MÉMOIRE SUR LES SUITES DE POLYNÔMES.

Par

RENÉ LAGRANGE

à LILLE.

Introduction.

L'étude des suites des polynômes de Bernoulli et d'Euler suggère deux remarques simples, dont l'énoncé est susceptible de faire comprendre l'idée directrice de ce travail. Ces suites de polynômes, avec la généralisation apportée par N. E. Nörlund dans un mémoire fondamental[1], jouissent de propriétés essentielles semblables se traduisant par des formules symboliques de même forme. Cette forme symbolique est

$$c_n = (a + b)_n, \tag{1}$$

où le second membre doit être développé suivant la formule du binôme de Newton, avec remplacement des exposants de a et b par des indices égaux; de sorte que (1) s'écrit encore

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{s!} \frac{b_{n-s}}{(n-s)!}. \tag{2}$$

Ce dernier membre est justement le terme général du produit des deux séries de terme général $\frac{a_n}{n!}$ et $\frac{b_n}{n!}$. On conçoit donc qu'un algorithme des suites, dans lequel l'opération (2) joue un rôle essentiel, permette de condenser la traduction, et même la démonstration de pareilles propriétés.

[1] Mémoire sur les polynômes de Bernoulli, Acta math. 43 (1920), p. 121—196.

26 — 27377. *Acta mathematica.* 51. Imprimé le 10 février 1928.

Le premier chapitre de ce travail concerne un pareil algorithme. On verra comment une question assez générale conduit à cette opération (2), ou *produit homogène* de deux suites. L'étude qui suit nécessite l'introduction d'une autre opération, associative et non commutative, que j'appelle *produit diagonal*, possédant néanmoins des propriétés intéressantes.

Par contre, lorsqu'on définit ces deux espèces de polynômes au point de vue du calcul aux différences finies, une différence essentielle apparait immédiatement. Tandis que la moyenne

$$\nabla E_n(x) = \frac{E_n(x+1) + E_n(x)}{2} = x^n$$

définit entièrement le polynôme d'Euler $E_n(x)$, la différence finie

$$\triangle B_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = n\, x^{n-1}$$

ne suffit pas pour définir le polynôme de Bernoulli $B_n(x)$, la définition complète faisant intervenir les nombres de Bernoulli. Bien entendu, une telle distinction est irréductible, mais l'algorithme des suites établi au premier chapitre permet de définir très naturellement une classe générale de polynômes, comprenant les deux suites en question, et dont l'étude est l'objet principal que je me propose ici.

Le second chapitre concerne en effet la suite la plus générale des polynômes $P_n(x)$, appelés *polynômes d'interpolation*, telle que l'on ait identiquement

$$\sum_{s=0}^{n} P_s(x)\, P_{n-s}(y) = P_n(x+y) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Une telle suite dépend d'une suite constante arbitraire, et est définie, en particulier, par la suite des valeurs correspondant à une valeur donnée de l'argument.

Le produit homogène d'une suite constante et d'une suite d'interpolation fournit un suite de polynômes dépendant de deux suites constantes arbitraires, appelés *polynômes bernoulliens d'interpolation*. C'est à de telles suites que sont consacrés les quatrième et cinquième chapitres.

Il suffit de choisir convenablament les deux suites constantes paramétriques pour obtenir les suites de Bernoulli, d'Euler, ou les polynômes d'Hermite. Avec une pareille définition, la différence signalée plus haut prend la forme suivante: alors que les polynômes de Bernoulli correspondent à un choix simple des deux suites paramétriques, l'une de celles-ci est compliquée pour les polynômes d'Euler;

néanmoins on peut définir ceux-ci à l'aide de paramètres simples en considérant leur suite comme le quotient de deux suites bernoulliennes d'interpolation.

A une suite bernoullienne d'interpolation, appartiennent trois opérations aux différences finies, dont deux diminuent le degré d'un polynôme, et l'autre le conserve. Le troisième chapitre s'occupe de telles opérations. Les deux opérations de la première sorte correspondent aux deux suites paramétriques, chacune à chacune, et la troisième opération est leur quotient fonctionnel. Ceci explique que les polynômes de Bernoulli, définis par une différence finie simple, correspondent à un choix beaucoup plus simple des suites paramétriques que les polynômes d'Euler, pour lesquels c'est l'opération finie de la deuxième sorte (moyenne) qui est simple.

Je tiens à dire que ce travail, inspiré par le beau mémoire de N. E. Nörlund déjà cité, ne pouvait avoir pour objet de démontrer de nouveau des résultats obtenus de manière si systématique et si simple, mais que le but poursuivi est de tâcher de généraliser et de faire mieux comprendre un sujet si important.

CHAPITRE I.

Les opérations sur les suites.

1. On appelle suite une succession indéfinie de nombres, ou, plus généralement, d'expressions, rangés dans un certain ordre. Chacune de ces expressions est un terme de la suite, et est affectée d'un indice désignant le nombre de termes qui la précède. Si tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang, la suite est dite limitée. Etant donnée la suite

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$$

dont le terme de rang $n+1$ est a_n, nous la désignerons par la notation $[a_n]$, ou, lorsqu'aucune ambiguité n'est à craindre, par $[a]$. Par exemple, la suite

$$a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n+2} \ldots$$

dont le terme de rang $n+1$ est a_{n+2} sera désignée par $[a_{n+2}]$.

Deux suites $[a_n]$ et $[b_n]$ seront dites égales si l'on a

$$a_n = b_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et l'on écrira alors, par exemple,

$$[a] = [b].$$

Nous appellerons *somme* de deux suites $[a]$ et $[b]$ la suite $[c]$ dont le terme général c_n est

$$c_n = a_n + b_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et nous écrirons

$$[c] = [a] + [b].$$

Cette opération, dite *addition* des deux suites, est évidemment commutative. On peut l'étendre par récurrence à une nombre quelconque de suites, et l'opération ainsi généralisée est commutative et associative. En désignant par $[0]$ la suite dont tous les termes sont nuls, on voit que la suite zéro est caractérisée par l'identité

$$[a] + [0] \equiv [a].$$

Nous appellerons *produit terme à terme* des deux suites $[a]$ et $[b]$ la suite $[c]$ de terme général

$$c_n = a_n b_n.$$

Cette opération, nommée *multiplication terme à terme*, est évidemment commutative et distributive pour l'addition. Son extension au cas de plus de deux séries est en outre une opération associative. L'intérêt de cette opération est assez faible, car elle ne fait intervenir que des termes isolés dans chaque suite, et c'est pourquoi il semble inutile de la désigner ici par une notation spéciale.

2. Etant donnée une suite double de coefficients Γ_n^s $(s \leq n)$, nous appellerons *produit homogène*, ou, plus simplement, *produit* de deux suites $[a]$ et $[b]$ la suite $[c]$ dont le terme de rang $n + 1$ est

$$c_n = \sum_{s=0}^{n} \Gamma_n^s a_s b_{n-s} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{1}$$

et nous écrirons

$$[c] = [a] \cdot [b].$$

Nous allons choisir les Γ_n^s de manière que la *multiplication homogène*, ainsi définie, soit une opération commutative, et, lorsqu'on l'étend par récurrence à plus de deux suites, *associative*. Il est clair que, quels que soient les Γ_n^s, elle est distributive pour l'addition.

Tout d'abord, pour que cette opération soit commutative, il faut et il suffit que l'on ait

(2) $$\Gamma_n^s = \Gamma_n^{n-s}.$$

Pour réaliser l'associativité, il suffit d'écrire que

$$[[a] \cdot [b]] \cdot [c] \equiv [[a] \cdot [c]] \cdot [b],$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{s} \Gamma_n^s \Gamma_s^t a_t b_{s-t} c_{n-s} \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{t=0}^{i} \Gamma_n^i \Gamma_i^t a_t c_{i-t} b_{n-i}.$$

En permutant les sommations dans les deux membres, l'identification des coefficients de a_t donne

$$\sum_{s=t}^{n} \Gamma_n^s \Gamma_s^t b_{s-t} c_{n-s} = \sum_{i=t}^{n} \Gamma_n^i \Gamma_i^t c_{i-t} b_{n-i},$$

et l'identification, dans ces deux membres, des termes semblables $(i = n + t - s)$ fournit la condition nécessaire et suffisante

$$\Gamma_n^s \Gamma_s^t = \Gamma_n^{n+t-s} \Gamma_{n+t-s}^t.$$

En posant $s - t = r$, et compte tenu de (2), cette relation s'écrit

(3) $$\Gamma_n^s = \frac{\Gamma_n^r}{\Gamma_s^r} \Gamma_{n-r}^{s-r}.$$

Ceci établi, posons $\Gamma_n^1 = \Gamma_n$; pour $r = 1$, (3) fournit la relation récurrente

$$\Gamma_n^s = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_s} \Gamma_{n-1}^{s-1},$$

et, par suite, en supposant qu'aucun des Γ_n n'est nul,

(4) $$\Gamma_n^s = \frac{\Gamma_n \Gamma_{n-1} \cdots \Gamma_{n-s+1}}{\Gamma_s \Gamma_{s-1} \cdots \Gamma_2 \Gamma_1} \Gamma_1 \qquad s \geq 1.$$

En outre, on a

$$\Gamma_n^0 = \Gamma_n^n = \Gamma_1 \qquad n \geq 1,$$

tandis que, pour $r = n = s$, (3) donne

$$\Gamma_0^0 = \Gamma_n^n = \Gamma_1 .$$

Quel que soit n, on a donc $\Gamma_n^0 = \Gamma_1$. En faisant $\Gamma_1 = 1$, ce qui ne diminue en rien la généralité, nous pouvons énoncer le

Théorème. *Pour que la multiplication homogène définie par les coefficients Γ_n^s $(s \leq n)$ soit commutative et associative, il faut et il suffit que ces coefficients soient de la forme*

$$\Gamma_n^s = \frac{\Gamma_n \Gamma_{n-1} \cdots \Gamma_{n-s+1}}{\Gamma_s \Gamma_{s-1} \cdots \Gamma_1}, \tag{5}$$

les Γ_s $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ étant une suite quelconque de nombres, tous différents de zéro, avec $\Gamma_1 = 1$.

Il est remarquable que ces coefficients s'expriment en fonction des Γ_s de la même manière que les coefficients du développement du binôme de Newton à l'aide des nombres entiers successifs.

3. Une conséquence immédiate de ce résultat est la possibilité de ramener toutes les multiplications homogènes à une seule, car, étant donnée la suite $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \ldots$, il suffit de substituer à toute suite $[a_n]$ la suite $\left[\frac{a_n}{\Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_n}\right]$. La définition du produit homogène par l'équation (1), s'écrivant

$$\frac{c_n}{\Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_n} = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{\Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_s} \, \frac{b_{n-s}}{\Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_{n-s}},$$

on voit que, pour les nouvelles suites, on est ramené à la multiplication homogène dont tous les coefficients Γ_s sont égaux à 1. On ne diminue donc en rien la généralité de la question en adoptant, pour définition du produit homogène de deux suites $[a_n]$, $[b_n]$, la suite de terme général

$$c_n = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s} . \tag{6}$$

C'est ce que nous ferons. c_n est d'ailleurs le terme général de la série qui représente le produit formel des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

Dans ces conditions, les opérations que nous avons définies jusqu'ici coïncident avec les opérations formelles de même nom, égalité, addition et multiplication, effectuées sur les séries.

En appelant suite paire, ou impaire, une suite dont tous les termes d'indice impair, ou pair, sont nuls, on voit que la somme et le produit homogène de deux suites de même parité est une suite de même parité, et que le produit homogène de deux suites de parités différentes est une suite impaire.

Il résulte également de l'homogénéité du second membre de (6) par rapport aux indices que, si l'on multiplie les suites $[a]$ et $[b]$ terme à terme par la suite $[\varrho^n]$ des puissances d'un nombre quelconque ϱ, le produit $[a] \cdot [b]$ est également multiplié terme à terme par cette suite de puissances. Cette propriété se conserve pour le produit homogène d'un nombre quelconque de suites.

Lorsque les a_n dépendent d'une variable x, la distributivité du produit homogène pour l'addition permet d'écrire

$$[\lambda_1 a_n(x_1) + \lambda_2 a_n(x_2) + \cdots + \lambda_\mu a_n(x_\mu)] \cdot [b_n] = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i [a_n(x_i)] \cdot [b_n],$$

les λ_i désignant μ constantes arbitraires, et les x_i μ valeurs particulières quelconques de x. Par exemple, en désignant par $\underset{\omega}{\triangle}$ la différence finie divisée

$$\underset{\omega}{\triangle} f(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega},$$

on a

$$\left[\underset{\omega}{\triangle} a(x)\right] \cdot [b] = \underset{\omega}{\triangle}\,[[a(x)] \cdot [b]],$$

pourvu que $[b]$ soit indépendant de x. Si, par exemple, $[b]$ est fonction d'une variable y indépendante de x, on aura

$$\left[\underset{\alpha}{\triangle}_x a(x)\right] \cdot \left[\underset{\beta}{\triangle}_y b(y)\right] = \underset{\alpha}{\triangle}_x \underset{\beta}{\triangle}_y\,[[a(x)] \cdot [b(y)]].$$

Il est inutile d'insister sur ces considérations, et en particulier, l'extension au cas de plus de deux séries serait immédiate.

4. Nous appellerons *suite unité* la suite

$$[1]: \quad 1, 0, 0, \ldots, 0 \ldots.$$

Cette suite est caractérisée par l'identité

$$[1] \cdot [a] \equiv [a].$$

Plus généralement, considérons les suites $[a_0]$ dont tous les termes autres que celui d'indice zéro sont nuls. L'addition et la multiplication homogène des suites de cette nature fournissent des suites semblables, et se réduisent aux opérations correspondantes sur les premiers termes. Nous appellerons ces suites les *nombres*, et les désignerons encore par leur premier terme. Le produit homogène d'une suite $[a_n]$ et d'un nombre b est la suite $[b\,a_n]$.

D'une manière plus générale, on peut considérer les *suites élémentaires d'indice* r, c'est-à-dire les suites dont tous les termes autres que celui d'indice r sont nuls. Une telle suite sera désignée par $[a_r]$, r étant ici, non un indice variable comme n, mais l'indice de la suite élémentaire. Effectuer la multiplication homogène d'une suite $[a]$ par la suite élémentaire $[1_r]$ revient à accroître de r les indices des termes de $[a]$, les termes de ce produit, dont l'indice est inférieur à r, étant nuls; autrement dit,

$$[a_n]\cdot[1_r]=[a_{n+r}].$$

En appelant puissance r^e d'une suite $[a]$ le produit homogène de r suites égales à $[a]$, suite que l'on désignera par $[a]^r$, on a évidemment

$$[a]^r\cdot[a]^s=[a]^{r+s},$$

et, en ce qui concerne les suites élémentaires,

$$[a_0]^r=a^r,$$

$$[a_1]^r=[(a^r)_r].$$

Les suites élémentaires se déduisent donc toutes, par multiplication homogène, des nombres et de la *suite élémentaire principale* $[1_1]$; par conséquent toute suite peut se déduire de celles-ci par addition et multiplication homogène.

Aux puissances entières et positives d'une suite, on adjoindra la puissance zéro, définie par

$$[a]^r\cdot[a]^0=[a]^r,$$

ce qui donne

$$[a]^0=[1]=1.$$

5. La *division homogène* de deux suites, ou, plus simplement, *division*, est l'opération inverse de la multiplication homogène. Le quotient de $[a]$ par $[b]$ est, si elle existe, la suite $[c]$ telle que

$$[b]\cdot[c]=[a], \tag{7}$$

et l'on écrira

$$[c] = \frac{[a]}{[b]}. \tag{8}$$

Tout d'abord, si $[c]$ existe, elle est unique, car le produit $[b] \cdot [c]$ n'est égal à zéro que si l'un des deux facteurs est la suite zéro.

Supposons tout d'abord que $[a] = 1$. La suite $[c]$, si elle existe, s'appellera la *suite inverse* de $[b]$, et on l'écrira

$$[b]^{-1} = \frac{1}{[b]}.$$

Dans le cas où $[a]$ est quelconque, (7) définit toujours le quotient $[c]$ si $[b]$ admet une suite inverse, car la multiplication des deux membres de cette équation par $[b]^{-1}$ donne

$$[c] = [a] \cdot [b]^{-1},$$

et, réciproquement, la suite ainsi définie vérifie bien (7). Autrement dit, une suite $[b]$, qui admet une suite inverse, divise une suite quelconque. Quelle est la condition pour qu'il en soit ainsi? En désignant par b_n et $b_n^{(-1)}$ les termes généraux de $[b]$ et $[b]^{-1}$, on doit avoir

$$\begin{aligned} b_0 b_0^{(-1)} &= 1, \\ b_0 b_1^{(-1)} + b_1 b_0^{(-1)} &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad &\dots \\ b_0 b_n^{(-1)} + b_1 b_{n-1}^{(-1)} + \cdots + b_n b_0^{(-1)} &= 0, \end{aligned}$$

et ce système d'équations définit successivement $b_0^{(-1)}, b_1^{(-1)}, \dots, b_n^{(-1)}$ pourvu que b_0 diffère de zéro. Par contre la première de ces équations est incompatible si b_0 est nul. Donc, en appelant *indice d'une suite* l'indice du premier terme non nul de cette suite, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite admette une suite inverse est qu'elle soit d'indice zéro.

Cependant une suite $[b]$ d'indice $i \geq 1$ divise une autre suite $[a]$ pourvu que $[a]$ soit d'indice au moins égal à i. En effet, l'indice d'un produit est égal à la somme des indices, et réciproquement si l'indice de $[a]$ est supérieur ou égal à i, on peut diviser $[a]$ et $[b]$ par la suite élémentaire $[1_i]$ sans modifier le quotient, s'il existe, ce qui donne

$$\frac{[b]}{[1_i]} \cdot [c] = \frac{[a]}{[1_i]},$$

opération dont le diviseur est maintenant d'indice zéro. En résumé, la *condition nécessaire et suffisante pour que* $[a]$ *soit divisible par* $[b]$ *est que son indice soit au moins égal à celui de* $[b]$. *L'indice du quotient est alors égal à la différence des indices du dividende et du diviseur.*

Remarquons que ce qui précède s'écrit

$$\frac{[a]}{[b]} = \frac{[a]}{[1_i]} \cdot \frac{[1_i]}{[b]},$$

et l'on pourrait appeler inverse généralisée de $[b]$ la suite $\frac{[1_i]}{[b]}$. Cependant, on ne peut attribuer à cette suite la notation $[b]^{-1}$, qui ne posséderait pas les propriétés essentielles des exposants.

Il est clair que l'on ne change pas le quotient de deux suites en les multipliant par une même suite, ou en les divisant par une suite dont l'indice ne surpasse pas l'indice du diviseur.

6. Etant donnée une suite $[a]$ d'indice zéro, on appellera puissance $(-r)^e$ de a, et on l'écrira $[a]^{-r}$, la puissance r^e de l'inverse de $[a]$, r désignant un nombre entier positif. Il est clair que l'ensemble des exposants entiers positifs et négatifs possède les mêmes propriétés que les exposants de la notation algébrique.

Par exemple, considérons la suite

$$(9) \qquad [a]: 1, 1, 1, \ldots, 1 \ldots;$$

le terme général de sa puissance r^e est

$$a_n^{(r)} = \frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!},$$

quel que soit le signe de l'entier r, ou encore, en utilisant une notation classique, $a_n^{(r)} = (-1)^n \binom{-r}{n}$. Si r est positif, $a_n^{(r)}$ est le nombre des combinaisons complètes de r objets n à n, et, pour $r < 0$, on voit que les puissances négatives de (9) sont des suites limitées.

7. Nous appellerons racine d'ordre r (r entier positif) d'une suite $[a]$, ou puissance d'ordre $\frac{1}{r}$, et nous l'écrirons $[a]^{\frac{1}{r}}$, une suite $[b]$ telle que

$$[b]^r = [a]. \tag{10}$$

Or l'équation (10) définit $[b]$ par le système d'équations

$$\left\{\begin{aligned} b_0^r &= a_0 \\ r\,b_0^{r-1}\,b_1 &= a_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots + r\,b_0^{r-1}\,b_n &= a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right.$$

les termes b_i non écrits dans la $(n+1)^e$ équation étant d'indice inférieur à n; et ce système détermine les $b_n\,(n \geq 1)$ sans ambiguité dès que b_0 est choisi, pourvu que b_0 soit différent de zéro. En résumé, *une suite $[a]$ d'indice zero admet r racines r^e, correspondant aux r racines r^e du premier terme a_0.*

Si $[b]$ était d'indice i non nul, $[b]^r$ serait d'indice $i\,r$, donc une suite $[a]$ d'indice non nul k n'admet des racines r^e que si r divise k, l'indice de ces racines étant alors le quotient $\frac{k}{r}$. D'ailleurs on peut alors écrire

$$\left[\frac{[b]}{[1_i]}\right]^r = \frac{[b]^r}{[1_k]} = \frac{[a]}{[1_k]},$$

et l'on est ainsi ramené à l'extraction de la racine r^e d'une suite d'indice zéro.

La racine $(-r)^e$ d'une suite d'indice zéro (r entier positif) sera définie comme étant la racine r^e de l'inverse de cette suite.

Enfin on définira la puissance $[a]^{\frac{r}{s}}$ d'une suite $[a]$ d'indice zéro, r et s étant deux entiers, par l'équation

$$[a]^{\frac{r}{s}} = [[a]^r]^{\frac{1}{s}},$$

de sorte que le nombre de ces puissances est égal à s si r et s sont premiers entre eux.

Toutes ces définitions peuvent être traduites à l'aide des séries formées avec ces suites, comme nous l'avons déjà remarqué pour la multiplication homogène. Considérons la série

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

dont les coefficients sont les termes de $[a]$. Il résulte des définitions précédentes que $a_n^{(r)}$, où r désigne un nombre rationnel de signe quelconque, est le coefficient de t^n dans le développement formel de

$$(11) \qquad (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots)^r \qquad a_0 \neq 0$$

suivant les puissances entières croissantes de t. Remarquons d'ailleurs que $a_n^{(r)}$ ne dépend que des $n+1$ premiers termes de la suite, ce qui permet, en particulier, de supprimer dans le développement de (11) les termes $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$; on est alors ramené à développer des puissances r^e de polynômes. Dans ces conditions, les coefficients de $[a]^r$ apparaissent bien comme étant des fonctions continues de r, ce qui permet de définir $a_n^{(r)}$ par continuité pour toutes les valeurs de r rationnelles ou non. Tout ceci s'étend naturellement aux valeurs imaginaires des exposants.

8. *Produit diagonal.* Outre les opérations classiques que nous venons de résumer, on peut introduire une opération particulière aux suites, et qui joue un rôle essentiel dans le calcul d'interpolation. Etant donnée une suite arbitraire

$$[b]: \qquad b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots,$$

formons le tableau de ses puissances entières positives, d'ordre $1, 2, 3, \ldots$, et soit $[a]$ une autre suite, également arbitraire. Nous appellerons *produit diagonal de* $[b]$ *par* $[a]$ la suite $[c]$ dont le terme général est

$$(12) \qquad c_n = \sum_{s=0}^{n} a_s b_{n-s}^{(1+s)},$$

le qualificatif diagonal rappelant que les termes $b_{n-s}^{(1+s)}$ de la somme (12) sont les termes de la diagonale de rang $n+1$, et descendant de droite à gauche, du tableau des puissances de $[b]$.

Cette opération, que nous appellerons *multiplication diagonale de* $[b]$ *par* $[a]$ est distributive pour l'addition de plusieurs *multiplicateurs* $[a]$, mais non pour l'addition de plusieurs *multiplicandes* $[b]$. D'ailleurs les deux facteurs $[a]$ et $[b]$ jouent des rôles essentiellement distincts, et l'opération *n'est pas commutative pour des suites quelconques.* Remarquons cependant que si l'un de ces facteurs est la suite unité, le produit diagonal est identique à l'autre facteur.

La non commutativité de la multiplication diagonale n'est pas un grave inconvénient, car la propriété la plus essentielle des opérations appelées »multiplication» est l'associativité. Or l'opération (12) est *associative*.

Avant de le démontrer, établissons la formule remarquable

$$c_n^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} a_s^{(r)} b_{n-s}^{(r+s)}, \tag{13}$$

r désignant un entier positif ou nul. Pour $r = 0$, (13) est une identité, et pour $r = 1$, elle se réduit à la définition (12) de $[c]$. Démontrons donc (13) par récurrence, en la supposant vraie pour r. Par définition,

$$c_n^{(r+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(r)} c_{n-\nu}^{(1)},$$

d'où l'on déduit, grâce à (12) et (13),

$$c_n^{(r+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{t=0}^{n-\nu} a_s^{(r)} a_t^{(1)} b_{\nu-s}^{(r+s)} b_{n-\nu-t}^{(1+t)},$$

ou, en permutant les sommations, et en posant $\nu - s = i$,

$$c_n^{(r+1)} = \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{n-s} a_s^{(r)} a_t^{(1)} \sum_{i=0}^{n-s-t} b_i^{(r+s)} b_{n-s-t-i}^{(1+t)}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{n-s} a_s^{(r)} a_t^{(1)} b_{n-s-t}^{(r+s+t+1)};$$

en posant $s + t = h$, il vient enfin

$$c_n^{(r+1)} = \sum_{h=0}^{n} \sum_{s=0}^{h} a_s^{(r)} a_{h-s}^{(1)} b_{n-h}^{(r+h+1)},$$

qui n'est autre que (13) pour l'indice supérieur $r + 1$.

Ceci établi, si nous adoptons la notation

$$[c] = [a] : [b]$$

pour représenter la multiplication diagonale de $[b]$ par $[a]$, l'associativité résultera de l'identité

$$[[a] : [b]] : [d] = [a] : [[b] : [d]]; \tag{14}$$

si nous désignons par $[f]$ la suite au premier membre, c'est-à-dire le produit diagonal de $[d]$ par $[c]$, nons avons

$$f_n = \sum_{s=0}^{n} c_s\, d_{n-s}^{(1+s)},$$

ou, compte tenu de (12),

$$f_n = \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{s} a_t\, b_{s-t}^{(1+t)}\, d_{n-s}^{(1+s)}$$

$$= \sum_{t=0}^{n} a_t \sum_{s=t}^{n} b_{s-t}^{(1+t)}\, d_{n-s}^{(1+s)};$$

or la dernière somme s'écrit

$$\sum_{i=0}^{n-t} b_i^{(1+t)}\, d_{n-t-i}^{(1+t+i)},$$

ce qui, en vertu de (13), est justement le terme d'indice $n-t$ de la puissance $(1+t)^e$ du produit diagonal $[b]:[d]$; f_n est donc le terme d'indice n du produit diagonal au second membre de (14), ce qui démontre notre proposition.

L'associativité permet de définir sans ambiguité le produit diagonal de plus de deux suites, données dans un certain ordre, et l'on pourra désigner un tel produit par la notation

$$[a]:[b]:[c]:[d]:\ldots$$

Remarquons que le produit diagonal de suites toutes paires ou impaires est impair sauf lorsque tous les facteurs sont pairs.

