SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS PRESQUE-PÉRIODIQUES.

Par

J. FAVARD

à PARIS.

Introduction.

Dans le présent travail je me propose de développer quelques résultats sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques; la méthode que j'ai suivie ne diffère pas essentiellement de celle employée par Bohl [II] [1] pour l'étude des mêmes systèmes dans le cas des coefficients quasi-périodiques. Mais j'ai pu, grâce à un théorème de M. S. Ch. Bochner [I et II], qui donne une définition nouvelle des fonctions presque-périodiques, simplifier l'exposé de Bohl et obtenir en même temps quelques résultats nouveaux.

Ce mémoire comprend deux chapitres. Dans le premier, je commence par exposer brièvement, d'après M. H. Bohr [I, II et III], à qui l'on doit toute la théorie des fonctions presque-périodiques, comment, à partir d'une fonction presque-périodique $f(t)$, d'une variable réelle t, on peut construire un ensemble fermé $H\{f(t+h)\}$ contenant les fonctions $f(t+h)$, où h est une constante réelle quelconque, et les fonctions limites de ces fonctions lorsque la convergence vers ces limites est uniforme. Je donne ensuite une démonstration élémentaire du théorème de M. Bochner qui est le point de départ des recherches exposées dans la suite. Ce théorème est le suivant:

Appelons »fonction normale» $f(t)$ d'une variable réelle t, une fonction continue telle que de toute suite de fonctions:

$$f(t+h_1), f(t+h_2), \ldots, f(t+h_n), \ldots$$

[1] Voir l'Index à la fin du mémoire (p. 81).

on puisse extaire une autre suite qui converge uniformément dans $-\infty < t < +\infty$ vers une fonction limite $g(t)$[1], alors:

Toute fonction presque-périodique est une fonction normale et réciproquement.

Je fais ensuite l'application de ce théorème au problème de l'intégration des fonctions presque-périodiques en démontrant d'abord le théorème de Bohl [II] et de M. Bohr [I]:

L'intégrale d'une fonction presque-périodique, si elle est bornée, est aussi presque-périodique.

Le raisonnement employé pour établir cette proposition est le type de ceux utilisés dans la suite: s'étant d'abord assuré qu'il n'existe qu'une seule fonction qui possède une propriété donnée, on démontre que c'est une fonction normale en obtenant une contradiction dans la supposition contraire.

Enfin ce chapitre se termine par quelques propriétés de l'intégrale, dans le cas où celle-ci n'est pas bornée, propriétés qui nous servent à donner un exemple d'une possibilité rencontrée plus loin dans l'étude des systèmes.

Le deuxième chapitre commence par l'étude des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques: je me suis borné au cas où ces coefficients sont réels, mais on verra facilement que les mêmes considérations s'appliquent dans le cas des coefficients imaginaires.

Soit le système à second membre:

$$(S_t) \quad \frac{dx_i}{dt} = p_{1,i}(t) \cdot x_1 + p_{2,i}(t) \cdot x_2 + \cdots + p_{n,i}(t) \cdot x_n + q_i(t) \; (i = 1, 2, \ldots n)$$

où les $p_{k,i}(t)$ et $q_i(t)$ sont des fonctions presque-périodiques réelles de la variable réelle t. En même temps que le système (S_t) la méthode conduit à considérer l'ensemble des systèmes $H\{S_{t+h}\}$:

$$H\{S_{t+h}\} \quad \frac{dx_i}{dt} = p^*_{1,i}(t) \cdot x_1 + p^*_{2,i}(t) \cdot x_2 + \cdots + p^*_{n,i}(t) \cdot x_n + q_i^*(t) \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$\text{avec: } p^*_{k,i}(t) = \lim_{n \to \infty} p_{k,i}(t + h_n); \; q_i^*(t) = \lim_{n \to \infty} q_i(t + h_n)$$

(où la suite des nombres h_n est la même pour les $p_{k,i}(t)$ et les $q_i(t)$) et l'ensemble des systèmes sans second membre:

---

[1] Cette définition est naturellement à rapprocher de celle bien connue de »famille normale» et de »suite normale» de M. Montel.

$$H\{\Sigma_{t+h}\} \quad \frac{dx_i}{dt} = p_{1,i}^*(t)\cdot x_1 + p_{2,i}^*(t)x_2 + \cdots + p_{n,i}^*(t)\cdot x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

où les $p_{k,i}^*(t)$ sont les mêmes que dans l'ensemble $H\{S_{t+h}\}$.

Les résultats sont alors les suivants:

1°. Si le système (S_t) a une intégrale constituée par des fonctions bornées et si aucun des systèmes de l'ensemble $H\{\Sigma_{t+h}\}$ n'a d'intégrale bornée[1], alors *l'intégrale bornée de (S_t) est constituée par des fonctions presque-périodiques, et* tout autre système de l'ensemble $H\{S_{t+h}\}$ possède une intégrale bornée constituée, elle aussi, par des fonctions presque-périodiques.

2°. Si le système (S_t) a une intégrale bornée et si aucun des systèmes de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$[1] n'a d'intégrale dont la valeur absolue puisse devenir arbitrairement petite, une intégrale bornée du système (S_t), au moins, est constituée par des fonctions presque-périodiques et il en est de même pour tout autre système de l'ensemble $H\{S_{t+h}\}$.

Nous entendons, par »valeur absolue» d'une intégrale $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, la quantité:

$$\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + x_n^2(t)}.$$

L'intégrale de (S_t): $(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t))$, dont notre méthode nous permet d'affirmer qu'elle est presque-périodique, possède, relativement à toute autre intégrale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du même système, la propriété suivante:

$$\operatorname*{borne\ sup}_{-\infty < t < +\infty} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2) \leq \operatorname*{borne\ sup}_{-\infty < t < +\infty} (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Puis je fais ensuite l'étude d'une équation de la théorie des perturbations:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \varphi(t)\cdot x + \psi(t) \tag{1}$$

ou φ et ψ sont des fonctions presque-périodiques réelles de la variable t. Cette équation a été étudiée par Poincaré, dans ses »Nouvelles Méthodes», dans le cas où $\varphi(t)$ est périodique, et par Bohl [I et II] dans le cas où les φ et ψ sont quasi-périodiques.

Son étude conduit naturellement à l'étude préalable de l'équation sans second membre:

---

[1] Les conditions obtenues ici sont relatives à l'ensemble des systèmes $H\{\Sigma_{t+h}\}$ et naturellement assez difficiles à utiliser; il serait plus commode d'obtenir une condition relative au système (Σ_t) seulement mais je n'ai pu en trouver.

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \varphi(t) \cdot x \tag{2}$$

J'ai examiné trois cas:

1°. L'équation (2) n'a que des intégrales bornées, elles sont alors de la forme:

$$x(t) = \frac{k}{\sqrt{R(t)}} \cdot \cos\left(\int_c^t R(t)\, d t\right)$$

où $R(t)$ désigne une fonction presque-périodique positive et où k et c sont les constantes d'intégration; ces solutions sont presque-périodiques seulement dans le cas où:

$$\int R(t)\, d t = r t + \text{fonction presque-périodique.}$$

Si (1) n'a que des intégrales bornées, l'une d'elles $\mathfrak{R}$ est presque-périodique et la solution générale de (1) est de la forme:

$$\mathfrak{R} + \frac{k}{\sqrt{R}} \cos\left(\int_c^t R\, d t\right).$$

2°. L'équation (2) n'a qu'une intégrale indépendante bornée $S(t)$ mais telle cependant que $S^2 + S'^2$ a une borne inférieure positive, alors $S(t)$ est presque-périodique. Si (1) possède des intégrales bornées, toutes sont presque-périodiques.

3°. Lorsque $\varphi(t) \geq 0$, j'ai pu, en utilisant certains résultats de M. F. H. Murray [I], montrer que la solution générale de (1) est:

$$x(t) = \mathfrak{T}(t) + c_1 \frac{e^{\int_0^t T(t)\, d t}}{\sqrt{T(t)}} + c_2 \frac{e^{-\int_0^t T(t)\, d t}}{\sqrt{T(t)}}$$

où $\mathfrak{T}(t)$ et $T(t)$ désignent des fonctions presque-périodiques, la deuxième positive.

Bohl [I] s'est également occupé de ce cas, mais la limitation exigée par ses considérations reste un peu floue, M. F. H. Murray [I] a repris ce cas et est arrivé à des résultats analogues lorsgue $\varphi(t) \geq \alpha > 0$, sans se préoccuper cependant de donner à la solution la forme élégante obtenue par Bohl.

CHAPITRE I.

§ 1. L'ensemble fermé $H\{f(t+h)\}$.

1. M. H. Bohr a développé, ici-même, comme je l'ai déjà dit, la théorie des fonctions presque-périodiques. Diverses généralisations ont été proposées, mais nous nous limiterons aux fonctions de M. Bohr: les fonctions presque-périodiques continues. Rappelons la définition:

Une fonction continue $f(t)$, réelle ou imaginaire, de la variable réelle t, et définie dans tout l'intervalle: $-\infty < t < +\infty$, sera dite presque-périodique si, à tout ε positif donné, mais aussi petit que l'on veut, on peut faire correspondre une longueur $l(f, \varepsilon) > 0$, telle que tout intervalle de longueur l, sur l'axe des t ($\alpha < t < \beta$ avec $\beta - \alpha = l$) contienne au moins une presque-période $\tau(f, \varepsilon)$ relative à ε, c'est-à-dire telle que l'on ait:

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leq \varepsilon \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Disons aussi que toute fonction presque-périodique est bornée et uniformément continue et qu'il lui correspond un développement et un seul de la forme:

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{i\Lambda_n t} \quad (\Lambda_n \text{ réel et } \Lambda_0 = 0 \text{ s'il y a lieu})$$

avec

$$A_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-i\Lambda_n t}\, dt = M\{f(t) \cdot e^{-i\Lambda_n t}\}$$

$$\sum |A_n|^2 = M\{|f(t)|^2\}.$$

Et, réciproquement, si l'on sait, d'un développement de cette forme, qu'il est celui d'une fonction presque-périodique, cette fonction est bien déterminée.

2. Avec $f(t)$, les fonctions $f(t+h)$, où h désigne un nombre réel quelconque, sont aussi presque-périodiques et leur développement est:

$$f(t+h) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot e^{i\Lambda_n h} \cdot e^{i\Lambda_n t} \quad (-\infty < h < +\infty).$$

Avec M. Bohr, nous appellerons ensemble fermé[1] $H\{f(t+h)\}$ *l'ensemble des fonctions* $f(t+h)$ *et de leurs limites* $g(t)$, *lorsque la convergence vers ces limites est uniforme dans* $-\infty < t < +\infty$: *c'est dire que si* $g(t)$ *est la limite de la suite* $f(t+h_n)$ *(avec* $n=1, 2, \ldots$) *on peut déterminer un nombre* N, *pour chaque* $\varepsilon < 0$ *donné, tel que l'on ait:*

$$|g(t)-f(t+h_n)| \leq \varepsilon \quad (-\infty < t < +\infty)$$

dès que $$n > N;$$

alors $g(t)$ est aussi presque-périodique, en vertu d'un résultat général d'ailleurs facile à établir.

3. L'ensemble fermé $H\{f(t+h)\}$ contient toutes les fonctions $f(t+h)$, mais il contient aussi d'autres fonctions (abstraction faite, bien entendu, du cas où $f(t)$ est purement périodique) ainsi qu'il résulte d'un théorème de M. Bohr [II p. 166] que nous allons reproduire.

Tout d'abord disons [Bohr II p. 165] que *si* $g(t)$ *est une fonction quelconque de l'ensemble* $H\{f(t+h)\}$, *et, par suite, elle aussi presque-périodique, l'ensemble* $H\{g(t+h)\}$ *est identique à l'ensemble* $H\{f(t+h)\}$; ce que nous exprimerons en disant que l'ensemble $H\{f(t+h)\}$ est défini par l'une quelconque des fonctions qu'il contient. Cela posé, le théorème est le suivant:

Pour qu'une fonction presque-périodique $f^*(t)$ *appartienne à l'ensemble fermé* $H\{f(t+h)\}$ *il est nécessaire et suffisant qu'elle ait un développement de la forme:*

$$f^*(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n h_n^*}, e^{i\Lambda_n t}$$

avec:

$$\Lambda_n h_n^* = \lim_{m\to\infty} \Lambda_n h_m \pmod{2\pi}.$$

La fonction $f^*(t)$ est alors la limite de la suite $f(t+h_m)$ lorsque m augmente indéfiniment.

Ce fait est d'ailleurs susceptible d'une interprétation qui nous sera utile dans un instant. Dans un espace à une infinité dénombrable de dimensions, nous considérons deux points comme identiques lorsque leurs coordonnées ne différeront que d'un multiple de 2π. Soient alors la suite de points; $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ dont les coordonnées sont:

---

[1] L'expression de M. Bohr est »abgeschlossene Hülle».

$$\left.\begin{array}{l} H_1\colon A_1 h_1, A_2 h_1, A_3 h_1, \ldots, A_n h_1, \ldots \\ H_2\colon A_1 h_2, A_2 h_2, A_3 h_2, \ldots, A_n h_2, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_m\colon A_1 h_m, A_2 h_m, A_3 h_m, \ldots, A_n h_m, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \pmod{2\pi}$$

et le point H^*:

$$H^*\colon A_1 h_1^* = \lim_{m\to\infty} A_1 h_m;\ A_2 h_2 = \lim_{m\to\infty} A_2 h_m;\ \ldots;\ A_n h_n^* = \lim_{m\to\infty} A_n h_m;\ \ldots \pmod{2\pi};$$

au lieu de dire que la suite de fonctions $f(t+h_m)$ tend vers $f^*(t)$ nous pouvons dire que les points $H_1, H_2, \ldots, H_m, \ldots$ tendent vers un point limite H^* lorsque m augmente indéfiniment.

§ 2. Les fonctions normales.

