvergiert,

$$(62, 6) \quad \overline{\text{Lim}} \left| \frac{\lg |f(z) - w_0|}{\lg |z - z_0|} - \frac{\gamma}{\pi} \right| \leq \frac{k_+ + k_-}{\pi}.$$

Zum Beweis wende man auf die Funktion $\frac{1}{i} \lg (f(z) - w_0)$ den Satz XVI an. Für diese Funktion ist $\mathcal{A} = -\gamma$. Dann ergibt sich aus (43, 3)

$$\overline{\text{Lim}} \left| \frac{\pi \lg |f(z) - w_0|}{-i \lg \left| 1 - \frac{z}{z_0} \right|} - i\gamma \right| \leq k_+ + k_-,$$

woraus die Behauptung des Satzes unmittelbar folgt.³⁴

§ 12. Ergänzungssätze zum Randverzerrungssatz für Spitzenabbildungen.

63. *Allgemeine Charakterisierung der Resultate.* Während der Randverzerrungssatz auch für $\gamma = 0$ gilt, lassen sich aus ihm in diesem Falle nicht die gleichen Folgerungen ziehen, wie sie für $\gamma > 0$ in den §§ 5, 6 und 11 gezogen

³⁴ Die Relation (62, 1) findet sich für $G_1 = K_z$ in W. GROSS (2) p. 61, wo sich zugleich (p. 60) auch der Satz XXI° findet, mit etwas anderen Bezeichnungen, aber sogar unter etwas allgemeineren Annahmen über den Rand von G . Für den Spezialfall $G_1 = K_z$, $\gamma = \pi$ ist (62, 1) mit dem Satz 3 in VISSER (2) p. 31 äquivalent.

worden sind. Dennoch bleiben verschiedene der oben hergeleiteten Tatsachen auch für $\gamma = 0$ richtig, zum Teil unter geeigneten einschränkenden Voraussetzungen.

Dies gilt erstens für die Formel (14, 1), die ja in der Nr. 14 auch für $\gamma = 0$ bewiesen wird. Ebenso bleibt auch der im § 5 hergeleitete Satz über den Quotienten $\frac{f(z_2) - w_0}{f(z_1) - w_0}$ bei Approximation im Winkel, für $\gamma = 0 < \gamma_1$ spezialisiert, richtig, wie in Nr. 64 bewiesen werden wird.

Wird ferner vorausgesetzt, dass einer der in der Spitze zusammenstossenden Randzweige von G dort eine L -Tangente hat, ebenso wie der entsprechende Randzweig in G_1 , so gilt der Satz über den Quotienten $\frac{f(z_2) - w_0}{f(z_1) - w_0}$ auch bei *halbsseitiger* Konvergenz gegen z_0 an jenem Randzweig von G_1 (Nr. 64, Satz XXII).

Wird aber endlich vorausgesetzt, dass die beiden in der Spitze zusammenstossenden Randzweige von G , ebenso wie die entsprechenden Randzweige von G_1 in w_0 bzw. z_0 L -Tangenten besitzen, so bleibt nicht nur der Satz über den Quotienten $\frac{f(z_2) - w_0}{f(z_1) - w_0}$ bei *allseitiger* Annäherung an z_0 richtig, sondern es gelten auch die Formeln (14, 2), (14, 3) bei allseitiger Approximation (Nr. 65—67), und es bleibt dann ferner auch der im § 5 hergeleitete Satz über den Quotienten $\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)}$ bei Approximation im Winkel, sowie die Formel (62, 2) gültig.

64. *Relative Schwankung der absoluten Verzerrung am Rande. Satz XXII.* Es mögen die Voraussetzungen des Satzes VIII gelten, es sei aber jetzt $0 = \gamma < \gamma_1$. Dann gilt, wenn z_1 und z_2 über eine Winkelumgebung von z_0 in G_1 derart nach z_0 streben, dass dabei für feste positive c_1, c_2

$$(64, 1) \quad 0 < c_1 \leq \left| \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| \leq c_2 < \infty$$

bleibt,

$$(64, 2) \quad \frac{f(z_1) - f(z_0)}{f(z_2) - f(z_0)} \rightarrow 1, \quad \frac{f(z_2) - f(z_1)}{f(z_2) - f(z_0)} \rightarrow 0.$$