9. Lorsque les suites $[a]$ et $[b]$ sont d'indice zéro, la formule (13) subsiste pour les valeurs entières négatives de r. Pour le voir il suffit de montrer que le produit homogène de deux suites définies par le second membre de (13), relatives à deux valeurs entières r et r' de r est la suite analogue relative à l'indice $r+r'$, quels que soient les signes de r et r'. Or le terme d'indice n de ce produit homogène est

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{t=0}^{n-\nu} a_s^{(r)}\, a_t^{(r')}\, b_{\nu-s}^{(r+s)}\, b_{n-\nu-t}^{(r'+t)}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{n-s} a_s^{(r)} a_t^{(r')} \sum_{\nu=s}^{n-t} b_{\nu-s}^{(r+s)} b_{n-\nu-t}^{(r'+t)}$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{n-s} a_s^{(r)} a_t^{(r')} b_{n-s-t}^{(r+r'+s+t)},$$

et, par suite, en posant $s+t=i$,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{s=0}^{i} b_{n-i}^{(r+r'+i)} a_s^{(r)} a_{i-s}^{(r')} = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(r+r')} b_{n-i}^{(r+r'+i)}.$$

Le calcul est d'ailleurs semblable à celui du paragraphe précédent. En faisant, par exemple, $r'=-r$, notre proposition entraîne l'identité des deux membres de (13) pour les valeurs négatives de r. Plus généralement, si l'on désigne par $c_{r,n}$ le deuxième membre de (13), on a

$$[c_{r,n}] \cdot [c_{r',n}] \cdot [c_{r'',n}] \ldots = [c_{r+r'+r''+\cdots,n}],$$

et cela quels que soient les nombres $r, r', r'', \ldots$; en particulier, prenons $r=\frac{p}{q}$, et formons la puissance homogène q^e de $[c_{r,n}]$. Il vient

$$[c_{r,n}]^q = [c_{p,n}],$$

et, si p et q sont entiers,

$$[c_{r,n}]^q = [c]^p,$$

donc

$$[c_{r,n}] = [c]^{\frac{p}{q}}.$$

La formule (13) s'étend donc aux valeurs rationnelles de r, et, par continuité, aux valeurs incommensurables de cet indice, à condition de supposer toujours que les deux suites $[a]$ et $[b]$ sont d'indice zéro.

On peut encore généraliser ce résultat. Reprenons (13), où r désigne un nombre quelconque, et multiplions les deux membres par $b_{\nu-n}^{[r']}$, où r' est un nombre également quelconque, et ν un entier positif. Faisons la somme, membre à membre, des équations ainsi obtenues, relatives aux valeurs $0, 1, 2, \ldots \nu$ de n. Il vient

$$\sum_{n=0}^{\nu} c_n^{(r)} b_{\nu-n}^{(r')} = \sum_{n=0}^{\nu} \sum_{s=0}^{n} a_s^{(r)} b_{n-s}^{(r+s)} b_{\nu-n}^{(r')}$$

$$= \sum_{s=0}^{\nu} a_s^{(r)} \sum_{n=s}^{\nu} b_{n-s}^{(r+s)}\, b_{\nu-n}^{(r')}$$

$$= \sum_{s=0}^{\nu} a_s^{(r)}\, b_{\nu-s}^{(r+r'+s)}$$

donc

$$(15) \qquad [b]^{r'} \cdot [[a]:[b]]^r = \left[\sum_{s=0}^{n} a_s^{(r)}\, b_{n-s}^{(r+r'+s)}\right].$$

En particulier, $r'=-r$ donne la formule assez remarquable

$$(16) \qquad \left[\frac{[a]:[b]}{[b]}\right]^r = \left[\sum_{s=0}^{n} a_s^{(r)}\, b_{n-s}^{(s)}\right],$$

dont nous aurons à nous servir plus loin. En convenant d'effectuer, dans toute succession de produits homogènes et diagonaux, d'abord les produits diagonaux, puis la multiplication homogène des suites obtenues, on peut écrire (16)

$$(16') \qquad [b]^{-1} \cdot [a] : [b] = \left[\sum_{s=0}^{n} a_s^{(r)}\, b_{n-s}^{(s)}\right]^{\frac{1}{r}};$$

Par exemple, pour $r=1$, on voit que le terme général de la suite $[b]^{-1} \cdot [a] : [b]$ est

$$(17) \qquad \sum_{s=0}^{n} a_s\, b_{n-s}^{(s)};$$

en comparant le second membre de (16′) à (17), on peut donc écrire la formule remarquable[1]

$$(18) \qquad [b]^{-1} \cdot [a]^r : [b] = [[b]^{-1} \cdot [a] : [b]]^r.$$

10. Nous avons déjà remarqué que le produit homogène de deux suites est multiplié terme à terme par $[\varrho^n]$ en même temps que ces deux suites. En parti-

[1] L'opération au premier membre de (18), considérée par rapport à $[a]$ et $[b]$, n'est pas associative. La multiplication diagonale est la seule opération de la forme

$$\left[\sum_{s=0}^{n} a_s^{(\alpha)}\, b_{n-s}^{(\beta+s)}\right],$$

où α et β sont deux constantes, qui possède cette propriété.

culier, si une suite $[b]$ est multipliée terme à terme par $[\varrho^n]$, il en est de même pour toute puissance de $[b]$. Il résulte de là que si l'on multiplie terme à terme par $[\varrho^n]$ les deux facteurs $[a]$ et $[b]$ d'une multiplication diagonale, les deux termes a_s et $b_{n-s}^{(1+s)}$ au second membre de (12) sont multipliés respectivement par ϱ^s et ϱ^{n-s}, et le second membre est lui-même multiplié par ϱ^n. Donc le produit diagonal de deux suites est multiplié terme à terme par $[\varrho^n]$ si ces deux suites le sont.

Cette propriété résulte encore de l'expression de la multiplication terme à terme d'une suite par $[\varrho^n]$, à l'aide de la multiplication diagonale. On a en effet

$$[a]:\varrho = [\varrho^{n+1}\, a_n],$$

$$\varrho:[a] = [\varrho\, a_n],$$

où ϱ désigne, suivant notre convention, la suite nombre $[\varrho_0]$; par conséquent

$$\frac{1}{\varrho}:[a]:\varrho = [\varrho^n\, a_n]. \tag{19}$$

Lorsqu'on multiplie terme à terme par $[\varrho^n]$ les deux suites $[a]$ et $[b]$, le produit diagonal $[a]:[b]$ devient donc, grâce à (19),

$$\frac{1}{\varrho}:[a]:\varrho:\frac{1}{\varrho}:[b]:\varrho,$$

ou, en remarquant que

$$\varrho:\frac{1}{\varrho} = 1,$$

$$\frac{1}{\varrho}:[a]:[b]:\varrho;$$

et ceci est bien identique au premier membre de (19) lorsqu'on y remplace $[a]$ par $[a]:[b]$.

Examinons encore ce que donne la multiplication diagonale d'une suite $[a]$ par $[\varrho^n]$. Nous avons vu au paragraphe 6 que

$$[1^n]^r = \left[\binom{r+n-1}{n}\right],$$

donc

$$[\varrho^n]^r = \left[\binom{r+n-1}{n}\varrho^n\right]. \tag{20}$$

Ceci résulte encore de ce que la série

$$1+\varrho t+\varrho^2 t^2+\cdots+\varrho^n t^n+\cdots$$

étant le développement de $\frac{1}{1-\varrho t}$, la série associée à $[\varrho^n]^r$ est le développement de $(1-\varrho t)^{-r}$. On déduit de (20) que

$$[a]:[\varrho^n]=\left[\sum_{s=0}^{n} a_s \binom{n}{n-s} \varrho^{n-s}\right],$$

ce que l'on peut écrire symboliquement

$$(21) \qquad [a]:[\varrho^n]=[(a+\varrho)^n],$$

à condition de remplacer, dans le développement de $(a+\varrho)^n$ par la formule du binôme, les puissances a^s de la lettre a par a_s. En particulier, on a

$$(22) \qquad [\varrho^n]:[\varrho'^n]=[(\varrho+\varrho')^n],$$

le second membre contenant une véritable puissance. On peut donc dire que le *produit diagonal de plusieurs suites de puissances est la suite des puissances de la somme des arguments.*

11. *Suites adjointes.* A toute suite $[a]$ d'indice zéro on peut faire correspondre une suite $[\bar{a}]$ bien determinée telle que l'on ait

$$(23) \qquad [\bar{a}]:[a]=1.$$

L'identification terme à terme des deux membres de (23) donne en effet le système d'équations

$$(24) \qquad \begin{cases} a_0\,\bar{a}_0=1, \\ \cdots+a_0^{(2)}\,\bar{a}_1=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdots+a_0^{(n+1)}\,\bar{a}_n=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{cases}$$

les termes non écrits dans chaque ligne étant déterminés par les équations précédentes. Le coefficient de $\bar{a}_n$ dans l'équation de rang $n+1$ est $a_0^{(n+1)}\neq 0$, donc $\bar{a}_n$ est déterminé sans ambiguité, et, en particulier, on voit que $[\bar{a}]$ est également d'indice zéro.

La correspondance entre les deux suites $[a]$ et $[\bar{a}]$ est d'ailleurs réciproque, car si l'on multiplie diagonalement par $[a]$ les deux membres de (23), il vient

$$[a]:[\bar{a}]:[a] = [a],$$

donc la suite $[a]:[\bar{a}] = [c]$ est telle que le produit diagonal de $[a]$ par $[c]$ soit $[a]$. Or l'identification de ce produit avec $[a]$ donne un système d'équations dont les premiers membres sont ceux du système (24) où $[\bar{a}]$ serait remplacé par $[c]$; $[c]$ est donc bien déterminée; d'autre part, la suite 1 jouit de cette propriété, d'où l'on conclut que

$$[a]:[\bar{a}] = 1. \tag{25}$$

Deux telles suites $[a]$ et $[\bar{a}]$ seront dites *diagonalement inverses*, ou, plus simplement, *adjointes*. En appliquant à ces deux suites la formule fondamentale (15), nous pouvons donc énoncer le

Théorème. *A toute suite $[a]$ d'indice zéro correspond une suite unique $[\bar{a}]$ dont le produit diagonal par $[a]$ soit l'unité. Il y a réciprocité entre ces deux suites, et l'on a entre elles les relations*

$$\sum_{s=0}^{n} a_s^{(r)}\, \bar{a}_{n-s}^{(r'+s)} = \bar{a}_n^{(r'-r)}, \tag{26}$$

quels que soient les nombres r et r'.

On voit aisément que l'adjointe d'une suite paire est une suite paire. Ce que nous avons dit de la multiplication terme à terme par $[\varrho^n]$ nous montre que l'adjointe de $[a_n \varrho^n]$ est $[\bar{a}_n \varrho^n]$, en désignant toujours par $[\bar{a}]$ l'adjointe de $[a]$. Par exemple, la suite adjointe de $[\varrho^n]$ est $[(-\varrho)^n]$, en vertu de (22), et celle de ϱ est $\frac{1}{\varrho}$.

Lorsque la suite $[a]$ est telle que la série

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

converge dans un cercle de rayon non nul, il en est de même de la série adjointe. Pour le voir il suffit de l'admettre et d'en déduire l'existence d'une fonction

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n t^n,$$

holomorphe à l'origine, et pouvant être définie à partir de $\varphi(t)$ de façon que les suites des coefficients soient adjointes. Posons, en effet

$$\psi(t) = t\,\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^{n+1},$$

$$\bar{\psi}(t) = t\,\bar{\varphi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n\, t^{n+1},$$

et formons $\bar{\psi}(\psi(t))$. Il vient

$$\bar{\psi}(\psi(t)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu\, \psi(t)^{\nu+1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_\nu\, t^{\nu+1} \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(\nu+1)}\, t^s,$$

ou, en posant $\nu + s = n$,

$$\bar{\psi}(\psi(t)) = t \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_\nu\, a_{n-\nu}^{(1+\nu)}$$

$$= t.$$

Donc pour que $[\bar{a}]$ soit adjointe de $[a]$, il faut et il suffit que $\bar{\psi}(t)$ soit la fonction inverse de $\psi(t)$. Or on sait que toute fonction régulière pour $t = 0$ et dont la dérivée n'est pas nulle en ce point admet une fonction inverse également régulière pour $t = 0$. On peut donc énoncer le

Théorème. *Une suite $[a]$ majorée par une suite de puissances admet pour adjointe une suite jouissant de la même propriété; et les sommes des séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^{n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n\, t^{n+1}$ sont des fonctions inverses l'une de l'autre.*

12. Etant données deux suites $[a]$ et $[b]$, $[a]$ étant d'indice zéro, appelons *quotient diagonal* de $[b]$ par $[a]$ la suite $[c]$ dont le produit diagonal par $[a]$ est égal à $[b]$; on doit donc avoir

$$[a] : [c] = [b]. \tag{27}$$

L'identification des deux membres terme à terme met bien en évidence l'existence d'un quotient unique $[c]$, mais il est plus simple de multiplier diagonalement les deux membres par la suite adjointe $[\bar{a}]$ de $[a]$; (27) entraîne alors

$$[c] = [\bar{a}] : [b], \tag{28}$$

et, réciproquement, le produit diagonal des deux membres de (28) par $[a]$ entraîne bien (27). Autrement dit, le *quotient diagonal de* $[b]$ *par* $[a]$ *est le produit diagonal de* $[b]$ *par l'adjointe de* $[a]$.

La non commutativité de la multiplication diagonale conduit à définir une deuxième sorte de division diagonale. $[a]$ et $[b]$ étant les deux mêmes suites, nous appellerons *quotient diagonal adjoint* de $[b]$ par $[a]$ la suite $[c]$ qui, multipliant diagonalement $[a]$, reproduit $[b]$, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$[c] : [a] = [b]. \tag{29}$$

La multiplication diagonale de $[\bar{a}]$ par les deux membres de (29) entraîne

$$[c] = [b] : [\bar{a}], \tag{30}$$

et réciproquement, (29) est une conséquence de (30). Donc *le quotient diagonal adjoint d'une suite* $[b]$ *par une suite* $[a]$ *d'indice zéro est le produit diagonal par* $[b]$ *de l'adjointe de* $[a]$*; c'est encore le quotient diagonal des suites adjointes de* $[a]$ *et* $[b]$*, permutées.*

Si l'on permute les rôles de $[a]$ et $[b]$, les deux quotients diagonaux sont donc remplacés par leurs suites adjointes.

13. A la définition de la multiplication diagonale se rattache la définition, par récurrence, des puissances diagonales entières positives d'une suite arbitraire. En outre, on peut définir les puissances diagonales entières négatives d'une suite $[a]$ d'indice zéro à l'aide des puissances entières positives de son adjointe. En désignant ces puissances par la notation $[a]^{:r}$, on aura

$$[a]^{:r} : [a]^{:s} : [a]^{:t} = [a]^{:(r+s+t)},$$

et cela quels que soient les entiers positifs ou négatifs r, s, t.

Par contre, lorsqu'on veut définir les racines diagonales d'une suite, des complications peuvent se présenter, même avec des suites d'indice zéro. Cependant, lorsque $a_0 = 1$, on peut définir sans ambiguité toute racine r^e de $[a]$, r étant un entier positif ou négatif; dans ce dernier cas, il suffit de considérer l'adjointe, dont le premier terme $\bar{a}_0$ est également égal à 1. D'une manière générale, on peut donc définir toute puissance diagonale rationnelle d'une suite de cette nature. Nous n'insisterons pas plus sur cette question, qui ne présente pas d'intérêt pour la suite de ce travail.

14. A titre d'application, considérons la suite

$$[a]: \qquad 1, -\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots .$$

Toute suite de la forme $a_0 = 1, a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = \cdots = 0$ se ramène à $[a]$ grâce à une multiplication terme à terme par une suite convenable $[\varrho^n]$. Son adjointe $[\bar{a}]$ est déterminée par les équations

$$\bar{a}_0 = 1, \tag{31}$$

$$\bar{a}_n - \frac{1}{2}\bar{a}_{n-1}^{(2)} = 0. \tag{32}$$

Donc, si l'on désigne par $\varphi(x)$ la fonction génératrice de $[\bar{a}]$, que nous savons exister,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n x^n,$$

il résulte de (31) et (32) que

$$\varphi(x) - \frac{x}{2}\varphi(x)^2 = 1, \tag{33}$$

et, par suite, compte tenu de $\varphi(0) = 1$, que[1]

$$\varphi(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2x}}{x};$$

on en déduit que

$$\bar{a}_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)!}. \tag{34}$$

Nous verrons d'ailleurs au chapitre suivant que ce résultat est un cas particulier d'un théorème général.

Pour former les puissances de $[a]$, remarquons que la série associée à $[a]$ a pour somme

$$1 - \frac{1}{2}x,$$

[1] Ce résultat s'établit encore immédiatement en écrivant que $x\varphi(x)$ est la fonction inverse de la fonction $x - \frac{x^2}{2}$.

de sorte que la série associée à $[a]^r$ est le développement de $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^r$ suivant les puissances entières de x. On a donc

$$a_s^{(r)} = \binom{r}{s}\left(-\frac{1}{2}\right)^s, \tag{35}$$

et les relations

$$\sum_{s=0}^{n} \bar{a}_s \, a_{n-s}^{(1+s)} = 0 \qquad n \geq 1$$

qui lient les deux suites adjointes fournissent les équations

$$\sum_{s=0}^{n} (-2)^s \binom{s+1}{n-s} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1)}{(s+1)!} = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s+1} \binom{s+1}{n-1} \binom{2s}{s} = 0. \tag{36}$$

La formule (26) va nous conduire à des relations plus générales, mais il nous faut déterminer les puissances de $[\bar{a}]$. Nous savons déjà que

$$\bar{a}_n^{(2)} = 2\bar{a}_{n+1} = 2\,\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{(n+2)!}; \tag{37}$$

d'autre part l'équation (33) entraîne

$$x\,\varphi(x)^{r+2} - 2\,\varphi(x)^{r+1} + 2\,\varphi(x)^r = 0,$$

d'où l'on déduit, entre les termes de trois puissances successives, les relations de récurrence

$$\bar{a}_n^{(r+2)} = 2\left(\bar{a}_{n+1}^{(r+1)} - \bar{a}_{n+1}^{(r)}\right). \tag{38}$$

En faisant $r = 1$, compte tenu des expressions (34) et (37), on déduit de (38) que

$$\bar{a}_n^{(3)} = 2 \cdot 3 \cdot (n+1)\,\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{(n+3)!};$$

ensuite $r=2$ donne

$$\bar{a}_n^{(4)} = 2 \cdot 4 \cdot (n+1) \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+3)}{(n+4)!}.$$

D'une manière générale, on vérifie par récurrence que, r désignant un entier positif,

$$\bar{a}_n^{(2r)} = 2^{r-1}(2r)(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+2r-1)}{(n+2r)!}, \tag{39}$$

et

$$\bar{a}_n^{(2r+1)} = 2^r(2r+1)(n+1)(n+2)\cdots(n+r)\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+2r-1)}{(n+2r+1)!}. \tag{40}$$

En portant les expressions (35) et (39) dans l'égalité

$$\sum_{s=0}^{n} \bar{a}_s^{(2r)} a_{n-s}^{(r'+s)} = a_n^{(r'-2r)},$$

on obtient la formule

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s r}{r+s} \binom{2r+2s}{s} \binom{r'+s}{n-s} = \binom{r'-2r}{n}; \tag{41}$$

de même l'égalité

$$\sum_{s=0}^{n} \bar{a}_s^{(2r+1)} a_{n-s}^{(r'+s)} = a_n^{(r'-2r-1)}$$

donne, grâce à (35) et (40), la formule

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s(2r+1)}{2r+s+1} \binom{2r+2s}{s} \binom{r'+s}{n-s} = \binom{r'-2r-1}{n}. \tag{42}$$

Les formules (41) et (42) ont été établies sans faire aucune hypothèse sur le nombre r', r et n étant des entiers positifs quelconques. Or, les deux membres de chacune de ces formules étant des polynômes en r, et conservant un sens quel que soit r, leur égalité, pour les valeurs entières positives de r entraîne leur identité; ces formules sont donc valables quel que soit r. En remplaçant respectivement dans ces formules $2r$ et $2r+1$ par r, on voit, en définitive, que (41) et (42) sont, sous deux formes légèrement distinctes, la même identité

$$(43) \qquad \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s r}{r+2s}\binom{r+2s}{s}\binom{r'+s}{n-s} = \binom{r'-r}{n},$$

valable quels que soient r et r', et pour toutes les valeurs entières non négatives de n.

En comparant (43) à la relation générale

$$\sum_{s=0}^{n} \bar{a}_s^{(r)} a_{n-s}^{(r'+s)} = a_n^{(r'-r)},$$

compte tenu de (35), et remarquant qu'un tel système d'équations définit entièrement les $\bar{a}_s^{(r)}$ $(r=0, 1, 2, \ldots)$, on voit que la puissance r^e, d'exposant quelconque, de $[\bar{a}]$ a pour terme général

$$(44) \qquad \bar{a}_n^{(r)} = \frac{r\, 2^{-n}}{r+2n}\binom{r+2n}{n}.$$

Celui-ci s'écrit encore

$$\bar{a}_n^{(r)} = \frac{r(r+2n-1)!}{2^n n!\,(r+n)!} = \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+2n-1)}{2^n n!\,(r+1)(r+2)\cdots(r+n)}.$$

On en déduit que le développement suivant les puissances entières de x d'une puissance r^e quelconque de la fonction $\varphi(x)$ est

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-2x}}{x}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+2n-1)}{n!\,(r+1)(r+2)\cdots(r+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

et, par suite,

$$(45) \qquad \left(\frac{1-\sqrt{1-2x}}{x}\right)^r = F\left(\frac{r}{2}, \frac{r+1}{2}, r+1; 2x\right).$$

En particulier, on peut vérifier que $\left(\frac{1-\sqrt{1-2x}}{x}\right)^r$ satisfait à l'équation différentielle

$$x(1-2x)y''+[(r+1)-(2r+3)x]\,y'-\frac{r(r+1)}{2}y=0.$$

En appliquant à la fonction hypergéométrique au second membre de (45) la transformation

$$F\left(r+2s+\frac{1}{2},r+\frac{1}{2},2r+1;x\right)=$$

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-r-2s-\frac{1}{2}}F\left(\frac{r}{2}+s+\frac{1}{4},\frac{r}{2}+s+\frac{3}{4},r+1;\left(\frac{x}{x-2}\right)^2\right),$$

il vient

$$F\left(\frac{r}{2},\frac{r+1}{2},r+1;2x\right)=\left(1-x\right)^{-\frac{r}{2}}F\left(\frac{r}{4},\frac{r}{4}+\frac{1}{2},\frac{r}{2}+1;\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\right);$$

en posant $\dfrac{x}{1-x}=t$, on obtient ainsi le développement[1]

$$\left(\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}\right)^r=F\left(\frac{r}{4},\frac{r}{4}+\frac{1}{2},\frac{r}{2}+1;t^2\right). \tag{46}$$

CHAPITRE II.

Les suites d'interpolation.

15. Jusqu'ici nous avons raisonné sur des suites de nombres. Lorsque les termes des suites sont des quantités variables, les résultats des opérations définies au chapitre précédent sont généralement des suites variables. En ce qui concerne l'addition et la multiplication homogène, les suites de polynômes $P_n(x,y,z,\ldots)$ dont le degré est égal à l'indice sont particulièrement intéressantes, car leurs

---

[1] On pourrait se demander si, plus généralement, les fonctions $\left(\dfrac{(1+t)^s-(1-t)^s}{2st}\right)^r$ sont des fonctions hypergéométriques de t^2. Il n'en est rien, tout au moins quel que soit r, pour les valeurs de s autres que $\frac{1}{2}$.

sommes et produits homogènes sont des suites de même nature. Nous nous bornerons ici à de pareilles suites de polynômes à une variable.

Proposons nous de *déterminer toutes les suites*

$$[P(x)]:\quad P_0(x),\ P_1(x),\ldots,\ P_n(x),\ldots,$$

de cette sorte telles que l'on ait identiquement

$$(1)\qquad [P(x)]\cdot[P(y)]=[P(z)],$$

z étant une fonction des variables indépendantes x et y.

Nous savons déjà que la suite $\left[\frac{x^n}{n!}\right]$, et, plus généralement, les suites

$$\left[\frac{x(x-\omega)\cdots(x-(n-1)\omega)}{n!}\right]$$

possèdent cette propriété, z étant alors égal à $x+y$. Mais la solution du problème est beaucoup plus générale.

Tout d'abord, l'identification des deux membres de (1) donne, pour $n=0$,

$$(2)\qquad P_0^2=P_0;$$

$P_0=0$ entraînerait $P_1(z)=0$, donc $P_1(x)=0$, et l'on verrait de proche en proche que $P_n(x)=0$. La seule solution acceptable de (2) est donc

$$P_0=1.$$

En écrivant l'identité des deux termes d'indice 1, il vient ensuite

$$(2)\qquad P_1(x)+P_1(y)=P_1(z),$$

donc z est de la forme $x+y+a$, a étant une constante; mais alors le changement de variable $(x, x-a)$ permet de faire disparaitre la constante a, et nous sommes ainsi conduits à déterminer les suites $[P_n(x)]$ telles que l'on ait $P_0=1$ et

$$(3)\qquad [P(x)]\cdot[P(y)]=[P(x+y)].$$

(2) s'écrit alors

$$P_1(x)+P_1(y)=P_1(x+y),$$

c'est-à-dire

$$P_1(0) = 0. \tag{4}$$

D'ailleurs l'équation générale de (3) s'écrivant

$$P_n(x+y) = P_n(x) + P_n(y) + \sum_{s=1}^{n-1} P_s(x)\, P_{n-s}(y) \qquad n \geq 2, \tag{5}$$

on en déduit

$$P_n(0) = -\sum_{s=1}^{n-1} P_s(0)\, P_{n-s}(0).$$

Grâce à (4) et à cette relation, on voit immédiatement par récurrence que

$$P_n(0) = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Ceci établi, dérivons (5) par rapport à x, puis un nombre quelconque de fois, soit $r-1$, par rapport à y; il vient successivement

$$P_n'(x+y) = P_n'(x) + \sum_{s=1}^{n-1} P_s'(x)\, P_{n-s}(y), \tag{7}$$

$$P_n^{(r)}(x+y) = \sum_{s=1}^{n-1} P_s'(x)\, P_{n-s}^{(r-1)}(y), \tag{8}$$

les indices supérieur étant ici des indices de dérivation, et non des exposants de puissances homogènes. Pour $x = y = 0$, (7) se réduit à une identité, en vertu de (6); (8) devient

$$P_n^{(r)}(0) = \sum_{s=1}^{n-1} P_s'(0)\, P_{n-s}^{(r-1)}(0) \qquad r = 2, 3, \ldots n, \tag{9}$$

et ces équations sont les seules qui permettent de déterminer les coefficients de $P_n(x)$ en fonction de ceux des polynômes d'indice moindre. Elles fournissent d'ailleurs les valeurs de tous ces coefficients sauf celle de $P_n'(0)$ qui demeure arbitraire. La suite des polynômes en question dépend donc d'une suite numérique arbitraire, dont les termes s'introduisent successivement dans les polynômes $P_n(x)$ et suivants.

Considérons donc une suite numérique

$$[a]: \quad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

et formons le développement formel, suivant les puissances entières de t, de l'expression

$$(10) \qquad (1 + \alpha t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots))^{\frac{x}{\alpha}},$$

où α désigne une constante arbitraire. Ce développement est

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\frac{x}{\alpha}}{\nu} \alpha^\nu t^\nu (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (x, \alpha)_\nu \, a_s^{(\nu)} \, t^{\nu+s},$$

où $[a_s^{(\nu)}]$ est la puissance ν^e de $[a]$, et où l'on a posé

$$(11) \qquad (x, \alpha)_\nu = \frac{x(x-\alpha)\cdots(x-(\nu-1)\alpha)}{\nu!};$$

en posant $\nu + s = n$, le développement de (10) devient donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{\nu=0}^{n} (x, \alpha)_\nu \, a_{n-\nu}^{(\nu)},$$

en convenant, suivant l'usage, de remplacer $(x, \alpha)_0$ par 1. On peut donc poser

$$(12) \qquad (1 + \alpha t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots))^{\frac{x}{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n,$$

$P_n(x)$ étant le polynôme, de degré n,

$$(13) \qquad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (x, \alpha)_\nu \, a_{n-\nu}^{(\nu)}.$$

Or il résulte de la forme de la fonction génératrice (10) que l'on a formellement

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x+y) t^n,$$

donc les polynômes $P_n(x)$ constituent une solution de (3). D'ailleurs, on a bien $P_0(x) = a_0^{(0)} = 1$, et chaque polynôme $P_n(x)$ dépend de la constante arbitraire supplémentaire a_{n-1}. La suite de ces polynômes apparait ainsi comme étant la solution la plus générale de notre problème. Toute suite de cette nature sera appelée une *suite d'interpolation*, et sera représentée par la notation

$$[(x, \alpha, [a])_n] = \left[\sum_{\nu=0}^{n} (x, \alpha)_\nu \, a_{n-\nu}^{(\nu)}\right].$$

Ceci s'écrit encore[1], en vertu de ce qui a été dit au paragraphe 9,

$$(14) \qquad [x, \alpha, [a]] = [a]^{-1} \cdot [x, \alpha] : [a].$$

Pour $[a] = 1$, cette suite se réduit à $[x, \alpha]$, que nous distinguerons de la suite d'interpolation la plus générale par le nom de *suite newtonnienne*.