4. Si nous nous donnons maintenant à priori une suite infinie de fonctions:

$$f(t+h_1),\ f(t+h_2), \ldots, f(t+h_n), \ldots$$

nous pourrons leur faire correspondre une suite de points dans l'espace à une infinité de dimensions ainsi que nous venons de l'expliquer; soient:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots;$$

mais, d'après un lemme connu de la théorie des ensembles, cette suite de points admet au moins un point limite, et l'on peut, de l'ensemble de ces points, extraire au moins une suite qui admette un seul point limite: nous avons donc la proposition suivante:

Si $f(t)$ est une fonction presque-périodique, on peut, de toute suite:

$$f(t+h_1), f(t+h_2), \ldots, f(t+h_n), \ldots$$

extraire une autre suite qui converge uniformément dans $-\infty < t < +\infty$ vers une fonction limite également presque-périodique.

C'est ce résultat et sa réciproque que nous allons maintenant établir.

5. *Appelons »fonction normale» d'une variable réelle t, une fonction $f(t)$ définie et continue dans $-\infty < t < +\infty$ et telle que de toute suite:*

$$f(t+h_1), f(t+h_2), \ldots, f(t+h_n), \ldots$$

où les h sont des nombres réels arbitraires, on puisse extraire une autre suite:

$$f(t+k_1), f(t+k_2), \ldots, f(t+k_n), \ldots$$

qui converge uniformément dans $-\infty < t < +\infty$ *vers une fonction limite.* Le résultat que nous nous proposons de démontrer est le suivant [Bochner II]: *Toute fonction presque-périodique est une fonction normale et réciproquement.*

6. *Toute fonction presque-périodique est une fonction normale.* Considérons une suite infinie quelconque:

$$f(t+h_1), f(t+h_2), \ldots, f(t+h_n), \ldots \tag{1}$$

Si, sur l'axe réel, les points d'abscisses $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ ont un point limite à distance finie d'abscisse h, il suffira d'extraire de la suite $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ une suite qui admette h pour limite et la convergence uniforme de la suite de fonctions ainsi extraites vers $f(t+h)$ sera assurée en vertu de la continuité uniforme de la fonction $f(t)$.

Dans le cas général, choisissons un nombre ε positif quelconque; à côté du point d'abscisse h_n se trouve placé une presque-période τ_n de la fonction $f(t)$ relative à ε dont la distance au point h_n est moindre que $l(\varepsilon)$:

$$h_n - l(\varepsilon) < \tau_n \leq h_n$$

et en posant:

$$l_n = h_n - \tau_n < l(\varepsilon):$$

$$0 \leq l_n < l(\varepsilon)$$

alors

$$|f[(t+h_n-\tau_n)+\tau_n] - f(t+h_n-\tau_n)| \leq \varepsilon$$

ou encore:

$$|f(t+h_n) - f(t+l_n)| \leq \varepsilon.$$

Les points d'abscisses $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ sont tous dans le segment $(0, l)$; ils ont, par suite, au moins un point limite, soit l^* l'abscisse d'un de ces points, qui est limite de la suite:

$$l_{n_1}, l_{n_2}, \ldots, l_{n_m}, \ldots$$

Considérons la suite de fonctions:

$$f(t+h_{n_1}), f(t+h_{n_2}), \ldots, f(t+h_{n_m}), \ldots \tag{2}$$

A partir d'un certain indice, la différence entre une fonction de cette suite et la fonction $f(t+l^*)$ peut être rendue, en valeur absolue, aussi voisine de ε que l'on veut, cela dans tout l'intervalle $-\infty < t < +\infty$, nous dirons que la suite (2) converge uniformément vers $f(t+l^*)$ à ε près.

Soit alors: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_p > \cdots$ une suite de nombres positifs qui tendent vers zéro: de la suite (1) on peut extraire une suite (I) qui converge uniformément à ε_1 près vers une fonction presque-périodique; de (I) on peut extraire une autre suite (II) qui converge uniformément, à ε_2 près, également vers une fonction presque-périodique, et ainsi de suite: de la suite $(P-1)$ qui converge, à ε_{p-1} près, vers une fonction presque-périodique, on peut en extraire une autre (P) qui converge uniformément, à ε_p près, vers une fonction presque-périodique.

Ecrivons ces suites:

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & f(t+h_{n_1}^{(1)}),\ f(t+h_{n_2}^{(1)}), \ldots,\ f(t+h_{n_m}^{(1)}), \ldots\ (\varepsilon_1) \\
(\mathrm{II}) & f(t+h_{n_1}^{(2)}),\ f(t+h_{n_2}^{(2)}), \ldots,\ f(t+h_{n_m}^{(2)}), \ldots\ (\varepsilon_2) \\
\cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
(P) & f(t+h_{n_1}^{(p)}),\ f(t+h_{n_2}^{(p)}), \ldots,\ f(t+h_{n_m}^{(p)}), \ldots\ (\varepsilon_p) \\
\cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

et considérons maintenant la suite diagonale extraite de ce tableau:

$$f(t+h_{n_1}^{(1)}),\ f(t+h_{n_2}^{(2)}), \ldots,\ f(t+h_{n_m}^{(m)}), \ldots$$

Je dis qu'elle converge uniformément vers une fonction limite. Soit en effet ε un nombre positif quelconque et supposons que l'on ait $\varepsilon_p < \frac{\varepsilon}{3}$; on peut déterminer pour la suite (P) un nombre m tel que:

$$|f(t+h_{n_{m_1}}^{(p)}) - f(t+h_{n_{m_2}}^{(p)})| \leq 3\,\varepsilon_p < \varepsilon$$

dès que

$$m_1 \text{ et } m_2 > m.$$

Soit alors μ le plus grand des deux nombres p et m, je dis que l'on a aussi:

$$|f(t+h_{n_{\mu_1}}^{(\mu_1)}) - f(t+h_{n_{\mu_2}}^{(\mu_2)})| < \varepsilon$$

dès que

$$\mu_1 \text{ et } \mu_2 > \mu$$

ces fonctions se trouvent en effet dans la suite (P) et dans cette suite leur indice est supérieur à m.

7. *Toute fonction normale est aussi presque-périodique.*

Notre hypothèse est maintenant que la fonction $f(t)$ est continue et que de toute suite telle que (1) on peut extraire une autre suite qui converge uniformément vers une limite.

Si la fonction $f(t)$ n'était pas presque-périodique, on pourrait trouver un nombre $\varepsilon > 0$ tel qu'il n'existe pas de longueur $l(\varepsilon)$; ce serait dire alors qu'il y a une suite d'intervalles $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ dont les longueurs $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ augmentent indéfiniment avec l'indice et tels qu'il n'existe pas de presque-période dans aucun intervalle L_n. Prenons alors h_1 arbitraire et h_2 tel que h_2-h_1 soit situé dans l'intervalle $L_{\nu_1}=L_1$; puis choisissons un intervalle L_{ν_2} tel que $r_{\nu_2}>|h_2-h_1|$; il est dès lors possible de déterminer un nombre h_3 tel que h_3-h_1 et h_3-h_2 soient tous deux dans l'intervalle L_{ν_2}; nous choisissons ensuite L_{ν_3} tel que $r_{\nu_3}>\text{Max}\,(|h_2-h_1|, |h_3-h_2|, |h_3-h_1|)$ et nous déterminerons h_4 de façon que les différences: h_4-h_1, h_4-h_2, h_4-h_3 soient situées dans L_{ν_3}; en général nous choissisons L_{ν_n} tel que:

$$r_n > \underset{1\leq\mu<\nu\leq n}{\text{Max}} \,(|h_\mu-h_\nu|)$$

et h_{n+1} tel que $h_{n+1}-h_m\,(m=1, 2, \ldots n)$ soient dans L_{ν_n}.

Considérons alors la suite:

$$f(t+h_1),\ f(t+h_2), \ldots,\ f(t+h_n), \ldots$$

où les h ont les valeurs déterminées précédemment: de cette suite on ne peut extraire d'autre suite qui soit uniformément convergente, en effet aucun nombre $h_{n_1}-h_{n_2}$ n'est une presque-période appartenant à ε puisque $h_{n_1}-h_{n_2}$ $(n_1>n_2)$ tombe dans l'intervalle L_{n_1-1} et de ce fait on a, pour tout n_1 et n_2:

$$\text{Borne sup. } |f(t+h_{n_1})-f(t+h_{n_2}|>\varepsilon.$$

Cette contradiction démontre notre proposition.

8. Comme le fait remarquer M. Bochner, cette proposition rend immédiats les faits que la somme ou le produit de deux fonctions presque-périodiques est encore une fonction presque-périodique car la somme ou le produit de deux fonctions normales est encore une fonction normale.

9. Proposons nous maintenant le problème suivant:

Etant données deux fonctions presque-périodiques $f(t)$ et $g(t)$, cherchons une condition nécessaire et suffisante pour qu'ait lieu la convergence simultanée des deux suites:

$$f(t+h_1),\ f(t+h_2), \ldots,\ f(t+h_n), \ldots \tag{1}$$

$$g(t+h_1),\ g(t+h_2), \ldots,\ g(t+h_n), \ldots \tag{2}$$

nous supposons seulement que les nombres h sont tels que l'une de ces suites converge et rien de plus: en d'autres termes, nous recherchons une condition pour que la convergence de la suite (1) entraine celle de la suite (2) et réciproquement.

Avant d'aborder la solution de ce problème, une nouvelle notion nous est nécessaire: celle de module de nombres. Nous dirons, suivant l'usage, qu'un ensemble de nombres forme un module si, avec deux nombres α et β, égaux ou différents, il contient aussi la différence $\alpha-\beta$; en faisant $\beta=\alpha$ on voit que tout module contient le nombre zéro et par suite aussi le nombre $-\beta=0-\beta$ et enfin le nombre $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$: dès qu'un module contient deux nombres, il contient aussi leur somme et leur différence. Etant donnée une suite, finie ou infinie, de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$, nous entendrons avec M. Bochner [II], par plus petit module de cette suite, l'ensemble des nombres:

$$a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + \cdots + a_n\,\alpha_m$$

où m est arbitraire et où les a désignent des entiers dont certains peuvent être nuls.

Considérant alors la suite $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m, \ldots$ des exposants d'une fonction presque-périodique $f(t)$, nous appellerons module de la fonction et nous désignerons par M_f le plus petit module défini par la suite de ses exposants.

La condition que nous avons en vue s'énonce alors:

Pour que la convergence uniforme de la suite (1) *entraîne celle de la suite* (2) *et réciproquement, il est nécessaire et suffisant que ces fonctions aient le même module:*

$$M_f = M_g.$$

Nous allons même démontrer un peu plus.

Soient:

$$f(t) \sim \sum A_n\, e^{i\Lambda_n t}$$

et

$$g(t) \sim \sum B_n e^{i M_n t}$$

deux fonctions presque-périodiques: la condition nécessaire et suffisante pour que toute suite $h_1, h_2, \ldots, h_n \ldots$ pour laquelle $f(t+h_n)$ tend uniformément vers une fonction limite $f^*(t)$ soit telle que $g(t+h_n)$ tende aussi uniformément vers une fonction limite $g^*(t)$ est que le module de g soit contenu dans celui de f (c'est-à-dire que tout exposant M_n est une combinaison linéaire à coefficients entiers d'un nombre fini d'exposants Λ_n) ce que nous écrivons:

$$M_f \geq M_g.$$

Notre proposition est un simple corollaire de celle-ci car on doit avoir à la fois: $M_f \geq M_g$ et $M_f \leq M_g$ d'où $M_f = M_g$.

Il est d'abord évident (en regardant les différences $h_n - h_m$) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f(t+h_n) \to f^*(t)$ entraine $g(t+h_n) \to g^*(t)$ est donnée par la condition suivante:

α. A tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\delta > 0$ tel que toute presque-période $\tau = \tau(f, \delta)$ de f relative à δ soit aussi une presque-période $\tau(g, \varepsilon)$ de g relative à ε.

Cette condition découle immédiatement des théorèmes de M. Bohr [II p. 110.] sur la connection qui existe entre les exposants N_n d'une fonction presque-périodique $h(t) \sim \Sigma C_n e^{i N_n t}$ avec ses presque-périodes et dont voici les énoncés:

1° A tout $\mathfrak{N}$ entier et positif et $\delta (0 < \delta < \pi)$ correspond un nombre $\varepsilon (> 0)$ tel que toute presque-période $\tau = \tau(h, \varepsilon)$ satisfasse aux inégalités congruentielles:

$$|N_n \tau| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \mathfrak{N})$$

2° A tout ε correspondent des nombres $\mathfrak{N}$ et δ (pas les mêmes, en général, que ci-dessus) tels que tout nombre τ satisfaisant aux inégalités $|N_n \tau| < \delta \pmod{2\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots \mathfrak{N})$ est vraiment une presque-période $\tau(h, \varepsilon)$.

En effet ces théorèmes montrent immédiatement, d'une part, que la condition (α) est satisfaite si tout M_n est une fonction linéaire à coefficients entiers d'un nombre fini des exposants Λ_n et d'autre part que la condition (α) ne peut pas être satisfaite s'il existe un exposant M_R qui n'est pas une fonction linéaire à coefficients entiers des Λ_n; en effet, on peut, dans ce cas, d'après un théorème général de Kronecker [Bohr II p. 119], trouver, pour tout $\mathfrak{N}$ et δ donnés, un nombre τ satisfaisant en même temps aux N inégalités congruentielles:

$$|\Lambda_n \tau| < \delta \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi) \quad (n = 1, 2, \ldots \mathfrak{N})$$

et en plus à:

$$|M_R \tau| > \frac{\pi}{2} \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

§ 3. L'intégration des fonctions presque-périodiques.