Wird ferner vorausgesetzt, dass einer der beiden in w_0 zusammenstossenden Randzweige von G — er sei mit C bezeichnet — in w_0 eine L -Tangente besitzt, ebenso wie der entsprechende Randzweig C_1 von G_1 , so bleibt die Formel (64, 2) richtig, wenn z_1, z_2 gegen z_0 halbseitig am Randstück C_1 streben. — Besitzen endlich die

beiden in w_0 zusammenstossenden Randzweige von G in w_0 L -Tangenten, ebenso wie die entsprechenden Randzweige von G_1 in z_0 , so bleibt (64, 2) richtig, wenn z_1, z_2 gegen z_0 aus G_1 allseitig konvergieren.

Beweis. Es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G_1 = K_z, z_0 = 1$ vorausgesetzt werden. In der Tat kann ja die Abbildung von G_1 auf G auf dem Umwege über K_z ausgeführt werden, wobei die Bedingung (64, 1) wegen der Aussage c) des Satzes VIII in eine analoge Bedingung übergeht.

Man betrachte nun die Funktion $h(z) = \frac{1}{i} \lg (f(z) - w_0)$, deren Realteil in G_1 irgendwie normiert sein möge. Aus der Formel (14, 1), die ja auch für $\gamma = 0$ in

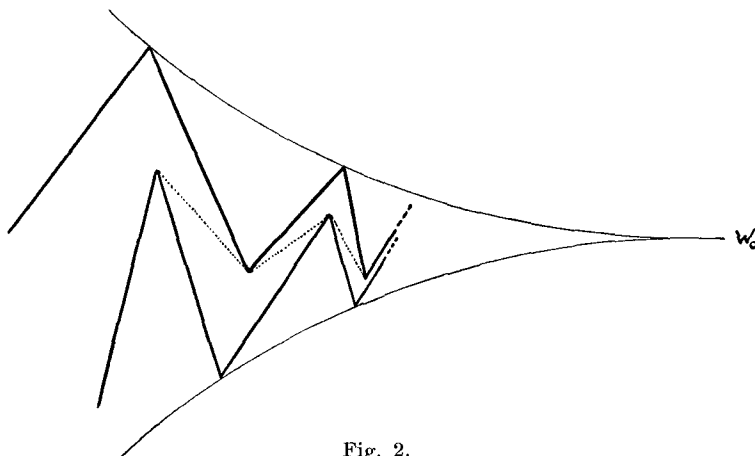


Fig. 2.

Nr. 14 bewiesen wurde, folgt, dass $\Re h(z)$ in der Umgebung von $z = 1$ stetig ist. Wendet man daher auf die Funktion $h(z)$ den Zusatz 2 zum Satz XVI mit $\vartheta_0 = 0$ an, so folgt aus (45, 6)

$$(64, 3) \quad h(z_1) - h(z_2) \rightarrow 0,$$

womit die erste Formel (64, 2) bewiesen ist. Die zweite Formel folgt daraus unmittelbar.

Wird aber vorausgesetzt, dass die Randzweige C, C_1 L -Tangenten besitzen, so verfahren wir ganz analog wie in Nr. 19. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf vorausgesetzt werden, dass erstens $z_0 = 0$ und das Gebiet G_1 mit dem Kreissektor identisch ist, der aus dem Einheitskreis K_z durch die beiden unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ zur negativen reellen Axe geneigten Radien herausgeschnit-

ten wird, zweitens, dass $w_0 = 0$ ist und das Randstück C von G mit einer der beiden Teilstrecken der reellen Axe in der w -Ebene identisch ist, die zwischen $w_0 = 0$ und $w_0 = 1$ bzw. $w_0 = 0$ und $w_0 = -1$ liegen, ferner, dass G vollständig in der oberen Hälfte des Einheitskreises K_w der w -Ebene enthalten ist. Endlich darf angenommen werden, dass das Bild C_1 der Strecke C einer der beiden Begrenzungsradien des Kreissektors G_1 ist.

Nunmehr spiegele man wieder die Gebiete G bzw. G_1 an den Strecken C bzw. C_1 und wende auf die dadurch entstandenen »verdoppelten« Gebiete die Relation (64, 2) an. Sie gilt nunmehr in einem Winkel um C_1 mit der Spitze in z_0 woraus unsere Behauptung ohne weiteres folgt. Damit ist zugleich auch die letzte Behauptung von Satz XXII und daher der ganze Satz XXII bewiesen.