L'opération (14) n'étant pas aisément maniable, il est utile de remplacer sa considération par celle de la multiplication diagonale seule. Or ceci est possible grâce à la notion de *suite réduite*. Etant donnée une suite $[a]$, appelons suite réduite la suite dont le terme général d'indice n est a_{n+1}, autrement dit la suite

$$(15) \qquad [a]' = \frac{[a] - a_0}{[1_1]}.$$

Au lieu d'effectuer la division par la suite élémentaire principale, on pourrait d'ailleurs diviser par une suite élémentaire quelconque $[\lambda_1]$.

Dans ces conditions, l'opération

$$(16) \qquad [c] = [a]^{-1} \cdot [b] : [a]$$

entraîne, avec la définition et la notation des suites réduites,

$$(17) \qquad [c]' = [b]' : [a],$$

pourvu que le facteur $[\lambda_1]$ soit le même pour $[b]$ et $[c]$. En effet, pour $n \geq 1$, (16) s'écrit

$$c_n = \sum_{s=1}^{n} b_s \, a_{n-s}^{(s)},$$

car $a_n^{(0)} = 0$, et il suffit de changer n en $n+1$ et s en $s+1$ pour obtenir (17). Inversement, on sait que (16) entraîne la relation (18) ch. I, d'où l'on déduit

$$(18) \qquad [[c]^r]' = [[b]^r]' : [a].$$

[1] Il n'y a aucune confusion possible, lorsqu'on n'a pas à mettre en évidence l'indice n, à écrire $[x, \alpha, [a]]$ pour $[(x, \alpha, [a])_n]$.

Dans le cas des suites d'interpolation, tous les termes de la suite autres que le premier étant divisibles par x, nous appellerons, sauf avis contraire, *suite réduite* de $[x, \alpha, [a]]$ la suite

$$[x, \alpha, [a]]' = \frac{[x, \alpha, [a]] - 1}{[x_1]},$$

et nous aurons alors, au lieu de (14), l'équation remarquable

(19) $$[x, \alpha, [a]]' = [x, \alpha]' : [a].$$

En résumé, *la suite d'interpolation la plus générale est telle que son premier terme soit égal à* 1, *et sa suite réduite égale au produit diagonal d'une suite arbitraire* $[a]$ *par une suite newtonnienne réduite.*

Il résulte inmédiatement de (14) que le produit terme à terme par $[\varrho^n]$ d'une suite d'interpolation est encore une suite d'interpolation, savoir

(20) $$\varrho^n (x, \alpha, [a_p])_n = (\varrho x, \varrho\alpha, [\varrho^p a_p])_n,$$

p désignant un indice courant, ainsi que n.

Tel est le caractère d'homogénéité des suites d'interpolation. D'ailleurs, les différentes suites ainsi déduites d'une suite d'interpolation peuvent être considérées comme non essentiellement distinctes les unes des autres.

16. Dans une suite newtonnienne, tous les termes d'indice supérieur à 1 s'annulent pour $x = 0$ et $x = \alpha$, α pouvant d'ailleurs être nul, dans quel cas $x = 0$ est un zéro double. Cette propriété caractérise les suites newtonniennes parmi les suites d'interpolation. Remarquons tout d'abord que α et $[a]$ ne sont pas des données essentielles pour définir une suite d'interpolation; en remplaçant, au premier membre de (12), l'exposant $\frac{x}{\alpha}$ par $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x}{\beta}$, on voit que l'on peut choisir α arbitrairement, pour une suite d'interpolation donnée, et qu'alors la suite $[a]$ est entièrement déterminée. Dans ces conditions, si une suite d'interpolation $[P_n(x)]$ est telle que l'on ait

$$P_n(0) = P_n(\alpha) = 0 \qquad n \geqq 2$$

prenons le paramètre α de la formule (12) égal à ce zéro.

La formule (13) entraîne alors, pour $x = \alpha$, $a_{n-1} = 0 \, (n > 1)$, donc

$$[a] = [a_0],$$

et, par suite

$$P_n(x) = a_0{}^n (x, \alpha)_n.$$

La suite en question est donc le produit terme à terme, par une suite de puissances, de la suite newtonnienne $[x, \alpha]$, donc non essentiellement distincte de cette dernière. D'ailleurs on a

$$\varrho^n (x, \alpha)_n = (\varrho x, \varrho \alpha)_n .$$

D'une manière générale, remarquons que l'on peut rendre homogènes les polynômes $P_n(x)$ d'une suite d'interpolation, grâce à la transformation

$$\left(P_n(x),\ z^n P_n\left(\frac{x}{z}\right)\right).$$

En posant

$$P_n(x, z) = z^n P_n\left(\frac{x}{z}\right),$$

on déduit immédiatement, par le changement de x et y en $\frac{x}{z}$, et $\frac{y}{z}$, et par la multiplication terme à terme par z^n, que

$$[P_n(x, z)] \cdot [P_n(y, z)] = [P_n(x + y, z)] .$$

On voit alors que la multiplication terme à terme d'une suite d'interpolation par $[\varrho^n]$ revient au changement des variables x et z en ϱx, ϱz.

On vérifie aisément que les suites de puissances sont les seules par la multiplication terme à terme desquelles une suite d'interpolation se transforme en une suite de même nature.

Signalons encore que l'on peut caractériser une suite newtonnienne par la propriété que

$$P_{n+1}(n\alpha) = 0 \qquad n = 2, 3 \ldots .$$

17. En vertu de la remarque faite sur l'arbitraire du choix du paramètre α dans l'expression d'une suite d'interpolation, une suite newtonnienne $[x, \beta]$ peut se mettre sous la forme

$$[x, \beta] = [x, \alpha, [a]] ;$$

autrement dit, une *suite newtonnienne réduite divise diagonalement toute suite newtonnienne réduite.* Pour déterminer le quotient constant $[a]$, défini par

$$[x, \beta]' = [x, \alpha]' : [a] ,$$

donnons à x la valeur particulière α. En remarquant que

$$[\alpha, \alpha]' = 1,$$

il vient ainsi

$$[a] = [\alpha, \beta]',$$

ce qui fournit la formule remarquable

$$[x, \beta]' = [x, \alpha]' : [\alpha, \beta]'. \tag{21}$$

En donnant à x la valeur particulière β, (21) devient

$$1 = [\beta, \alpha]' : [\alpha, \beta]', \tag{22}$$

donc *on passe d'une suite newtonnienne réduite à son adjointe en permutant les valeurs de l'argument et du paramètre.*[1]

En revenant aux suites newtonniennes elles-mêmes, l'équation (14) s'écrit ici

$$(x, \beta)_n = \sum_{s=0}^{n} (x, \alpha)_s \, (\alpha, \beta)'^{(s)}_{n-s} \, .$$

Nous verrons un peu plus loin que les coefficients $(\alpha, \beta)'^{(s)}_{n-s}$ sont les valeurs d'intégrales curvilignes simples.

L'application faite au paragraphe 14 se rattache à la théorie des suites newtonniennes. En effet, pour qu'une suite newtonnienne, soit limitée il faut et suffit que la valeur de l'argument soit un multiple de celle du paramètre. La suite newtonnienne la plus simple est donc $[-2, -1]$, dont la réduite est

$$[-2, -1]' : \quad 1, -\frac{1}{2}, 0, \ldots 0, \ldots .$$

L'adjointe de celle-ci est

$$[-1, -2]' = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1)!}\right],$$

ce qui démontre la formule (34) établie directement au § 14.

L'équation (33) du même paragraphe s'établit également à l'aide de l'algorithme des suites. On a, en effet

[1] On vérifie d'ailleurs que les fonctions $\psi(t)$ et $\overline{\psi}(t)$ du paragraphe 11, associées à $[\beta, \alpha]'$ et $[\alpha, \beta]'$ sont $\psi(t) = \dfrac{(1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1}{\beta}$ et $\overline{\psi}(t) = \dfrac{(1+\beta t)^{\frac{\alpha}{\beta}} - 1}{\alpha}$, qui sont bien inverses l'une de l'autre.

$$[\bar{a}] = [-1, -2]' = \frac{[-1, -2] - 1}{[(-1)_1]},$$

donc,

$$[\bar{a}]^2 = \frac{[-1, -2]^2 - 2\,[-1, -2] + 1}{[1_2]} = \frac{[-2, -2] - 2\,[-1, -2] + 1}{[1_2]}$$

$$= \frac{2 - 2\,[-1, -2] + 2\,[(-1)_1]}{[1_2]};$$

en divisant haut et bas par $[(-1)_1]$, il vient

$$[\bar{a}]^2 = 2\,\frac{1 - \dfrac{[-1, -2] - 1}{[(-1)_1]}}{[(-1)_1]}$$

$$= 2\,\frac{1 - [\bar{a}]}{[(-1)_1]},$$

donc la suite $[\bar{a}]$ vérifie l'équation

$$[\bar{a}]^2\,[1_1] - 2\,[\bar{a}] + 2 = 0$$

qui est précisément (33) Ch. I écrite avec notre algorithme.

18. Plus généralement, considérons deux suites d'interpolation $[x, \alpha, [a]]$ et $[x, \beta, [b]]$. Les deux suites réduites étant les produits diagonaux de deux suites constantes respectivement par $[x, \alpha]'$ et $[x, \beta]'$, qui sont dans un rapport diagonal constant, il existe une suite constante $[c]$ telle que

$$[x, \beta, [b]]' = [x, \alpha, [a]]' : [c]; \tag{23}$$

autrement dit, deux suites réduites d'interpolation quelconques sont divisibles diagonalement l'une par l'autre.[1]

Donnons à x la valeur α; en remarquant que

$$[\alpha, \alpha, [a]]' = [\alpha, \alpha]' : [a] = [a],$$

(23) fournit la relation

$$[\alpha, \beta, [b]]' = [a] : [c],$$

d'où

$$\begin{cases} [c] = [\bar{a}] : [\alpha, \beta, [b]]' \\ \quad = [\bar{a}] : [\alpha, \beta]' : [b]. \end{cases} \tag{24}$$

[1] Par exemple, on en déduit que deux suites d'interpolation sont identiques si elles sont égales pour une valeur particulière de la variable.

En mettant en évidence les suites d'interpolation elles-même, (23) s'écrit,

$$(23') \qquad [x, \beta, [b]] = [c]^{-1} \cdot [x, \alpha, [a]] : [c].$$

Pour que les deux suites d'interpolation soient identiques, il faut et il suffit que $[c]$ soit égal à 1, donc toutes les représentations possibles $[x, \beta, [b]]$ d'une suite d'interpolation donnée $[x, \alpha, [a]]$ sont définies par[1]

$$(25) \qquad [b] = [\beta, \alpha, [a]]'.$$

19. Deux suites d'interpolation réduites $[x, \alpha, [a]]'$ et $[x, \beta, [b]]'$ se déduisant l'une de l'autre par la multiplication diagonale (23), la relation (13) Ch. I nous donne, quel que soit r si $[a]$ et $[b]$ sont d'indice zéro,

$$(26) \qquad (x, \beta, [b])_n'^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} (x, \alpha, [a])_s'^{(r)} \, c_{n-s}^{(r+s)};$$

cette équation fournit l'expression d'une puissance quelconque d'une suite d'interpolation réduite en fonction des termes de la même puissance d'une autre suite d'interpolation réduite.

En particulier, faisons $[a] = 1$, $\alpha = \beta$. (26) devient, après changement des notations,

$$(27) \qquad (x, \alpha, [a])_n'^{(r)} = \sum_{s=0}^{n} (x, \alpha)_s'^{(r)} \, a_{n-s}^{(r+s)};$$

pour $r = -1$, (27) montre que l'inverse d'une suite d'interpolation réduite s'exprime par l'équation

$$(28) \qquad [x, \alpha, [a]]'^{(-1)} = \left[\sum_{s=0}^{n} (x, \alpha)'^{(-1)}_s \, a_{n-s}^{(s-1)} \right].$$

---

[1] Il résulte de la définition des suites d'interpolation que le produit de deux telles suites de même argument est une suite de même nature; on peut donc écrire, pour des choix convenables de γ et $[c]$,

$$[x, \alpha, [a]] \cdot [x, \beta, [b]] = [x, \gamma, [c]].$$

A l'aide des suites réduites, ceci s'écrit

$$[x, \gamma, [c]]' = [x_1] \cdot [x, \alpha, [a]]' \cdot [x, \beta, [b]]' + [x, \alpha, [a]]' + [x, \beta, [b]]'.$$

Pour $x = 0$, il vient donc

$$[0, \gamma]' : [c] = [0, \alpha]' : [a] + [0, \beta]' : [b],$$

et cette relation s'étend immediatement à un nombre quelconque de suites d'interpolation. Par exemple, le produit d'un nombre quelconque de suites de la forme $[x, 0, [a]]$, différant par leur base $[a]$, est une suite de même nature dont la base est la somme des bases des facteurs.

Les inverses des suites d'interpolation réduites sout assez remarquables. Tout d'abord il résulte de leur définition que, de même que les suites $[x, \alpha, [a]]'$, ce sont des suites de polynômes dont le degré est au plus égal à l'indice. En outre, ces polynômes sont pairs, à l'exception des deux premiers. En effet, en mettant en évidence la suite $[x, \alpha, [a]]$ elle-même, la définition de la suite inverse en question s'écrit

$$[[x, \alpha, [a]] - 1] \cdot [x, \alpha, [a]]'^{(-1)} = [x_1] \cdot \tag{29}$$

Multiplions les deux membres par $[-x, \alpha, [a]]$. Compte tenu de la propriété qui définit les suites d'interpolation, il vient

$$[1 - [-x, \alpha, [a]] \cdot [x, \alpha, [a]]'^{(-1)} = [x_1] \cdot [-x, \alpha, [a]];$$

ceci s'écrit encore

$$[[x, \alpha, [a]]'^{(-1)} + [x_1]] \cdot [[-x, \alpha, [a]] - 1] = -[x_1] = [(-x)_1],$$

et la comparaison avec (29) donne bien

$$[x, \alpha, [a]]'^{(-1)} + [x_1] = [-x, \alpha, [a]]'^{(-1)},$$

qui démontre la proposition énoncée.

20. Dans le cas particulier des suites newtonniennes, les polynômes $(x, \alpha)'_n$ étant homogènes en x et α, il en est de même pour les termes de $[x, \alpha]'^{(-1)}$. En outre, $[x, \alpha]'^{(-1)}$ se réduit à 1, en même temps que $[x, \alpha]'$, pour $x = \alpha$. Donc tous les polynômes $(x, \alpha)'_n$ sont divisibles par $x - \alpha$; en outre, pour $n \geq 2$, leur parité exige qu'ils contiennent $x^2 - \alpha^2$ en facteur. Les premiers de ces polynômes sont d'ailleurs

$$(x, \alpha)_0'^{(-1)} = 1$$

$$(x, \alpha)_1'^{(-1)} = -\frac{x - \alpha}{2},$$

$$(x, \alpha)_2'^{(-1)} = \frac{x^2 - \alpha^2}{2 \cdot 3!},$$

$$(x, \alpha)_3'^{(-1)} = -\frac{\alpha (x^2 - \alpha^2)}{4!},$$

$$(x, \alpha)_4'^{(-1)} = -\frac{(x^2 - \alpha^2)(x^2 - 19\alpha^2)}{6!},$$

$$(x, \alpha)_5'^{(-1)} = \frac{\alpha(x^2-\alpha^2)(x^2-9\alpha^2)}{4\cdot 5!},$$

$$(x, \alpha)_7'^{(-1)} = \frac{-5\,\alpha(x^2-\alpha^2)(2x^4-61\,\alpha^2x^2+275\,\alpha^4)}{4!\,7!},$$

. . . .

Pour $\alpha=0$, $x=1$, on a $(1,0)_n=\frac{1}{n!}$, et les nombres $(1,0)_n'^{(-1)}$, étant tels que l'on ait

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}(1,0)'^{(-1)}_{n-s}=(1,0)_n'^{(-1)}+\varepsilon_{1,n},\quad \varepsilon_{1,1}=1,\quad \varepsilon_{1,n}=0\qquad n\neq 1,$$

sont précisément les nombres de Bernoulli, au facteur $\frac{1}{n!}$ près. Nous poserons

$$B_n=(1,0)_n'^{(-1)}, \tag{30}$$

de sorte que les nombres de Bernoulli, tels qu'on les définit habituellement, sont les nombres $B_n\,n!$.

Cependant, dans le calcul aux différences finies, ce sont les nombres (30) qui s'introduisent le plus naturellement. La remarque que les polynômes $(x,\alpha)_n'^{(-1)}$ d'indice impair, étant homogènes en x et α, et pairs en x, doivent contenir α en facteur, explique la propriété des nombres de Bernoulli d'indice impair ≥ 3 d'être nuls.

Pour $x=0$, $\alpha=1$, on obtient la suite dont l'inverse est l'adjointe de $[B_n^{(-1)}]$, et dont les termes[1]

$$\overline{B}_n=(0,1)'^{(-1)}_n \tag{31}$$

sont tels que l'on ait $\overline{B}_0=1$, et, pour $n\geq 1$,

$$\sum_{s=0}^{n}\overline{B}_{n-s}(0,1)_s'=0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{\overline{B}_{n-s}}{s+1}=0\qquad n\geq 1. \tag{32}$$

La formule (26) Ch. I fournit, entre les nombres de Bernoulli B_n et les $\overline{B}_n$ les relations

[1] Nous utilisons ici la notation simple des suites adjointes, bien que $[\overline{B}_n]$ ne soit pas l'adjointe de $[B_n]$; mais, l'adjointe de $[B_n]$ ne jouant aucun rôle dans ce travail, aucune confusion n'est possible.

$$(33)\quad \begin{cases} B_n^{(r+\nu)} = \sum\limits_{s=0}^{n} \overline{B}_{n-s}^{(-r)} B_s^{(-n+\nu+s)}, \\ \overline{B}_n^{(r+\nu)} = \sum\limits_{s=0}^{n} B_{n-s}^{(-r)} \overline{B}_s^{(-n+\nu+s)}, \end{cases}$$

quels que soient les nombres r et ν.

21. Considérons le produit d'une suite d'interpolation et de l'inverse de sa réduite, relatives à des arguments distincts,

$$[x, \alpha, [a]] \cdot [y, \alpha, [a]]'^{(-1)}.$$

Ce produit s'écrit

$$(34)\quad \frac{[x, \alpha, [a]] \cdot [y_1]}{[y, \alpha, [a]] - 1};$$

en multipliant les deux termes de cette fraction par $[-y, \alpha, [a]]$, elle devient

$$\frac{[x-y, \alpha, [a]] \cdot [y_1]}{1 - [-y, \alpha, [a]]} = \frac{[x-y, \alpha, [a]]}{[-y, \alpha, [a]]'}.$$

Nous avons ainsi démontré l'identité remarquable

$$(35)\quad [x, \alpha, [a]] \cdot [y, \alpha, [a]]'^{(-1)} = [x-y, \alpha, [a]] \cdot [-y, \alpha, [a]]'^{(-1)};$$

Pour $y = x$, elle prend la forme

$$(36)\quad [x, \alpha, [a]] \cdot [-x, \alpha, [a]]' = [x, \alpha, [a]]'.$$

On retrouve d'ailleurs (35) en multipliant les deux membres de (36) par $[y-x, \alpha, [a]]$.

22. Les termes d'une puissance quelconque d'une suite d'interpolation réduite peuvent s'exprimer à l'aide d'intégrales curvilignes simples, lorsque les a_n sont les coefficients d'une série entière convergente. Posons

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots;$$

par définition, on a

$$(1 + \alpha t \varphi(t))^{\frac{x}{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} (x, \alpha, [a])_n t^n$$

$$= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} (x, \alpha, [a])_n' t^{n+1},$$

donc, quel que soit r,

$$\left\{\frac{(1+\alpha\, t\,\varphi(t))^{\frac{x}{\alpha}}-1}{x\,t}\right\}^r=\sum_{n=0}^{\infty}(x,\,\alpha,\,[a])_n{}'^{(r)}\,t^n; \tag{37}$$

dans cette équation, la puissance

$$(1+\alpha\, t\,\varphi(t))^{\frac{x}{\alpha}}$$

désigne la branche qui se réduit à 1 pour $t=0$; on suppose en outre que l'on choisisse, pour $a_0{}^r$, la même détermination dans les deux membres de (37). Ce développement est valable à l'intérieur du cercle de centre $t=0$ et passant par la racine non nulle de l'équation

$$(1+\alpha\, t\,\varphi(t))^{\frac{x}{\alpha}}-1=0,$$

dont la valeur absolue est minimum.

La relation d'homogénéité

$$[\varrho x,\,\varrho\alpha,\,[\varrho^n a_n]]'^{(r)}=[\varrho^n(x,\,\alpha,\,[a])_n{}'^{(r)}] \tag{38}$$

résulte de ce que le premier membre de (37) est invariant pour les substitutions, à x, α, a_n, t, des quantités ϱx, $\varrho\alpha$, $\varrho^n a_n$, $\dfrac{t}{\varrho}$.

On conclut immédiatement de (37) que

$$(x,\,\alpha,\,[a])_n{}'^{(r)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{(1+\alpha\, t\,\varphi(t))^{\frac{x}{\alpha}}-1}{x\,t}\right)^r\frac{dt}{t^{n+1}}, \tag{39}$$

le contour Γ étant un cercle infinitésimal entourant l'origine, et parcouru dans le sens direct.

Pour $[a]=1$, on obtient l'expression suivante des termes des puissances des suites newtonniennes réduites

$$(x,\,\alpha)_n{}'^{(r)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{(1+\alpha\, t)^{\frac{x}{\alpha}}-1}{x\,t}\right)^r\frac{dt}{t^{n+1}}. \tag{40}$$

Par exemple, si α tend vers zéro, et x vers 1, il vient

(41) $$B_n^{(-r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{e^t-1}{t}\right)^r \frac{dt}{t^{n+1}};$$

la formule (37) correspondante est

(42) $$\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-r)} t^n.$$

D'autre part l'identité (21) nous permet d'écrire

$$[t, 0]' = [t, 1]' : [1, 0]',$$

donc

(43) $$\frac{t^n}{(n+1)!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{(t-1)(t-2)\ldots(t-s)}{(s+1)!} B_{n-s}^{(-s-1)},$$

ou encore, en changeant n et s en $n-1$ et $s-1$,

(43)' $$\frac{t^n}{n!} = \sum_{s=1}^{n} \frac{t(t-1)\ldots(t-s+1)}{s!} B_{n-s}^{(-s)}.$$

Telle est l'autre définition qu'on peut adopter pour les nombres de Bernoulli d'indice supérieur entier négatif. On voit sur (43) que les nombres

$$B_{n-s}^{(-s-1)} \frac{(n+1)!}{(s+1)!} = D_n^s$$

sont les nombres entiers définis par Euler[1] à l'aide des relations

$$(t+1)^n = \sum_{s=0}^{n} D_n^s\, t(t-1)\ldots(t-s+1).$$

Reprenons (40), et faisons tendre x vers zéro, et α vers 1. On obtient, à la limite,

(44) $$\overline{B}_n^{(-r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{L(1+t)}{t}\right)^r \frac{dt}{t^{n+1}},$$

la formule (37) correspondante étant

[1] Cf. Institutiones Calculi differentialis, p. 485.

(45)
$$\left(\frac{L(1+t)}{t}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n^{(-r)} t^n.$$

En particulier, on a

$$\bar{B}_n^{(-1)} = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

$$\bar{B}_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dt}{t^n L(1+t)}.$$

En écrivant que

$$[t, 1]' = [t, 0]' : [0, 1]',$$

on a

(46)
$$\frac{(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{t^s}{(s+1)!} \bar{B}_{n-s}^{(-s-1)};$$

ou

(46)'
$$\frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} = \sum_{s=1}^{n} \frac{t^s}{s!} \bar{B}_{n-s}^{(-s)};$$

Ces équations sont équivalentes aux équations (43) ou (43)' et s'en déduiraient en les résolvant par rapport aux fractions aux seconds membres.

Reprenons (42), en y remplaçant t par $2it$, et identifions dans les deux membres, les parties réelles et imaginaires; on obtient les développements suivants, déjà donnés par N. E. Nörlund[1]

(47)
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^r \cos rt = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n}^{(-r)} (2t)^{2n}, \\ \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^r \sin rt = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n+1}^{(-r)} (2t)^{2n+1}, \end{cases}$$

valables pour $|t| < \pi$.

[1] loc. cit. p. 196.

CHAPITRE III.

Les opérateurs finis d'interpolation.

23. Les termes d'une suite newtonnienne $[x, \alpha]$ se déduisent les uns des autres à l'aide de la différence finie

$$\underset{\alpha}{\triangle} f(x) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$$

et de ses puissances fonctionnelles; on a, en effet,

$$\underset{\alpha}{\triangle} (x, \alpha)_n = (x, \alpha)_{n-1},$$

et, d'une manière générale, r étant un entier non négatif,

(1) $$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} (x, \alpha)_n = (x, \alpha)_{n-r}.$$

Pour étendre cette propriété aux suites d'interpolation, on est conduit à généraliser l'opérateur $\underset{\alpha}{\triangle}$. Tout d'abord, formons

$$\overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} (x, \alpha, [a])_n,$$

à partir de l'expression

$$(x, \alpha, [a])_n = \sum_{s=0}^{n-1} (x, \alpha)_{s+1}\, a_{n-1-s}^{(1+s)};$$

on en déduit immédiatement

$$\overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} (x, \alpha, [a])_n = \sum_{s=\nu-1}^{n-1} (x, \alpha)_{s+1-\nu}\, a_{n-1-s}^{(1+s)}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-\nu} (x, \alpha)_s\, a_{n-\nu-s}^{(\nu+s)}.$$

Multiplions les deux membres de cette relation par $\bar{a}_{\nu-r}^{(r)}$, et effectuons la somme

$$\sum_{\nu=r}^{n} \bar{a}_{\nu-r}^{(r)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\Delta}}(x, \alpha, [a])_n = \sum_{\nu=r}^{n} \sum_{s=0}^{n-\nu} (x, \alpha)_s \; a_{n-\nu-s}^{(\nu+s)} \bar{a}_{\nu-r}^{(r)}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-r} \sum_{\nu=0}^{n-r-s} (x, \alpha)_s \; a_{n-r-s-\nu}^{(r+s+\nu)} \; \bar{a}_{\nu}^{(r)};$$

compte tenu de la relation (26) Ch. I, ceci se réduit à

$$(2) \qquad \sum_{\nu=r}^{n} \bar{a}_{\nu-r}^{(r)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\Delta}}(x, \alpha, [a])_n = \sum_{s=0}^{n-r} (x, \alpha)_s \; a_{n-r-s}^{(s)} = (x, \alpha, [a])_{n-r}.$$

On est ainsi conduit à introduire la notion de *différences finies d'interpolation* d'une fonction $f(x)$, *d'écart* α et de *suite génératrice* (ou *base*) $[a]$, la différence finie d'indice r ($r = 0, 1, 2, \ldots$) étant l'opérateur formel

$$(3) \qquad \overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}}_{[a]} f(x) = \sum_{\nu=r}^{\infty} a_{\nu-r}^{(r)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\Delta}} f(x).$$

Avec cette notation, (2) s'écrit

$$(4) \qquad \overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}}_{[\bar{a}]} (x, \alpha, [a])_n = (x, \alpha, [a])_{n-r}.$$

On voit ainsi que les *termes d'une suite d'interpolation* $[x, \alpha, [a]]$ *se déduisent les uns des autres à l'aide des différences finies d'interpolation de même écart* α, *et dont la base est l'adjointe de* $[a]$.