10. *Si l'intégrale d'une fonction presque-périodique est bornée, elle est aussi presque-périodique.*

De ce théorème Bohl a donné, dans le cas particulier des fonctions quasi-périodiques, une belle démonstration utilisant très habilement les notions de borne supérieure et inférieure d'une fonction bornée; M. Bohr a étendu cette démonstration aux fonctions presque-périodiques.

Notre méthode va consister à prouver que, dans ce cas, l'intégrale est aussi une fonction normale.

Considérons l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \tag{1}$$

où $f(t)$ désigne une fonction presque-périodique; par hypothèse cette équation n'a que des solutions bornées, si $F(t)$ est l'une d'entre elles, les autres sont $F(t) + C$, où C désigne une constante. Nons supposerons $f(t)$ réelle, mais on verra que nos considérations s'appliquent également dans le cas où $f(t)$ est imaginaire. $F(t)$ est définie dès que l'on donne sa valeur $F(0)$ pour $t = 0$, désignons par G et g ses bornes supérieure et inférieure:

$$g \leq F(t) \leq G$$

les autres solutions ont des bornes différentes.

Nous allons montrer tout d'abord que l'équation:

$$\frac{dx}{dt} = f^*(t) \tag{1*}$$

où $f^*(t)$ désigne une fonction quelconque de l'ensemble $H\{f(t+h)\}$, a une solution $F^*(t)$ qui a les mêmes bornes que F.

Soit $f(t+h_1)$, $f(t+h_2), \ldots, f(t+h_n)$ une suite qui tend uniformément vers $f^*(t)$, les équations telles que:

$$\frac{dx}{dt}=f(t+h_n)$$

ont une solution et une seule qui a les bornes g et G et c'est celle qui pour $t=0$ prend la valeur $F(h_n)$. Les nombres $F(h_n)$ étant bornés ont une limite au moins, extrayons de la suite précédente une autre suite $f(t+k_1)$, $f(t+k_2), \ldots,$ $f(t+k_n), \ldots$ telle que les nombres $F(k_1)$, $F(k_2), \ldots$ $F(k_n), \ldots$ aient une limite F^*, cette suite converge elle aussi vers $f^*(t)$. Considérons alors l'intégrale $F^*(t)$ de $f^*(t)$ qui, pour $t=0$, prend la valeur $F^* = F^*(0)$, je dis que c'est la fonction annoncée.

α est β designant en effet des nombres positifs quelconques, il est possible de trouver un indice N tel que:

$$|F(k_n)-F^*| \leq \alpha$$

et
$$|f(t+k_n)-f^*(t)| \leq \beta$$

dès que
$$n \geq N$$

et par suite comme:

$$\frac{d[F(t+k_n)-F^*(t)]}{dt}=f(t+k_n)-f^*(t)$$

$$|F(t+k_n)-F^*(t)| \leq \alpha+\beta\,|t|.$$

Si l'on veut que cette différence soit moindre qu'un nombre ε donné à l'avance dans un intervalle tel que $|t| \leqq T$ où T est aussi donné et arbitrairement grand d'ailleurs, il suffira de poser par exemple:

$$\alpha<\frac{\varepsilon}{2},\ \beta<\frac{\varepsilon}{2T}$$

et de choisir N en conséquence.

On en déduit que $F(t+k_n)$ converge vers $F^*(t)$ et même uniformément dans tout intervalle fini mais de longueur aussi grande que l'on veut; mais on ne peut évidemment conclure immédiatement de là que la convergence est uniforme dans tout l'intervalle $-\infty<t<+\infty$.[1] Le raisonnement précédent nons permet cepen-

[1] Ainsi que le montre l'exemple simple de la suite:

$$\sin\frac{t}{1}, \sin\frac{t}{2}, \ldots \sin\frac{t}{n}, \ldots$$

qui converge vers zéro, uniformément dans tout intervalle fini, mais non uniformément dans $-\infty<t<+\infty$.

dant de conclure que les bornes g' et G' de la fonction $F^*(t)$ satisfont aux inégalités:

$$g \leq g'; \; G' \leq G.$$

Mais, puisque l'ensemble $H\{f(t+h)\}$ est défini par l'une quelconque des fonctions qu'il contient, partant maintenant de l'equation (1*) pour aller à l'équation (1), on peut en conclure de la même façon qu' il y a une solution de (1) dont les bornes g_1 et G_1 satisfont aux relations:

$$g' \leq g_1; \; G_1 \leq G'.$$

Mais toutes les solutions de (1) sont de la foune $F(t) + C$, par conséquent on a:

$$g = g'; \quad G = g'.$$

Il existe donc une solution et une seule de (1*) qui a les mêmes bornes que $F(t)$, elle est définie par la valeur $F^*(=\lim\limits_{n\to\infty} F(k_n))$ qu'elle prend pour $t=0$ et ceci nous montre que l'extraction des nombres k dans la suite h est inutile, car, si les nombres $F(h_n)$ avaient plus d'une limite, le raisonnement précédent s'appliquerait pour chacune d'elles et l'on en déduirait plusieurs solutions de (1*) qui ont les bornes g et G, ce qui est impossible.

Il reste à démontrer maintenant la normalité de la fonction $F(t)$ c'est-à-dire que la convergence de $F(t+k_n)$ vers $F^*(t)$ est uniforme dans tout l'intervalle $-\infty < t < +\infty$. Cela suffira en effet pour prouver que $F(t)$ est une fonction normale car, d'une part, si $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ est une suite arbitraire telle que $f(t+h_n) \to f^*(t)$, nous allons démontrer que $F(t+h_n) \to F^*(t)$; d'autre part soit $H_1, H_2 \ldots, H_n \ldots$ une suite quelconque, on peut, à cause de la normalité de $f(t)$, extraire de la suite $f(t+H_1), f(t+H_2), \ldots f(t+H_n) \ldots$ une suite $f(t+h_1), f(t+h_2), \ldots, f(t+h_n), \ldots$ uniformément convergente vers une fonction $f^*(t)$: si nous démontrons la convergence uniforme de $F(t+h_n)$ vers $F^*(t)$, nous avons démontré de ce fait que $F(t)$ est une fonction presque-périodique.

Nous raisonnerons par l'absurde, en supposant que la convergence uniforme ne soit pas réalisée et en montrant que l'on arrive ainsi à une contradiction: c'est là le type de la plupart des raisonnements ultérieurs.

Si donc la convergence de la suite $F(t+k_n)$ vers $F^*(t)$ n'était pas uniforme, on pourrait déterminer:

1° un nombre positif α.

2° deux suites infinies d'indices:

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

$$N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$$

3° une suite infinie de nombres qui croissent indéfiniment avec l'indice:

$$t_{M_1}, t_{M_2}, \ldots, t_{M_n}, \ldots$$

tels que:

$$|F(t_{M_n} + k_{M_n}) - F(t_{M_n} + k_{N_n})| \geq \alpha.$$

Des deux suites d'indices nous pouvons extraire deux autres suites μ_n et ν_n telles que les deux suites de nombre: $F(t_{\mu_n} + k_{\mu_n})$ et $F(t_{\mu_n} + k_{\nu_n})$ tendent vers des limites F_1^* et F_2^* tandis que les deux suites de fonctions: $f(t + t_{\mu_n} + k_{\mu_n})$ et $f(t + t_{\mu_n} + k_{\nu_n})$ convergent uniformément vers $f_1^*(t)$ et $f_2^*(t)$. D'après ce que nous venons de voir, les nombres F_1^* et F_2^* sont les valeurs, pour $t = 0$, des intégrales de $f_1^*(t)$ et $f_2^*(t)$ qui ont pour bornes g et G.

Mais les fonctions $f_1^*(t)$ et $f_2^*(t)$ sont les mêmes, car, quel que soit $t > 0$, on a, à partir d'une certaine valeur de n, d'après la convergence uniforme de la suite $f(t + k_n)$:

$$|f(t + k_{\mu_n}) - f(t + k_{\nu_n})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où:

$$|f(t + t_{\mu_n} + k_{\mu_n}) - f(t + t_{\mu_n} + k_{\nu_n})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et aussi:

$$|f(t + t_{\mu_n} + k_{\mu_n}) - f_1^*(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f(t + t_{\mu_n} + k_{\nu_n}) - f_2^*(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

par suite:

$$|f_1^*(t) - f_2^*(t)| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent $f_1^*(t) = f_2^*(t)$ et il suit de là que $F_1^* = F_2^*$, mais ceci est en contradiction avec l'inégalité écrite plus haut et la convergence uniforme est démontrée.

11. Le raisonnement précédent nous montre aussi que, si la suite:

$$f(t + h_1), f(t + h_2), \ldots, f(t + h_n), \ldots$$

converge uniformément vers une limite, il en est de même de la suite:

$$F(t+h_1), F(t+h_2), \ldots, F(t+h_n), \ldots$$

et, directement, il est immédiat que la réciproque est vraie: les deux fonctions f et F ont, par suite, le même module; en particulier, l'intégrale d'une fonction quasi-périodique de Bohl-Esclangon est aussi quasi-périodique si elle est bornée. On démontre d'ailleurs facilement [Bohr I p. 122] que le développement de Fourier de l'intégrale s'obtient par intégration formelle de celui de $f(t)$:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

$$F(t) \sim c + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t}.$$

Pour que $f(t)$ ait une intégrale bornée, il est nécessaire que son développement ne contienne pas de terme constant A_0, c'est-à-dire que la valeur moyenne de la fonction soit nulle, on a en effet:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(t)\,dt = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}[F(t) - F(0)] = A_0$$

et en général on peut écrire:

$$F(t) = A_0 t + o(|t|).$$

Bohl a montré le premier l'existence de fonctions quasi-périodiques à valeur moyenne nulle et dont l'intégrale n'est pas bornée; M. Bohr a donné, au moyen des fonctions à exposants linéairement indépendants des exemples plus simples que celui de Bohl et ceci prouve que la condition nécessaire ($A_0 = 0$), pour que l'intégrale d'une fonction presque-périodique soit bornée, n'est nullement suffisante.

Dans d'autres recherches, j'ai moi-même [Favard I] été conduit à l'étude de l'intégrale:

$$\int_\varrho^T \frac{f(t)}{t}\,dt \qquad (0 < \varrho < T)$$

et j'ai montré l'existence de fonctions presque-périodiques, à valeur moyenne nulle, et telles que cette intégrale ne reste pas bornée lorsque T augmente indéfinement. Une intégration par parties montre immédiatement que cela signifie qu'il existe des fonctions dont l'intégrale ne reste pas constamment inférieure à $|t|^{1-\alpha}$ en valeur absolue, à partir d'une valeur assez grande de la variable, si petit d'ailleurs que soit le nombre positif α: en d'autres termes $o(|t|)$, dans la formule précédente, ne peut en général être remplaçé par $o(|t|^{1-\alpha})$.

Enfin j'ai également démontré que, lorsque les exposants Λ_n, d'une fonction presque-périodique, n'ont pas zéro pour une de leurs limites, la condition $\Lambda_0 = 0$ est aussi suffisante pour que cette fonction ait une intégrale bornée.

12. Au sujet des fonctions à valeur moyenne nulle dont l'intégrale n'est pas bornée, nous allons établir le théorème suivant que Bohl [II] a déjà donné dans le cas particulier des fonctions quasi-périodiques:

Si la fonction presque-périodique $f(t)$, à valeur moyenne nulle, a une intégrale non bornée, il existe dans l'ensemble $H\{f(t+h)\}$ au moins deux fonctions f^+ et f^- telles que:

$$\int_0^t f^+(t)\,dt \geq 0; \qquad \int_0^t f^-(t)\,dt \leq 0$$

pour

$$-\infty < t < +\infty.$$

Nous allons montrer l'existence d'une fonction $f^+(t)$ et il suffirait de remplacer $f(t)$ par $-f(t)$ dans le raisonnement que nous allons faire pour démontrer aussi l'existence d'une $f^-(t)$.

Soit $F(t)$ une intégrale de f, on a évidemment:

$$F(t+h) - F(h) = \int_0^t f(t+h)\,dt$$

et si l'on considère une suite $f(t+h_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ qui converge uniformément vers une limite $f^*(t)$ on aura, pour toute valeur de t:

$$\lim_{n\to\infty} [F(t+h_n) - F(h_n)] = F^*(t) - F^*(0) = \int_0^t f^*(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(t+h_n)\,dt.$$

Puisque toute fonction presque-périodique est normale il suffira de montrer que l'on peut trouver une suite de nombres $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ et une autre suite $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ de nombres positifs qui croissent indéfinement avec l'indice et tels que:

$$F(t+h_i) - F(h_i) \geq 0 \quad \text{pour} \, |t| \leq t_i \, (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Tout d'abord il est impossible de trouver deux suites h_n et t_n telles que les précédentes et de façon que:

$$|F(t+h_i) - F(h_i)| \leq G \quad \text{pour} \, |t| \leq t_i \, (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

où G désigne une constante positive, car alors il y aurait dans l'ensemble $H\{f(t+h)\}$ une fonction dont l'intégrale serait bornée et il en serait de même pour la fonction $f(t)$ contrairement à l'hypothèse.

Nous allons montrer maintenant qu'étant donné un nombre quelconque t_0, et une constante positive K, on peut déterminer deux autres nombres t_1 et t_2 tels que:

$$t_0 < t_1 < t_2; \quad F(t_1) - F(t_2) = K.$$

Si cela était impossible, on aurait, pour tout couple de valeurs t' et t'' supérieures à t_0:

$$F(t') - F(t'') < K \qquad (t_0 < t' < t'').$$

et on pourrait trouver un nombre T positif tel que dans tout intervalle de longueur T $(t_0 < \theta < t < \theta + T)$ la variation de $F(t)$ soit $2K$ au moins, mais dans le sens contraire de celui que nous désirons; car si cela n'etait pas possible, on pourrait trouver une suite de nombre θ_i et une autre suite T_i de nombres positifs augmentant indéfiniment avec l'indice et tels que:

$$-K < F(t_2) - F(t_1) < 2\,K$$

lorsque:

$$\theta_i < t_1 < t_2 < \theta_i + T_i.$$

Si l'on choisit alors: $h_i = \theta_i + \dfrac{T_i}{2}$ et $t_i = \dfrac{T_i}{2}$ on a:

$$|F(t+h_i) - F(h_i)| \leq 2\,K$$

pour:

$$|t| < t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

et il y a dans l'ensemble $H\{f(t+h)\}$ une fonction dont l'intégrale est bornée, et ceci est impossible.