65. *Ein Gegenbeispiel.* Inwiefern kann man erwarten, dass die Formeln (14, 2) und (14, 3) für $\gamma = 0$, d. h. im Falle einer Spitze richtig bleiben?

Ein Blick auf die Figur 2 lehrt, dass die Gültigkeit von (14, 2) und damit auch von (14, 3) im allgemeinen Fall nicht zu erwarten ist. In der Tat würde aus (14, 2), auch nur für radiale Konvergenz von z gegen z_0 , folgen, dass der nach z_0 führende Radius von E_z auf eine Kurve abgebildet wird, für die die Tangentenrichtung sich stetig der Tangentenrichtung im Punkte w_0 anschliesst. Nun bildet der in der Figur 2 zwischen den beiden Zickzacklinien eingeschlossene Bereich im Punkte w_0 eine Spitze, denn die beiden Zickzacklinien besitzen offenbar in w_0 eine gemeinsame Tangente. Andererseits kann man die Breiten der einzelnen Teilstücke unseres Zickzackbereiches zu gegebenen Neigungen der Teilstrecken des Randes so wählen, dass innerhalb dieses Bereiches keine einfache Kurve bis w_0 verlaufen kann, deren Tangentenrichtung sich an die Tangentenrichtung im Punkte w_0 stetig anschliesst.

Man braucht hierzu offenbar nur zu verlangen, dass es in beliebiger Nähe des Punktes w_0 Sehnen geben muss, deren Richtungen von der Richtung der Spitzentangente um einen festen positiven Winkel abweichen. Hierzu braucht man aber nur dafür zu sorgen, dass die Winkel, die die in der Figur punktiert gezeichneten Verbindungsstrecken der aufeinanderfolgenden Eckpunkte der einspringenden Ecken mit der Spitzentangente bilden, absolut genommen, oberhalb einer festen positiven Zahl bleiben. —

Es sind daher ergänzende Voraussetzungen nötig, um die Gültigkeit der Formeln (14, 2), (14, 3) auch im Falle $\gamma = 0$, $\gamma_1 > 0$ sicherzustellen. Eine solche Bedingung ist nun, wie wir zeigen werden, die, dass die beiden in w_0 zusammen-

stossenden Randstücke im Punkte w_0 L -Tangenten besitzen, — dass also, wie wir sagen werden, G in w_0 eine L -Tangentenspitze besitzt. Und zwar gelten dann unsere Formeln, wenn z aus dem Innern von G_1 allseitig gegen z_0 konvergiert, sobald auch die beiden Randzweige von G_1 in z_0 L -Tangenten haben.

Beim Beweis werden wir vom Satz XVII Gebrauch zu machen haben.

66. *Vorbereitende Transformation von G .* Um den Satz XVII anwenden zu können, müssen wir zuerst den Bereich G des Satzes IV mit einer L -Tangentenspitze in w_0 geeignet transformieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $G_1 = K_z$, $z_0 = 1$ vorausgesetzt werden. Nun verbinden wir die beiden in w_0 zusammenstossenden Randstücke in der Nähe von w_0 durch einen Querschnitt des Gebietes G und betrachten das durch diesen Querschnitt abgeschnittene, die Spitze enthaltende Teilstück G' von G . Bekanntlich lässt sich die Abbildungsfunktion $f_1(z)$ von G' auf K_z , die $z_0 = 1$ in w_0 überführt, in der Form darstellen $f(\varphi(z))$, wo $f(z)$ die Abbildungsfunktion des Satzes IV ist und $\varphi(z)$ im Punkte $z = 1$ regulär ist und dort eine von 0 verschiedene Ableitung besitzt. (Vgl. die in Nr. 13 über das Gebiet G^* angestellten Überlegungen.) Daher strebt $\arg \varphi'(z)$ einem festen Grenzwert zu, wenn z in K_z allseitig gegen $z_0 = 1$ konvergiert, und man darf sich auf die Betrachtung von G' beschränken. Man verlängere nun das eine der beiden in w_0 zusammenstossenden Randstücke C_1, C_2 von G' , etwa C_1 , längs der Spitzentangente und bilde ein von einer Jordankurve begrenztes Gebiet G'' , das G' ebenso wie die von w_0 verschiedenen Punkte von C_2 im Innern enthält und zu dessen Berandung sowohl C_1 als auch ein Stück der verlängerten Spitzentangente gehört. Dann hat der Rand von G'' im Punkte w_0 eine L -Tangente, so dass nach dem Lindelöfschen Satz (Satz VI) bei der Abbildung von G'' auf die Halbebene $\Im u > 0$, wobei w_0 in den Nullpunkt übergeht, das Argument der Abbildungsfunktion einen festen Grenzwert besitzt, wenn w gegen w_0 strebt. Bei dieser Abbildung geht das Gebiet G' in ein Gebiet $G^{(3)}$ mit der Spitze in $u = 0$ über, wobei das eine der in der Spitze zusammenstossenden Randstücke ein Stück der reellen u -Axe ist, während das andere — wir bezeichnen es mit C_3 — wiederum eine L -Tangente in $u = 0$ besitzt (vgl. Nr. 17). Wir können also nunmehr G durch $G^{(3)}$ ersetzen.