Voici une application immédiate de (4). Prenons la différence finie $\overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}}_{[\bar{a}]}$ des deux membres de l'équation (23)' Ch. II, et faisons ensuite $x = 0$; seul, le terme $(x, \alpha, [a])_r$ au second membre donnant un différence finie non nulle pour $x = 0$, il vient

$$(5) \qquad \left[\overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}}_{[\bar{a}]} (x, \beta, [b])_{n+r} \right]_{x=0} = [c_n]^{-1} \cdot [c_n^{(r+1)}] = [c]^r,$$

la suite $[c]$ étant donnée par (24) Ch. II. En particulier, pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $[a] = [b] = 1$, on a

$$[c] = [1, 0]' = [B_n^{(-1)}],$$

donc (5) devient ici

$$B_n^{(-r)} = \left(\overset{r}{\Delta} \frac{x^{n+r}}{(n+r)!}\right)_{x=0}, \tag{6}$$

formule déjà donnée par Lucas.[1] De même, pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $[a] = [b] = 1$, on a

$$[c] = [0, 1]' = [B]^{-1},$$

donc, en remarquant que $\underset{o}{\Delta} = \frac{d}{dx}$,

$$\bar{B}_n^{(-r)} = \left(\frac{d^r (x, 1)_{n+r}}{dx^r}\right)_{x=0} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{(n+r)!} \left(\frac{d^r}{dx^r} x(x-1)\dots(x-n-r+1)\right)_{x=0}.$$

Cette formule se déduit encore immédiatement de (46) Ch. II.

L'opérateur (3) contient une infinité de termes si $f(x)$ et $[a]$ sont quelconques, la différence finie d'indice minimum étant $\underset{\alpha}{\overset{r}{\Delta}}$, si $[a]$ est d'indice zéro, ce que nous supposerons. Par contre, le nombre des différences finies contenues dans cet opérateur est limité lorsque $f(x)$ est un polynôme, ou lorsque $[a]$ est une suite limitée. Dans le premier cas, si n désigne le degré de $f(x)$, $\underset{\alpha}{\overset{r}{\Delta}}{}_{[a]} f(x)$ est un polynôme de degré $n-r$. Si l'on range dans une suite les différences finies d'interpolation d'un polynôme de degré n, de façon que la différence finie d'interpolation d'indice r $(r = 0, 1, 2, \dots, n)$ occupe le rang $n-r+1$, on forme une suite de polynômes dont les degrés sont égaux aux indices, le dernier d'entre eux étant le polynôme donné $f(x)$.

24. Les différences finies d'interpolation possèdent des propriétés assez remarquables. Tout d'abord, en appliquant aux deux membres de (3) l'opérateur $\underset{\alpha}{\overset{s}{\Delta}}{}_{[a]}$, il vient

[1] Cf. Bulletin Soc. Math. France (6) p. 61. Dans la formule donnée par Lucas, le premier membre est $\frac{1}{n!} B_n^{(-r)}$, mais il faut se rappeler que nous désignons ici par B_n ce que, dans la notation habituelle, on désigne par $\frac{B_n}{n!}$.

$$\overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]}\ \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x) = \sum_{\nu=s}^{\infty}\sum_{\mu=r}^{\infty} a_{\nu-s}^{(s)}\ a_{\mu-r}^{(r)} \overset{\mu+\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x),$$

ou, en posant $\mu+\nu=i$ et $\nu=s+t$,

$$\overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]}\ \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x) = \sum_{i=r+s}^{\infty}\ \sum_{t=0}^{i-r-s} a_t^{(s)}\ a_{i-r-s-t}^{(r)} \overset{i}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x)$$

$$= \sum_{i=r+s}^{\infty} a_{i-r-s}^{(r+s)} \overset{i}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x);$$

on a donc

(8) $$\overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]}\ \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x) = \overset{r+s}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x).$$

Autrement dit, *les différences finies d'interpolation d'écart α et de base $[a]$ sont les puissances fonctionnelles de* $\underset{\alpha}{\triangle}_{[a]}$. Cette propriété était à prévoir en vertu des relations (4).

Si la suite génératrice est le produit diagonal $[a]:[b]$, les différences finies d'interpolation admettent les développements

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[[a]:[b]]} f(x) = \sum_{\nu=r}^{\infty} ([a]:[b])_{\nu-r}^{(r)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=r}^{\infty}\sum_{s=0}^{\nu-r} a_s^{(r)}\ b_{\nu-r-s}^{(r+s)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(r)} \sum_{\nu=r+s}^{\infty} b_{\nu-r-s}^{(r+s)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x).$$

Nous avons ainsi démontré que

(9) $$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[[a]:[b]]} f(x) = \sum_{s=r}^{\infty} a_{s-r}^{(r)} \overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[b]} f(x),$$

autrement dit, que le premier membre de (9) s'exprime à l'aide des différences finies de base $[b]$ de la même manière que $\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]}$ à l'aide des différences finies ordinaires. On conviendra d'écrire encore l'opérateur (9) suivant la notation

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]:[b]} f(x),$$

qui rappelle d'ailleurs cette propriété.

Par exemple, si $[b]$ est l'adjointe de $[a]$, il vient

$$(10) \qquad \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x) = \sum_{\nu=r}^{\infty} a_{\nu-r}^{(r)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x).$$

A titre d'application de cette formule, considérons la formule d'interpolation de Newton

$$(11) \qquad f(x+z) = \sum_{r=0}^{\infty} (z, \alpha)_r \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x),$$

et remplaçons les différences finies au second membre par leurs expressions (10). Il vient

$$f(x+z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\nu=r}^{\infty} a_{\nu-r}^{(r)} (z, \alpha)_r \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x) \sum_{r=0}^{\nu} a_{\nu-r}^{(r)} (z, \alpha)_r,$$

et, par suite,

$$(12) \qquad f(x+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (z, \alpha, [a])_\nu \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x).$$

La formule obtenue généralise la formule d'interpolation de Newton, et met bien en évidence la corrélation entre la suite d'interpolation $[z, \alpha, [a]]$ et les différences finies d'interpolation $\overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]}$.

Au caractère d'homogénéité des suites finies d'interpolation, il correspond, en vertu de (12), un caractère d'homogénéité des différences finies d'interpolation. En mettant en évidence la variable qui prend l'écart α, écrivons pour l'instant

$$\underset{\alpha}{\triangle}{}_{x\,[a]} f(x) \qquad \text{pour} \qquad \underset{\alpha}{\triangle}{}_{[a]} f(x).$$

Changeons alors, dans (12), $\alpha, [a]$, en $\varrho\alpha, [\varrho^n a_n]$; $[\bar{a}]$ est remplacée par $[\varrho^n \bar{a}_n]$. On peut alors écrire

$$f(x+z) = f\left(\frac{\varrho x + \varrho z}{\varrho}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varrho z, \varrho\alpha, [\varrho^n a_n])_\nu \overset{\nu}{\underset{\varrho\alpha}{\triangle}}_{\varrho x [\varrho^n \bar{a}_n]} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (z, \alpha, [a])_\nu \varrho^\nu \overset{\nu}{\underset{\varrho\alpha}{\triangle}}_{\varrho x [\varrho^n a_n]} f(x);$$

et l'identification avec le second membre de (12) fournit la relation annoncée

$$(13) \qquad \overset{r}{\underset{\varrho\alpha}{\triangle}}_{\varrho x [\varrho^n a_n]} f(x) = \varrho^{-r} \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{x[a]} f(x).$$

En particulier, pour $[a] = 1$, on a

$$\overset{r}{\underset{\varrho\alpha}{\triangle}}_{\varrho x} f(x) = \varrho^{-r} \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x).$$

D'ailleurs, on pourrait déduire (13) de cette formule particulière, grâce à la définition (3).

25. On peut donner à (12) une autre forme intéressante; remarquons que le premier terme de la somme au second membre est $f(x)$, et que les autres termes contiennent z en facteur. (12) fournit donc le développement de la différence finie d'écart z en fonction des différences finies d'interpolation d'écart α et de base $[\bar{a}]$. En changeant z en ω, on a donc

$$(14) \qquad \underset{\omega}{\triangle} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\omega, \alpha, [a])'_\nu \overset{\nu+1}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[\bar{a}]} f(x).$$

On voit ainsi que l'expression d'une différence finie en fonction de différences finies d'interpolation est une forme linéaire de celles-ci, dont les coefficients sont les termes de la suite d'interpolation adjointe réduite.

Plus généralement, on peut déduire de (14) l'expression d'une différence finie d'interpolation en fonction de différences finies d'un type quelconque. Remplaçons la suite réduite au second membre de cette équation, par le produit diagonal

$$[\omega, \beta, [b]]' : [c] = [\omega, \alpha, [a]]',$$

ce que nous savons être possible quels que soient β et $[b]$; on a alors

$$(15) \qquad [c] = [\bar{b}] : [\beta, \alpha, [a]]' = [\bar{b}] : [\beta, \alpha]' : [a].$$

Dans ces conditions, (14) s'écrit

$$\underset{\omega}{\triangle} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s-0}^{\nu} (\omega, \beta, [b])_s{}' \, c_{\nu-s}^{(1+s)} \overset{\nu+1}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=s}^{\infty} (\omega, \beta, [b])_s{}' \, c_{\nu-s}^{(1+s)} \overset{\nu+1}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x).$$

En comparant ce second membre à l'expression que donne (14) du premier membre lorsqu'on substitue β et $[b]$ à α et $[a]$, il vient

$$\overset{1+s}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[\bar{b}]} f(x) = \sum_{\nu=s}^{\infty} c_{\nu-s}^{(1+s)} \overset{1+\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x);$$

en changeant $1+s$ et $1+\nu$ en r et ν, ceci s'écrit

(16) $$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[\bar{b}]} f(x) = \sum_{\nu=r}^{\infty} c_{\nu-r}^{(r)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x),$$

ou encore, grâce à (9),

(17) $$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[\bar{b}]} f(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[c]:[\bar{a}]} f(x).$$

Cette formule prend une forme aisée à retenir si l'on y remplace $[c]:[\bar{a}]$ par l'expression qu'en donne (15); on a ainsi, après changement de $[\bar{b}]$ en $[b]$, l'identité

(18) $$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[b]} f(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[b]:[\beta,\alpha]'} f(x),$$

et l'on remonte aisément de (18) à (17) en écrivant

$$[b]:[\beta,\alpha]' = [b]:[\beta,\alpha]':[a]:[\bar{a}].$$

Bien plus, pour $[b]=1$, (18) se réduit à l'expression remarquablement simple

(19) $$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}} f(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\beta,\alpha]'} f(x),$$

d'où l'on remonte immédiatement à (18), si l'on remarque que $\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}} = \overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[1]}$, et en faisant le produit diagonal par $[b]$ des suites génératrices aux deux membres de (19) (cette opération ne change pas l'égalité de ces deux membres en vertu de ce que l'on a vu au § 24).

Prenons, par exemple, $\beta = s\alpha$, s désignant toujours un entier positif. (19) donne, pour la différence finie du premier ordre,

$$\underset{s\alpha}{\triangle} f(x) = \underset{\alpha}{\triangle}{}_{[s\alpha,\,\alpha]'} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} (s\alpha, \alpha)'_{\nu-1} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x),$$

et, par suite, en changeant $\nu - 1$ en ν, et remarquant que $(s\alpha, \alpha)_\nu' = 0$ pour $\nu \geq s$,

$$\underset{s\alpha}{\triangle} f(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} (s\alpha,\, \alpha)_\nu' \overset{1+\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x)$$

$$= \underset{\alpha}{\triangle} \sum_{\nu=0}^{s-1} (s\alpha,\, \alpha)_\nu' \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x),$$

d'où enfin

(20) $$\frac{f(x+s\alpha)-f(x)}{s\,\alpha} = \underset{\alpha}{\triangle} \sum_{\nu=0}^{s-1} (s\alpha,\, \alpha)_\nu' \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x).$$

En outre, sachant que le premier membre est justement

$$\frac{1}{s} \underset{\alpha}{\triangle} \sum_{\nu=0}^{s-1} f(x+\nu\alpha),$$

on voit que la formule classique

(21) $$\frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{s-1} f(x+\nu\alpha) = \sum_{\nu=0}^{s-1} (s\alpha,\, \alpha)_\nu' \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x)$$

est un cas particulier de la formule générale (19).

On peut déduire de (19) d'autres formules classiques. Tout d'abord remarquons que, grâce à (8), les relations établies jusqu'ici n'exigent pas que l'indice r des différences finies d'interpolation considérées soit positif, pourvu que l'on désigne par $\overset{-r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\alpha]} f(x)$, où r est positif, une fonction *particulière* dont la différence finie d'interpolation d'ordre r soit $f(x)$. Reprenons alors (19), avec $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $r = -1$; cette équation s'écrit[1]

[1] La dérivée d'indice -1, au second membre de cette équation, désigne évidemment une primitive de $f(x)$.

$$\overset{-1}{\triangle} f(x) = \sum_{s=-1}^{\infty} (1, 0)'^{(-1)}_{s+1} \frac{d^s f(x)}{dx^s}$$

$$= \sum_{s=-1}^{\infty} B_{s+1} \frac{d^s f(x)}{dx^s};$$

en prenant la différence finie d'écart 1 des deux membres, et posant $f(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, on obtient une forme particulière de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \sum_{s=0}^{\infty} B_s \triangle \frac{d^s \varphi(x)}{dx^s}. \tag{22}$$

Voici une autre conséquence de ces formules d'interpolation. Appliquons aux deux membres de l'équation (12) l'opérateur $\underset{\beta}{\overset{r}{\triangle}}{}_{[b]}$ relatif à la variable z. Il vient, en faisant ensuite $z = 0$,

$$\underset{\beta}{\overset{r}{\triangle}}{}_{[b]} f(x) = \sum_{\nu=r}^{\infty} \left(\underset{\beta}{\overset{r}{\triangle}}{}_{[b]} (z, \alpha, [a])_\nu \right)_{z=0} \underset{\alpha}{\overset{\nu}{\triangle}}{}_{[\bar{a}]} f(x);$$

la comparaison de cette équation avec l'expression que (17) donnerait du premier membre fournit la relation (5) déjà établie au paragraphe 23.

26. En vue de ce qui suit, nous allons introduire un nouvel opérateur, qui généralise *la moyenne* d'écart α

$$\underset{\alpha}{\nabla} f(x) = \frac{f(x) + f(x+\alpha)}{2},$$

savoir

$$\underset{\alpha}{\nabla}{}_{[a]} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \underset{\alpha}{\overset{\nu}{\triangle}} f(x); \tag{23}$$

nous l'appellerons *moyenne d'interpolation, d'écart* α et de *suite génératrice* ou *base* $[a]$.

Si $f(x)$ est un polynôme et $[a]$ une suite d'indice zéro, sa moyenne d'interpolation est un polynôme du même degré. Pour $[a] = 1$, cette moyenne se réduit à $f(x)$ quel que soit α; elle se réduit à la moyenne ordinaire, de même écart, pour la base

$$[a] : 1, \frac{\alpha}{2}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots,$$

Plus généralement, si $[a] = [s\alpha, \alpha]'$, s étant un entier positif, il résulte de (21) que

$$\underset{\alpha}{\nabla}_{[s\alpha,\,\alpha]'} f(x) = \frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{s-1} f(x+\nu\alpha), \tag{24}$$

de sorte que le symbole habituel $\underset{\alpha}{\nabla}$, que nous conserverons d'ailleurs, équivaut ici à

$$\underset{\alpha}{\nabla}_{[2\alpha,\,\alpha]'}.$$

Il résulte immédiatement de la définition que le produit fonctionnel de plusieurs moyennes d'interpolation de même écart est fourni par l'identité

$$\underset{\alpha}{\nabla}_{[a]} \underset{\alpha}{\nabla}_{[b]} \underset{\alpha}{\nabla}_{[c]} \cdots f(x) = \underset{\alpha}{\nabla}_{[a]\,.\,[b]\,.\,[c]\ldots} f(x); \tag{25}$$

en particulier, les puissances fonctionnelles d'une moyenne d'interpolation sont

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} f(x) = \underset{\alpha}{\nabla}_{[a]^r} f(x), \tag{26}$$

r prenant les valeurs $2, 3, 4, \ldots$. Lorsque $[a]$ est d'indice zéro, cette identité peut s'étendre à toutes les valeurs de r, positives ou négatives, rationnelles ou non.

Prenons la différence finie d'ordre r et d'écart α des deux membres de (26); il vient

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}} \overset{r}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(r)} \overset{r+\nu}{\underset{\alpha}{\Delta}} f(x)$$

et, par suite,

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}} \overset{r}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} f(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}}_{[a]} f(x) \qquad r = 1, 2, 3, \ldots. \tag{27}$$

Lorsque $[a]$ est d'indice zéro, on déduit encore de (27) et (26) que, quel que soit r',

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}} \overset{r'}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} f(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\Delta}}_{[a]^{\frac{r'}{r}}} f(x). \tag{28}$$

Remarquons qu'il résulte de (27) que la moyenne d'interpolation est le quotient fonctionnel de deux différences finies d'interpolation; nous généraliserons ceci un peu plus loin. Notons d'ailleurs que ces deux opérateurs sont permutables.

27. De même que les différences finies d'interpolation, une moyenne d'interpolation admet une infinité de représentations d'écarts et de bases différents. Pour transformer la moyenne d'interpolation (23) en une moyenne d'interpolation d'écart β, exprimons les différences finies au second membre à l'aide des différences finies d'écart β; (19) donne alors

$$\underset{\alpha}{\nabla}_{[a)} f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \overset{\nu}{\underset{\beta}{\triangle}}_{[\alpha,\beta]'} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=\nu}^{\infty} a_\nu (\alpha,\beta)'^{(\nu)}_{s-\nu} \overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}} f(x)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} b_s \overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}} f(x),$$

où, en vertu de (16) Ch. I,

$$(29) \qquad [b] = \frac{[a]:[\alpha,\beta]'}{[\alpha,\beta]'}.$$

Ce résultat se traduit par la formule

$$(30) \qquad \underset{\alpha}{\nabla}_{[a]} f(x) = \underset{\beta}{\nabla}_{[\alpha,\beta]'^{(-1)}\,\cdot\,[a]:[\alpha,\beta]'} f(x);$$

plus généralement, en vertu de (25) et (16) Ch. I, et quel que soit r si $[a]$ est d'indice zéro, on a

$$(31) \qquad \overset{r}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} f(x) = \overset{r}{\underset{\beta}{\nabla}}_{[b)} f(x).$$

D'ailleurs (31) résulte directement de (30), ce qui permettrait de démontrer la formule (16) Ch. I, compte tenu de (25).

Par symétrie, l'identité (29) entraîne

$$(29)' \qquad [a] = \frac{[b]:[\beta,\alpha]'}{[\beta,\alpha]'};$$

en particulier, pour $[b] = [\alpha,\beta]'$, (29)' donne $[a] = [\beta,\alpha]'^{(-1)}$, et (29) fournit l'identité

$$(32) \qquad [\alpha,\beta]'^{(2)} = [\beta,\alpha]'^{(-1)} : [\alpha,\beta]',$$

donc le *quotient diagonal du carré homogène d'une suite newtonnienne réduite par cette suite est l'inverse homogène de son adjointe.*

Dans ces conditions, (31) prend d'ailleurs la forme remarquable

$$\stackrel{r}{\underset{\beta}{\nabla}}_{[\alpha,\beta]'} f(x) = \stackrel{-r}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[\beta,\alpha]'} f(x). \tag{33}$$

Signalons encore que la différence finie d'ordre r et d'écart β des deux membres de (31) donne

$$\stackrel{r}{\underset{\beta}{\Delta}} \stackrel{r}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} f(x) = \stackrel{r}{\underset{\beta}{\Delta}}_{[b]} f(x). \tag{34}$$

A titre d'application, posons

$$g(x) = \underset{\alpha}{\nabla}_{[a]} f(x); \tag{35}$$

il résulte de (25) que l'on a alors

$$f(x) = \stackrel{-1}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} g(x). \tag{36}$$

β désignant un écart quelconque, et $[a]$ étant égal à $[\beta, \alpha]'^{(-1)}$, ces formules s'écrivent, grâce à (33),

$$g(x) = \stackrel{-1}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[\beta,\alpha]'} f(x) = \underset{\beta}{\nabla}_{[\alpha,\beta]'} f(x), \tag{37}$$

$$f(x) = \underset{\alpha}{\nabla}_{[\beta,\alpha]'} g(x) = \stackrel{-1}{\underset{\beta}{\nabla}}_{[\alpha,\beta]'} g(x), \tag{38}$$

et l'on a

$$\underset{\beta}{\Delta} g(x) = \underset{\alpha}{\Delta} f(x). \tag{39}$$

En particulier, *étant donné un polynôme $f(x)$ de degré n, une solution de l'équation* (39) *est le polynôme $g(x)$ du même degré défini par* (37); *réciproquement $f(x)$ s'exprime en fonction de $g(x)$ en permutant les lettres α et β dans* (37).

28. Reprenons (35), et, $[b]$ désignant une suite quelconque, formons

$$\begin{aligned}\underset{\alpha}{\Delta}_{[b]} g(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} b_{s-1} \stackrel{s}{\underset{\alpha}{\Delta}} \underset{\alpha}{\nabla}_{[a]} f(x) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} a_t b_{s-1} \stackrel{s+t}{\underset{\alpha}{\Delta}} f(x),\end{aligned}$$

ou, en posant $s+t=\nu$,

$$\underset{\alpha}{\triangle}_{[b]}\ g(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{\nu-1} a_t\, b_{\nu-1-t} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x)$$

$$= \underset{\alpha}{\triangle}_{[a]\cdot[b]}\ f(x).$$

Nous avons ainsi démontré la formule remarquable

$$\underset{\alpha}{\triangle}_{[b]} \underset{\alpha}{\nabla}_{[a]} f(x) = \underset{\alpha}{\triangle}_{[a]\cdot\,[b]} f(x); \tag{40}$$

autrement dit, *le quotient de deux différences finies d'interpolation de même écart est la moyenne d'interpolation de même écart qui a pour base le quotient homogène des deux bases.*

Il résulte encore de (40) que

$$\underset{\alpha}{\triangle}_{[b]} \underset{\alpha}{\nabla}_{[a]} = \underset{\alpha}{\triangle}_{[a]} \underset{\alpha}{\nabla}_{[b]}\,.$$

Plus généralement on voit que

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[b]} \overset{r}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} f(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]\,.\,[b]} f(x); \tag{41}$$

(19) permet d'ailleurs de modifier l'écart de la première différence finie d'interpolation, et l'on en déduit

$$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}_{[b]} \overset{r}{\underset{\alpha}{\nabla}}_{[a]} f(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]\,.\,[b]:[\beta,\alpha]'} f(x), \tag{42}$$

la base de la différence finie au second membre ayant, suivant la convention faite, la signification $[a]\cdot[[b]:[\beta,\alpha]']$.

29. L'opérateur au second membre de (23), où les différences finies ordinaires sont remplacées par des différences finies d'interpolation, est encore évidemment un moyenne d'interpolation. Considérons, par exemple

$$g(x)=\sum_{s=0}^{\infty} c_s^{(-1)} \overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x); \tag{43}$$

en développant les différences finies d'interpolation au second membre, ceci s'écrit

$$g(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=s}^{\infty} c_s^{(-1)} a_{\nu-s}^{(s)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x),$$

avec

$$[d] = [a]^{-1} \cdot [c]^{-1} : [a],$$

donc

(44) $$g(x) = \underset{\alpha}{\nabla}_{[a]^{-1} \cdot [c]^{-1} : [a]} f(x).$$

Prenons la différence finie d'interpolation $\underset{\alpha}{\triangle}_{[b]}$ des deux membres, $[b]$ étant une suite quelconque. Il vient, grâce à (40),

$$\underset{\alpha}{\triangle}_{[b]} g(x) = \underset{\alpha}{\triangle}_{[e]} f(x),$$

où

$$[e] = [b] \cdot [a]^{-1} \cdot [c]^{-1} : [a];$$

en multipliant par $[d]^{-1}$ les deux membres de cette dernière égalité, compte tenu de 18 Ch. I, il vient

$$[b] = [e] \cdot [a]^{-1} \cdot [c] : [a],$$

donc on a

$$[e] = [a]$$

pour

$$[b] = [c] : [a],$$

c'est-à-dire, pour

(45) $$[c] = [b] : [\bar{a}];$$

dans ces conditions, la fonction définie par (44) vérifie l'équation

(46) $$\underset{\alpha}{\triangle}_{[b]} g(x) = \underset{\alpha}{\triangle}_{[a]} f(x).$$

D'ailleurs il résulte immédiatement de (40) que (46) est vérifié par

(44)' $$g(x) = \underset{\alpha}{\nabla}_{[a] \cdot [b]^{-1}} f(x),$$

ce qui est bien identique à ce que donne (44). Réciproquement on a

(47) $$f(x) = \underset{\alpha}{\nabla}_{[b] \cdot [a]^{-1}} g(x).$$

Par exemple, *étant donné un polynôme $f(x)$ de degré n, un polynôme $g(x)$ du même degré vérifiant l'équation* (46) *est le polynôme défini par* (44)'*; et l'on a, réciproquement, entre ces deux polynômes, la relation* (47).

Bien entendu, le fait que les deux différences aux deux membres de (46) aient le même écart n'est pas une restriction. Une équation

$$\underset{\beta}{\triangle}_{[b]}\, g(x) = \underset{\alpha}{\triangle}_{[a]} f(x) \tag{46'}$$

est de la forme (46) où $[b]$ serait remplacé par $[b]:[\beta, \alpha]'$.

On a donc

$$[c] = [b] :]\beta, \alpha]' : [\bar{a}]. \tag{48}$$

L'expression de $\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}_{[b]}\, g(x)$ est assez simple. On a en effet

$$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}_{[b]}\, g(x) = \overset{r-1}{\underset{\beta}{\triangle}}_{[b]}\, \underset{\alpha}{\triangle}_{[a]} f(x),$$

ou, en introduisant la suite (48) et l'écart α,

$$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}_{[b]}\, g(x) = \overset{r-1}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[c]:[a]}\, \underset{\alpha}{\triangle}_{[a]} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=r-1}^{\infty} c_{\nu+1-r}^{(r-1)}\, \overset{\nu+1}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x);$$

en changeant ν en $\nu - 1$, il vient donc enfin

$$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}_{[b]}\, g(x) = \sum_{\nu=r}^{\infty} c_{\nu-r}^{(r-1)}\, \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x). \tag{49}$$

Par des considérations analogues, on peut résoudre formellement l'équation

$$\overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[b]}\, g(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x), \tag{50}$$

où r et s sont deux entiers quelconques. Ceci s'écrit

$$g(x) = \overset{-s}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[b]}\, \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}_{[a]} f(x), \tag{51}$$

ou, en introduisant la suite $[c]$ définie par (45),

$$g(x) = \overset{-s}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[c]:[a]} \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=-s}^{\infty} c_{\nu+s}^{(-s)} \overset{r+\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]} f(x),$$

cette dernière expression n'ayant pas nécessairement une signification aussi générale que la précédente; enfin, en remplaçant $r+\nu$ par ν, une solution particulière de (50) est donc

$$(52) \qquad g(x) = \sum_{\nu=r-s}^{\infty} c_{\nu+s-r}^{(-s)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]} f(x).$$

Par exemple, si $f(x)$ est un polynôme de degré n, une solution de (50) est le polynôme $g(x)$ de degré $m=n+s-r$, bien déterminé par (52) lorsque $s \leq r$.

En reprenant (51) et exprimant le second membre à l'aide des différences finies d'interpolation de base $[b]$, il vient

$$g(x) = \overset{-s}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[b]} \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]:[\bar{b}]:[b]} f(x),$$

donc en introduisant la suite adjointe de $[c]$

$$[\bar{c}] = [a]:[\bar{b}],$$

on a la solution de (50)

$$g(x) = \sum_{\nu=r}^{\infty} \bar{c}_{\nu-r}^{(r)} \overset{\nu-s}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[b]} f(x),$$

ou encore

$$(52)' \qquad g(x) = \sum_{\nu=r-s}^{\infty} \bar{c}_{\nu+s-r}^{(r)} \overset{\nu}{\underset{u}{\triangle}}{}_{[b]} f(x).$$

C'est d'ailleurs la solution (52) mise sous une autre forme.

Ces quelques applications montrent déjà la commodité du symbolisme utilisé, et des notions de différence finie et de moyenne d'interpolation.