L'existence du nombre T serait donc démontrée et l'on pourrait, quel que soit t_0, déterminer deux nombres t_1 et t_2 supérieurs à t_0 de façon que:

$$F(t_2) - F(t_1) = 2K \quad (0 < t_2 - t_1 \leq T)$$

puis deux autres nombres t_3 et t_4:

$$t_2 < t_3 < t_4; \quad 0 \leq t_3 - t_2 \leq T; \quad 0 < t_4 - t_3 \leq T$$

tels que:

$$F(t_4) - F(t_3) = 2K$$

et l'on a par hypothèse:

$$F(t_3) - F(t_2) \geq -K.$$

Sans qu'il soit besoin d'insister davantage, on voit que l'on pourrait toujours déterminer une suite de nombres: $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ tels que:

$$\begin{array}{ll}
0 < t_2 - t_1 \leq T; & F(t_2) - F(t_1) = 2K \\
0 \leq t_3 - t_2 \leq T; & F(t_3) - F(t_2) > -K \\
0 < t_4 - t_3 \leq T; & F(t_4) - F(t_3) = 2K \\
\cdots & \cdots \\
0 < t_{2n} - t_{2n-1} \leq T; & F(t_{2n}) - F(t_{2n-1}) = 2K \\
0 \leq t_{2n-1} - t_{2n} \leq T; & F(t_{2n+1}) - F(t_{2n}) > -K \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

d'où:

$$0 < t_{2n+1} - t_1 \leq 2nT; \quad F(t_{2n+1}) - F(t_1) > nK.$$

Il suit de là que lorsque n augmente indéfiniment, il en est de même de t_n puisque c'est le cas pour $F(t_n)$ et l'on a:

$$\frac{F(t_{2n+1}) - F(t_1)}{t_{2n+1} - t_1} > \frac{K}{2T}$$

donc:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{F(t)}{t}>0$$

mais ceci est en contradiction avec le fait que $F(t)$ est de l'ordre $o(t)$; il existe donc deux nombres t_1 et t_2:

$$t_0<t_1<t_2;\quad F(t_1)-F(t_2)=K.$$

On démontrerait de même l'existence de deux nombres t_3 est t_4 tels que:

$$t_0<t_1<t_2<t_3<t_4;\quad F(t_4)-F(t_3)=K.$$

Soit alors m la valeur de t pour laquelle $F(t)$ est minimum dans l'intervalle (t_1, t_4) on a:

$$F(t)-F(m)\geq 0;\quad t_1\leq t\leq t_4$$

et:

$$F(t_1)-F(m)\geq K;\quad F(t_4)-F(m)\geq K.$$

Soit maintenant:

$$|f(t)|\leq G,\ \text{on a:}$$

$$K\leq F(t_1)-F(m)\leq(m-t_1)\,.\,G$$

$$K\leq F(t_4)-F(m)\leq(t_4-m)\,.\,G$$

d'où

$$m-t_1\geq\frac{K}{G};\quad t_4-m\geq\frac{K}{G}$$

et par suite:

$$F(t+m)-F(m)\geq 0\quad \text{si}\,|t|\leq\frac{K}{G}.$$

Si nous considérons alors une suite quelconque de constantes positives: K_1, $K_2,\ldots,K_n,\ldots$ qui croissent indéfiniment en même temps que n, à chacune de ces constantes K_i correspond un nombre m_i et l'on a:

$$F(t+m_i)-F(m_i)\geq 0\quad \text{si}\,|t|\leq\frac{K_i}{G}$$

c'est-à-dire dans des intervalles de longueurs indéfiniment croissantes.

Or, de la suite de fonctions $f(t+m_i)$, on peut extraire une autre suite $f(t+h_i)$ qui converge uniformément vers une fonction $f^+(t)$ et l'on a:

$$\int_0^t f^+(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(t+h_n)\,dt \geq 0;$$

ce théorème sera utilisé plus loin pour donner un exemple d'une possibilité que nous rencontrerons dans l'étude des systèmes d'équations différentielles linéaires.

CHAPITRE II.

§ 1. **Les systèmes différentiels linéaires.**

13. Etant donné un système d'équations différentielles linéaires:

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_{1,1}(t)\cdot x_1 + f_{1,2}(t)\cdot x_2 + \cdots + f_{1,n}(t)\cdot x_n + g_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_{2,1}(t)\cdot x_1 + f_{2,2}(t)\cdot x_2 + \cdots + f_{2,n}(t)\cdot x_n + g_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_{n,1}(t)\cdot x_1 + f_{n,2}(t)\cdot x_2 + \cdots + f_{n,n}(t)\cdot x_n + g_n(t) \end{cases}$$

où les fonctions $f_{i,k}(t)$ et $g_i(t)$ sont définies, continues et réelles pour tout t réel, on sait que, par la méthode d'approximation de M. Picard, par exemple, on peut obtenir sa solution quelles que soient les valeurs initiales attribuées à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour $t=0$.

Considérons maintenant une suite de systèmes:

$$(S^{(p)})\qquad \frac{dx_i}{dt} = f_{i,1}^{(p)}(t)\cdot x_1 + f_{i,2}^{(p)}(t)\cdot x_2 + \cdots + f_{i,n}^{(p)}(t)\cdot x_n + g_i^{(p)}(t)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n);\quad (p=1, 2, \ldots)$$

dont les coefficients $f_{i,k}^{(p)}(t)$ et $g_i^{(p)}(t)$ tendent respectivement vers $f_{ik}(t)$ et $g_i(t)$ uniformément dans tout intervalle fini quand p augmente indéfiniment, et considérons aussi une suite de solutions de ces systèmes dont les valeurs initiales pour $t=0$: $x_i^{(h)}(0)$ tendent vers des limites $x_i(0)$ lorsque p augmente indéfiniment, les solutions $x_i^{(p)}(t)$ tendront uniformément vers la solution $x_i(t)$ du système (S) dans tout intervalle de longueur aussi grande que l'on veut: c'est encore une conséquence de la méthode des approximations successives.

14. Dans le cas que nous nous proposons d'étudier, où les coefficients f et g sont des fonctions presque-périodiques, notre méthode nous conduit à considérer en même temps que le système:

$$(S_t) \qquad \frac{dx_i}{dt}=f_{i,1}(t)\cdot x_1+f_{i,2}(t)\cdot x_2+\cdots+f_{i,n}(t)\cdot x_n+g_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

l'ensemble des systèmes:

$$(S_t^*) \qquad \frac{dx_i}{dt}=f_{i,1}^*(t)\cdot x_1+f_{i,2}^*(t)\cdot x_2+\cdots+f_{i,n}^*(t)\cdot x_n+g_i^*(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

avec:

$$f_{i,k}^*(t)=\lim_{\nu\to\infty} f_{i,k}(t+h_\nu);\quad g_i^*(t)=\lim_{\nu\to\infty} g_i(t+h_\nu)$$

(nous dirons, dans ce cas, que les systèmes (S_{t+h_ν}) convergent vers (S_t^*) et nous écrivons:

$$(S_t^*)=\lim_{\nu\to\infty}(S_{t+h_\nu})$$

cet ensemble nous le désignerons par $H(S_{t+h})$; nous considérerons aussi le système homogène:

$$(\Sigma_t) \qquad \frac{dx_i}{dt}=f_{i,1}(t)\cdot x_1+f_{i,2}(t)\cdot x_2+\cdots+f_{i,n}(t)\cdot x_n \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

et l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$.

L'ensemble $H(S_{t+h})$ (ou $H(\Sigma_{t+h})$) est défini par l'un quelconque de ses éléments. Nous conviendrons aussi de dire de deux systèmes de l'ensemble $H(S_{t+h})$ (ou de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$): (S_t^*) et (S_t^{**}) que leur différence est plus petite que $\varepsilon\,(>0)$ si:

$$\left.\begin{aligned}&|f_{i,k}^*(t)-f_{i,k}^{**}(t)|\le\varepsilon \quad (i, k=1, 2, \ldots, n)\\&|g_i^*(t)-g_i^{**}(t)|\le\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n)\end{aligned}\right\} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

et nous écrirons:

$$|(S_t^*)-(S_t^{**})|\le\varepsilon.$$

Il est clair, d'après ce que nous avons rappelé au numéro précédent que si l'on considére deux solutions $x_i^*(t)$ et $x_i^{**}(t)$ de chacun de ces deux systèmes dont les valeurs initiales satisfont aux inégalités:

$$|x_i^*(0)-x_i^{**}(0)|\leq \alpha$$

on pourra déterminer un nombre $\omega=\omega(\alpha,\varepsilon)$ (>0) et un nombre $T(>0)$ tels que:

$$|x_i^*(t)-x_i^{**}(t)|\leq\omega \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

si

$$-T\leq t\leq T$$

et réciproquement si l'on se donne le nombre ω aussi faible que l'on veut et T aussi grand que l'on veut, on peut déterminer les nombres α et ε qui ne dépendent pas des deux systèmes (S_t^*) et (S_t^{**}) mais seulement de l'ensemble $H(S_{t+h})$.

Enfin nous appellerons module d'un système (S_t) le plus petit module contenant les modules des fonctions $f_{i,k}(t)$ et $g_i(t)$; et si une solution $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ de ce système est composée de fonctions presque-périodiques, nous appellerons module de cette solution le plus petit module contenant ceux des fonctions $x_i(t)$; pour abréger nous dirons aussi que cette solution est presque-périodique.

15. Au sujet de ces systèmes, nous démontrerons d'abord le théorème suivant:

Si un système de l'ensemble $H(S_{t+h})$ admet une solution presque-périodique il en est ainsi pour tous les systèmes de l'ensemble.

Supposons que (S_t) admette une solution presque-périodique: $[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ et soit (S_t^*) un autre système de l'ensemble $H(S_{t+h})$:

$$(S_t^*)=\lim_{\nu\to\infty}(S_{t+h_\nu}).$$

De l'ensemble des solutions:

$$x_1(t+h_\nu), x_2(t+h_\nu), \ldots, x_n(t+h_\nu)$$

des différents systèmes (S_{t+h_ν}) on peut extraire, par des choix successifs, si cela est nécessaire, une autre suite qui converge uniformément vers une limite; soit $x_i(t+k_\nu)$ une telle suite et:

$$x_i^*(t)=\lim_{\nu\to\infty}x_i(t+k_\nu) \quad (i=1, 2 \ldots, n) \quad (-\infty<t<+\infty)$$

les fonctions $x_i^*(t)$ sont encore presque-périodiques. Il est clair alors, d'après ce que nous avons dit sur la convergence des systèmes que $[x_i^*(t)]$ est une solution du système (S_t^*). Remarquons aussi que si $[x_i^{(1)}]$ et $[x_i^{(2)}]$ sont deux solutions presque-périodiques différentes de (S_t), on pourra définir de la même façon deux solutions presque-périodiques de (S_t^*): $[x_i^{*(1)}]$, $[x_i^{*(2)}]$ qui seront elles aussi différentes; d'où l'on déduit immédiatement que tous les systèmes de l'ensemble $H(S_{t+h})$ ont le même nombre m de solutions presque-périodiques indépendantes, ce qui signifie que, parmi les solutions des systèmes sans second membre que l'on peut en déduire, il y en a $m-1$ qui sont linéairement indépendantes: à une solution $[x_i(t)]$ de l'un des systèmes correspond une solution dans l'ensemble $H\{[x_i(t+h)]\}$ pour tout autre système.

16. **Premier théorème.** *Si le système non homogène (S_t) a une solution bornée et si aucun des systèmes de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$ n'a de solution bornée (sauf, bien entendu, la solution triviale $x_i=0$), la solution bornée de (S_t) est composée de fonctions presque-périodiques et tout autre système de l'ensemble $H(S_{t+h})$ admet aussi une solution presque-périodique.*

Pour obtenir ce résultat, nous allons prouver, ainsi que nous l'avons déjà fait, et ainsi que nous le ferons toujours dans la suite, que la solution $[x_i=u_i(t)]$ bornée est composée de fonctions normales.

La solution bornée du système (S_t) est définie par ses valeurs initiales (pour $t=0$):

$$u_1(0),\ u_2(0),\ \ldots,\ u_n(0).$$

D'après l'hypothèse faite sur les solutions de chacun des systèmes de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$, chacun des systèmes de l'ensemble $H(S_{t+h})$ a au plus une solution bornée et ce que nous avons dit au sujet de la convergence des systèmes montre qu'il en a effectivement une. En effet si l'on a:

$$(S_t^*) = \lim_{\nu\to\infty} (S_{t+h_\nu})$$

nous pouvons supposer aussi, quittes à faire plusieurs choix préalables, que les nombres $u_i(h_\nu)$ tendent vers des limites:

$$u_i^* = \lim_{\nu\to\infty} u_i(h_\nu) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

alors la solution $[u_i^*(t)]$ du système (S_t^*) qui pour $t=0$ prend le système de valeurs $[u_i^*]$ est bornée et la convergence de $[u_i(t+h_\nu)]$ vers $[u_i^*(t)]$ est uniforme dans tout intervalle de longueur aussi grande que l'on veut. Notre théorème est établi si nous démontrons que cette convergence est uniforme dans: $-\infty < t < +\infty$; supposons qu'il n'en soit pas ainsi; on pourrait déterminer:

1° un nombre positif α

2° une suite de nombres croissants indéfiniment en valeur absolue avec l'indice:

$$t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots$$

3° deux suites d'indices:

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p, \ldots$$

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p, \ldots$$

4° une fonction $u_j(t)$ parmi les n fonctions $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$: tels que:

$$|u_j(t_p + h_{\nu_p}) - u_j(t_p + h_{\pi_p})| \geq \alpha \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Mais des suites de nombres: $[u_i(t_p + h_{\nu_p})]$ et $[u_i(t_p + h_{\pi_p})]$ et des suites de systèmes $(S_{t+t_p+h_{\nu_p}})$ et $(S_{t+t_p+h_{\pi_p}})$ on peut extraire une autre suite au moins telle que ces nombres et ces systèmes tendent vers des limites $[u_i^{(1)}]$ et $[u_i^{(2)}]$, $(S^{(1)})$ et $(S^{(2)})$; pour ne pas compliquer les notations nous supposerons que ce sont les suites précédentes elles-mêmes qui possédent cette propriété. Les systèmes de nombres $[u_i^{(1)}]$ et $[u_i^{(2)}]$ sont alors les valeurs initiales des solutions bornées des systèmes $(S^{(1)})$ et $(S^{(2)})$: or nous allons voir que ces systèmes sont les mêmes.