Wiederholen wir denselben Prozess mit $G^{(3)}$ und C_3 , so geht $G^{(3)}$ in ein Gebiet $G^{(4)}$ etwa in der v -Ebene über, das eine Spitze etwa im Punkte $v = 0$ besitzt, wobei das eine der beiden in $v = 0$ zusammenstossenden Randstücke ein Stück etwa der negativen reellen Axe ist, das andere aber in der Nähe von $u = 0$

analytisch ist und im Punkte $u = 0$ selbst eine L -Tangente besitzt. Daher kann man G durch $G^{(4)}$ ersetzen.

Endlich können wir vom Gebiet $G^{(4)}$ mit Hilfe eines geeigneten geradlinigen Querschnitts ein Teilgebiet abgrenzen und sodann die Ecken durch Kreisbogen »abrunden«. So gelangen wir zu einem Gebiet $G^{(5)}$ in der t -Ebene mit der Spitze in $t = t_0 = 0$.

Nun unterscheidet sich bei jedem einzelnen Schritt unserer Reduktion das Ableitungsargument der Abbildungsfunktion des alten Gebietes auf K_z vom Ableitungsargument der Abbildungsfunktion des neuen Gebietes auf K_z nur um eine Grösse, die einem festen Grenzwert zustrebt, wenn z in K_z allseitig gegen $z_0 = 1$ konvergiert. Ist daher die Formel (14, 2) für die Abbildung des Gebietes G zu beweisen, so genügt es, den Beweis für das Gebiet $G^{(5)}$ zu führen.



Fig. 3.

67. $\arg f'(z)$ bei der Abbildung einer L -Tangentenspitze. Beim Beweis der Formel (14, 2) dürfen wir annehmen, das $G_1 \equiv K_z$, und $\gamma = \pi$ ist. Ferner darf nach dem in Nr. 66 Gesagten angenommen werden, dass das Gebiet G von vornherein die Eigenschaften des Gebietes $G^{(5)}$ und daher insbesondere die in der Figur 3 gezeichnete Gestalt besitzt. Insbesondere sei $w_0 = 0$ vorausgesetzt. Bildet nun $w = f(z)$ das Innere von G so auf K_z ab, dass dabei $w = 0$ in $z = 1$ übergeht, so muss in jedem von $z = 1$ verschiedenen Punkt von E_z $\arg f'(z)$ stetig sein, da der Rand von G überall bis auf $w = 0$ eine stetige Tangente besitzt. Ferner ist der Gesamtzuwachs, den die Tangentenrichtung an G erfährt, wenn man von der Spitze aus den Rand in positiver Richtung durchläuft, gleich π . Normieren wir nun $\arg f'(z)$ so, dass es auf der oberen Hälfte von E_z in der Umgebung von $z = 1$ sich wenig von $\frac{\pi}{2}$ unterscheidet, und beachten, dass der Gesamtzuwachs π der Tangentenrichtung längs des Randes von G gleich ist dem Gesamtzuwachs 2π der Tangentenrichtung an E_z plus dem Gesamtzuwachs von $\arg f'(z)$, so sehen wir, dass für unsere Bestimmung von $\arg f'(z)$