33 — 27377. *Acta mathematica*. 51. Imprimé le 11 février 1928.

CHAPITRE IV.

Les polynômes bernoulliens d'interpolation.

30. Appliquons les considérations du paragraphe 29 aux termes de la suite d'interpolation $[x, \alpha, [\bar{a}]]$. Au terme d'indice n, on peut faire correspondre un polynôme dépendant des deux paramètres α, β et des deux suites $[a], [b]$, que nous désignerons par

$$(1) \qquad L_n(x; \alpha, \beta; [a], [b]) = \sum_{s=0}^{n} c_s^{(-1)} \overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]} (x, \alpha, [\bar{a}])_n$$

$$= \sum_{s=0}^{n} c_s^{(-1)} (x, \alpha, [\bar{a}])_{n-s} ,$$

avec[1]

$$(2) \qquad [c] = [b] : [\beta, \alpha]' : [\bar{a}] .$$

Pour $[a] = [b] = 1$, nous désignerons plus simplement ces polynômes par

$$(3) \qquad L_n(x; \alpha, \beta) = \sum_{s=0}^{n} (\beta, \alpha)'^{(-1)}_s (x, \alpha)_{n-s} ;$$

en particulier, les

$$L_n(x; 0, 1) = \sum_{s=0}^{n} B_s \frac{x^{n-s}}{(n-s)!}$$

sont les polynômes de Bernoulli, que l'on désignerait, suivant la notation habituelle, par $\frac{1}{n!} B_n(x)$, et que nous écrirons, en vertu d'une convention déjà faite pour les nombres de Bernoulli,

$$(4) \qquad L_n(x; 0, 1) = B_n(x) .$$

Nous appellerons *polynômes bernoulliens d'interpolation* les polynômes (1). Il résulte d'ailleurs de leur définition que *les suites de tels polynômes sont les produits homogènes d'une suite d'interpolation par une suite constante arbitraire* $[c]^{-1}$, *d'indice zéro*, savoir

$$(5) \qquad [L_n(x; \alpha, \beta; [a], [b])] = [c]^{-1} \cdot [x, \alpha, [\bar{a}]] .$$

---

[1] Nous nous plaçons ici dans le cas de (46)' Ch. III.

La loi d'homogénéité de ces polynômes s'établit immédiatement. En effet, multiplions x, α, β par ϱ, et les suites $[a], [b]$, terme à terme par ϱ^n; $[\bar{a}]$, et, par suite, $[x, \alpha, [\bar{a}]]$, sont multipliés terme à terme par ϱ^n; d'autre part, $[c]$, étant le produit diagonal de trois suites multipliées terme à terme par ϱ^n, est également multipliée terme à terme par ϱ^n. Il en est de même pour $[c]^{-1}$, et enfin pour le produit homogène du second membre de (5). En résumé, on a

$$L_n(\varrho x;\ \varrho\alpha, \varrho\beta;\ [\varrho^n a_n], [\varrho^n b_n]) = \varrho^n L_n(x;\ \alpha, \beta;\ [a], [b]). \tag{6}$$

En appliquant aux deux membres de (5) l'opérateur $\underset{\alpha}{\triangle}{}_{[a]}$, et se rappelant que la suite d'interpolation au second membre se reproduit, au facteur $[1_1]$ près, il vient

$$\underset{\alpha}{\triangle}{}_{[a]} L_n(x;\ \alpha, \beta;\ [a], [b]) = L_{n-1}(x;\ \alpha, \beta;\ [a], [b]); \tag{7}$$

ceci permet d'ailleurs de définir entièrement le polynôme L_n en fonction de L_{n-1}, avec la condition

$$L_n(0;\ \alpha, \beta;\ [a], [b]) = c_n^{(-1)}. \tag{8}$$

Plus généralement, on a[1]

$$\underset{\alpha}{\overset{r}{\triangle}}{}_{[a]} L_n(x) = L_{n-r}(x). \tag{9}$$

D'autre part, les considérations du paragraphe 29 nous montrent que

$$\underset{\beta}{\triangle}{}_{[b]} L_n(x) = (x, \alpha, [\bar{a}])_{n-1}, \tag{10}$$

et, d'une manière générale, la formule (49) Ch. III donne

$$\underset{\beta}{\overset{r}{\triangle}}{}_{[b]} L_n(x) = \sum_{\nu=r}^{n} c_{\nu-r}^{(r-1)} \underset{\alpha}{\overset{\nu}{\triangle}}{}_{[a]} (x, \alpha, [\bar{a}])_n,$$

ce qui s'écrit encore

$$\left[\underset{\beta}{\overset{r}{\triangle}}{}_{[b]} L_{n+r}(x)\right] = [c]^{r-1} \cdot [x, \alpha, [\bar{a}]]. \tag{11}$$

---

[1] Lorsqu'aucune ambiguité ne sera possible, nous nous abstiendrons d'écrire les paramètres et les suites qui définissent un polynôme bernoullien d'interpolation.

Donc *une suite de polynômes bernoulliens d'interpolation se reproduit quand on lui applique l'opérateur* $\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]}$. *Par contre, l'opérateur* $\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[b]}$ *la transforme en une nouvelle suite bernoullienne, dont le facteur constant est la puissance* $(1-r)^e$ *du facteur* $[c]^{-1}$ *de la suite primitive. Réciproquement, toute suite de polynômes liés entre eux par la relation récurrente* (9) *constitue une suite bernoullienne.* En effet, la formule d'interpolation (12) Ch. III, où $x=0$, exprime que cette suite est le produit homogène de $[x, \alpha, [\bar{a}]]$ par $[L_n(0)]$.

L'expression de $c_n^{(r-1)}$, en fonction de $\alpha, \beta, [a], [b]$ est aisée à former. En effet on déduit immédiatement de (13) Ch. I que le terme général de la puissance r^e du produit diagonal de trois suites s'obtient à partir du terme général de ce produit en ajoutant $r-1$ aux indices supérieurs qui affectent les termes des trois suites; autrement dit, on a

$$([a]:[b]:[c])_n^r = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{\nu} a_s^{(r)} b_{\nu-s}^{(r+s)} c_{n-\nu}^{(r+\nu)} ;$$

donc, ici, il vient

$$c_n^{(r-1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{\nu} b_s^{(r-1)} (\beta, \alpha)'^{(r+s-1)}_{\nu-s} \bar{a}_{n-\nu}^{(r+\nu-1)} ;$$

en particulier,

$$c_n^{(-1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{\nu} b_s^{(-1)} (\beta, \alpha)'^{(s-1)}_{\nu-s} \bar{a}_{n-\nu}^{(\nu-1)} .$$

31. Il résulte de la propriété fondamentale qui a servi à définir la suite d'interpolation $[x, \alpha, [\bar{a}]]$ que

$$[L_n(x+y)] = [c]^{-1} \cdot [x, \alpha, [\bar{a}]] \cdot [y, \alpha, [\bar{a}]] ,$$

c'est-à-dire que

$$[L_n(x+y)] = [L_n(x)] \cdot [y, \alpha, [\bar{a}]] . \tag{12}$$

Le développement du second membre donne donc

$$L_n(x+y) = \sum_{s=0}^{n} L_s(x) (y, \alpha, [\bar{a}])_{n-s} ;$$

en particulier,

$$B_n(x+y) = \sum_{s=0}^{n} B_s(x) \frac{y^{n-s}}{(n-s)!}$$

n'est rien autre que l'identité que l'on écrit, suivant la notation symbolique habituelle,

$$B_n(x+y) = (B(x)+y)^n.$$

En effectuant le produit homogène de r suites bernoulliennes d'interpolation d'arguments $x, y, z, \ldots$, on déduit immédiatement de (5) que

$$[L_n(x)] \cdot [L_n(y)] \cdot [L_n(z)] \cdots = [c]^{-r} \cdot [x+y+z+\cdots, \alpha, [\bar{a}]],$$

et l'on retrouve les suites bernoulliennes auxquelles donnent naissance les opérateurs $\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[b]}$. Nous poserons

(13) $$[L_n^{(r)}(x)] = [c]^{-r} \cdot [x, \alpha, [\bar{a}]],$$

de sorte que cette suite ne doit pas être confondue avec la puissance r^e de $[L_n(x)]$; d'une manière précise, on a

(14) $$[L_n(x)]^r = [L_n^{(r)}(rx)],$$

$$[L_n(x) \cdot [L_n(y)] \cdots = [L_n^{(r)}(x+y+\cdots)],$$

le nombre des facteurs au premier membre de cette dernière équation étant égal à r. D'ailleurs, r est un nombre quelconque dans (13) et (14), en supposant toujours que les suites $[a]$ et $[b]$ sont d'indice zéro.

Avec cette notation, la formule (11) donne

$$\left[\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[b]} L_{n+r}^{(s)}(x)\right] = [c]^{r-s} \cdot [x, \alpha, [\bar{a}]]$$

$$= L_n^{(s-r)}(x),$$

ou encore

(15) $$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[b]} L_n^{(s)}(x) = L_{n-r}^{(s-r)}(x).$$

Toutes les suites bernoulliennes d'interpolation $[L_n^{(r)}(x)]$ se déduisent les unes des autres par l'opérateur $\underset{\beta}{\triangle}{}_{[b]}$. En particulier $s=r$ donne

$$\overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[b]} L_n^{(r)}(x) = (x, \alpha, [\bar{a}])_{n-r}\,. \tag{16}$$

Quant à l'opérateur $\underset{\alpha}{\triangle}{}_{[a]}$, on voit immédiatement qu'il donne

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]} L_n^{(s)}(x) = L_{n-r}^{(s)}(x)\,. \tag{17}$$

On peut d'ailleurs déduire (15) de (17) en écrivant la premier membre de (15)

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[b]:[\beta,\alpha]'} L_n^{(s)}(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[c]:[a]} L_n^{(s)}(x)$$

$$= \sum_{\nu=r}^{n} c_{\nu-r}^{(r)} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]} L_n^{(s)}(x)\,.$$

Cette dernière méthode permettrait d'exprimer

$$\overset{r}{\underset{\omega}{\triangle}}{}_{[d]} L_n^{(s)}(x)$$

en fonction des $L_t^{(s)}(x)$, quels que soient ω et $[d]$. Bornons nous au cas où $[d] = 1$, qui fournit un résultat simple. Il vient

$$\overset{r}{\underset{\omega}{\triangle}} L_n^{(s)}(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\omega,\alpha]'} L_n^{(s)}(x) = \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[\omega,\alpha,[\bar{a}]]':[a]} L_n^{(s)}(x)$$

donc, en vertu de (17),

$$\overset{r}{\underset{\omega}{\triangle}} L_{n+r}^{(s)}(x) = \sum_{\nu=r}^{n+r} (\omega, \alpha, [\bar{a}])'^{(r)}_{\nu-r} L_{n+r-\nu}^{(s)}(x)$$

$$= \sum_{t=0}^{n} (\omega, \alpha, [\bar{a}])'^{(r)}_{t} L_{n-t}^{(s)}(x).$$

Ceci s'écrit encore

$$\left[\overset{r}{\underset{\omega}{\triangle}} L_{n+r}^{(s)}(x)\right] = [L_n^{(s)}(x)] \cdot [\omega, \alpha, [\bar{a}]]'^{(r)}. \tag{18}$$

En particulier, pour $r = 1$, $s = 0$, (18) se réduit à la formule

$$[\underset{\omega}{\triangle}(x, \alpha, [a])_{n+1}] = [x, \alpha, [a]] \cdot [\omega, \alpha, [a]]'.$$

32. Il résulte de la définition des $L_n^{(r)}(x)$ que

$$[L_n^{(r)}(x)]\cdot[L_n^{(s)}(y)]\cdot[L_n^{(t)}(z)]\cdots=[L_n^{(r+s+t+\cdots)}(x+y+z\cdots)]. \tag{19}$$

Remarquons d'ailleurs que, pour une suite donnée de polynômes $L_n^{(r)}(x)$, la paramètre β et la suite $[b]$ ne sont déterminés que par la relation (2) où $[c]$ est connue; donc β est arbitraire, et $[b]$ est déterminée par le choix de β. Par exemple, le produit de deux suites de polynômes bernoulliens d'interpolation

$$[L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta;[a],[b]]\cdot[L_n^{(r)}(y;\alpha,\beta';[a],[b']]$$

est une nouvelle suite de polynômes bernoulliens d'interpolation

$$L_n^{(t)}(x+y;\alpha,\beta'';[a],[b''])$$

avec

$$[b'']:[\beta'',\alpha]':[\bar{a}]=[b]:[\beta,\alpha]':[\bar{a}]\cdot[b']:[\beta',\alpha]':[\bar{a}]. \tag{20}$$

Grâce à la remarque que nous venons de faire, il est permis de supposer $\beta=\beta'=\beta''$. Dans ces conditions, posons

$$[k]=[\beta,\alpha]':[\bar{a}]=[\beta,\alpha,[\bar{a}]]';$$

(20) s'écrit

$$[b'']:[k]=[b]:[k]\cdot[b']:[k],$$

ou, en introduisant l'adjointe

$$[\bar{k}]=[a]:[\alpha,\beta]',$$

$$[b'']=[[b]:[k]\cdot[b']:[k]]:[\bar{k}].$$

En développant le second membre, il vient

$$b_n''=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{s=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{\nu-s}b_i\,b_j'\,k_{s-i}^{(1+i)}\,k_{\nu-s-j}^{(1+j)}\,\bar{k}_{n-\nu}^{(1+\nu)}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{s=i}^{n-j}\sum_{\nu=s+j}^{n}b_i\,b_j'\,k_{s-i}^{(1+i)}\,k_{\nu-s-j}^{(1+j)}\,\bar{k}_{n-\nu}^{(1+\nu)},$$

et, en vertu de (26) Ch. I, ceci se réduit à

$$b_n'' = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{s=i}^{n-j} b_i b_j' k_{s-i}^{(1+i)} \bar{k}_{n-s-j}^{(s)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} b_i b_j' \bar{k}_{n-i-j}^{(-1)},$$

c'est-à-dire

$$[b''] = [b] \cdot [b'] \cdot [\bar{k}]^{-1}.$$

En définitive on a

$$(21) \qquad [L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta; [a], [b])] \cdot [L_n^{(r)}(y; \alpha, \beta; [a], [b'])] = [L_n^{(r)}(x+y; \alpha, \beta; [a], [b''])],$$

avec

$$(22) \qquad [b''] = \frac{[b] \cdot [b']}{[a] : [\alpha, \beta]'}.$$

On en déduit que, d'une manière générale, le produit de m suites bernoulliennes, différant par la seule suite $[b]$,

$$[L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta; [a], [b^{(i)}])], \qquad i = 1, 2, \ldots m,$$

fournit une suite analogue, où $[b^{(i)}]$ est remplacée par

$$[b] = \frac{[b^{(1)}] \cdot [b^{(2)}] \cdots [b^{(m)}]}{[[a] : [\alpha, \beta]']^{m-1}}.$$

33. Un polynôme $L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta; [a], [b])$ s'exprime simplement à l'aide des termes de la suite d'interpolation $[x, \beta, [\bar{b}]]$. On peut former cette expression en remplaçant, dans (5), la suite $[x, \alpha, [\bar{a}]]$ en fonction de $[x, \beta, [\bar{b}]]$, grâce à la formule (23)' Ch. II. On peut également utiliser la formule d'interpolation (12) Ch. III; elle donne en effet

$$L_n^{(r)}(x+z) = \sum_{s=0}^{n} (x, \beta, [\bar{b}])_s \overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}}{}_{[b]} L_n^{(r)}(z),$$

et, par suite, en vertu de (15),

$$(23) \qquad L_n^{(r)}(x+z) = \sum_{s=0}^{n} L_{n-s}^{(r-s)}(z) \, (x, \beta, [\bar{b}])_s.$$

Il suffit de faire, dans cette équation, $z = 0$ et d'utiliser la formule

$$[L_n^{(r)}(0)] = [c]^{-r},$$

pour obtenir l'expression que nous avions en vue

$$L_n^{(r)}(x) = \sum_{s=0}^{n} c_{n-s}^{(s-r)}(x, \beta, [\bar{b}])_s. \tag{24}$$

Par exemple, on obtient, pour les polynômes de Bernoulli, les formules

$$\left\{ \begin{aligned} B_n^{(r)}(x+y) &= \sum_{s=0}^{n} B_{n-s}^{(r-s)}(y) \frac{x(x-1)\cdots(x-s+1)}{s!}, \\ B_n^{(r)}(x) &= \sum_{s=0}^{n} B_{n-s}^{(r-s)} \frac{x(x-1)\cdots(x-s+1)}{s!}, \end{aligned} \right. \tag{25}$$

données par N. E. Nörlund, aux notations près.[1]

34. Reprenons la formule d'interpolation (12) Ch. III

$$f(x+z) = \sum_{s=0}^{\infty} (z, \alpha, [\bar{a}])_s \mathop{\triangle}_{\alpha}^{s}{}_{[a]} f(x)$$

et remplaçons y les termes de la suite d'interpolation $[z, \alpha, [\bar{a}]]$ en fonction des $L_n(z; \alpha, \beta; [a], [b])$. En vertu de (5), qui s'écrit d'ailleurs

$$[z, \alpha, [a]] = [c] \cdot [L_n(z)],$$

on a

$$f(x+z) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{s} c_{s-\nu} L_\nu(z) \mathop{\triangle}_{\alpha}^{s} f(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(z) \sum_{s=\nu}^{\infty} c_{s-\nu} \mathop{\triangle}_{\alpha}^{s}{}_{[a]} f(x). \tag{26}$$

La dernière somme s'écrit

$$\mathop{\triangle}_{\alpha}^{\nu}{}_{[a]} \sum_{s=0}^{\infty} c_s \mathop{\triangle}_{\alpha}^{s}{}_{[a]} f(x)$$

[1] Loc. cit. p. 191.

et nous avons vu au paragraphe 29 que

$$(27) \qquad \varphi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s \overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]} f(x),$$

avec

$$[c] = [b] : [\beta, \alpha]' : [\bar{a}],$$

vérifie l'équation

$$(28) \qquad \underset{\alpha}{\triangle}{}_{[a]}\, \varphi(x) = \underset{\beta}{\triangle}{}_{[b]}\, f(x).$$

Ceci rappelé, (26) s'écrit

$$(29) \qquad f(x+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(z) \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]}\, \varphi(x);$$

on constate d'ailleurs que (27) se déduit de (29) en y faisant $z = 0$. En appliquant enfin l'opérateur $\underset{\beta}{\triangle}{}_{[b]}$ aux deux membres de (29) relativement à la variable x, il résulte de (28) que

$$(30) \qquad \underset{\alpha}{\triangle}{}_{[a]}\, \varphi(x+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(z) \underset{\beta}{\triangle}{}_{[b]} \overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]}\, \varphi(x).$$

Cette formule sommatoire est justement, lorsque les $L_n(z)$ sont les polynômes de Bernoulli, la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin[1]

$$\varphi'(x+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(z) \triangle \varphi^{(\nu)}(x).$$

Nous verrons plus loin que la formule sommatoire de Boole-Nörlund, où interviennent les polynômes d'Euler, est également contenue dans l'identité (30).

On peut recommencer ces calculs, en substituant les $L_n^{(r)}(x)$ aux $L_n(x)$, r étant un entier positif ou négatif. Sachant que

$$[z, \alpha, [a]] = [c]^r \cdot [L_n^{(r)}(z)],$$

(26) est alors remplacé par

[1] Bien entendu, il ne s'agit que de relations formelles, qui n'ont un sens réel que lorsque les séries considérées sont absolument convergentes.

$$f(x+z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu^{(r)}(z)\sum_{s=\nu}^{\infty} c_{s-\nu}^{(r)} \mathop{\overset{s}{\triangle}}_{\alpha}{}_{[a]} f(x); \tag{31}$$

la dernière somme est

$$\mathop{\overset{\nu}{\triangle}}_{\alpha}{}_{[a]}\, \varphi(x),$$

où

$$\varphi(x)=\sum_{s=0}^{\infty} c_s^{(r)} \mathop{\overset{s}{\triangle}}_{\alpha}{}_{[a]} f(x),$$

et nous avons vu au paragraphe 29 que $\varphi(x)$ est tel que l'on ait

$$\mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\alpha}{}_{[a]}\, \varphi(x)=\mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\beta}{}_{[b]} f(x).$$

En prenant la différence finie $\mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\beta}{}_{[b]}$ des deux membres de (31) relativement à x, on obtient donc la formule d'interpolation

$$\mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\alpha}{}_{[a]}\, \varphi(x+z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu^{(r)}(z) \mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\beta}{}_{[b]} \mathop{\overset{\nu}{\triangle}}_{\alpha}{}_{[a]}\, \varphi(x). \tag{32}$$

Dans le cas des polynômes de Bernoulli, la relation (31) devient

$$f(x+z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{(r)}(z)\, \varphi^{(\nu)}(x), \tag{33}$$

avec

$$\varphi^{(r)}(x)=\overset{r}{\triangle} f(x). \tag{34}$$

Cette propriété des polynômes de Bernoulli est énoncée par N. E. Nörlund dans le mémoire déjà cité.[1]

35. Les suites de polynômes bernoulliens, pour lesquelles $[a]=[b]=1$, possèdent des propriétés particulières analogues aux propriétés connues des polynômes de Bernoulli. En posant

$$L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)=L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta;[1],[1]),$$

---

[1] Cf. p. 164.

on a, par définition,

$$(35) \qquad [L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)] = [\beta,\alpha]'^{(-r)} \cdot [x,\alpha],$$

et l'on sait que

$$(36) \qquad \overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}} L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta) = L_{n-s}^{(r)}(x;\alpha,\beta),$$

$$(37) \qquad \overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}} L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta) = L_{n-s}^{(r-s)}(x;\alpha,\beta),$$

quel que soit l'indice r; en particulier, si r est un entier,

$$(38) \qquad \overset{r}{\underset{\beta}{\triangle}} L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta) = (x,\alpha)_{n-r}.$$

En remplaçant, dans (35), x par $x + r\beta$, il vient

$$\begin{aligned}[L_n^{(r)}(x+r\beta;\alpha,\beta)] &= [\beta,\alpha]'^{(-r)} \cdot [r\beta,\alpha] \cdot [x,\alpha] \\ &= [\beta,\alpha]'^{(-r)} \cdot [\beta,\alpha]^r \cdot [x,\alpha],\end{aligned}$$

et, par suite, grâce à (36) Ch. II,

$$[L_n^{(r)}(x+r\beta;\alpha,\beta)] = [-\beta,\alpha]'^{(-r)} \cdot [x,\alpha];$$

nous avons ainsi démontré la formule remarquable

$$(39) \qquad L_n^{(r)}(x+r\beta;\alpha,\beta) = L_n^{(r)}(x;\alpha,-\beta).$$

En changeant x et α en $-x$ et $-\alpha$, ceci s'écrit encore, compte tenu du caractère d'homogénéité des $L_n^{(r)}(x)$,

$$(39)' \qquad L_n^{(r)}(r\beta - x; -\alpha,\beta) = (-1)^n L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta).$$

Pour $\alpha = 0, \beta = 1$, on retrouve la formule classique

$$(40) \qquad B_n^{(r)}(r-x) = (-1)^n B_n^{(r)}(x).$$

Plus généralement, on peut former, quel que soit s,

$$\begin{aligned}[L_n^{(r)}(x+s\beta;\alpha,\beta)] &= [\beta,\alpha]'^{(-r)} \cdot [\beta,\alpha]^s \cdot [x.\alpha] \\ &= [\beta,\alpha]'^{(s-r)} \cdot \left[\frac{[\beta,\alpha]}{[\beta,\alpha]'}\right]^s \cdot [x,\alpha],\end{aligned}$$

et, par suite, en vertu de (36) Ch. II,

$$(41) \qquad [L_n^{(r)}(x+s\beta;\alpha,\beta)] = [-\beta,\alpha]'^{(-s)} \cdot [L_n^{(r-s)}(x;\alpha,\beta)].$$

Pour $\alpha = 0, \beta = 1$, cette formule se réduit à

$$(42) \qquad [B_n^{(r)}(x+s)] = [(-1)^n B_n^{(s)}] \cdot [B_n^{(r-s)}(x)].$$

Cette identité, valable quels que soient les nombres r et s, me paraît nouvelle; avec les notations classiques, elle s'écrirait, sous forme symbolique,

$$B_n^{(r)}(x+s) = (B^{(r-s)}(x) - B^{(s)})_n .$$

La formule[1]

$$\sum_{s=0}^{\nu-1} B_n\left(x+\frac{s}{\nu}\right) = \nu^{1-n} B_n(\nu x)$$

s'étend également aux polynômes $L_n(x;\alpha,\beta)$. Considérons en effet la fonction

$$f(x;\alpha,\beta) = \sum_{s=0}^{\nu-1} L_n\left(x+\frac{s\beta}{\nu};\alpha,\beta\right);$$

elle est telle que l'on ait

$$(43) \qquad \begin{aligned} f\left(x+\frac{\beta}{\nu};\alpha,\beta\right) - f(x;\alpha,\beta) &= L_n(x+\beta;\alpha,\beta) - L_n(x;\alpha,\beta) \\ &= \beta \mathop{\triangle}_{\beta} L_n(x;\alpha,\beta) \\ &= \beta(x,\alpha)_{n-1}, \end{aligned}$$

donc, en changeant x, α, β en $\nu x, \nu\alpha, \nu\beta$, il vient

$$f(\nu x+\beta;\nu\alpha,\nu\beta) - f(\nu x;\nu\alpha,\nu\beta) = \nu\beta(\nu x,\nu\alpha)_{n-1},$$

c'est-à-dire, suivant une notation déjà utilisée au paragraphe 24,

$$\mathop{\triangle}_{\beta}{}_{\nu x} f(\nu x;\nu\alpha,\nu\beta) = \nu \mathop{\triangle}_{\beta}{}_{\nu x} L_n(\nu x;\nu\alpha,\beta).$$

Par conséquent

$$f(\nu x;\nu\alpha,\nu\beta) = \nu L_n(\nu x;\nu\alpha,\beta) + C^{te}.$$

[1] NÖRLUND, loc. cit. p. 127.

Prenons la différence finie $\underset{\alpha}{\triangle}_{\nu x}$ de ces deux membres. On retrouve la même relation relative à $n-1$, où la constante a disparu. Et enfin, en divisant x, α, β par ν, on obtient l'identité

$$\sum_{s=0}^{\nu-1} L_n\left(x+\frac{s\beta}{\nu};\, \alpha, \beta\right) = \nu^{1-n} L_n(\nu x; \nu\alpha, \beta) = \nu L_n\left(x; \alpha, \frac{\beta}{\nu}\right). \tag{44}$$

On peut déduire de (44) une conséquence intéressante. Tout d'abord, supposons que, ayant divisé les deux membres par ν, nous fassions croître ν indéfiniment. Il vient[1]

$$\frac{1}{\beta}\int_x^{x+\beta} L_n(z; \alpha, \beta)\, dz = L_n(x; \alpha, 0); \tag{45}$$

par exemple, si $\beta = 1$, $\alpha = 0$, (45) s'écrit

$$\int_x^{x+1} B_n(z)\, dz = \frac{x^n}{n!}.$$

Reprenons (43), et ajoutons membre à membre les équations obtenues en remplaçant x successivement par x, $x+\frac{\beta}{\nu}, \ldots, x+\frac{\nu-1}{\nu}\beta$. Il vient

$$f(x+\beta, \alpha, \beta) - f(x, \alpha, \beta) = \beta \sum_{s=0}^{\nu-1}\left(x+\frac{s\beta}{\nu}, \alpha\right)_{n-1},$$

donc, en vertu de (44),

$$\sum_{s=0}^{\nu-1}\left(x+\frac{s\beta}{\nu}, \alpha\right)_n = \frac{\nu}{\beta} \underset{\beta}{\triangle} L_{n+1}\left(x; \alpha, \frac{\beta}{\nu}\right).$$

En multipliant β par ν, ceci s'écrit encore

$$\sum_{s=0}^{\nu-1}(x+s\beta, \alpha)_n = \frac{L_{n+1}(x+\nu\beta;\, \alpha, \beta) - L_{n+1}(x; \alpha, \beta)}{\beta}. \tag{46}$$

Les polynômes $L_n(x; \alpha, \beta)$ permettent donc d'exprimer la somme des valeurs de

[1] En dérivant (45) par rapport à x on retrouve l'une des propriétés fondamentales de $L_n(x; \alpha, \beta)$: $\underset{\beta}{\triangle} L_n(x; \alpha, \beta) = (x, \alpha)_{n-1}$.