Quel que soit en effet le nombre positif ε, aussi petit que l'on veut, on peut déterminer un indice P tel que pour $p > P$, on ait d'abord

$$|(S_{t+h_{\nu_p}}) - (S_{t+h_{\pi_p}})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

car les systèmes (S_{t+h_ν}) tendent vers S_t^*; d'où aussi:

$$|(S_{t+t_p+h_{\nu_p}}) - (S_{t+t_p+h_{\pi_p}})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

puis:

$$|(S_{t+t_p+h_{\nu_p}}) - (S^{(1)})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et:

$$|(S_{t+t_p+h_{\pi_p}}) - (S^{(2)})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où:

$$|(S^{(1)}) - (S^{(2)})| \leq \varepsilon$$

ε est arbitrairement petit, par suite:

$$(S^{(1)}) = (S^{(2)}).$$

Or ce système n'a qu'une seule solution bornée et nous avons trouvé deux systèmes de valeurs initiales différentes pour ce système et cette solution, car, en vertu de l'inégalité que nous avons supposée, on a nécessairement:

$$|u_j^{(1)} - u_j^{(2)}| \geq \alpha.$$

Nous arrivons à une contradiction, la convergence uniforme et, par suite, notre proposition, est donc établie.

Remarquons maintenant que les limites possibles pour les systèmes de nombres $[u_i(h_\nu)]$ fournissent un système de valeurs initiales pour le système (S_t^*); il n'y a donc qu'une seule limite pour ces nombres et les choix préalables dont nous avons parlé n'étaient pas nécessaires; mais la démonstration donnée au numéro 9 au sujet de la comparaison des modules de deux fonctions presque-périodiques vaut également pour un système et sa solution, nous avons donc le résultat suivant:

Le module de la solution presque-périodique de (S_t) est au plus égal au module de ce système.

17. **Remarque.** Pour la démonstration que nous venons de donner, il a été nécessaire de supposer que non seulement le système (Σ_t) n'a pas de solutions bornées, mais qu'il en est également ainsi pour tous les systèmes de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$. On peut se demander s'il ne serait pas suffisant de faire cette hypothèse seulement sur Σ_t et si ce seul fait n'entrainerait pas que tous les systèmes de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$ n'ont pas de solutions bornées non plus; un exemple simple montre que cela n'est pas suffisant.

Considérons l'équation homogène du premier ordre:

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot x$$

où $f(t)$ est une fonction presque-périodique à valeur moyenne nulle dont l'intégrale n'est pas bornée, nous avons vu (N° 12) qu'il existait dans l'ensemble

$H\{f(t+h)\}$ deux fonctions f^+ et f^- telles que: $\int\limits_0^t f^+(t)\,dt \geq 0$ et $\int\limits_0^t f^-(t)\,dt \leq 0$; considérant alors les deux équations qui appartiennent au même ensemble:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f^+(t)\cdot x \\ \frac{dx}{dt} &= f^-(t)\cdot x \end{aligned}\right.$$

la première n'a pas de solution bornée, tandis que celles de la deuxième le sont.

18. **Corollaire.** Soit l'équation:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + f_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + f_n(t)\cdot x = g(t)$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et $g(\neq 0)$ sont des fonctions presque-périodiques: elle est équivalente à un système linéaire tel que ceux que nous avons étudiés. Par suite, si l'on sait que cette équation a une solution bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n et si de plus aucune des équations:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + f_1^*(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + f_n^*(t)\cdot x = 0 \quad (f_i^*(t) = \lim_{\nu\to\infty} f_i(t+h_\nu))$$

n'a de solution bornée, nous pourrons affirmer que la solution bornée de l'équation avec second membre est presque-périodique ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n.[1]

Examinons maintenant le cas particulier de l'équation à coefficients constants:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t)$$

($f(t)$ presque-périodique, $a_1, a_2, \ldots a_n$ constants). Si l'équation algébrique en r:

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

n'a pas de racines purement imaginaires (alors l'équation sans second membre n'a pas de solution bornée) et si l'équation a une solution bornée, cette solution est presque-périodique.

[1] Voir au sujet de ce résultat E. Esclangon [I] et la critique des méthodes de M. Esclangon chez H. Bohr et O. Neugebauer [I].

Ce résultat a été démontré par M. Esclangon dans le mémoire que nous venons de citer pour le cas où $f(t)$ est une fonction quasi-périodique; M. Bohr et Neugebauer [I] l'ont obtenu dans le cas général par intégration directe.

Ici l'ensemble fermé des équations sans second membre que notre méthode conduit à introduire se compose d'un seul élément; on sait de plus que, dans ce cas, si x est borné, il en est de même de ses dérivées jusqu'à l'ordre n; par suite la proposition que nous venons d'établir s'applique.

On peut facilement ici, ainsi que l'ont fait MM. Bohr et Neugebauer, obtenir le développement de la solution connaissant celui de $f(t)$.

Soit:

$$f(t) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n t}$$

et posons:

$$x(t) \sim \sum B_n e^{iM_n t}$$

notre théorème prouve aussi que les dérivées de $x(t)$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ sont presque-périodiques, il en est donc de même de la dérivée d'ordre n, comme somme de fonctions presque-périodiques; et l'on sait que dans ce cas les développements des dérivées de $x(t)$ s'obtiennent par dérivation formelle.

Donc:

$$\sum B_n \cdot P(iM_n) e^{iM_n t} = \sum A_n e^{i\Lambda_n t}$$

et de là on déduit que le développement de $x(t)$ ne saurait contenir d'autres exposants que ceux de $f(t)$ et qu'il les contient tous puisque $P(r)$ n'a pas de racine purement imaginaire, donc:

$$x(t) \sim \sum \frac{A_n}{P(i\Lambda_n)} \cdot e^{i\Lambda_n t}.$$

19. **Deuxième théorème.** *Appelons valeur absolue, au point t, d'une solution $[x_i(t)]$ des systèmes que nous considérons, la racine carrée de la quantité:*

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + x_n^2(t).$$

Si aucun des systèmes de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$ n'a de solution dont la valeur absolue peut devenir aussi petite que l'on veut (sauf, comme toujours, la solution $x_i = 0$), et si (S_t) a des solutions bornées, l'une d'elles, au moins, est presque-périodique et il en est de même pour tout autre système de l'ensemble $H(S_{t+h})$.

Supposons qu'un système (S_t) admette une solution $[x_i(t)]$ dont la valeur absolue soit plus petite ou au plus égale à $k\,(>0)$, en d'autres termes soit:

$$\operatorname*{Borne\ sup}_{-\infty<t<+\infty} \sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+\cdots+x_n^2(t)}=k\,.$$

Le raisonnement fait au numéro précédent montre que tout autre système de l'ensemble $H(S_{t+h})$ possède aussi une solution dont la valeur absolue ne surpasse pas k. Les nombres k pour lesquels il existe une solution de (S_t) dont la valeur absolue a k pour borne supérieure ont une borne inférieure $g \leq k$. Nous allons montrer que g appartient aussi à l'ensemble k. Nous pouvons déterminer en effet une suite de solutions $[x_i^{(p)}(t)]$ dont la borne supérieure k_p de la valeur absolue tend vers g lorsque p augmente indéfiniment. Les systèmes de valeurs initiales $[x_i^{(p)}(0)]$ ont au moins un système limite et nous pouvons extraire de cette suite de valeurs initiales une autre suite qui tend vers une limite; disons que la suite elle-même possède cette propriété et soit $[\xi_i(0)]$ le système limite. Je dis que la solution $[\xi_i(t)]$ ou système (S_t) qui, pour $t=0$, prend les valeurs initiales $[\xi_i(0)]$ est telle que:

$$\operatorname*{Borne\ sup}_{-\infty<t<+\infty} \sqrt{\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)+\cdots+\xi_n^2(t)}=g\,.$$

Supposons, en effet, que pour $t=T$ on ait:

$$\sqrt{\xi_1^2(T)+\xi_2^2(T)+\cdots+\xi_n^2(T)}=g+j \qquad (j>0)$$

la convergence de la suite $[x_i^{(p)}(t)]$ vers $[\xi_i(t)]$ est uniforme dans tout intervalle fini, on peut donc déterminer un indice P tel que, pour $p>P$, on ait à la fois:

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{x_1^{(p)^2}(t)+x_2^{(p)^2}(t)+\cdots+x_n^{(p)^2}(t)}<g+\frac{j}{2}\\ &\sqrt{[\xi_1(t)-x_1^{(p)}(t)]^2+\cdots+[\xi_n(t)-x_n^{(p)}(t)]^2}<\frac{j}{2}\end{aligned}\right\} \quad p>P;\,|t|\leq T$$

d'où:

$$\sqrt{\xi_1^2(T)+\xi_2^2(T)+\cdots}\leq\sqrt{x_1^{(p)^2}(T)+x_2^{(p)^2}(T)+\cdots}+\sqrt{[\xi_1(T)-x_1^{(p)}(T)]^2+\cdots}<\;g+j$$

contrairement à l'hypothèse. Donc g appartient aussi à l'ensemble k et, d'après les raisonnements antérieurs, on voit que tout autre système de l'ensemble $H(S_{t+h})$ admet aussi une solution dont la borne supérieure de la valeur absolue est exactement g; car il en admet une dont la borne supérieure de la valeur absolue est au plus égale à g et cette borne ne peut être inférieure à g car on pourrait, partant de cette solution du système en question, en déduire une autre pour le système (S_t) dont la valeur absolue est inférieure à g, contrairement au fait que g est la borne inférieure des valeurs absolues de toutes les solutions de (S_t). Ainsi à chaque système de l'ensemble $H(S_{t+h})$ correspond une solution dont la borne supérieure de la valeur absolue est exactement g et nous allons voir qu'il n'y en a qu'une seule.

Supposons en effet que (S_t) possède deux solutions de cette sorte: $[\xi_i^{(1)}(t)]$ et $[\xi_i^{(2)}(t)]$, alors $\left[\dfrac{\xi_i^{(1)}(t)+\xi_i^{(2)}(t)}{2}\right]$ est aussi une solution du système (S_t) tandis que $\left[\dfrac{\xi_i^{(1)}(t)-\xi_i^{(2)}(t)}{2}\right]$ est une solution du système (Σ_t) et l'on a:

$$\left(\frac{\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}}{2}\right)^2+\left(\frac{\xi_2^{(1)}+\xi_2^{(2)}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\xi_n^{(1)}+\xi_n^{(2)}}{2}\right)^2+\left(\frac{\xi_1^{(1)}-\xi_1^{(2)}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\xi_n^{(1)}-\xi_n^{(2)}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(\xi_1^{(1)})^2+(\xi_1^{(2)})^2+\cdots+(\xi_n^{(1)})^2+(\xi_n^{(2)})^2}{2}\leq g^2.$$

Or, par hypothèse, (Σ_t) n'a pas de solution dont la valeur absolue peut devenir aussi petite que l'on veut, on peut, par suite, déterminer un nombre l tel que:

$$\left(\frac{\xi_1^{(1)}-\xi_1^{(2)}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\xi_n^{(1)}-\xi_n^{(2)}}{2}\right)^2\geq l^2$$

d'où:

$$\left(\frac{\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\xi_n^{(1)}+\xi_n^{(2)}}{2}\right)^2\leq g^2-l^2.$$

C'est en contradiction avec la propriété de g, par suite il y a une et une seule solution $[\xi_i(t)]$ qui possède cette propriété pour tout système de l'ensemble $H(S_{t+h})$ si l'on fait l'hypothèse qu'aucun système de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$ n'a de solution dont la valeur absolue peut devenir aussi faible que l'on veut; et c'est cette circonstance qui va nous permettre de démontrer, comme dans le premier théorème, que la solution $[\xi_i(t)]$ est presque-périodique.

Soit en effet $[\xi_i(t+h_p)]$ une suite de solutions telle que les systèmes de nombres $[\xi_i(h_p)]$ tendent vers une limite $[\xi_i^*(0)]$ tandis que les systèmes différentiels (S_{t+h_p}) tendent vers (S_t^*): des choix successifs permettent toujours d'extraire d'une suite donnée une suite qui possède ces propriétés.

La solution de (S_t^*) dont la borne supérieure est g a pour valeurs initiales $[\xi_i^*(0)]$ donc si la suite de systèmes (S_{t+h_p}) tend vers (S_t^*), nous sommes sûrs que les systèmes de nombres $[\xi_i(h_p)]$ ont une seule limite.