$$\arg f'(e^{i\theta}) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \arg f'(e^{i\theta}) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

gilt. Und aus der Stetigkeit von $\arg f'(e^{i\vartheta})$ für $0 < \vartheta < 2\pi$ folgt, dass $|\arg f'(e^{i\vartheta})|$ gleichmässig beschränkt ist. Um nun dasselbe für $|\arg f'(z)|$ in K_z zu beweisen, wenden wir auf die Funktion $\lg f'(z)$ den Satz XVII an. Denn, dass die Voraussetzungen dieses Satzes für $\Im \lg f'(z)$ erfüllt sind, haben wir soeben bewiesen. Da andererseits der Rand von G rektifizierbar ist, ist bekanntlich

$$(a) \quad \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\vartheta})| d\vartheta$$

gleichmässig in r für $0 \leq r < 1$ beschränkt³⁵. Daraus folgt aber bekanntlich, dass auch das Integral

$$(b) \quad \int_0^{2\pi} |\lg |f'(re^{i\vartheta})|| d\vartheta$$

gleichmässig in r beschränkt ist³⁶, woraus ohne weiteres folgt, dass auch die auf den Realteil von $\lg f'(z)$ bezügliche Voraussetzung des Satzes XVII erfüllt ist. Daher gilt

$$(67, 1) \quad \lg f'(z) = iu \frac{1+z}{1-z} + v + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \arg f'(e^{i\vartheta}) d\vartheta$$

mit reellen u und v . Nun gelten für die in K_z schlichte Funktion $f(z)$ die Ungleichungen des Verzerrungssatzes³⁷

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^2},$$

sowie die Ungleichung des Drehungssatzes³⁸

³⁵ Vgl. BIEBERBACH (1), pp. 182—183.

³⁶ Vgl. OSTROWSKI (1) u. (2). Aus der Beschränktheit von (a) folgt zuerst nur die Beschränktheit von $\int_0^{2\pi} \lg^+ |f'(re^{i\vartheta})| d\vartheta$, wo allgemein $\lg^+ b = \lg b$ für $b \geq 1$ und $\lg^+ b = 0$ für $b < 1$ ist.

Dass aber dies mit der Beschränktheit von (b) äquivalent ist, habe ich in (1), p. 82 angegeben und in (2) p. 261 Fussnote ausgeführt.

³⁷ Vgl. z. B. BIEBERBACH (2), p. 77.

³⁸ Vgl. z. B. BIEBERBACH (2), p. 81.

$$|\arg f'(z)| \leq 2 \lg \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Daraus folgt aber, wenn z im Winkel gegen 1 strebt,

$$\lg f'(z) = O\left(\lg \frac{1}{1-|z|}\right).$$

Andererseits aber folgt, wegen der Beschränktheit von $\arg f'(e^{i\vartheta})$ aus (43, 3), Satz XVI,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \arg f'(e^{i\vartheta}) d\vartheta = O\left(\lg \frac{1}{1-|z|}\right).$$

Daher ergibt sich aus (67, 1)

$$iu \frac{1+z}{1-z} = o\left(\lg \frac{1}{1-|z|}\right),$$

sodass $u = 0$ ist. Damit ergibt sich aus (67, 1)

$$\arg f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2) \arg f'(e^{i\vartheta})}{1-2r \cos(\vartheta-\varphi) + r^2} d\vartheta, \quad z = r e^{i\varphi},$$

sodass $|\arg f'(z)|$ in K_z beschränkt ist. Nunmehr hat man nach dem bekannten Schema zu verfahren. Für die Potentialfunktion $\psi(z) = -\arg(1-z)$ des Satzes II hat die in K_z beschränkte Potentialfunktion $\arg f'(z) - \psi$ auf E_z beschränkte und bis auf $z = -1$ stetige Randwerte, wobei der Randwert für $z = 1$ verschwindet. Daraus folgt aber bekanntlich für $z \rightarrow 1$ bei allseitiger Konvergenz aus K_z

$$\arg f'(z) = \psi + o(1) = -\arg(z-1) - \pi + o(1),$$

womit (14, 2) (und damit wegen (14, 1) auch (14, 3)) bewiesen ist.