$\dfrac{x(x-\alpha)\cdots(x-(n-1)\alpha)}{n!}$ pour ν valeurs de x en progression arithmétique de raison β.

36. Les fonctions génératrices des suites $[\beta,\alpha]'^{(-1)}$ et $[x,\alpha]$ étant respectivement

$$\frac{\beta t}{(1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}}-1} \quad \text{et} \ (1+\alpha t)^{\frac{x}{\alpha}},$$

la fonction génératrice de

$$[L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)] = [\beta,\alpha]'^{(-r)}\cdot[x,\alpha]$$

sera

$$\frac{\beta^r t^r (1+\alpha t)^{\frac{x}{\alpha}}}{\left((1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}}-1\right)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)\, t^n. \tag{47}$$

En utilisant une méthode appliquée[1] par N. E. Nörlund aux polynômes de Bernoulli, dérivons (47) par rapport à t. Il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)\, t^{n-1} = \frac{\beta^r t^{r-1}(1+\alpha t)^{\frac{x-\alpha}{\alpha}}[r+(x+r\alpha)t]}{\left((1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}}-1\right)^r} - \frac{r\beta^{r+1} t^r (1+\alpha t)^{\frac{x+\beta-\alpha}{\alpha}}}{\left((1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}}-1\right)^{r+1}}.$$

Multiplions les deux membres par t, et identifions les termes en t^n. Nous obtenons ainsi

$$r\, L_n^{(r+1)}(x+\beta-\alpha;\alpha,\beta) = r\, L_n^{(r)}(x-\alpha;\alpha,\beta) + (x+r\alpha)\, L_{n-1}^{(r)}(x-\alpha;\alpha,\beta) - n\, L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta).$$

En changeant x en $x+\alpha$, et en vertu de (36) et (37), on en déduit

$$r\, L_n^{(r+1)}(x;\alpha,\beta) + r\beta\, L_{n-1}^{(r)}(x;\alpha,\beta) = r\, L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta) + (x+r\alpha+\alpha)\, L_{n-1}^{(r)}(x;\alpha,\beta)$$
$$- n\, L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta) - n\alpha\, L_{n-1}^{(r)}(x;\alpha,\beta),$$

et, par suite,

$$r\, L_n^{(r+1)}(x;\alpha,\beta) = (r-n)\, L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta) + [x-r\beta+(r+1-n)\alpha]\, L_{n-1}^{(r)}(x;\alpha,\beta). \tag{48}$$

Pour $r=n$, ceci se réduit à

$$n\, L_n^{(n+1)}(x;\alpha,\beta) = (x+\alpha-n\beta)\, L_{n-1}^{(n)}(x;\alpha,\beta),$$

[1] Loc. cit. p. 185.

d'où l'on déduit par récurrence que

$$L_n^{(n+1)}(x;\alpha,\beta)=(x+\alpha-\beta,\beta)_n\,. \tag{49}$$

En particulier[1],

$$B_n^{(n+1)}(x)=(x-1,1)_n=\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!}. \tag{49'}$$

Pour $x=-\alpha$, (49) donne

$$L_n^{(n+1)}(-\alpha;\alpha,\beta)=(-\beta)^n, \tag{50}$$

et, pour $x=\beta$,

$$L_n^{(n+1)}(\beta;\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)_n. \tag{51}$$

Enfin, en faisant $x=0$, on voit que

$$(\beta,\alpha)'^{(-n-1)}_n=(\alpha-\beta,\beta)_n.$$

En supposant r entier positif, on déduit de (49) que

$$\begin{aligned} L_n^{(n+r+1)}(x;\alpha,\beta)&=\mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\alpha} L_{n+r}^{(n+r+1)}(x;\alpha,\beta)\\ &=\mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\alpha}(x+\alpha-\beta,\beta)_{n+r}; \end{aligned} \tag{52}$$

il en résulte que, pour $x=\beta-\alpha$, et grâce à (5) Ch. III,

$$L_n^{(r+n+1)}(\beta-\alpha;\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)'^{(r)}_n, \tag{53}$$

et ceci est vrai quel que soit r, puisque les deux membres sont des polynômes en r.

En appliquant la formule (50) à

$$\begin{aligned} L_n^{(n+1)}(x;\alpha,\beta)&=\mathop{\triangle}_{\alpha} L_{n+1}^{(n+1)}(x;\alpha,\beta)=\mathop{\triangle_{[\alpha,\beta]'}}_{\beta} L_{n+1}^{(n+1)}(x;\alpha,\beta)\\ &=\sum_{s=0}^{n}(\alpha,\beta)'_s\,L_{n-s}^{(n-s)}(x;\alpha,\beta), \end{aligned}$$

il vient

$$\sum_{s=0}^{n}(\alpha,\beta)'_s\,L_{n-s}^{(n-s)}(-\alpha;\alpha,\beta)=(-\beta)^n\,. \tag{55}$$

---

[1] Cf. Nörlund, loc. cit. p. 186.

En particulier, on a, entre les $B_s^{(s)}$, la relation de récurrence[1]

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{n-s+1} B_s^{(s)} = 1.$$

37. On peut établir une formule assez remarquable, à partir de la formule d'interpolation

$$f(x+y) = \sum_{s=0}^{\infty} \overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}} f(x)\,(y,\beta)_s.$$

La différence fini $\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}$ de cette équation, relativement à la variable y, donne

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x+y) = \sum_{s=r}^{\infty} \overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}} f(x)\, \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} (y,\beta)_s,$$

et, par suite, en vertu de (52),

$$(56) \qquad \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x+y+\alpha-\beta) = \sum_{s=r}^{\infty} \overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}} f(x)\, L_{s-r}^{(s+1)}(y;\alpha,\beta).$$

Par exemple, $y=0$ donne

$$(57) \qquad \overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x+\alpha-\beta) = \sum_{s=r}^{\infty} \overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}} f(x)\,(\beta,\alpha)'^{(-s-1)}_{s-r};$$

pour $y=\beta-\alpha$, (56) fournit l'expression déjà vue de $\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}} f(x)$ en fonction des $\overset{s}{\underset{\beta}{\triangle}} f(x)$.

En appliquant l'identité (56) au polynôme $L_{n+r}^{(\nu)}(x;\alpha,\beta)$, on obtient l'identité

$$(58) \qquad L_n^{(\nu)}(x+y+\alpha-\beta;\alpha,\beta) = \sum_{s=0}^{n} L_{n-s}^{(\nu-r-s)}(x;\alpha,\beta)\, L_s^{(r+s+1)}(y;\alpha,\beta),$$

remarquable en raison de l'intervention d'un indice arbitraire r au second membre seul. Pour $r=0$, (49) montre que (58) se réduit au développement de $L_n^{(\nu)}(x+y;\alpha,\beta)$ en fonction des $(y,\beta)_s$; on obtient la même formule d'interpolation, avec permutation des rôles de x et y, pour $r=\nu-n-1$. En prenant $x=0$, ou

[1] Cf. NÖRLUND, loc. cit., p. 192.

bien $x=y=0$, ou bien $x=\beta, y=-\alpha$, (58) se réduit à l'une ou l'autre des trois identités

$$L_n^{(\nu)}(y+\alpha-\beta;\alpha,\beta)=\sum_{s=0}^{n}(\beta,\alpha)'^{(r+s-\nu)}_{n-s}L_s^{(r+s+1)}(y;\alpha,\beta),$$

$$L_n^{(\nu)}(\alpha-\beta;\alpha,\beta)=\sum_{s=0}^{n}(\beta,\alpha)'^{(r+s-\nu)}_{n-s}(\beta,\alpha)'^{(-r-1-s)}_{s},$$

$$(\beta,\alpha)'^{(-\nu)}_{n}=\sum_{s=0}^{n}L_{n-s}^{(\nu-r-s)}(\beta;\alpha,\beta)L_s^{(r+s+1)}(-\alpha;\alpha,\beta).$$

En appliquant (58) et ces formules particulières aux polynômes de Bernoulli, on obtient les identités

(59) $$B_n^{(\nu)}(x+y-1)=\sum_{s=0}^{n}B_{n-s}^{(\nu-r-s)}(x)B_s^{(r+s+1)}(y),$$

(60) $$B_n^{(\nu)}(y-1)=\sum_{s=0}^{n}B_{n-s}^{(\nu-r-s)}B_s^{(r+s+1)}(y),$$

(61) $$B_n^{(\nu)}=\sum_{s=0}^{n}B_{n-s}^{(\nu-r-s)}B_s^{(r+1+s)}(1).$$

En particulier, pour $r=\nu$, $y=0$, la première relation devient

$$B_n^{(\nu)}(x-1)=\sum_{s=0}^{n}B_{n-s}^{(-s)}(x)B_s^{(\nu+s+1)}$$

$$=\sum_{s=0}^{n}B_s^{(\nu+s+1)}\overset{s}{\Delta}\frac{x^n}{n!},$$

formule donnée par N. E. Nörlund.[1]

Reprenons la formule d'interpolation (56) et appliquons la au polynôme

$$f(x)=L_{n+r}^{(\nu+r)}(x;\beta,\alpha).$$

---

[1] Loc. cit., p. 194.

Il vient

$$L_n^{(\nu)}(x+y+\alpha-\beta;\beta,\alpha)=\sum_{s=0}^{n} L_{n-s}^{(\nu+r)}(x;\beta,\alpha)\,L_s^{(r+s+1)}(y;\alpha,\beta), \tag{62}$$

et le second membre contient, comme celui de (58), un indice fixe arbitraire r. En particulier, pour $x=y=0$, compte tenu de ce que $[\alpha,\beta]'$ et $[\beta,\alpha]'$ sont adjointes, on retrouve l'égalité (53). En annulant seulement l'une des variables, (62) fournit les deux formules

$$L_n^{(\nu)}(x+\alpha-\beta;\ \beta,\alpha)=\sum_{s=0}^{n}(\alpha,\beta)'^{(-\nu-r)}_{n-s}\ L_s^{(r+s+1)}(x;\ \alpha,\beta),$$

$$L_n^{(\nu)}(x+\alpha-\beta;\ \beta,\alpha)=\sum_{s=0}^{n}(\beta,\alpha)'^{(r-s-1)}_{s}\ L_{n-s}^{(\nu+r)}(x;\ \beta,\alpha),$$

qui donnent la valeur du premier membre en fonction des polynômes bernoulliens formés avec les mêmes paramètres, ou ces paramètres alternés. Enfin, pour $x=-\alpha, y=\beta$, (62) donne

$$(\alpha,\beta)'^{(-\nu)}_{n}=\sum_{s=0}^{n} L_{n-s}^{(\nu+r)}(-\alpha;\beta,\alpha)\,L_s^{(r+s+1)}(\beta;\ \alpha,\beta).$$

38. Appliquons ces considérations aux polynômes de Bernoulli

$$B_n^{(r)}(x)=L_n^{(r)}(x;\ 0,1)$$

et aux polynômes, que nous appellerons *polynômes de Bernoulli adjoints*

$$\overline{B}_n^{(r)}(x)=L_n^{(r)}(x;\ 1,0).$$

Par définition, l'expression de ces derniers est

$$\overline{B}_n^{(r)}(x)=\sum_{s=0}^{n}\overline{B}_{n-s}^{(r)}\frac{x(x-1)\cdots(x-s+1)}{s!}, \tag{63}$$

et nous savons qu'ils sont tels que l'on ait

$$\frac{d}{dx}\overline{B}_n^{(r)}(x)=\overline{B}_{n-1}^{(r-1)}(x), \tag{64}$$

$$\triangle \overline{B}_n^{(r)}(x) = \overline{B}_{n-1}^{(r)}(x), \tag{65}$$

avec, pour les définir complètement à l'aide de ces relations récurrentes, la condition

$$\overline{B}_n^{(r)}(0) = \overline{B}_n^{(r)}. \tag{66}$$

En leur appliquant les formules établies pour les polynômes $L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta)$, (49) donne

$$\overline{B}_n^{(n+1)}(x-1) = \frac{x^n}{n!}, \tag{67}$$

et, par suite,

$$\overline{B}_n^{(n+1)}(-1) = 0, \qquad n > 0,$$

$$\overline{B}_n^{(n+1)} = \frac{1}{n!}.$$

La formule (53), où l'on fait $\alpha = 1, \beta = 0$, puis $\alpha = 0, \beta = 1$, donne les deux relations

$$\begin{cases} \overline{B}_n^{(r+n+1)}(-1) = B_n^{(-r)}, \\ B_n^{(r+n+1)}(1) = \overline{B}_n^{(-r)}, \end{cases} \tag{68}$$

et ces relations sont valables quel que soit r. La formule (58) donne ici, pour $\alpha = 1, \beta = 0$, la relation

$$\overline{B}_n^{(\nu)}(x + y + 1) = \sum_{s=0}^{n} \overline{B}_{n-s}^{(\nu-r-s)}(x)\, \overline{B}_s^{(r+s+1)}(y). \tag{69}$$

En faisant $y = 1$ dans (59) et $y = -1$ dans (69), compte tenu de (68), on obtient les relations assez remarquables[1]

$$\begin{cases} B_n^{(\nu)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \overline{B}_s^{(r)}\, B_{n-s}^{(\nu+r-s)}(x), \\ \overline{B}_n^{(\nu)}(x) = \sum_{s=0}^{n} B_s^{(r)}\, \overline{B}_{n-s}^{(\nu+r-s)}(x). \end{cases} \tag{70}$$

Pour $x = 0$, ces relations coïncident avec (33) Ch. II. Pour $\nu = n + 1$, $r = -1$, la première de ces formules devient

[1] Nous changeons également r en $-r$.

$$B_n^{(n+1)}(x) = \sum_{s=0}^{n} (0, 1)'_{n-s} B_s^{(s)}(x),$$

c'est-à-dire, compte tenu de (49'),

$$\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^{n-s}}{n-s+1} B_s^{(s)}(x); \tag{71}$$

pour $x=0$, on retrouve la formule qui termine le paragraphe 36. Pour les mêmes valeurs de ν et r, compte tenu de (67), la deuxième formule (70) donne

$$\frac{(x+1)^n}{n!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{(n-s+1)!} \overline{B}_s^{(s)}(x). \tag{72}$$

Les fonctions génératrices des $B_n^{(r)}(x)$ et $\overline{B}_n^{(r)}(x)$ s'obtiennent en faisant $\alpha=0$, $\beta=1$, ou $\alpha=1, \beta=0$ dans (47); il vient ainsi[1]

$$\begin{cases} e^{tx}\left(\dfrac{t}{e^t-1}\right)^r = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r)}(x)\, t^n, \\ (1+t)^x \left(\dfrac{t}{L(1+t)}\right)^r = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_n^{(r)}(x)\, t^n. \end{cases} \tag{73}$$

En changeant t en $2it$ dans la première de ces relations l'identification des parties réelles et imaginaires fournit les formules

$$\begin{cases} \cos\,(2x+r)\,t\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^r = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n}^{(-r)}(x)\,(2t)^{2n}, \\ \sin\,(2x+r)\,t\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^r = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n+1}^{(-r)}(x)\,(2t)^{2n+1}, \end{cases} \tag{73'}$$

qui, pour $x=0$, se réduisent à (48) Ch. II.

En particulier, pour $x = -\dfrac{r}{2}$, on déduit de ces identités que

---

[1] Cf. N. E. Nörlund, loc. cit. p. 185.

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n}^{(-r)}\left(-\frac{r}{2}\right)(2t)^{2n}, \tag{74}$$

et

$$B_{2n+1}^{(r)}\left(\frac{r}{2}\right) = 0.$$

Pour r entier positif, ce dernier résultat est compris dans une formule de N. E. Nörlund.[1] Pour $x = \frac{1-r}{2}$, le deuxième développement (73′) devient

$$\frac{\sin^{r+1} t}{t^r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n+1}^{(-r)}\left(\frac{1-r}{2}\right)(2t)^{2n+1},$$

et la comparaison avec le développement que (74) donne de $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r+1}$ conduit, après le changement de r en $-r$, à l'identité

$$B_{2n}^{(r-1)}\left(\frac{r-1}{2}\right) = 2 B_{2n+1}^{(r)}\left(\frac{r+1}{2}\right);$$

pour $x = \frac{-1-r}{2}$, on voit de même que

$$B_{2n+1}^{(r)}\left(\frac{r+1}{2}\right) = -B_{2n+1}^{(r)}\left(\frac{r-1}{2}\right).$$

Reprenons les relations (73), où $r=1$; elles s'écrivent alors

$$e^{tx} = \frac{e^t - 1}{t} \sum_{s=0}^{\infty} B_s(x)\, t^s,$$

$$(1+t)^x = \frac{L(1+t)}{t} \sum_{s=0}^{\infty} \overline{B}_s(x)\, t^s;$$

l'identification des deux membres terme à terme fournit les relations

[1] Cf. loc. cit. p. 163, formule (19).

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{(n-s+1)!} B_s(x),$$

$$\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^{n-s}}{n-s+1} \overline{B}_s(x),$$

dont la comparaison avec (72) et (71) donne

$$(75) \qquad \begin{cases} \overline{B}_s^{(s)}(x) = B_s(x+1), \\ B_s^{(s)}(x) = \overline{B}_s(x-1). \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que *les polynômes de Bernoulli adjoints* $\overline{B}_n(x)$ *sont les polynômes de Bernoulli* $B_n^{(n)}(x+1)$.

D'ailleurs en prenant respectivement la différence finie et la dérivée des deux relations (75) on retrouve les identités (67) et (49′).

Par exemple, la formule sommatoire (30) qui, pour les polynômes de Bernoulli adjoints, prend la forme

$$\Delta\varphi(x+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{B}_\nu(z) \overset{\nu}{\Delta} \varphi'(x),$$

peut s'écrire, à l'aide des polynômes de Bernoulli,

$$(76) \qquad \Delta\varphi(x+z-1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{(\nu)}(z) \overset{\nu}{\Delta} \varphi'(x).$$

39. Par le même procédé, les relations remarquables (75) s'étendent aux polynômes $L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)$ les plus généraux. Pour $y=\beta-\alpha$, (58) devient en effet, grâce à (53),

$$L_n^{(\nu)}(x;\alpha,\beta) = \sum_{s=0}^{n} (\alpha,\beta)'^{(r)}_{n-s} L_s^{(\nu-r-n+s)}(x;\alpha,\beta);$$

pour $\nu=n+1$, il vient donc, en vertu de (49),

$$(77) \qquad (x+\alpha-\beta,\beta)_n = \sum_{s=0}^{n} (\alpha,\beta)'^{(r)}_{n-s} L_s^{(s+1-r)}(x;\alpha,\beta).$$

D'autre part, la fonction génératrice des $L_n^{(r)}(x;\beta,\alpha)$ étant, en vertu de (47),

$$\frac{\alpha^r t^r (1+\beta t)^{\frac{x}{\beta}}}{\left((1+\beta t)^{\frac{\alpha}{\beta}}-1\right)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(r)}(x;\beta,\alpha)\, t^n,$$

il vient

$$(1+\beta t)^{\frac{x}{\beta}} = \left(\frac{(1+\beta t)^{\frac{\alpha}{\beta}}-1}{\alpha t}\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(r)}(x;\beta,\alpha)\, t^n;$$

l'identification terme à terme donne donc

$$(x,\beta)_n = \sum_{s=0}^{n} L_s^{(r)}(x;\beta,\alpha)\,(\alpha,\beta)'^{(r)}_{n-s},$$

dont la comparaison avec (77) fournit l'identité

$$L_n^{(r)}(x;\beta,\alpha) = L_n^{(n+1-r)}(x+\beta-\alpha;\alpha,\beta), \tag{78}$$

et ceci a lieu quel que soit r, entier ou non. (49) est contenu dans cette formule, et correspond au cas $r=n+1$; pour $r=1$, on a l'analogue des relations (75)

$$L_n(x;\beta,\alpha) = L_n^{(n)}(x+\beta-\alpha;\alpha,\beta),$$

qui suffit d'ailleurs pour définir la suite des polynômes bernoulliens de paramètres β,α en fonction de la suite dont les paramètres sont permutés, si l'on se rappelle que, pour ceux d'indice r quelconque, on a

$$[L_n^{(r)}(x;\beta,\alpha)] = \left[L_n\left(\frac{x}{r};\beta,\alpha\right)\right]^r.$$

Pour les polynômes de Bernoulli, la formule (78) donne les relations

$$\begin{cases} B_n^{(n+1-r)}(x) = \overline{B}_n^{(r)}(x-1), \\ \overline{B}_n^{(n+1-r)}(x) = B_n^{(r)}(x+1). \end{cases} \tag{79}$$

40. Les analogues des polynômes de N. E. Nörlund[1] $B_n^{(r)}(x;\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_r)$ sont, pour les polynômes $L_n(x;\alpha,\beta)$, les termes de la suite

[1] Loc. cit. p. 158—177.

(80) $$[L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r)] = [\beta_1,\alpha]'^{(-1)}\cdot\cdots[\beta_r,\alpha]'^{(-1)}\cdot[x,\alpha],$$

r étant ici un nombre entier positif.[1] Il est clair que, si k des paramètres β_i deviennent égaux à α, on est ramené aux polynômes d'indice supérieur $r-k$, dont les paramètres β sont les β_i différents de α. Dans le cas où tous les β_i deviennent égaux à β, ces polynômes se réduisent aux $L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)$. Il résulte immédiatement de cette définition que

(81) $$[L_n^{(r)}(x_1+x_2+\cdots+x_r;\alpha,\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r)]=[L_n(x_1;\alpha,\beta_1)]\cdot[L_n(x_2;\alpha,\beta_2)]\cdots[L_n(x_r;\alpha,\beta_r)],$$

ou encore, sous une forme plus générale,

(81′) $$[L_n^{(r)}(x_1+x_2+\cdots+x_i;\alpha,\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r)]=$$
$$[L_n^{(r_1)}(x_1;\alpha,\beta_1,\dots\beta_{r_1})]\cdot[L_n^{(r_2)}(x_2;\alpha,\beta_{r_1+1},\dots\beta_{r_1+r_2})]\cdots[L_n^{(r_i)}(x_i;\alpha,\beta_{r_1+\dots+r_{i-1}+1},\dots\beta_r)],$$
$$\text{avec } r_1+r_2+\cdots+r_i=r.$$

Lorsque tous les β_i sont nuls, (80) devient

$$[L_n^{(r)}(x;\alpha,0,0,\dots 0)] = [\alpha^n\overline{B}_n]^r\cdot[x,\alpha],$$

et si certains seulement d'entre eux, les $r-s$ derniers par exemple, sont nuls, (81′) où $i=2$ et où l'on fait $x_2=0$, $r_1=s$, $r_2=r-s$, donne

(82) $$[L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\dots\beta_s,0,\dots 0)=[\alpha^n\overline{B}_n]^{r-s}\cdot[L_n^{(s)}(x;\alpha,\beta_1,\dots\beta_s)].$$

En multipliant la variable x, et les paramètres $\alpha,\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r$ par le même facteur ϱ, chacune des suites au second membre de (80) étant multipliée terme à terme par $[\varrho^n]$, il en est de même de la suite au premier membre; on en déduit la formule d'homogénéité

(83) $$L_n^{(r)}(\varrho x;\varrho\alpha,\varrho\beta_1,\varrho\beta_2,\dots\varrho\beta_r)=\varrho^n L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\beta_2,\dots\beta_r).$$

Au point de vue du calcul aux différences finies, il résulte immédiatement de (80) que

(84) $$\overset{s}{\underset{\alpha}{\triangle}} L_{n+s}^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\dots\beta_r)=L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\dots\beta_r),$$

et cette relation permet de définir ces polynômes par récurrence, grâce aux conditions initiales

[1] Par analogie avec les $L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)$, nous désignerons par $[L_n^{(-r)}(x;\alpha,\beta_1,\dots\beta_r)]$ la suite inverse de $[L_n^{(r)}(-x;\alpha,\beta_1,\dots\beta_r)]$.

$$[L_n^{(r)}(0;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)] = [\beta_1,\alpha]'^{(-1)}\cdot[\beta_2,\alpha]'^{(-1)}\cdot\cdots\cdot[\beta_r,\alpha]'^{(-1)}.$$

La différence finie d'ordre s et d'écarts $\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_s$ des deux membres de (81), où l'on pose $x_1+x_2+\cdots+x_r=x$, donne, en remarquant que

$$\mathop{\overset{s}{\triangle}}_{\beta_1,\ldots\beta_s} f(x) = \mathop{\triangle_{x_1}}_{\beta_1}\mathop{\triangle_{x_2}}_{\beta_2}\ldots\mathop{\triangle_{x_s}}_{\beta_s} f(x_1+x_2+\cdots+x_r),$$

$$\left[\mathop{\overset{s}{\triangle}}_{\beta_1,\ldots\beta_s} L_{n+s}^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)\right] = [x_1,\alpha]\cdot\cdots[x_s,\alpha]\cdot[L_n^{(r-s)}(x_{s+1}+\cdots+x_r;\alpha,\beta_{s+1},\ldots\beta_r)];$$

il en résulte, grâce aux propriétés de la multiplication des suites newtonniennes, que

$$\left[\mathop{\overset{s}{\triangle}}_{\beta_1,\ldots\beta_s} L_{n+s}^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)\right] = [L_n^{(r-s)}(x;\alpha,\beta_{s+1},\ldots\beta_r)],$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathop{\overset{s}{\triangle}}_{\beta_1,\ldots\beta_s} L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r) = L_{n-s}^{(r-s)}(x;\alpha,\beta_{s+1},\ldots\beta_r). \tag{85}$$

On voit ainsi que les propriétés fondamentales des polynômes bernoulliens $L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)$ s'étendent très simplement à ces polynômes plus généraux.

41. Reprenons (80), et ajoutons β_r à la variable x. Il vient

$$[L_n^{(r)}(x+\beta_r;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)] = [\beta_r,\alpha]\cdot[\beta_r,\alpha]'^{(-1)}\cdot[L_n^{(r-1)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_{r-1})],$$

ou, grâce à (36) Ch. II.

$$\begin{aligned}[L_n^{(r)}(x+\beta_r;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)] &= [-\beta_r,\alpha]'^{(-1)}\cdot[L_n^{(r-1)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_{r-1})]\\ &= [L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_{r-1},-\beta_r)].\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement par récurrence que

$$L_n^{(r)}(x+s_1\beta_1+s_2\beta_2+\cdots+s_r\beta_r;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r) = L_n^{(r)}(x;\alpha,(-1)^{s_1}\beta_1,(-1)^{s_2}\beta_2,\ldots(-1)^{s_r}\beta_r). \tag{86}$$

Lorsque tous les β_i deviennent égaux, cette formule se réduit à (41), où $s=s_1+s_2+\cdots+s_r$, mais alors que cette dernière ne contenait aucune hypothèse sur s, nous avons supposé ici que les s_i sont des entiers positifs ou nuls. Pour $\alpha=0$, (86) devient

$$B_n^{(r)}(x+s_1\beta_1+s_2\beta_2+\cdots+s_r\beta_r;\beta_1,\ldots\beta_r)=B_n^{(r)}(x;(-1)^{s_1}\beta_1,(-1)^{s_2}\beta_2,\ldots(-1)^{s_r}\beta_r),$$

formule donnée par N. E. Nörlund.[1] Enfin, lorsque tous les s_i deviennent égaux à 1, en changeant x en $-x$ et compte tenu de l'homogénéité, il vient

$$L_n^{(r)}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r-x;\alpha_1,\beta_1,\ldots\beta_r)=(-1)^n L_n^{(r)}(x;-\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r).$$

La relation (44) s'étend aisément à nos nouveaux polynômes. Il suffit de l'appliquer à l'équation (81), relativement à la variable x_r; en posant $x_1+x_2+\cdots+x_r=x$, on a en effet

$$\left[\sum_{s=0}^{\nu-1} L_n^{(r)}(x+\frac{s\beta_r}{\nu};\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)\right]=\nu[L_n^{(r-1)}(x_1+\cdots+x_{r-1};\alpha,\beta_1,\ldots\beta_{r-1})]\cdot\left[L_n\left(x_r;\alpha,\frac{\beta_r}{\nu}\right)\right]$$

$$=\nu\left[L_n^{(r)}\left(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_{r-1},\frac{\beta_r}{\nu}\right)\right];$$

on en déduit que, d'une manière générale,

$$\sum_{s_1=0}^{\nu_1-1}\sum_{s_2=0}^{\nu_2-1}\cdots\sum_{s_r=0}^{\nu_r-1} L_n^{(r)}\left(x+\frac{s_1\beta_1}{\nu_1}+\frac{s_2\beta_2}{\nu_2}+\cdots+\frac{s_r\beta_r}{\nu_r};\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r\right)\tag{87}$$

$$=\nu_1\nu_2\cdots\nu_r L_n^{(r)}\left(x;\alpha,\frac{\beta_1}{\nu_1},\frac{\beta_2}{\nu_2},\ldots,\frac{\beta_r}{\nu_r}\right),$$

les $\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_r$ étant des entiers supérieurs ou égaux à 1. Cette relation a été établie par N. E. Nörlund[2] pour le cas $\alpha=0$. L'opération au premier membre de (87) ne modifie donc pas le premier paramètre α, mais remplace les paramètres de deuxième espèce $\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r$ par des parties aliquotes. Cependant il faut remarquer que, en vertu même de leurs définitions, deux suites quelconques de polynômes bernoulliens d'interpolation généralisées, ayant le même paramètre α, sont dans un rapport homogène constant.