La convergence de $[\xi_i(t+h_p)]$ vers $[\xi_i^*(t)]$ est uniforme dans tout intervalle fini; on doit démontrer qu'elle est uniforme dans $-\infty < t < +\infty$; si cela n'avait pas lieu, on pourrait en effet déterminer: (voir la démonstration du premier théorème)

1° un nombre positif α

2° une suite de nombres croissants indéfiniment avec l'indice:

$$t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots$$

3° deux suites d'indices:

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p, \ldots$$

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p, \ldots$$

tels que les systèmes $(S_{t+t_p+h_{\nu_p}})$ et $(S_{t+t_p+h_{\pi_p}})$ convergent vers deux autres systèmes $(S^{(1)})$ et $(S^{(2)})$ et les systèmes de nombres $[\xi_i(t_p+h_{\nu_p})]$ et $[\xi_i(t_p+h_{\pi_p})]$ vers des systèmes $[\xi_i^{(1)}(0)]$ et $[\xi_i^{(2)}(0)]$.

4° une fonction $\xi_j(t)$ parmi les n fonctions $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ telle que:

$$|\xi_i(t_p+h_{\nu_p}) - \xi_j(t_p+h_{\pi_p})| \geq \alpha \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

On démontre comme au numéro 16 que les systèmes $(S^{(1)})$ et $(S^{(2)})$ sont les mêmes et il s'ensuit que les deux systèmes de nombres $[\xi_i^{(1)}(0)]$ et $[\xi_i^{(2)}(0)]$ sont les mêmes contrairement à 4°.

Ainsi nous voyons que la convergence d'une suite de systèmes:

$$\lim_{\nu \to \infty} (S_{t+h_\nu}) = (S_t^*)$$

entraîne la convergence de la suite de solutions:

$$\lim_{\nu \to \infty} [\xi_i(t+h_\nu)] = [\xi_i^*(t)] \quad \text{dans } -\infty < t < +\infty\,; (i = 1, 2, \ldots n)$$

donc le module de la solution $[\xi_i(t)]$ est inférieur ou égal au module du système (S_t). De plus si $[x_i(t)]$ est une autre solution de ce système on a:

$$\underset{-\infty<t<+\infty}{\text{Borne sup}}\, [\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t) + \cdots + \xi_n^2(t)] < \underset{-\infty<t<+\infty}{\text{Borne sup}}\, [x_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + x_n^2(t)]$$

en ce sens on peut dire que la plus petite solution de (S_t) est presque-périodique.

20. L'exemple de l'équation du premier ordre donné au sujet du premier théorème vaut également ici pour montrer que la connaissance des propriétés que nous avons utilisées, pour un seul système (Σ_t) ne suffit pas pour en tirer les mêmes conclusions relativement à tous les systèmes de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$.

Nous allons cependant donner un criterium permettant d'affirmer que lorsqu'un système de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$ n'a que des solutions bornées dont la valeur absolue ne devient pas aussi faible que l'on veut, il en est ainsi pour tous les autres systèmes de l'ensemble.

Supposons que (Σ_t) n'ait que des solutions bornées et de plus que:

$$F(t) = \int_0^t [f_{11}(t) + f_{22}(t) + \cdots + f_{nn}(t)]\, dt$$

soit une fonction bornée, et par suite presque-périodique, alors tout système de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$ n'a que des solutions bornées dont la valeur absolue ne devient pas arbitrairement petite.

Soit $[x_i^{(1)}(t)]$, $[x_i^{(2)}(t)], \ldots,$ $[x_i^{(n)}(t)]$ un système de n solutions linéairement indépendantes du système (Σ_t), on sait que l'on a (déterminant de Wronski):

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_2^{(1)}(t) \cdots x_n^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) & x_2^{(2)}(t) \cdots x_n^{(2)}(t) \\ \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) \cdots x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} = C \cdot e^{F(t)} \qquad (C \text{ constante } \neq 0).$$

Le théorème de M. Hadamard, sur le maximum de la valeur absolue d'un déterminant, montre immédiatement que si les solutions $[x_i^{(j)}(t)]$ sont bornées, ainsi que nous le supposons et, s'il en est de même pour $F(t)$, la valeur absolue des solutions ne saurait devenir aussi faible que l'on veut.

Si nous considérons alors une suite de systèmes (Σ_{t+h_ν}) qui tend vers $(\Sigma_t{}^*)$ lorsque ν augmente indéfiniment, telle de plus que les systèmes de nombres: $[x_i^{(j)}(h_\nu)]$ tendent tous vers des limites: $[x_i^{(j)*}(0)]$, le déterminant de ces nombres limites aura une valeur C^* certainement différente de zéro. Considérant les solutions $[x_i^{(j)*}(t)]$ de (S_t^*) qui ont ces nombres pour valeurs initiales, et posant:

$$F^*(t) = \int_0^t [f_{11}^*(t) + f_{22}^*(t) + \cdots f_{nn}^*(t)]\, dt$$

on aura:

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)*}(t) & x_2^{(1)*}(t) & \ldots\ldots & x_n^{(1)*}(t) \\ x_1^{(2)*}(t) & x_2^{(2)*}(t) & \ldots\ldots & x_n^{(2)*}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)*}(t) & x_2^{(n)*}(t) & \ldots\ldots & x_n^{(n)*}(t) \end{vmatrix} = C^* \cdot e^{F^*(t)}.$$

À cause de la convergence uniforme de $[x_i^{(j)}(t+h_\nu)]$ vers $[x_i^{(j)*}(t)]$ dans tout intervalle fini on peut conclure que les solutions $[x_i^{(j)*}(t)]$ sont bornées, la relation précédente montre alors que leur valeur absolue ne saurait devenir aussi faible que l'on veut.

21. Par combinaison des deux théorèmes précédents, nous obtenons le résultat suivant, dont nous ne donnerons pas la démonstration tout à fait semblable aux précédentes:

Troisième théorème. *Si (S_t) a des solutions bornées et si aucun des systèmes de l'ensemble $H(\Sigma_{t+h})$ n'a de solution bornée (sauf $x_i = 0$) dont la valeur absolue peut devenir aussi petite que l'on veut, (S_t) a une solution presque-périodique dont le module est inférieur ou égal au module de (S_t).*

Nous allons faire tout de suite une application de ce dernier théorème aux équations à coefficients constants.

22. Reprenons l'équation:

$$(1) \qquad \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t)$$

($a_1, a_2, \ldots a_n$ constantes réelles).

Cette fois-ci nous supposerons que l'équation algébrique:

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

peut avoir des racines purement imaginaires mais qu'elle n'a pas de racines nulles ($a_n \neq 0$) (ce dernier cas se ramène à celui de l'intégration que nous avons traité au N° 10 et au problème qui nous occupe).

Nous allons démontrer que si l'équation (1) *admet des solutions bornées, elles sont presque-périodiques.*

Soit $\varphi(t)$ l'une d'entre elles et désignons par $i\,\omega_1, i\,\omega_2, \ldots, i\,\omega_k;\ -i\,\omega_1, -i\,\omega_2, \ldots, -i\,\omega_k$ les racines purement imaginaires de $P(r)=0$ $\left(k \leq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$; les solutions bornées de l'équation différentielles sont alors:

$$x(t)=\varphi(t)+\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu \cos\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)$$

où les C_ν et α_ν sont des constantes.

La valeur absolue d'une solution sera ici la racine carrée de la quantité:

$$x^2(t)+x'^2(t)+\cdots+x^{(n-1)2}(t)$$

et si $x(t)$ est bornée ses dérivées le sont aussi. Pour appliquer le théorème précédent, il suffira de montrer que les valeurs absolues des quantités de la forme:

$$\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu \cos\,(\omega_\nu t+\alpha_\nu)$$

solutions bornées de l'équation sans second membre, ont une borne inférieure positive. Si nous nous donnons en effet les C_ν et si nous voulons que la valeur absolue de la quantité précédente soit inférieure à ε, il faudra tout d'abord:

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu \cos\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)\right| \leq \varepsilon; \quad \left|\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu\, \omega_\nu\, \sin\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu\, \omega_\nu{}^2 \cos\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)\right| \leq \varepsilon; \quad \left|\sum_{\nu=1}^{k} C_\nu\, \omega_\nu^3\, \sin\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)\right| \leq \varepsilon$$

. . . .

Mais puisque $k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ il y a au moins autant d'inéquations pour les cosinus (ou les sinus) séparément qu'il y a de ces termes sous les signes Σ; on peut donc résoudre séparément par rapport à $\cos\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)$ et à $\sin\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)$, car les déterminants des premiers membres des inéquations ne sont pas nuls; on voit ainsi que les cosinus et les sinus seront très petits si ε est lui-même très petit et à partir d'une certaine valeur de ε l'égalité: $\cos^2\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)+\sin^2\,(\omega_\nu\, t+\alpha_\nu)=1$ ne sera plus vérifiée; la valeur absolue de la quantité précédente ne peut donc descendre au-dessous d'une certaine limite.

$\varphi(t)$ est donc presque-périodique et parmi toutes les solutions de (1), l'une d'elles a son module contenu dans celui de $f(t)$; disons que c'est $\varphi(t)$ elle-même; posant alors:

$$f(t) \sim \Sigma A_n \cdot e^{i\Lambda_n t}$$

on trouve, comme au N° 18:

$$\varphi(t) \sim \sum \frac{A_n}{P(i\Lambda_n)} \cdot e^{i\Lambda_n t}.$$

On a de plus le résultat suivant:

Pour que l'équation (1) *admette une solution bornée, il est nécessaire qu'aucun des exposants Λ_n de $f(t)$ ne soit racine de l'équation:*

$$P(i\Lambda_n) = 0.$$

§ 2. Une équation de la théorie des perturbations.

23. Nous allons faire l'application des méthodes et des résultats précédents à l'équation suivante:

$$(E_t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t) \cdot x + \psi(t) \qquad (\varphi(t) \neq 0)$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ désignent des fonctions presque-périodiques réelles de t. En posant $y = \frac{dx}{dt}$, cette équation est équivalente au système:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \varphi(t) \cdot x + \psi(t) \end{cases}$$

et notre méthode nous amène à considérer en même temps que l'équation (E_t) les équations:

$$(E_t^*) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi^*(t)\cdot x + \psi^*(t)$$

avec:

$$\varphi^*(t) = \lim_{\nu\to\infty} \varphi(t+h_\nu);\ \psi^*(t) = \lim_{\nu\to\infty} \psi(t+h_\nu) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

dont nous désignons l'ensemble par $H(E_{t+h})$. On est naturellement amené à l'étude préalable de l'équation sans second membre:

$$(\mathfrak{E}_t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t)\cdot x$$

et à la considération de l'ensemble $H(\mathfrak{E}_{t+h})$.

Nous ne pourrons malheureusement pas traiter entièrement cette dernière équation; nous examinerons seulement trois cas et dans chacun d'eux s'introduira une fonction presque-périodique dont nous ne pouvons pas donner de méthode pratique de détermination.

24. **Premier cas.** *L'équation* $(\mathfrak{E}_t)$ *n'a que des solutions bornées.*

La forme de l'équation montre que la dérivée seconde de chaque solution est aussi bornée; d'après un résultat connu, il en est par suite de même pour la dérivée première.

Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux solutions indépendantes de $(\mathfrak{E}_t)$ on a:

$$uv' - vu' = c \qquad \text{(constante)}$$

il suit du théorème du N° 20, mais c'est aussi très facile à voir directement, que la valeur absolue de chacune de ces solutions ne devient pas infiniment petite: ici, par valeur absolue de u, il faut entendre la quantité:

$$\sqrt{u^2(t) + u'^2(t)}.$$

Considérons alors la forme du second degré:

$$f(t) = \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2$$

où les quantités α, β, γ sont des constantes qui jouent le rôle de paramètres. On a:

$$f'(t) = 2\,[\alpha uu' + \beta(uv' + vu') + \gamma vv']$$

$$f''(t) = 2\,[\alpha u'^2 + 2\beta u'v' + \gamma v'^2] + 2\varphi(t)\cdot f.$$

Cette fonction $f(t)$ est bornée ainsi que ses deux premières dérivées et, le déterminant des coefficients des quantités α, β, γ dans les seconds membres des égalités précédentes est, comme on le voit facilement, égal à:

$$(uv'-vu')^3 = c^3 \quad (\neq 0).$$

Si nous donnons à α, β, γ toutes les valeurs possibles, nous obtenons un ensemble de fonctions $f(t)$ que nous désignerons par (f) et il est évident qu'au lieu de prendre u et v pour définir l'ensemble (f), on eut pu prendre tout autre système de 2 solutions de $(\mathfrak{E}_t)$ linéairement indépendantes car cela revient simplement à effectuer une substitution linéaire dans la forme f.

D'autre part, en vertu de la relation:

$$uv' - vu' = c$$

u et v ne peuvent prendre simultanément des valeurs arbitrairement petites en valeur absolue, il en résulte que l'on peut choisir les constantes α, β, γ de façon que, quel que soit le nombre $k(>0)$ choisi:

$$f(t) \geq k > 0 \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Une forme f étant ainsi déterminée, on pourra alors trouver une constante K telle que:

$$\sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2} \leq K \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Il existe peut-être plusieurs formes qui possédent les deux propriétés précédentes nous désignerons leur ensemble par $[f]$.

Remarquons maintenant que si $(\mathfrak{E}_t)$ a toutes ses solutions bornées, il en est de même pour toutes les équations de l'ensemble $H(\mathfrak{E}_{t+h})$. Si $(\mathfrak{E}_t^*)$ est l'une d'entre elles, il existe dans l'ensemble (f^*) correspondant un ensemble $[f^*]$ tel que pour chaque fonction de cet ensemble on ait:

$$f^* \geq k \quad \text{et} \quad \sqrt{f^{*2} + f^{*\prime 2} + f^{*\prime\prime 2}} \leq K \quad (-\infty < t < +\infty)$$

cela est une simple conséquence de la convergence uniforme, dans tout intervalle fini, des solutions d'une suite d'équations $(\mathfrak{E}_{t+h_\nu})$ qui tend vers $(\mathfrak{E}_t^*)$ lorsque ν augmente indéfiniment.

Pour chaque forme de l'ensemble $[f]$ la fonction $\sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2}$ a une borne supérieure $G(f)$ et toutes ces bornes supérieures ont une borne inférieure g.