68. *Das Verzerrungsverhältnis im Falle von L-Tangentenspitzen.* Unter der gleichen Zusatzvoraussetzung, unter der oben die Formel (14, 2) für Spitzenabbildung hergeleitet wurde, unter der Annahme nämlich, dass die in den Punkten z_0 und w_0 zusammenstossenden Randzweige von G_1 und G L-Tangenten in diesen Punkten besitzen, lässt sich auch der Satz XXII über das absolute Verzerrungs-

verhältnis für $\gamma = 0$ etwas verschärfen. Zunächst gilt bei L -Tangentenspitzen nach Satz XXII die Formel

$$(68, 1) \quad \frac{f(z_1) - w_0}{f(z_2) - w_0} \rightarrow 1$$

unter der Annahme (64, 1), wenn z aus dem Innern von G_1 *allseitig* gegen z_0 konvergiert.

Darüber hinaus gelten aber nunmehr auch die Relationen

$$(68, 2) \quad \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \sim \left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right)^{\frac{\pi}{\gamma_1}},$$

$$(68, 3) \quad \frac{\lg |f'(z)|}{\lg |z - z_0|} \rightarrow -\frac{\gamma_1}{\pi},$$

wenn für feste positive c_1, c_2

$$(68, 4) \quad c_1 \leq \left| \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right| \leq c_2$$

gilt und z, z_1, z_2 im Winkel aus G_1 gegen z_0 streben.

Beim Beweis von (68, 2) und (68, 3) darf nach (21, 2) und (62, 1) vorausgesetzt werden, dass $G_1 \equiv K_z$ und $z_0 = 1$ ist. Man betrachte nun die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{i} \lg ((z - z_0) f'(z)).$$

Dann lässt sich das oben bewiesene Resultat über die Gültigkeit von (14, 2) für $\gamma = 0$ bei *allseitiger* Konvergenz von z gegen $z_0 = 1$ aus dem Innern von E_z so formulieren, dass dann

$$\Re h(z) \rightarrow c$$

gilt. Daraus folgt aber, dass die Randfunktion von $\Re h(z)$ in einer Umgebung von $z_0 = 1$ in K_z beschränkt ist, und daher in der Umgebung von z_0 auf E_z nach Fatou bis auf eine Nullmenge eine Randwertfunktion besitzt, die in z_0 stetig ist. Daher genügt die Funktion $h(z)$ der Voraussetzung des Zusatzes 3 zum Satze XVI, wobei die Punktmenge M dieses Satzes aus dem einen Punkt $z_0 = 1$ besteht. Dann liefert der Zusatz 3 zum Satz XVI unmittelbar, wegen (45, 61),

$$\lg |(z_1 - z_0) f'(z_1)| - \lg |(z_2 - z_0) f'(z_2)| \rightarrow 0,$$

wenn z_1 und z_2 im Winkel gegen z_0 konvergieren und (68, 4) gilt, womit (68, 2) bewiesen ist. Andererseits aber liefert die Behauptung (43, 3) des Satzes XVI, auf $h(z)$ angewandt, da ja jetzt $k_+(\mathcal{D}_0) = k_-(\mathcal{D}_0) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_0) = 0$ ist, die Behauptung (68, 3) unmittelbar.

Wir fassen unsere Resultate zusammen im

Satz XXIII. Ist unter den Voraussetzungen des Satzes IV $\gamma = 0$ und besitzen die in z_0 bzw. w_0 zusammenstossenden Randzweige von G_1 bzw. G in diesen Punkten L -Tangenten, so gilt, wenn das Punktepaar z_1, z_2 aus dem Innern von G_1 so gegen z_0 konvergiert, dass dabei $\left| \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right|$ zwischen festen positiven Schranken bleibt,

$$(68, 5) \quad \arg f'(z) + \arg(z - z_0) \rightarrow c,$$

für eine Konstante c , wenn z allseitig gegen z_0 geht;

$$(68, 6) \quad \frac{f'(z_2)}{f'(z_1)} \sim \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \right)^{\frac{\pi}{\gamma_1}},$$

wenn z_1 und z_2 im Winkel gegen z_0 gehen;

$$(68, 7) \quad \frac{\lg |f'(z)|}{\lg |z - z_0|} \rightarrow -\frac{\gamma_1}{\pi}$$

wenn z aus G_1 im Winkel gegen z_0 geht.