Supposons que certains des nombres ν, $\nu_{i+1},\nu_{i+2},\ldots\nu_r$ par exemple, soient égaux à 1, et, divisant les deux membres de (87) par le produit $\nu_1\nu_2\cdots\nu_i$, faisons tendre vers l'infini les valeurs de ces facteurs. Le premier membre devient une intégrale multiple d'ordre i, et l'on a

---

[1] Loc. cit. p. 167.

[2] Loc. cit. p. 169.

$$(88) \qquad \frac{1}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_i}\int\limits_0^{\beta_1}\int\limits_0^{\beta_2}\cdots\int\limits_0^{\beta_i} L_n^{(r)}(x+t_1+t_2+\cdots+t_i;\ \alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_i =$$

$$= L_n^{(r)}(x;\ \alpha, 0, \ldots 0, \beta_{i+1}, \ldots \beta_r)$$

$$= ([\alpha^n \bar{B}_n]^i \cdot [L_n^{(r-i)}(x;\alpha,\beta_{i+1},\ldots\beta_r)])_n.$$

42. La fonction génératrice des $L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)$ se déduit également sans difficulté de leur définition, puisqu'elle est le produit des fonctions génénatrices des suites dont $[L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)]$ est le produit homogène. (80) entraîne donc immédiatement

$$(89) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)\,t^n = \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_r\,t^r\,(1+\alpha t)^{\frac{x}{\alpha}}}{\left((1+\alpha t)^{\frac{\beta_1}{\alpha}}-1\right)\left((1+\alpha t)^{\frac{\beta_2}{\alpha}}-1\right)\cdots\left((1+\alpha t)^{\frac{\beta_r}{\alpha}}-1\right)}.$$

Lorsque certains β_i tendent vers zéro, les fractions $\dfrac{\beta_i}{(1+\alpha t)^{\frac{\beta_i}{\alpha}}-1}$ correspondantes deviennent égales à $\dfrac{\alpha}{L(1+\alpha t)}$.

D'après la façon même dont elles sont définies, les suites $[L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r)]$ sont des suites bernoulliennes d'interpolation

$$[L_n(x;\alpha,\beta;[1],[b]),$$

où le paramètre β et la suite $[b]$ seraient tels que

$$(90) \qquad [b]:[\beta,\alpha]' = [\beta_1,\alpha]'\cdot[\beta_2,\alpha]'\cdot\cdots[\beta_r,\alpha]'.$$

CHAPITRE V.

Les polynômes bernoulliens d'interpolation (suite).

43. Nous avons vu que les polynômes bernoulliens d'interpolation $L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta;[a],[b])$ sont liés entre eux par deux espèces de différences finies d'interpolation, dont l'une conserve l'indice supérieure, tandis que l'autre diminue les deux indices. En d'autres termes, on a

(1) $$\underset{\alpha}{\triangle}{}_{[a]}\, L_{n+1}^{(r)}(x;\, \alpha, \beta;\, [a], [b]) = L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta; [a], [b]),$$

(2) $$\underset{\beta}{\triangle}{}_{[b]}\, L_{n+1}^{(r)}(x;\, \alpha, \beta;\, [a], [b]) = L_n^{(r-1)}(x; \alpha, \beta; [a], [b]).$$

Considérons alors la moyenne d'interpolation $\underset{\gamma}{\nabla}{}_{[e]}$, quotient fonctionnel de ces deux différences finies d'interpolation, c'est-à-dire telle que l'on ait

(3) $$\underset{\alpha}{\triangle}{}_{[a]}\, \underset{\gamma}{\nabla}{}_{[e]} \equiv \underset{\beta}{\triangle}{}_{[b]};$$

cet opérateur, appliqué aux deux membres de (1), donne, grâce à (2),

(4) $$\underset{\gamma}{\nabla}{}_{[e]}\, L_n^{(r)}(x;\, \alpha, \beta;\, [a], [b]) = L_n^{(r-1)}(x; \alpha, \beta; [a], [b]).$$

Nous voyons ainsi qu'il existe une moyenne finie d'interpolation qui lie entre eux les polynômes bernoulliens d'interpolation de même degré; cette opération produit donc le même effet que la multiplication homogène par la suite $[c]$ définie par (2) Ch. IV.

Nous savons déjà que, lorsqu'on prend les trois écarts α, β, γ égaux entre eux, la base $[e]$ de la moyenne finie d'interpolation en question est le quotient homogène $\frac{[b]}{[a]}$. D'une manière générale, on peut exprimer aisément $[e]$ en fonction de α, β, $[a], [b]$, et de l'écart choisi γ. En réduisant les trois opérateurs à posséder le même écart γ, (3) s'écrit en effet

$$\underset{\gamma}{\triangle}{}_{[a]:[\alpha,\gamma]'}\; \underset{\gamma}{\nabla}{}_{[e]} = \underset{\gamma}{\triangle}{}_{[b]:[\beta,\gamma]'}\,,$$

donc

(5) $$[e] = \frac{[b]:[\beta,\gamma]'}{[a]:[\alpha,\gamma]'}.$$

On déduit de (4), par récurrence, que

(6) $$\overset{\nu}{\underset{\gamma}{\nabla}}{}_{[e]}\, L_n^{(r)}(x;\, \alpha, \beta;\, [a], [b]) = L_n^{(r-\nu)}(x; \alpha, \beta; [a], [b]),$$

et cette égalité, démontrée pour ν entier positif, est vraie quel que soit ν, car les deux membres sont des polynômes en ν. Elle est d'ailleurs valable quel que soit r, ainsi que (1) et (2). En particulier, pour $\nu = r$, (6) devient

$$(6') \qquad \overset{r}{\underset{\gamma}{\nabla}}{}_{[e]} \; L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta; [a], [b]) = (x, \alpha, [\bar{a}])_n,$$

et cette équation, où $[e]$ est donné par (5), définit sans ambiguité le polynôme bernoullien d'interpolation du premier membre.

Par exemple, supposons $[a] = [b] = 1$, et prenons $\gamma = \alpha$; on a alors $[e] = [\beta, \alpha]'$, et, par suite, (6') devient

$$(7) \qquad \overset{r}{\underset{\alpha}{\nabla}}{}_{[\beta,\alpha]'} \; L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta) = (x, \alpha)_n;$$

autrement dit, le polynôme $L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta)$ est défini par l'équation en $f(x)$

$$\sum_{s=0}^{n} (\beta, \alpha)'^{(r)}_s \overset{s}{\underset{\alpha}{\Delta}} f(x) = (x, \alpha)_n.$$

Pour les polynômes de Bernoulli, d'ordre r, cette équation prend la forme différentielle

$$(8) \qquad \sum_{s=0}^{n} B_s^{(-r)} \frac{d^s f(x)}{dx^s} = \frac{x^n}{n!},$$

et, pour les polynômes de Bernoulli adjoints, elle s'écrit

$$(8') \qquad \sum_{s=0}^{n} \bar{B}_s^{(-r)} \overset{s}{\Delta} f(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

Pour $r = 1$, (8) et (8') se réduisent respectivement à

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{1}{(s+1)!} \frac{d^s B_n(x)}{dx^s} = \frac{x^n}{n!},$$

et à

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s+1} \overset{s}{\Delta} \bar{B}_n(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$

44. En introduisant la moyenne finie d'interpolation définie par (3), on peut donner à la formule d'interpolation (32) Ch. IV une forme également intéressante. En remplaçant la différence finie d'interpolation $\overset{r}{\underset{\beta}{\Delta}}{}_{[b]}$ au second membre de cette équation par son expression déduite de (3), cette équation s'écrit en effet

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]}\,\varphi(x+z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}L_\nu^{(r)}(z)\,\overset{r+\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]}\,\overset{r}{\underset{\gamma}{\triangle}}{}_{[e]}\,\varphi(x);$$

en posant

$$\overset{r}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]}\,\varphi(x)=f(x),$$

on obtient la formule d'interpolation annoncée

$$f(x+z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}L_\nu^{(r)}(z;\alpha,\beta;[a],[b])\,\overset{\nu}{\underset{\alpha}{\triangle}}{}_{[a]}\,\overset{r}{\underset{\gamma}{\nabla}}{}_{[e]}\,f(x); \tag{9}$$

où $[e]$ est donnée par (5).

45. L'examen de l'expression (5) montre que les trois opérateurs finis associés à une suite de polynômes bernoulliens d'interpolation ne seront pas simultanément simples, en général. — Nous avons étudié, au chapitre précédent, les suites dont les deux bases $[a], [b]$ étaient égales à 1; les deux différences finies associées étaient alors des différences finies ordinaires. On peut se proposer l'étude des suites pour lesquelles, $[a]$ restant égal à 1, la moyenne d'interpolation est une opération simple. La base $[e]$ ne peut évidemment se réduire à 1, car, quel que soit γ, on a

$$\underset{\gamma}{\nabla}{}_{[1]}\,f(x)\equiv f(x).$$

Un cas simple est celui où cette moyenne d'interpolation est le quotient de deux différences finies ordinaires dont les écarts sont multiples entiers l'un de l'autre. s désignant un entier positif, on doit donc avoir

$$\underset{\gamma}{\triangle}\,\underset{\gamma}{\nabla}{}_{[e]}\equiv\underset{s\gamma}{\triangle}, \tag{10}$$

ce qui s'écrit encore

$$\underset{\gamma}{\triangle}{}_{[e]}=\underset{s\gamma}{\triangle}=\underset{\gamma}{\triangle}{}_{[s\gamma,\gamma]'},$$

et, par suite,

$$[e]=[s\gamma,\gamma]'; \tag{11}$$

dans ces conditions, il résulte de (21) Ch. III que

$$\underset{\gamma}{\nabla_{[e]}} f(x) = \frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{s-1} f(x + \nu\gamma) \cdot$$

En faisant en outre $\beta = \gamma$, (5) et (11) donnent

$$[b] = [\alpha, \beta]' \cdot [s\beta, \beta]',$$

et l'on voit que le polynôme défini par l'équation

$$\frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{s-1} f(x + \nu\beta) = (x, \alpha)_n$$

est

$$L_n(x; \alpha, \beta; [1], [\alpha, \beta]' \cdot [s\beta, \beta]').$$

En particulier, pour $\beta = 1, \alpha = 0, s = 2$, on a le polynôme d'Euler[1]

$$E_n(x) = L_n(x; 0, 1; [1], [b]), \tag{13}$$

avec $b_0 = 1$ et

$$b_n = (0, 1)_n' + \frac{1}{2}(0, 1)'_{n-1} = (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} \qquad n \geq 1. \tag{14}$$

On constate ainsi que l'expression des polynômes d'Euler et de leurs analogues est assez compliquée, en fonction des écarts α, β, et des bases $[a], [b]$.

46. Cependant, on peut définir simplement de tels polynômes, à partir de polynômes bernoulliens d'interpolation simples. Nous partirons de la remarque évidente que les suites de polynômes bernoulliens d'interpolation qui appartiennent à la même différence finie d'interpolation $\underset{\alpha}{\triangle_{[a]}}$ forment un groupe relativement à la multiplication homogène. En particulier, le quotient homogène

$$\frac{[L_n(x+y; \alpha, \beta; [a], [b])]}{[L_n(y; \alpha, \beta'; [a], [b'])]} \tag{15}$$

appartient à ce groupe; en le désignant par

[1] De même que pour les polynômes de Bernoulli, nous désignons par $E_n^{(r)}(x)$ ce qui, avec la notation classique, s'écrirait $\frac{1}{n!} E_n^{(r)}(x)$. Cette modification résulte encore de la remarque essentielle faite au paragraphe 3.

$$[L_n(x; \alpha, \delta; [a], [d])], \tag{16}$$

on aurait, en vertu de l'expression (2) Ch. IV de $[c]$,

$$[d]:[\delta, \alpha]':[\bar{a}] = \frac{[b]:[\beta, \alpha]':[\bar{a}]}{[b']:[\beta', \alpha]':[\bar{a}]}. \tag{17}$$

Il y a toutefois avantage à conserver les éléments paramétriques surabondants mis en évidence dans (15), et nous poserons

$$[M_n(x; \alpha, \beta, \beta'; [a], [b], [b'])] = \frac{[L_n(x+y; \alpha, \beta; [a], [b])]}{[L_n(y; \alpha, \beta'; [a], [b'])]}. \tag{18}$$

Chassons le dénominateur de cette équation, et prenons ensuite la différence finie $\underset{\beta'}{\triangle}_{[b']}$ des deux membres, relativement à la variable y. En annulant cette variable dans le résultat, on obtient

$$M_n(x; \alpha, \beta, \beta'; [a], [b], [b']) = \underset{\beta'}{\triangle}_{[b']} L_{n+1}(x; \alpha, \beta; [a], [b]). \tag{19}$$

On voit ainsi qu' *il revient au même de diviser une suite bernoullienne* $[L_n(x; \alpha, \beta; [a], [b])]$ *par la suite* $[L_n(0; \alpha, \beta'; [a], [b'])]$ *que d'en prendre la différence finie d'interpolation* $\underset{\beta'}{\triangle}_{[b']}$.

Le caractère d'homogénéité de la suite (19), par rapport aux six éléments paramétriques dont elle dépend, résulte immédiatement de la définition (18), et de la propriété que le quotient homogène de deux suites est multiplié terme à terme par $[\varrho^n]$ en même temps que ces deux suites. On a donc

$$M_n(\varrho x; \varrho\alpha, \varrho\beta, \varrho\beta'; [\varrho^n a_n], [\varrho^n b_n], [\varrho^n b_n']) = \varrho^n M_n(x; \alpha, \beta, \beta'; [a], [b], [b']).$$

En ce qui concerne les polynômes d'ordre r définis par

$$[M_n^{(r)}(x)] = \left[M_n\left(\frac{x}{r}\right)\right]^r,$$

on voit sans difficulté que l'on a

$$[M_n^{(r)}(x; \alpha, \beta, \beta'; [a], [b], [b']) = \frac{[L_n^{(r)}(x+y; \alpha, \beta; [a], [b])]}{[L_n^{(r)}(y; \alpha, \beta'; [a], [b'])]}, \tag{20}$$

et le même raisonnement que dans le cas $r = 1$ montre que

$$M_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta';[a],[b],[b']) = \underset{\beta'}{\triangle}_{[b']} L_{n+r}^{(r)}(x;\alpha,\beta;[a],[b]). \tag{21}$$

La moyenne d'interpolation $\underset{\gamma}{\triangle}_{[e]}$ associée à ces suites, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\overset{\nu}{\underset{\gamma}{\nabla}}_{(e)} M_n^{(r+\nu)}(x;\alpha,\beta,\beta';[a],[b],[b']) = M_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta';[a],[b],[b']), \tag{22}$$

est donnée par la formule (5); donc, avec nos notations, on a

$$[e] = \frac{[d]:[\delta,\gamma]'}{[a]:[\alpha,\gamma]'}, \tag{23}$$

$[d]$ et $[\delta]$ étant assujettis à vérifier (17). D'autre part, on obtient directement une expression simple de cette moyenne finie. Pour cela, remarquons tout d'abord que pour $r=0$, $\nu=1$, (22) se réduit à

$$\begin{aligned} \underset{\gamma}{\nabla}_{[e]} M_n(x;\alpha,\beta,\beta';[a],[b],[b']) &= (x,\alpha,[\bar{a}])_n \\ &= \underset{\beta}{\triangle}_{[b]} L_{n+1}(x;\alpha,\beta;[a],[b]); \end{aligned} \tag{24}$$

transformons alors cette différence finie d'interpolation, grâce aux formules (19) Ch. III et (41) Ch. III, en

$$\underset{\beta}{\triangle}_{[b]} \equiv \underset{\beta'}{\triangle}_{[b]:[\beta,\beta']} \equiv \underset{\beta'}{\triangle}_{[b']} \underset{\beta'}{\nabla}_{\frac{[b]:[\beta,\beta']}{[b']}} .$$

Le dernier membre de (24) s'écrit ainsi, grâce à (19),

$$\underset{\beta'}{\nabla}_{\frac{[b]:[\beta,\beta']}{[b']}} M_n(x;\alpha,\beta,\beta':[a],[b],[b']),$$

et sa comparaison avec le premier membre de la même équation entraîne l'identité

$$\underset{\gamma}{\nabla}_{[e]} \equiv \underset{\beta'}{\nabla}_{\frac{[b]:[\beta,\beta']}{[b']}} . \tag{25}$$

Par exemple, en prenant $\gamma=\beta'$, on voit que

(26) $$[e] = \frac{[b] : [\beta, \beta']}{[b']}$$

ne dépend pas de α et de $[a]$.

Profitons de ce résultat pour établir une identité assez remarquable concernant les multiplications homogène et diagonale. Nous venons, en effet, de démontrer que les égalités (17) et (23) sont satisfaites si l'on y fait $\gamma = \beta'$ et $[e]$ égale à la suite (26). En outre, on peut supposer $\alpha = \delta = \beta'$. (17) et (23) se réduisent alors respectivement à

$$[d] : [\bar{a}] = \frac{[b] : [\beta, \beta']' : [\bar{a}]}{[b'] : [\bar{a}]},$$

$$[e] = \frac{[d]}{[a]},$$

et l'on déduit de ces relations et de (26) que l'on a identiquement

$$\frac{[b] : [\beta, \beta']' : [\bar{a}]}{]b'] : [\bar{a}]} : [a] = \frac{[b] : [\beta, \beta']'}{[b']} \cdot [a] \cdot$$

$[b] : [\beta, \beta']'$ étant une suite arbitraire, cette identité peut s'écrire enfin, après renversement des deux membres,

(27) $$\frac{[b]}{[c]} \cdot [a] = \frac{[b] : [\bar{a}]}{[c] : [\bar{a}]} : [a],$$

ou, en remplaçant $[b]$ et $[c]$ par $[b] : [a]$ et $[c] : [a]$,

(27') $$\frac{[b]}{[c]} : [a] = \frac{[b] : [a]}{[c] : [a]} \cdot [a],$$

sous des formes remarquablement symétriques, $[a], [b], [c]$ étant trois suites arbitraires, avec $[a]$ et $[c]$ d'indice zéro. Bien entendu, la vérification directe de cette relation n'offrirait aucune difficulté.

Une forme particulière intéressante correspond au cas $[c] = 1$; en remplaçant $[a]$ par son adjointe, (27) se réduit à

(28) $$\frac{[b] : [a]}{[a]} = [[b] \cdot [\bar{a}]] : [a] \cdot$$

47. Ceci établi, prenons $[b] = [b'] = 1$, $\beta = s\gamma$, s désignant un entier positif; il vient alors

$$[e] = [s\gamma, \gamma]',$$

et l'on conclut que les polynômes de la suite

$$(29) \qquad [M_n(x; \alpha, s\gamma, \gamma; [a], [1], [1])] = \frac{[L_n(x+y; \alpha, s\gamma; [a], [1])]}{[L_n(y; \alpha, \gamma; [a], [1])]}$$

sont solutions des équations

$$(30) \qquad \underset{\gamma}{\nabla}_{[s\gamma, \gamma]'} f(x) = (x, \alpha, [\bar{a}])_n,$$

c'est-à-dire de

$$(30') \qquad \frac{1}{s} \sum_{\nu=0}^{s-1} f(x+\nu\gamma) = (x, \alpha, [\bar{a}])_n.$$

Par exemple, pour $[a] = 1$, $\alpha = 0$, $\gamma = 1$, $s = 2$, les polynômes en question sont les polynômes d'Euler, et sont donnés ainsi sous la forme

$$(31) \qquad [E_n(x)] = [M_n(x; 0, 2, 1; [1], [1], [1])] = \frac{[L_n(x+y; 0, 2)]}{[L_n(y; 0, 1)]};$$

on sait d'ailleurs que ceci est équivalent à

$$(32) \qquad E_n(x) = \triangle L_{n+1}(x; 0, 2).$$

Enfin la loi d'homogénéité permettant d'écrire

$$L_n(x; 0, 2) = 2^n L_n\left(\frac{x}{2}; 0, 1\right) = 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right),$$

(31) et (32) prennent encore les formes

$$(31') \qquad [E_n(x)] = \frac{\left[2^n B_n\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]}{[B_n(y)]},$$

$$(32') \qquad E_n(x) = 2^{n+1} \triangle B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ces deux formules ont été données par N. E. Nörlund[1], et nous voyons ici

[1] Cf. loc. cit. p. 136 et p. 139.

qu'elles appartiennent à une catégorie étendue de propriétés. En désignant par $E_n(x;s)$ le polynôme $M_n(x;0,s,1;[1],[1],[1])$, on aurait en effet

$$(33)\qquad [E_n(x;s)] = \frac{[L_n(x+y;0,s)]}{[L_n(y;0,1)]} = \frac{\left[s^n B_n\left(\frac{x+y}{s}\right)\right]}{[B_n(y)]},$$

avec

$$(34)\qquad E_n(x;s) = s^{n+1} \triangle B_{n+1}\left(\frac{x}{s}\right);$$

d'ailleurs s peut être un nombre quelconque, mais dans ce cas l'équation (30) peut contenir une infinité de termes.

Plus généralement, on peut se proposer l'étude des polynômes

$$E_n(x;\alpha,\beta,\beta') = M_n(x;\alpha,\beta,\beta';\ [1],[1],[1]);$$

quel que soit r, on a donc

$$(35)\qquad [E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta')] = \frac{[L_n^{(r)}(x+y;\alpha,\beta)]}{[L_n^{(r)}(y;\alpha,\beta')]},$$

$$(36)\qquad E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta') = \overset{r}{\underset{\beta'}{\triangle}} L_{n+r}^{(r)}(x;\alpha,\beta);$$

et l'on sait que[1]

$$\underset{\alpha}{\triangle} E_{n+1}^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta') = E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta'),$$

$$\underset{\alpha}{\triangle}{}_{\frac{[\beta,\alpha]'}{[\beta',\alpha]'}} E_{n+1}^{(r+1)}(x;\alpha,\beta,\beta') = E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta'),$$

et que, quel que soit ν,

$$(37)\qquad \overset{\nu}{\underset{\beta'}{\nabla}}{}_{[\beta,\beta']'} E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta') = E_n^{(r-\nu)}(x;\alpha,\beta,\beta').$$

Enfin, la formule d'interpolation (9) prend la forme particulière

---

[1] Pour la deuxième différence finie d'interpolation, ceci résulte de ce que (17) donne $[d] = \frac{[\beta,\alpha]'}{[\beta',\alpha]'}$ lorsqu'on y fait, dans le cas actuel, $\delta = \alpha$.

$$f(x+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu^{(r)}(z;\alpha,\beta,\beta') \mathop{\triangle}_{\alpha}^{\nu} \mathop{\nabla}_{\beta'}^{r}{}_{[\beta,\beta']} f(x). \tag{38}$$

Pour $\alpha = 0$, on a, en vertu de

$$L_n(x;0,\beta) = \beta^n B_n\left(\frac{x}{\beta}\right),$$

$$[E_n^{(r)}(x;0,\beta,\beta')]\cdot\left[\beta'^n B_n^{(r)}\left(\frac{y}{\beta'}\right)\right] = \left[\beta^n B_n^{(r)}\left(\frac{x+y}{\beta}\right)\right], \tag{39}$$

$$E_n^{(r)}(x;0,\beta,\beta') = \beta^{n+r} \mathop{\triangle}_{\beta'}^{r} B_{n+r}\left(\frac{x}{\beta}\right), \tag{40}$$

formules qui généralisent les relations (31′), (32′) entre les polynômes d'Euler et de Bernoulli. En particulier, (40) donne, pour $r = 1$,

$$E_n(x;0,\beta,\beta') = \beta^{n+1}\frac{B_{n+1}\left(\frac{x+\beta'}{\beta}\right) - B_{n+1}\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\beta'}.$$

Pour $x = 0$, (39) donne

$$E_n(0;0,\beta,\beta') = \sum_{s=0}^{n} \beta^s \beta'^{n-s} B_s B_{n-s}^{(-1)}$$

$$= \beta'^n \sum_{s=0}^{n} \frac{B_s}{(n-s+1)!}\left(\frac{\beta}{\beta'}\right)^s;$$

en particulier, pour $\beta = 2$, $\beta' = 1$, on retrouve la formule

$$E_n(0) = \sum_{s=0}^{n} \frac{B_s 2^s}{(n-s+1)!};$$

en donnant à x et y des valeurs particulières, (31′) fournirait de même les relations que N. E. Nörlund a établies entre les nombres $B_n(0)$, $B_n\left(\frac{1}{2}\right)$, $E_n(0)$, $E_n\left(\frac{1}{2}\right)$. Pour ces mêmes polynômes, la formule d'interpolation (38) se réduit à

(41) $$f(x+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_n^{(r)}(z) \overset{r}{\nabla} f^{(\nu)}(x),$$

c'est-à-dire, aux notations près, à la formule de Boole-Nörlund.[1]

48. Etablissons quelques propriétés des polynômes (35) à partir de celles que nous avons démontrées pour les $L_n(x;\alpha,\beta)$. Il résulte tout d'abord de la définition (35) que

$$E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta',\beta) = E_n^{(-r)}(x;\alpha,\beta,\beta'),$$

et, d'une manière générale,

(42) $$[E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta')] \cdot [E_n^{(r')}(y;\alpha,\beta',\beta)] = [E_n^{(r-r')}(x+y;\alpha,\beta,\beta')],$$

le second membre se réduisant à $[x+y,\alpha]$ pour $r=r'$.

Considérons toujours (35), et changeons y x en $x+r\beta$; grâce à (39) Ch. IV, il vient

$$[E_n^{(r)}(x+r\beta;\alpha,\beta,\beta')] = \frac{L_n^{(r)}(x+y;\alpha,-\beta)]}{[L_n^{(r)}(y;\alpha,\beta')]},$$

donc

(43) $$E_n^{(r)}(x+r\beta;\alpha,\beta,\beta') = E_n^{(r)}(x;\alpha,-\beta,\beta').$$

Le changement de y en $y+r\beta'$ dans la même relation donne de la même façon

$$[E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta')] = \frac{[L_n^{(r)}(x+r\beta'+y;\alpha,\beta)]}{[L_n^{(r)}(y;\alpha,-\beta')]},$$

c'est-à-dire

$$E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta') = E_n^{(r)}(x+r\beta';\alpha,\beta,-\beta'),$$

ou encore, en changeant β' en $-\beta'$,

(44) $$E_n^{(r)}(x-r\beta';\alpha,\beta,\beta') = E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,-\beta').$$

Les formules (43) et (44) traduisent donc l'effet produit par le changement du signe de l'un des deux paramètres β,β'. En effectuant simultanément ces deux changements, il vient

$$E_n^{(r)}(x+r\beta-r\beta';\alpha,\beta,\beta') = E_n^{(r)}(x;\alpha,-\beta,-\beta').$$

[1] Cf. loc. cit. p. 147.