Nous allons montrer que l'on peut choisir α, β, γ de façon que $G(f)=g$. Tout d'abord on peut déterminer une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ telles que:

$$\lim_{n\to\infty} G(f_n)=g.$$

Les systèmes de nombres $[f_n(0), f_n'(0), f_n''(0)]$ ont au moins un système limite soit $[F(0), F'(0), F''(0)]$; ce que nous avons dit au sujet du déterminant des coefficients α, β, γ, permet d'affirmer que la recherche de ces coefficients pourra toujours être faite pour le système limite et nous obtiendrons ainsi une forme $F(t)$.

Mais alors la suite de formes:

$$g_n(t)=f_n(t)-F(t)$$

appartient aussi à l'ensemble (f) et $g_n(0), g_n'(0), g_n''(0)$ tendent vers zéro lorsque n augmente indéfiniment: ce qui signifie que les paramètres α, β, γ de cette suite de formes tendent vers zéro et que, par suite, la suite elle-même tend uniformément vers zéro dans $-\infty < t < +\infty$.

Or on a: $G(F) \geq g$, supposons que $G(F) > g$, alors, pour une certaine valeur de t, on aurait:

$$\sqrt{F^2+F'^2+F''^2}=g+\delta \quad (\delta>0)$$

et l'on peut déterminer un indice i tel que l'on ait à la fois, à partir de i, et pour cette même valeur de t:

$$G(f_i)<g+\frac{\delta}{2};\ \left|\sqrt{F^2+F'^2+F''^2}-\sqrt{f_i^2+f_i'^2+f_i''^2}\right|<\frac{\delta}{2}$$

c'est en contradiction avec l'hypothèse précédente.

Les remarques que nous avons présentées auparavant nous montrent aussi que pour toute équation $(\mathfrak{E}_t^*)$ de l'ensemble $H(\mathfrak{E}_{t+h})$ il existe une forme F^* telle que:

$$F^* \geq k; \quad G(F^*)=g.$$

Montrons maintenant qu'il n'existe qu'une seule forme qui possède cette propriété dans l'ensemble $[f]$ correspondant à l'équation $(\mathfrak{E}_t)$; la démonstration vaut également pour chaque équation de l'ensemble $H(\mathfrak{E}_{t+h})$.

Supposons qu'il existe deux formes qui jouissent de cette propriété:

$$F_1 \geq k, \quad G(F_1) = g; \quad F_2 > k, \quad G(F_2) = g$$

et considérons les deux formes qui appartiennent également à (f)

$$\mathfrak{F} = \frac{F_1 + F_2}{2}; \quad \mathfrak{G} = \frac{F_1 - F_2}{2}$$

on a:

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{F}'^2 + \mathfrak{F}''^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{G}'^2 + \mathfrak{G}''^2 = \frac{F_1^2 + F_1'^2 + F_1''^2 + F_2^2 + F_2'^2 + F_2''^2}{2} \leq g^2$$

d'où:

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{F}'^2 + \mathfrak{F}''^2 \leq g^2 - (\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{G}'^2 + \mathfrak{G}''^2)$$

d'après l'hypothèse faite sur g, il suit de cette inégalité que:

$$\underset{-\infty < t < +\infty}{\text{Borne inférieure}} (\mathfrak{G}^2 + \mathfrak{G}'^2 + \mathfrak{G}''^2) = 0$$

c'est-à-dire que les paramètres α, β, γ de G sont aussi petits que l'on veut, par suite $\mathfrak{G} = 0$.

Il existe donc dans l'ensemble (f) une et une seule forme $F(t)$ qui possède les propriétés que nous désirons; sur cette forme nous pouvons faire les raisonnements déjà appliqués plusieurs fois pour démontrer que c'est une fonction normale ainsi que ses deux premières dérivées. Nous avons le résultat suivant:

Si l'équation $(\mathfrak{E}_t)$ *n'a que des solutions bornées, désignant par* u *et* v *deux quelconques d'entre elles linéairement indépendantes et par* k *un nombre positif quelconque, il existe une forme du* 2° *degré:*

$$F(t) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

telle que:

$$F(t) \geq k$$

et qui est presque-périodique ainsi que ses deux premières dérivées.

Le module de cette fonction est contenu dans celui de $\varphi(t)$.

Nous allons maintenant étudier cette fonction considérée comme forme du second degré et faire voir que F ne peut être que définie, puis nous montrerons comment sa connaissance suffit pour achever l'intégration de l'équation $(\mathfrak{E}_t)$.

1° F ne peut être une forme indéfinie; car alors en choisissant convenablement les solutions indépendantes de $(\mathfrak{E}_t)$ qui la définissent, on pourrait la ramener à la forme $F = uv$. La résolution de l'équation $(\mathfrak{E}_t)$ est ramenée à celle du système:

$$\begin{cases} uv = F(t) \\ uv' - vu' = c \end{cases} \qquad (F(t) \geq k).$$

Un calcul élémentaire donne immédiatement les fonctions u et v à un facteur près:

$$u = \sqrt{F}\, e^{-\int \frac{c}{2F} dt}, \qquad v = \sqrt{F}\, e^{\int \frac{c}{2F} dt}$$

et, puisque $F(t)$ est bornée, ces fonctions ne le sont, elles ne sauraient être solutions de l'équation $(\mathfrak{E}_t)$.

2° La forme F ne peut être le carré d'une forme linéaire. Car on pourrait la ramener à:

$$F = u^2$$

et alors $\sqrt{F}$ et $\sqrt{F}\int_a^t \frac{dt}{F}$ (a constante quelconque) seraient des solutions de $(\mathfrak{E}_t)$ or $\int_a^t \frac{dt}{F}$ ne peut rester borné.

3°. La forme F ne peut donc qu'être définie, on peut alors la ramener à la forme $F = u^2 + v^2$ et l'on a à résoudre le système:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = F \\ uv' - vu' = c \end{cases}$$

d'où l'on tire:

$$\left(\text{arc tg}\, \frac{v}{u}\right)' = \frac{c}{F}$$

donc les solutions de ce système sont

$$\begin{cases} u = \sqrt{F}\, \cos\left(\int_a^t \frac{c}{F}\, dt\right) \\ v = \sqrt{F}\, \sin\left(\int_a^t \frac{c}{F}\, dt\right) \end{cases} \qquad (a \text{ constante quelconque}).$$

La solution générale de $(\mathfrak{E}_t)$ est donc:

$$x = c_1\sqrt{F}\cdot\cos\left(\int_a^t \frac{c}{F}\,dt\right) + c_2\sqrt{F}\cdot\sin\left(\int_a^t \frac{c}{F}\,dt\right)\cdot$$

Puisque $F(t)\geq k>0$, la fonction $\frac{|c|}{F}=R$ est aussi presque-périodique et positive et sa borne inférieure est aussi positive. on peut donc mettre la solution de $(\mathfrak{E}_t)$ sous la forme:

$$x = k_1\frac{\cos\left(\int_a^t R\,dt\right)}{\sqrt{R}} + k_2\frac{\sin\left(\int_a^t R\,dt\right)}{\sqrt{R}} = \frac{k}{\sqrt{R}}\cos\left(\int_a^t R\,dt+\alpha\right)$$

mais R étant toujours positif, $\int_a^t R\,dt$ prend toutes les valeurs et l'on peut écrire:

$$x = \frac{k}{\sqrt{R}}\cdot\cos\left(\int_c^t R\,dt\right)$$

c'est la forme de la solution générale de l'équation $(\mathfrak{E}_t)$ lorsque toutes ses solutions sont bornées, k et c sont les constantes d'intégration.

Passons maintenant à l'équation avec second membre (E_t); l'intégration de $(\mathfrak{E}_t)$ effectuée, on sait que l'on peut faire celle de (E_t) par des quadratures.

Supposons que l'équation (E_t) admette elle aussi une solution bornée, alors toutes le seront et, d'après le deuxième théorème du paragraphe précédent, l'une d'elles au moins sera presque-périodique, soit $\mathfrak{R}(t)$, et son module sera contenu dans le module formé par l'ensemble des modules de $\varphi(t)$ et de $\psi(t)$.

La solution générale de (E_t) est alors:

$$\boxed{x = \mathfrak{R} + \frac{k}{\sqrt{R}}\cdot\cos\left(\int_c^t R\,dt\right)}.$$

25. Voyons maintenant dans quelles conditions il pourra exister plusieurs solutions presque-périodiques de (E_t) ou, ce qui revient au même, des solutions presque-périodiques de $(\mathfrak{E}_t)$.

Remarquons d'abord que R étant presque-périodique ainsi que ses deux premières dérivées, si, par exemple, la solution

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \cos\left(\int_0^t R\,dt\right)$$

de $(\mathfrak{E}_t)$ est presque-périodique il en est de même de sa dérivée première:

$$-\sqrt{R}\cdot\sin\left(\int_0^t R\,dt\right) - \frac{R'}{2(\sqrt{R})^3}\cdot\cos\left(\int_0^t R\,dt\right)$$

et par suite aussi de: $\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\sin\left(\int_0^t R\,dt\right)$ qui est une solution de $(\mathfrak{E}_t)$ indépendante de la première; donc si $(\mathfrak{E}_t)$ admet une solution presque-périodique toutes le sont. Comme le produit de deux fonctions presque-périodiques est encore presque-périodique, il suit de là que les fonctions:

$$\cos\left(\int_0^t R\,dt\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\int_0^t R\,dt\right)$$

sont aussi presque-périodiques et qu'en considérant les deux suites:

$$\cos\left(\int_0^{t+h_n} R\,dt\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\int_0^{t+h_n} R\,dt\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

on peut extraire de la suite de nombres h_n une autre suite telle que les deux suites précédentes convergent en même temps vers des limites et uniformément dans $-\infty < t < +\infty$. Disons, pour ne pas compliquer les notations que la suite h_n elle-même possède cette propriété: cela signifie, comme on le voit facilement, qu'à tout $\varepsilon(>0)$ donné on peut faire correspondre un indice N tel que:

$$\left|\int_0^{t+h_{n_1}} R\,dt - \int_0^{t+h_{n_2}} R\,dt\right| = \left|\int_{t+h_{n_1}}^{t+h_{n_2}} R\,dt\right| < \varepsilon \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

dès que:

$$n_1 \text{ et } n_2 > N.$$

Désignons de plus par $r\,(>0)$ la valeur moyenne de R; de la suite h_n précédente on peut extraire une autre suite h_{n_ν} telle que l'on ait à la fois $(0 < \varepsilon < \pi)$:

$$|r(h_{n_{\nu_1}} - h_{n_{\nu_2}})| \leq \varepsilon \qquad (\operatorname{mod}\ 2\pi)$$

et:

$$\left|\int\limits_{t+h_{n_{\nu_1}}}^{t+h_{n_{\nu_2}}} R\,dt\right| \leq \varepsilon \qquad (\operatorname{mod}\ 2\pi)$$

dès que:

$$\nu_1 \text{ et } \nu_2 \geq P(\varepsilon).$$

De là on tire:

$$\left|\int\limits_{t+h_{n_{\nu_1}}}^{t+h_{n_{\nu_2}}} (R-r)\,dt\right| \leq 2\varepsilon \qquad (\operatorname{mod}\ 2\pi)$$

mais au premier membre de cette dernière inégalité nous avons une fonction presque-périodique[1] à valeur moyenne nulle et qui, par suite, prend la valeur zéro, l'inégalité précédente a donc lieu en valeur absolue et non pas seulement suivant le module 2π et on peut l'écrire:

$$\left|\int\limits_0^{t+h_{n_{\nu_1}}} (R-r)\,dt - \int\limits_0^{t+h_{n_{\nu_2}}} (R-r)\,dt\right| \leq 2\varepsilon$$

ceci dans $-\infty < t < +\infty$; mais l'inégalité précédente signifie que $\int\limits_0^{t+h_{n_\nu}} (R-r)\,dt$ tend

---

[1] M. Bohr démontre en effet [I p. 60] que si $f(t)$ est presque-périodique il en est même de:

$$\int\limits_t^{t+c} f(t)\,dt \qquad (c \text{ constante})$$

et ici l'on a

$$\int\limits_{t+h_{n_{\nu_1}}}^{t+h_{n_{\nu_2}}} = \int\limits_t^{t+h_{n_{\nu_2}}} - \int\limits_t^{t+h_{n_{\nu_1}}}$$

uniformément vers une limite, c'est-à-dire que $\int_0^t (R-r)\,dt$ est une fonction normale et cette condition nécessaire est aussi suffisante comme on s'en rend facilement compte.

Nous arrivons donc au résultat suivant:

Pour que l'équation $(\mathfrak{E}_t)$ *ait ses solutions presque-périodiques, il faut et il suffit que:*

$$\int_0^t R\,dt = rt + \text{ fonction presque-périodique.}$$

On peut se demander maintenant si toutes les conditions que nous avons imposées à $R(t)$ n'impliquent pas aussi que l'intégrale de R soit de la forme précédente: il n'en est rien. Soit en effet $\varphi(t)$ une fonction presque-périodique, ainsi que ses deux premières dérivées, à valeur moyenne nulle et à intégrale non bornée, choisissons une constante μ positive assez grande pour que:

$$R(t) = \mu + \varphi(t) > 0$$

alors:

$$x = \frac{k}{\sqrt{R}} \cdot \cos\left(\int_c^t R\,dt\right)$$

sera la solution générale de l'équation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{3R'^2 - 2RR'' - 4R''}{4R^2}\right) \cdot x$$

qui est du type précédent et aucune de ses solutions n'est presque-périodique.