En particulier, le cas $\alpha = 0$ fournit la formule remarquable

$$E_n^{(r)}(x + r(\beta - \beta'); 0, \beta, \beta') = (-1)^n E_n^{(r)}(-x; 0, \beta, \beta'), \tag{45}$$

qui, pour les polynômes d'Euler, se réduit à la relation connue

$$E_n^{(r)}(x + r) = (-1)^n E_n^{(r)}(-x).$$

Appliquons maintenant la formule (44) Ch. IV au numérateur du deuxième membre de (35) où $r = 1$; il vient

$$\left[\sum_{s=0}^{\nu-1} E_n\left(x + \frac{s\beta}{\nu}; \alpha, \beta, \beta'\right)\right] = \nu \frac{\left[L_n\left(x + y; \alpha, \frac{\beta}{\nu}\right)\right]}{[L_n(y; \alpha, \beta')]},$$

donc

$$\sum_{s=0}^{\nu-1} E_n\left(x + \frac{s\beta}{\nu}; \alpha, \beta, \beta'\right) = \nu E_n\left(x; \alpha, \frac{\beta}{\nu}, \beta'\right). \tag{46}$$

En divisant les deux membres par ν, puis faisant croître ν indéfiniment, on déduit de (46) l'identité

$$\frac{1}{\beta}\int_x^{x+\beta} E_n(z; \alpha, \beta, \beta')\, dz = E_n(x; \alpha, 0, \beta'). \tag{47}$$

49. La fonction génératrice des $E_n^{(r)}(x; \alpha, \beta, \beta')$ est le quotient des fonctions génératrices des $L_n^{(r)}(x; \alpha, \beta)$ et des $L_n^{(r)}(0; \alpha, \beta')$, donc

$$(1 + \alpha t)^{\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{(1 + \alpha t)^{\frac{\beta'}{\alpha}} - 1}{(1 + \alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1} \frac{\beta}{\beta'}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(r)}(x; \alpha, \beta, \beta')\, t^n. \tag{48}$$

Lorsque α tend vers zéro, ceci se réduit à

$$e^{xt}\left(\frac{e^{\beta' t} - 1}{e^{\beta t} - 1} \frac{\beta}{\beta'}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(r)}(x; 0, \beta, \beta')\, t^n,$$

d'où l'on déduit, en remplaçant t par $2it$,

$$e^{it(2x+r\beta'-r\beta)}\left(\frac{\beta\ \sin\ \beta' t}{\beta'\ \sin\ \beta t}\right)^r=\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(r)}(x;\ 0,\beta,\beta')(2it)^n;$$

enfin, en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient les développements

$$(49)\qquad \begin{cases} \cos\ (2x+r\beta'-r\beta)\,t\left(\dfrac{\beta\ \sin\ \beta' t}{\beta'\ \sin\ \beta t}\right)^r=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_{2n}^{(r)}(x;\ 0,\beta,\beta')(2t)^{2n}, \\ \sin\ (2x+r\beta'-r\beta)\,t\left(\dfrac{\beta\ \sin\ \beta' t}{\beta'\ \sin\ \beta t}\right)^r=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_{2n+1}^{(r)}(x;\ 0,\beta,\beta')(2t)^{2n+1}. \end{cases}$$

Par exemple, pour $x=\dfrac{r(\beta-\beta')}{2}$, ces formules donnent

$$(50)\qquad E_{2n+1}^{(r)}\left(r\frac{\beta-\beta'}{2};\ 0,\beta,\beta'\right)=0,$$

et

$$(51)\qquad \left(\frac{\beta\ \sin\ \beta' t}{\beta'\ \sin\ \beta t}\right)^r=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_{2n}^{(r)}\left(r\frac{\beta-\beta'}{2};\ 0,\beta,\beta'\right)(2t)^{2n}.$$

En particulier, pour $\beta=2, \beta'=1$, (49) se réduit aux développements[1]

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{\cos\ (2x-r)t}{\cos^r t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_{2n}^{(r)}(x)(2t)^{2n}, \\ \dfrac{\sin\ (2x-r)t}{\cos^r t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_{2n+1}^{(r)}(x)(2t)^{2n+1}, \end{cases}$$

et (50) et (51) donnent

$$E_{2n+1}^{(r)}\left(\frac{r}{2}\right)=0,$$

$$\cos^r t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_{2n}^{(-r)}\left(-\frac{r}{2}\right)(2t)^{2n}.$$

[1] Cf. N. E. NÖRLUND, loc. cit., p. 182—185 et p. 196.

Reprenons (48) et dérivons les deux membres par rapport à t. En posant momentanément

$$f = \frac{(1+\alpha t)^{\frac{\beta'}{\alpha}} - 1}{(1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1} \frac{\beta}{\beta'},$$

il vient

$$x(1+\alpha t)^{\frac{x-\alpha}{\alpha}} f^r + r\beta (1+\alpha t)^{\frac{x+\beta'-\alpha}{\alpha}} \frac{f^{r-1}}{(1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1} - r\beta (1+\alpha t)^{\frac{x+\beta-\alpha}{\alpha}} \frac{f^r}{(1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) E_{n+1}^{(r)}(x;\, \alpha, \beta, \beta') t^n,$$

et, par suite, compte tenu de (48) lui-même, et en multipliant les deux membres par $\dfrac{(1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1}{\beta}$,

$$\frac{(1+\alpha t)^{\frac{\beta}{\alpha}} - 1}{\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ x E_\nu^{(r)}(x-\alpha;\, \alpha, \beta, \beta') - (\nu+1) E_{\nu+1}^{(r)}(x;\, \alpha, \beta, \beta') \right\} t^\nu$$

$$= r \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ E_n^{(r)}(x+\beta-\alpha;\, \alpha, \beta, \beta') - E_n^{(r-1)}(x+\beta'-\alpha;\, \alpha, \beta, \beta') \right\} t^n.$$

L'identification des termes en t^n donne enfin l'identité

$$(53) \qquad E_n^{(r)}(x+\beta-\alpha;\, \alpha, \beta, \beta') - E_n^{(r-1)}(x+\beta'-\alpha;\, \alpha, \beta, \beta') =$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x E_\nu^{(r)}(x-\alpha;\, \alpha, \beta, \beta') - (\nu+1) E_{\nu+1}^{(r)}(x;\, \alpha, \beta, \beta')}{r} (\beta, \alpha)'_{n-\nu-1}.$$

En remplaçant x par $x+\alpha$, l'identité

$$\underset{\alpha}{\triangle} E_{\nu+1}^{(r)}(x;\, \alpha, \beta, \beta') = E_\nu^{(r)}(x;\, \alpha, \beta, \beta')$$

permet de mettre (53) sous la forme

$$E_n^{(r)}(x+\beta;\alpha,\beta,\beta') - E_n^{(r-1)}(x+\beta';\alpha,\beta,\beta') =$$
$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(x-\nu\alpha)\,E_\nu^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta') - (\nu+1)\,E_{\nu+1}^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta')}{r} (\beta,\alpha)'_{n-\nu-1},$$

et enfin, en groupant les polynômes de même degré,

$$(54) \qquad r\,E_n^{(r)}(x+\beta;\alpha,\beta,\beta') + n\,E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta') - r\,E_n^{(r-1)}(x+\beta';\alpha,\beta,\beta') =$$
$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(x - \nu\frac{\beta+\alpha}{n-\nu+1}\right) E_\nu^{(r)}(x;\alpha,\beta,\beta')\,(\beta,\alpha)'_{n-\nu-1}.$$

En particulier, en ce qui concerne les polynômes d'Euler, on a

$$r\,E_n^{(r)}(x+2) + n\,E_n^{(r)}(x) - r\,E_n^{(r-1)}(x+1) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(x - \frac{2\nu}{n-\nu+1}\right)\frac{2^{n-\nu-1}}{(n-\nu)!}\,E_\nu^{(r)}(x),$$

ou encore, compte tenu de

$$E_n^{(r)}(x+1) = 2\,E_n^{(r-1)}(x) - E_n^{(r)}(x),$$

$$(55) \quad (r+n)\,E_n^{(r)}(x) - 3\,r\,E_n^{(r-1)}(x) + 2\,r\,E_n^{(r-2)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(x - \frac{2\nu}{n-\nu+1}\right)\frac{2^{n-\nu-1}}{(n-\nu)!}\,E_\nu^{(r)}(x).$$

En dérivant directement la fonction génératrice des polynômes d'Euler, qui se réduit ici à

$$e^{xt}\left(\frac{e^t+1}{2}\right)^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(r)}(x)\,t^n,$$

on formerait aisément la formule, beaucoup plus simple que (55), mais sans lien avec la formule générale (54),

$$(56) \qquad r\,E_n^{(r+1)}(x) = 2\,(n+1)\,E_{n+1}^{(r)}(x) - 2\,(x-r)\,E_n^{(r)}(x),$$

et due à N. E. Nöhrlund, aux notations près.[1] Cependant, cette dernière formule s'étend aisément aux polynômes $E_n^{(r)}(x;s) = E_n^{(r)}(x;0,s,1)$, où s est un entier positif; la fonction génératrice de ces polynômes est en effet

[1] Cf. loc. cit. p. 186.

$$e^{xt}\left(\frac{e^{(s-1)t}+e^{(s-2)t}+\cdots+e^t+1}{s}\right)^{-r}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^{(r)}(x;s)\,t^n,$$

et, en dérivant par rapport à t, il vient

$$(57)\qquad x\,E_n^{(r)}(x;s)-(n+1)\,E_{n+1}^{(r)}(x;s)=\frac{r}{s}\sum_{\nu=0}^{s-1}\nu\,E_n^{(r+1)}(x+\nu;s).$$

50. De même que le quotient homogène de deux suites de polynômes $L_n^{(r)}(x;\alpha,\beta)$ nous a conduits aux suites $[E_n^{(r)}(x;\ \alpha,\beta,\beta')]$, de même le quotient des suites considérées au paragraphe 40 conduit aux suites

$$(58)\qquad [E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r,\beta_1',\beta_2',\ldots\beta_r')]=\frac{[L_n^{(r)}(x+y;\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots\beta_r)]}{[L_n^{(r)}(y;\alpha,\beta_1',\beta_2',\ldots\beta_r')]}.$$

Ces suites ne sont plus générales que les précédentes qu'à un certain point de vue, car leur ordre r est nécessairement un nombre entier positif; elles se réduisent aux suites étudiées aux paragraphes précédents lorsque les r couples β_i,β_i' sont identiques au couple β,β'.

Une première conséquence de cette définition est que les polynômes en question sont symétriques par rapport aux paramètres β_i, ainsi que par rapport aux β_i'; en outre, en permutant les β_i avec les β_i', on obtient la suite inverse de (58), que l'on peut d'ailleurs désigner[1] par $[E_n^{(-r)}(x;\ \alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')]$. Le caractère d'homogénéité de ces suites se traduit évidemment par

$$E_n^{(r)}(\varrho\,x;\varrho\,\alpha,\varrho\,\beta_1,\ldots\varrho\,\beta_r,\varrho\,\beta_1',\ldots\varrho\,\beta_r')=\varrho^n\,E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r').$$

Ces suites s'expriment d'ailleurs en fonction des suites précédemment considérées, car (58) entraîne

$$(59)\qquad [E_n^{(r)}(x_1+x_2+\cdots+x_r;\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r,\beta_1',\beta_2',\ldots\beta_r')]=$$
$$[E_n(x_1;\alpha,\beta_1,\beta_1')]\cdot[E_n(x_2;\alpha,\beta_2,\beta_2')]\cdot\cdots[E_n(x_r;\alpha,\beta_r,\beta_r')].$$

On en déduit immédiatement que

$$(60)\qquad E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r,\beta_1',\beta_2',\ldots\beta_r')=\mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\beta_1',\beta_2',\ldots\beta_r'}L_{n+r}^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r).$$

[1] D'une manière générale, on a

$$[E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')]\cdot[E_n^{(r)}(y;\alpha,\beta_1',\ldots\beta_r',\beta_1,\ldots\beta_r)]=[x+y,\alpha].$$

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\frac{\beta_1}{\beta_1'}=\frac{\beta_2}{\beta_2'}=\cdots=\frac{\beta_r}{\beta_r'}=s.$$

En posant

$$E_n^{(r)}(x;\alpha,s\beta_1,s\beta_2,\ldots s\beta_r,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r)=E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r;s),$$

(60) donne

$$E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r;s)=s^{n+r}\overset{r}{\underset{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r}{\Delta}}L_{n+r}^{(r)}\left(\frac{x}{s};\frac{\alpha}{s},\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r\right).$$

En particulier, ceci fournit, pour $\alpha=0, s=2$, la relation

$$E_n^{(r)}(x;\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r)=2^{n+r}\overset{r}{\underset{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r}{\Delta}}B_{n+r}^{(r)}\left(\frac{x}{2};\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r\right),$$

démontrée par N. E. Nörlund, entre les polynômes d'Euler et de Bernoulli généralisés.[1]

Il est clair également que (59) entraîne

$$[E_n^{(r_1)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_{r_1},\beta_1',\ldots\beta_{r_1}')]\cdot[E_n^{(r_2)}(y;\alpha,\beta_{r_1+1},\ldots\beta_{r_2},\beta'_{r_1+1},\ldots\beta_{r_2}')]\cdot\cdots=$$
$$[E_n^{(r_1+r_2+\cdots)}(x+y+\cdots;\alpha,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_1',\beta_2',\ldots)],$$

ainsi que, en particulier,

$$[E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')]\cdot[y,\alpha]=[E_n^{(r)}(x+y;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')].$$

On démontre immédiatement, soit par un calcul direct, soit grâce à (59) et (37), que

(61) $$\underset{\beta_1'}{\nabla}{}_{[\beta_1,\beta_1']'}\underset{\beta_2'}{\nabla}{}_{[\beta_2,\beta_2']'}\cdots\underset{\beta_i'}{\nabla}{}_{[\beta_i,\beta_i']'}E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')=$$
$$E_n^{(r-i)}(x;\alpha,\beta_{i+1},\ldots\beta_r,\beta'_{i+1},\ldots\beta_r'),$$

où $0\leq i\leq r$.

---

[1] Cf loc. cit. p. 170.

En appliquant au numérateur du rapport (58) la transformation (86) Ch. IV, on voit tout de suite que

$$E_n^{(r)}(x+s_1\beta_1+s_2\beta_2+\cdots+s_r\beta_r;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')=$$
$$E_n^{(r)}(x;\alpha,(-1)^{s_1}\beta_1,(-1)^{s_2}\beta_2,\ldots(-1)^{s_r}\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r');$$

en appliquant la même transformation au dénominateur, il vient de même

$$E_n^{(r)}(x+s_1\beta_1'+s_2\beta_2'+\cdots+s_r\beta_r';\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')=$$
$$E_n^{(r)}(x;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,(-1)^{s_1}\beta_1',\ldots(-1)^{s_r}\beta_r'),$$

et, d'une manière générale, les $s_1, s_2, \ldots s_r, t_1, t_2, \ldots t_r$ étant des entiers arbitraires, on a

$$(62)\qquad E_n^{(r)}(x+s_1\beta_1+\cdots+s_r\beta_r+t_1\beta_1'+\cdots+t_r\beta_r';\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')=$$
$$E_n^{(r)}(x;\alpha,(-1)^{s_1}\beta_1,\ldots(-1)^{s_r}\beta_r,(-1)^{t_1}\beta_1',\ldots(-1)^{t_r}\beta_r').$$

Par le même procédé, on voit que la transformation (87) Ch. IV entraîne

$$(63)\qquad \sum_{s_1=0}^{\nu_1-1}\sum_{s_2=0}^{\nu_2-1}\cdots\sum_{s_r=0}^{\nu_r-1}E_n^{(r)}\left(x+\frac{s_1\beta_1}{\nu_1}+\frac{s_2\beta_2}{\nu_2}+\cdots+\frac{s_r\beta_r}{\nu_r};\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r'\right)=$$
$$\nu_1\nu_2\cdots\nu_r E_n^{(r)}\left(x;\alpha,\frac{\beta_1}{\nu_1},\frac{\beta_2}{\nu_2},\ldots\frac{\beta_r}{\nu_r},\beta_1',\ldots\beta_r'\right),$$

les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r$ étant des entiers supérieurs ou égaux à 1. Supposons $\nu_{i+1}=\nu_{i+2}=\cdots=\nu_r=1$ et, divisant les deux membres de (63) par $\nu_1\nu_2\ldots\nu_i$, faisons augmenter indéfiniment ces derniers nombres; on déduit ainsi de (63) la valeur de l'intégrale multiple

$$(64)\qquad \int_0^{\beta_1}\int_0^{\beta_2}\cdots\int_0^{\beta_i}E_n^{(r)}(x+t_1+t_2+\cdots+t_i;\alpha,\beta_1,\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots\beta_r')\,dt_1\,dt_2\ldots dt_i=$$
$$E_n^{(r)}(x;\alpha,0,\ldots0,\beta_{i+1},\ldots\beta_r,\beta_1',\ldots,\beta_r').$$

En particulier, $i = r$ donne

$$\left[\int_0^{\beta_1} \cdots \int_0^{\beta_r} E_n^{(r)}(x + t_1 + \cdots + t_r; \alpha, \beta_1, \ldots \beta_r, \beta_1', \ldots \beta_r')\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_r\right] =$$

$$[\alpha^n \bar{B}_n]^r \cdot [L_n^{(-r)}(x; \alpha, \beta_1', \ldots \beta_r')]$$

$$= [\alpha^n \bar{B}_n]^r \cdot [\mathop{\overset{r}{\triangle}}_{\beta_1', \ldots \beta_r'} (x, \alpha)_{n+r}].$$

51. Je voudrais terminer cet exposé par quelques mots sur les polynômes d'Hermite. La remarque que nous avons faite au sujet de la formule (9) Ch. IV nous apprend en effet que ces polynômes, qui se déduisent les uns des autres par dérivation, constituent une suite de polynômes bernoulliens d'interpolation, pour lesquels $\alpha = 0, [a] = 1$. D'une manière générale, considérons cette dernière classe de suites; on sait que l'on peut supposer β égal à zéro, et, par suite, les écrire

$$[L_n(x; 0, 0; [1], [b])] = [b]^{-1} \cdot \left[\frac{x^n}{n!}\right]; \tag{65}$$

nous supposons simplement, en outre, que $[b]$ est d'indice zéro. En désignant par $H_n(x; [b])$ un tel polynôme bernoullien d'interpolation, il résulte des propriétés générales que l'on a

$$\frac{d^\nu H_n(x; [b])}{dx^\nu} = H_{n-\nu}(x; [b]) \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots n, \tag{66}$$

$$\mathop{\triangle}_{0}{}_{[b]} H_{n+1}(x; [b]) = \sum_{s=0}^{n} b_s \frac{d^{s+1} H_{n+1}(x; [b])}{dx^{s+1}} = \frac{x^n}{n!}; \tag{67}$$

ou encore, compte tenu de (66),

$$\sum_{s=0}^{n} b_s H_{n-s}(x; [b]) = \frac{x^n}{n!}; \tag{68}$$

d'ailleurs cette dernière relation ne diffère pas de (65).

Supposons pour un instant que la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ soit convergente; $[b]$ étant d'indice zéro, la fonction représentée par cette série entière en t n'est pas nulle à l'origine de sorte que son logarithme népérien est également développable en série entière de cette variable. En désignant ce logarithme par $\varphi(t)$, on a donc

$$e^{\varphi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \tag{69}$$

et $[b]^{-1}$ admet la fonction génératrice $e^{-\varphi(t)}$. D'autre part, $\left[\frac{x^n}{n!}\right]$ admettant la fonction génératrice e^{xt}, les polynômes $H_n(x;[b])$ sont les coefficients du développement

$$e^{xt-\varphi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x;[b])\, t^n. \tag{70}$$

Dans le cas où la série au second membre de (69) ne converge pas, ce résultat conserve une signification formelle, d'ailleurs identique à celle de (65). Désignons par $\varphi'(t)$ la série des dérivées des termes de $\varphi(t)$, de sorte que

$$\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

est la dérivée de $\varphi(t)$ dans le cas de la convergence. La dérivation des deux membres de (70) par rapport à t donne l'identité, formelle ou réelle,

$$(x-\varphi'(t))\, e^{xt-\varphi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, H_{n+1}(x;[b])\, t^n,$$

et l'identification des deux membres terme à terme donne

$$(n+1)\, H_{n+1}(x;[b]) = x\, H_n(x;[b]) - \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu H_{n-\nu}(x;[b]); \tag{71}$$

cette identité fournit l'expression d'un polynôme $H_n(x;[b])$ en fonction linéaire de ceux qui le précèdent. Grâce à (66), (71) exprime encore que $H_n(x;[b])$ est, à un facteur constant près, le seul polynôme qui vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre n

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu \frac{d^{\nu+1} f(x)}{dx^{\nu+1}} - x\frac{df(x)}{dx} + n f(x) = 0. \tag{72}$$

La suite $[A_n]$ s'exprime aisément en fonction de $[b]$ et de son inverse. En effet la dérivation de (69) par rapport à t donne

$$\varphi'(t) = e^{-\varphi(t)} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)\, b_{s+1}\, t^s$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)\, b_\nu^{(-1)}\, b_{s+1}\, t^{s+\nu},$$

donc

$$A_n = \sum_{s=0}^{n} (s+1)\, b_{s+1}\, b_{n-s}^{(-1)}. \tag{73}$$

On obtient une expression également simple de A_n à l'aide des termes de la série réduite de $[b]$. En remarquant que les $H_n(x;[b])$ sont multipliés par l'inverse de toute constante qui multiplie la suite $[b]$, on peut supposer $b_0 = 1$ sans restreindre la généralité de la question; dans ces conditions le terme général de la suite réduite

$$[b]' = \frac{[b] - 1}{[1_1]}$$

est

$$b_n' = b_{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et l'on peut écrire, tout au moins formellement,

$$\varphi(t) = \log\,(1 + t \sum_{s=0}^{\infty} b_s'\, t_s)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu\, t^{\nu+1}}{\nu+1} \sum_{s=0}^{\infty} b_s'^{(\nu+1)}\, t^s$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu\, b'^{(\nu+1)}_{n-\nu}}{\nu+1};$$

on a donc

$$A_n = (n+1) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu\, b'^{(\nu+1)}_{n-\nu}}{\nu+1}$$

$[A_n]$ ne dépend que de la suite $[b]'$, et en effet, lorsqu'on se donne $[A_n]$, $\varphi[t]$ est définie à une constante additive près, et $[b]$ à un facteur constant près, ainsi que les $H_n(x; [b])$.

Par exemple, pour $[A_n] = 1$, on peut prendre $\varphi(t) = t$, $[b] = \left[\frac{1}{n!}\right]$; (70) se réduit alors à

$$e^{(x-1)t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(x; \left[\frac{1}{n!}\right]\right) t^n,$$

de sorte que les

$$H_n\left(x; \left[\frac{1}{n!}\right]\right) = \frac{(x-1)^n}{n!}$$

ne sont pas des polynômes nouveaux. Plus généralement, on voit que pour $[A_n] = k$, on est conduit à

$$H_n\left(x; \left[\frac{k^n}{n!}\right]\right) = \frac{(x-k)^n}{n!},$$

résultat qui se rattache d'ailleurs au précédent en vertu de

$$H_n(\varrho x; [\varrho^n b_n]) = \varrho^n H_n(x; [b]).$$

Pour $[A_n] = [1_1]$, on peut prendre $\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$, de sorte que les polynômes $H_n(x; [b])$ correspondants sont les polynômes d'Hermite, au facteur $\frac{1}{n!}$ près; nous les désignerons tout de même par $H_n(x)$, avec la même modification de la notation classique que pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler. (69) donne alors

$$e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

c'est-à-dire

$$b_{2n} = \frac{1}{2^n n!}, \qquad b_{2n+1} = 0.$$

Les relations (71) et (68) se réduisent respectivement à la formule de récurrence

$$n H_n(x) = x H_{n-1}(x) - H_{n-2}(x),$$

et à

$$\sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{1}{2^s s!} H_{n-2s}(x) = \frac{x^n}{n!},$$

qui définit complètement ces polynômes..

D'une manière générale, lorsque $\varphi(t)$ est un polynôme de degré p, $\varphi'(t)$ étant un polynôme de degré $p-1$, la suite $[A_n]$ est limitée à ses p premiers termes. Dans ces conditions, les relations (71) demeurent, pour $n \geq p-1$, des relations de récurrence entre $p+1$ polynômes consécutifs; ces polynômes sont d'ailleurs, en vertu de (72), les solutions d'équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre p

$$\sum_{\nu=1}^{p} A_{\nu-1} \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} - x \frac{df(x)}{dx} + n f(x) = 0,$$

ne différant, d'un polynôme à l'autre, que par le coefficient de la fonction inconnue.

Pour les polynômes

$$H_n^{(r)}(x; [b]) = L_n^{(r)}(x; 0, 0; [1], [b]),$$

dont la suite est égale au produit

$$(74) \qquad [H_n^{(r)}(x; [b]] = [b]^{-r} \cdot \left[\frac{x^n}{n!}\right],$$

c'est-à-dire que

$$(75) \qquad [H_n^{(r)}(x; [b])] = [H_n(x; [b]^r)],$$

la fonction génératrice devient $r\,\varphi(t)$, car

$$e^{r\varphi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(r)} t^n.$$

L'équation différentielle analogue à (72) est alors

$$(76) \qquad r \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu \frac{d^{\nu+1} H_n^{(r)}(x; [b])}{dx^{\nu+1}} - x \frac{d H_n^{(r)}(x; [b])}{dx} + n H_n^{(r)}(x; [b]) = 0.$$

Pour ces polynômes, la différence finie d'interpolation

$$\overset{\nu}{\underset{0}{\Delta}}{}_{[b]}\, H_n^{(r)}(x;[b]) = H_{n-\nu}^{(r-\nu)}(x;[b]) \qquad \nu = 0, 1, \ldots n$$

s'écrit

(77) $$\sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{d^{\nu+s} H_n^{(r)}(x;[b])}{dx^{\nu+s}} = H_{n-\nu}^{(r-\nu)}(x;[b]),$$

tandis que, en vertu de (5), la moyenne d'interpolation correspondante étant $\underset{0}{\nabla}{}_{[b]}$, on a

(78) $$\sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{d^{s} H_n^{(r)}(x;[b])}{dx^{s}} = H_n^{(r-\nu)}(x;[b]);$$

nous savons d'ailleurs que (77) doit être une conséquence immédiate de (78) et de

$$\frac{d^\nu H_n^{(r)}(x;[b])}{dx^\nu} = H_{n-\nu}^{(r)}(x;[b]).$$

Les polynômes de Bernoulli $B_n^{(r)}(x)$ appartiennent à cette classe de polynômes, et correspondent à la suite

$$[b] = [1, 0]' = [B]^{-1},$$

de sorte que l'on a

$$A_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{B_{n-s}}{s!\,(s+2)}.$$

Signalons encore que la suite $[b]$ intervient directement dans la détermination du développement d'une fonction en série de polynômes $H_n(x;[b])$; en effet la formule sommatoire (9) s'écrit ici

(79) $$f(x+z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(z;[b])\, \underset{0}{\nabla}{}_{[b]}\, f^{(\nu)}(x).$$

Par exemple, si $f(x)$ admet le développement de Maclaurin

(80) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \frac{x^n}{n!},$$

le développement, convergent ou formel,

(81) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n H_n(x; [b])$$

a pour coefficients

(82) $$\lambda_n = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \, l_{n+s} \cdot$$

Réciproquement, si l'on remarque que permuter le rôle des suites $[H_n(x; [b])]$ et $\left[\frac{x^n}{n!}\right]$ dans (65) revient à changer $[b]$ en son inverse, les équations inverses de (82), qui permettent de passer de (81) à (80), doivent être

(83) $$l_n = \sum_{s=0}^{\infty} b_s^{(-1)} \lambda_{n+s},$$

ce qu'on vérifie immédiatement.