26. **Deuxième cas.** *L'équation* $(\mathfrak{E}_t)$ *a une seule solution bornée (définie à un facteur constant près) dont la valeur absolue ne devient pas arbitrairement petite et les solutions indépendantes de celles-ci ne le sont pas.*

Toutes les équations de l'ensemble $H(\mathfrak{E}_{t+h})$ ont alors la même propriété. D'abord l'une d'elles ne saurait avoir deux solutions indépendantes bornées car toutes les équations de l'ensemble posséderaient la même propriété; ensuite toute équation $(\mathfrak{E}_t^*)$ a une solution bornée non nulle car, dire ici que l'équation $(\mathfrak{E}_t)$ a une solution dont la valeur absolue ne devient pas aussi petite que l'on veut,

veut dire que $\sqrt{u^2(t)+u'^2(t)}$ a une borne inférieure positive; choisissant alors une suite d'équations $(\mathfrak{E}_{t+h_\nu})$ qui converge vers $(\mathfrak{E}_t{}^*)$ lorsque ν augmente indéfiniment et telle que les nombres $u(h_\nu)$ et $u'(h_\nu)$ tendent chacun vers une limite $u^*(0)$ et $u'^*(0)$, les raisonnements précédents montrent que la solution de $(\mathfrak{E}_t{}^*)$ qui a pour valeurs initiales $u^*(0)$ et $u'^*(0)$ est bornée et non nulle car $u^*(0)$ et $u'^*(0)$ ne sont pas tous les deux nuls en vertu de l'hypothèse faite sur la valeur absolue de u.

Soit $S(t)$ une solution de $(\mathfrak{E}_t)$ qui possède la propriété précédente et posons:

$$0 < g \leq \sqrt{S^2(t)+S'^2(t)} \leq G. \tag{1}$$

Les autres solutions bornées de $(\mathfrak{E}_t)$ sont de la forme $k\,S(t)$ et l'on a:

$$0 < |k|\, g \leq \sqrt{S^2(t)+S'^2(t)} \leq |k|\, G. \tag{2}$$

Je dis que toute équation $(\mathfrak{E}_t{}^*)$ possède une solution qui a les mêmes bornes que $S(t)$. Le passage à la limite montre en effet l'existence, pour cette équation, d'une solution telle que:

$$0 < g' \leq \sqrt{S^{*2}(t)+S'^{*2}(t)} \leq G'$$

avec:

$$g \leq g'; \quad G' \leq G.$$

En repassant de $(\mathfrak{E}_t{}^*)$ à $(\mathfrak{E}_t)$ par un autre passage à la limite, on voit que cette dernière équation admet aussi une solution dont les bornes g_1 et G_1 de la valeur absolue sont telles que:

$$g' \leq g_1; \quad G_1 \leq G'.$$

Comparant maintenant avec l'équation (2), il s'ensuit que:

$$g = g'; \quad G = G'.$$

Le résultat est donc démontré et de plus si $(\mathfrak{E}_{t+h_\nu})$ tend vers $(\mathfrak{E}_t{}^*)$ alors les nombres $S(h_\nu)$ et $S'(h_\nu)$ ont deux limites différentes au plus; le raisonnement s'achève alors comme tous les précédents, on montre que l'hypothèse de la non convergence uniforme de la suite $S(t+h_\nu)$ vers $S^*(t)$ entraîne une contradiction, $S(t)$ est donc presque-périodique.

Soit alors v une solution indépendante de $S(t)$ on a:

$$Sv' - S'v = c$$

de là:

$$v^2 + v'^2 \geq \frac{c^2}{S^2 + S'^2} \geq \frac{c^2}{G^2}.$$

Par suite si l'équation avec second membre admet une solution bornée $\mathfrak{S}(t)$, le troisième théorème du paragraphe précédent s'applique; comme auparavant le module de $S(t)$ est au plus égal au module de $\varphi(t)$ et le module de $\mathfrak{S}(t)$ au plus égal à la somme des modules de $\varphi(t)$ et de $\psi(t)$ et nous pouvons définir $S(t)$ par la condition:

$$\underset{-\infty<t<+\infty}{\text{Borne sup}} [\mathfrak{S}^2(t) + \mathfrak{S}'^2(t)] < \underset{-\infty<t<+\infty}{\text{Borne sup}} \{[\mathfrak{S}(t) + k\,S(t)]^2 + [\mathfrak{S}'(t) + k\,S'(t)]^2\}.$$

La solution générale de (E_t) est alors:

$$\boxed{x = \mathfrak{S} + c_1 S + c_2 S \int_0^t \frac{dt}{S^2}}.$$

27. **Troisième cas:** $\varphi(t) \geq 0$.

On sait alors que l'équation $(\mathfrak{E}_t)$ n'admet aucune solution bornée (sauf la solution banale $x = 0$) et il en est également ainsi pour toutes les équations de l'ensemble $H(\mathfrak{E}_{t+h})$.

M. F. H. Murray [I] a démontré que la solution générale de (E_t) est de la forme:

$$x = c_1 e^{-\int_0^t \lambda\,dt} + c_2 e^{\int_0^t \bar{\lambda}\,dt}$$

où $\lambda(t)$ et $\bar{\lambda}(t)$ sont des fonctions non négatives de t et bornées lorsque $\varphi(t)$ l'est, ce qui est le cas ici.

Considérons les deux solutions particulières:

$$\left\{\begin{array}{lll} u(t) = e^{-\int_0^t \lambda\,dt} & \lambda(t) \geq 0 & \\ & & -\infty < t < +\infty \\ v(t) = e^{\int_0^t \bar{\lambda}\,dt} & \bar{\lambda}(t) \geq 0 & \end{array}\right.$$

la première est non croissante, la deuxième non décroissante; pour $t=0$ ces deux solutions prennent la valeur 1; la première reste toujours plus petite ou au plus égale à 1 lorsque t varie de 0 à $+\infty$, l'autre reste dans le même intervalle toujours supérieure ou égale à 1; ces deux solutions sont donc indépendantes et par suite:

$$v'(0)-u'(0)=\lambda(0)+\bar{\lambda}(0)>0.$$

En remarquant maintenant que $uv'-vu'$ est constant, on en tire:

$$uv=e^{\int_0^t \bar{\lambda}\,dt}\cdot e^{-\int_0^t \lambda\,dt}=\frac{\lambda(0)+\bar{\lambda}(0)}{\lambda(t)+\lambda(t)}.$$

Pour une valeur finie de t, cette formule montre déjà que: $\lambda(t)+\bar{\lambda}(t)>0$. Toutes les conclusions exposées jusqu'ici sont aussi valables pour toute autre équation de l'ensemble $H(\mathfrak{E}_{t+h})$. Par exemple les solutions de $(\mathfrak{E}_{t+h})$ qui possédent les mêmes propriétés que les solutions de $(\mathfrak{E}_t)$ sont:

$$\frac{u(t+h)}{u(h)} \quad \text{et} \quad \frac{v(t+h)}{v(h)}$$

dont les dérivées pour $t=0$ sont:

$$-\lambda(h) \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}(h)$$

c'est-à-dire bornées.

Considérons alors une équation $(\mathfrak{E}_t^*)$ de l'ensemble $H(\mathfrak{E}_{t+h})$ et soit $(\mathfrak{E}_{t+h_\nu})$ une suite d'équations qui tend vers $(\mathfrak{E}_t^*)$ lorsque ν augmente indéfiniment, supposons de plus que les nombres $-\lambda(h_\nu)$ et $\bar{\lambda}(h_\nu)$ aient chacun une limite $-\lambda^*(0)$ et $\bar{\lambda}^*(0)$; la convergence uniforme des solutions de $(\mathfrak{E}_{t+h_\nu})$ vers celles de $(\mathfrak{E}_t^*)$ permet d'assurer que les solutions de $(\mathfrak{E}_t^*)$ qui, pour $t=0$ prennent la valeur 1 et ont pour dérivées en ce point: $-\lambda^*(0)$ et $\bar{\lambda}^*(0)$ sont, la première non croissante, la deuxième non décroissante et ce fait va nous permettre d'établir que la fonction: $\lambda(t)+\bar{\lambda}(t)$ a une borne inférieure positive. En effet si cela n'était pas on pourrait trouver une suite de nombres t_ν $(\nu=1, 2, \ldots)$ tels que:

$$\lim_{\nu\to\infty} [\lambda(t_\nu)+\bar{\lambda}(t_\nu)]=0.$$

Considérant alors la suite des équations $(\mathfrak{E}_{t+t_\nu})$, de cette suite on pourrait extraire une autre suite telle que $\lambda(t_\nu)$ et $\bar{\lambda}(t_\nu)$ aient des limites (nécessairement nulles) et qui converge vers une équation $(\mathfrak{E}_t^{(1)})$ qui admet deux solutions linéairement indépendantes telles que:

$$\begin{cases} u^{(1)}(t) = e^{-\int_0^t \lambda^{(1)} dt} & \lambda^{(1)}(t) \geq 0 \\ v^{(1)}(t) = e^{\int_0^t \bar{\lambda}^{(1)} dt} & \bar{\lambda}^{(1)}(t) \geq 0 \end{cases}$$

et l'on a:

$$v^{(1)\prime}(0) - u^{(1)\prime}(0) = \lambda^{(1)}(0) + \bar{\lambda}^{(1)}(0) = \lim_{\nu \to \infty} \left[\frac{u'(h_\nu)}{u(h_\nu)} - \frac{v'(h_\nu)}{v(h_\nu)}\right] = \lim_{\nu \to \infty} [\lambda(h_\nu) + \bar{\lambda}(h_\nu)] = 0$$

contrairement au fait que $u^{(1)}$ et $v^{(1)}$ sont linéairement indépendantes.

Il est maintenant possible de démontrer que: $\lambda(t) + \bar{\lambda}(t)$ est une fonction presque-périodique de t et toujours par le même procédé qui montrera que cette fonction est une fonction normale et que son module est contenu dans celui de $\varphi(t)$.

Nous poserons:

$$T(t) = \frac{1}{2} [\lambda(0) + \bar{\lambda}(0)] \cdot [\lambda(t) + \bar{\lambda}(t)]$$

et nous désignerons par g et G les bornes de cette fonction:

$$0 < g \leq T(t) \leq G.$$

Un calcul simple montre alors que la solution générale de $(\mathfrak{E}_t)$ est:

$$x = k_1 \frac{e^{-\int_0^t T dt}}{\sqrt{T}} + k_2 \frac{e^{\int_0^t T dt}}{\sqrt{T}}$$

ou encore, puisque T est positif et que $\int_0^t T\,dt$ prend une fois et une seule chaque valeur:

$$x = \frac{k}{\sqrt{T}} \cdot ch\left(\int_c^t T\,dt\right).$$

Occupons nous maintenant de l'équation (E_t); l'intégration de $(\mathfrak{E}_t)$ une fois effectuée, une solution particulière s'obtient facilement par la méthode de la variation des constantes; si nous arrivons à montrer que (E_t) possède une solution bornée, notre premier théorème trouvera son application et par suite cette solution sera presque-périodique.

En fait une solution particulière de (E_t) est:

$$\mathfrak{X}(t) = \frac{1}{2\sqrt{T(t)}}\left[- e^{-\int_0^t T\,dt} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{\int_0^u T(z)\,dz} \cdot \frac{\psi(u)}{\sqrt{T(u)}}\,du + \right.$$
$$\left. + e^{\int_0^t T\,dt} \cdot \int_t^{+\infty} e^{\int_0^u T(z)\,dz} \cdot \frac{\psi(u)}{\sqrt{T(u)}}\,du\right]$$

car nous allons montrer que les intégrales écrites ont un sens.

Nous allons le faire pour la première des expressions qui figurent entre crochets et montrer de plus que cette expression est bornée; on peut l'écrire au signe près:

$$A = \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_u^t T(z)\,dz} \cdot \frac{\psi(u)}{\sqrt{T(u)}}\,du.$$

Nous avons déjà montré que T admet une borne inférierure g positive, il suit de là que $\frac{\psi(u)}{\sqrt{T(u)}}$ reste plus petit en valeur absolue qu'une constante K et, par suite:

$$|A| \leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_u^t g\,dz} \cdot K\,du = \frac{K}{g}.$$

La même limitation vaut pour la deuxième expression et l'on trouve:

$$|\mathfrak{T}(t)| \leq \frac{K}{g^2}.$$

En définitive la solution de l'équation (E_t), pour $\varphi(t) \geq 0$, est donnée par:

$$\boxed{x = \mathfrak{T}(t) + \frac{k}{\sqrt{T}} \cdot ch\left(\int\limits_c^t T\, dt\right)}$$

où $\mathfrak{T}$ et T sont deux fonctions presque-périodiques de t, la dernière positive.

Index de la Littérature citée.

S. Ch. Bochner. I. Sur les fonctions presque-périodiques de Bohr. Comptes Rendus, t. 180 (1925), p. 1156.

II. Beiträge zur Theorie der fast-periodischen Funktionen. Math. Annalen t. 96 (1926), p. 119—147.

Bohl. I. Über die Darstellung von Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variablen proportionalen Argumenten. Thèse. Dorpat 1893; ou: Bulletin de la Société Mathématique de France, tome 38 (1910), page 5 (Traduit par M[elle] Tarnarider).

II. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie. Journal de Crelle, t. 131 (1906), p. 268—321.

H. Bohr. I. Zur Theorie der fast-periodischen Funktionen. I. Acta Mathematica, tome 45 (1924), p. 29—127.

II. Zur Theorie der fast-periodischen Funktionen. II. Acta Mathematica, tome 46 (1925), p. 101—214.

III. Zur Theorie der fast-periodischen Funktionen III. Acta Mathematica, tome 47 (1926), p. 237—281.

H. Bohr et O. Neugebauer. I. Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite. Sitz. Ber. Göttingen, 16 Juillet 1926, p. 1—13.

E. Esclangon. I. Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques. Annales de l'observatoire de Bordeaux (1919).

J. Favard. I. Sur les fonctions harmoniques presque-périodiques. Thèse, Paris 1927.

F. H. Murray. I. On certain linear differential equations. Annals of Mathematics, 2[e] Série, t. 24, p. 69—88.

11—27377. *Acta mathematica.* 51. Imprimé le 22 novembre 1927.