ÜBER DIE PARSEVALSCHE GLEICHUNG FÜR ANALYTISCHE FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN.

VON

A. S. BESICOVITSCH

in COPENHAGEN.

In zwei Abhandlungen in den Acta hat H. Bohr ([1], [2]) die Theorie einer Klasse von Funktionen einer reellen Variablen, den »fastperiodischen» Funktionen entwickelt. Eine für $-\infty < t < +\infty$ stetige Funktion $F(t) = U(t) + iV(t)$ heisst fastperiodisch, wenn es zu jedem ε eine Länge $l = l(\varepsilon)$ gibt, derart dass jedes Intervall $t_1 < t < t_2$ der Länge l mindestens eine zu ε gehörige Verschiebungszahl τ enthält, d. h. eine Zahl τ, welche für alle t der Ungleichung

$$|F(t+\tau) - F(t)| \leqq \varepsilon$$

genügt.

Zu jeder fastperiodischen Funktion gehört eine »Fourierreihe»

$$F(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t},$$

und es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$M\{|F(t)|^2\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |F(t)|^2 dt = \Sigma |A_n|^2.$$

In einer im Druck befindlichen Abhandlung aus den Proceedings der London Math. Society ([1]) habe ich den verallgemeinerten Begriff einer *»generalisiert fastperiodischen»* Funktion eingeführt. Hierunter ist eine für $-\infty < t < \infty$ definierte Funktion $F(t)$ zu verstehen, welche *im Mittel* durch fastperiodische Funktionen angenähert werden kann, d. h. es soll eine Folge von fastperiodischen Funktionen

$$\Phi_1(t),\ \Phi_2(t),\ \ldots,\ \Phi_m(t),\ \ldots$$

geben, welche die Limesgleichung

$$\lim_{m\to\infty} M\{|F(t)-\Phi_m(t)|^2\} = 0$$

erfüllt. Es genügt übrigens

$$\lim_{m\to\infty}\left(\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|F(t)-\Phi_m(t)|^2\,dt\right) = 0$$

vorauszusetzen, was für das Spätere von Bedeutung ist. Zu einer solchen generalisiert fastperiodischen Funktion gehört auch eine »Fourierreihe»

(1) $$F(t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t},$$

welche der Parsevalschen Gleichung

$$M\{|F(t)|^2\} = \Sigma |A_n|^2$$

genügt, und diese Fourierreihe entsteht aus den Fourierreihen der Annäherungsfunktionen

(2) $$\Phi_m(t) \sim \Sigma A_n^{(m)} e^{i\Lambda_n^{(m)} t}$$

durch den formalen Grenzübergang $m\to\infty$, d. h. jedes Λ, welches in (1) vorkommt, $\Lambda = \Lambda_n$, kommt von einer gewissen Stelle $m > m_0$ ab auch in jeder der Entwicklungen (2) vor, und zwar mit einem Koeffizienten, welcher für $m\to\infty$ gegen A_n strebt, während jede andere reelle Zahl Λ entweder gar nicht, oder nur endlich oft in den Entwicklungen (2) vorkommt, oder mit einem Koeffizienten, welcher für $m\to\infty$ gegen 0 strebt.

In einer dritten Arbeit von H. Bohr ([3]), deren Manuscript mir vom Verfasser freundlichst zu Verfügung gestellt wurde, hat er den Begriff der Fastperiodizität auf analytische Funktionen einer komplexen Variabeln $s = \sigma + it$ übertragen.

Eine in einem Streifen $\alpha<\sigma<\beta$ reguläre analytische Funktion $f(s)$ heisst »fastperiodisch in (α, β)», wenn es zu jedem ε eine Länge $l=l(\varepsilon)$ existiert, derart dass jedes Intervall auf der imaginären Achse $t_1<t<t_2$ der Länge l mindestens eine zu ε gehörige Verschiebungszahl τ enthält, d. h. eine Zahl τ, welche für alle s im ganzen Streifen $\alpha<\sigma<\beta$ der Ungleichung

$$|f(s+i\tau)-f(s)| \leqq \varepsilon$$

genügt.

Zu einer solchen analytischen Funktion gehört eine Entwicklung, die »Dirichletreihe» der Funktion

$$f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s} = \Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma+it)},$$

welche bei jedem festgehaltenen σ des Intervalles $\alpha<\sigma<\beta$ gerade die Fourierentwicklung der Funktion $F_\sigma(t)=f(\sigma+it)$ liefert, so dass bei festem σ mit $\alpha<\sigma<\beta$ die Parsevalsche Gleichung

$$M\{|f(\sigma+it)|^2\} = \Sigma |A_n|^2 e^{2\Lambda_n\sigma}$$

besteht.

Die Definition der Fastperiodizität einer Funktion $f(s)$ involviert, wie leicht zu sehen, ihre Beschränktheit, und wie Bohr gezeigt hat, gilt es andererseits, dass eine in einem Streifen (α, β) fastperiodische Funktion $f(s)$ von selbst im ganzen »Maximalstreifen der Beschränktheit» fastperiodisch ist, d. h. in dem grössten Streifen um (α, β), in welchem $f(s)$ noch regulär und beschränkt bleibt.

Es entsteht nun die Frage, ob eine fastperiodische Funktion, falls sie über ihren Beschränktheitsstreifen hinaus analytisch fortsetzbar ist, auch in grösseren Streifen einen gewissen fastperiodischen Charakter behält, und zwar so, dass sie auch dort mit ihrer Dirichletschen Reihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ verknüpft bleibt, und dass die Parsevalsche Gleichung immer noch besteht.

In § 1 der vorliegenden Abhandlung wird dies Problem behandelt, und zwar werden wir zeigen, dass *die Parsevalsche Gleichung gültig bleibt, solange $f(s)$ von endlicher Ordnung in bezug auf die Ordinate t, und der Limes superior*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |f(\sigma+it)|^2 dt$$

endlich bleibt.

Dieser Satz ist das Analogon zu einem bekannten Satz von F. CARLSON ([1]) über gewöhnliche Dirichletsche Reihen $\Sigma A_n e^{-\Lambda_n s}$ mit

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < \cdots < \Lambda_n < \cdots \qquad (\Lambda_n \to \infty),$$

welchen Satz er in demjenigen Falle umfasst, wo die vorgelegte gewöhnliche Dirichletsche Reihe eine Halbebene von gleichmässiger Konvergenz (oder Summabilität) besitzt.

Der Beweis wird so geführt, dass wir zeigen, dass die Funktion $f(s)$ auf jeder Geraden $\sigma = \sigma_0$ des erweiterten Gebietes *generalisiert fastperiodisch mit der Fourierreihe* $\Sigma A_n e^{\Lambda_n (\sigma_0 + it)}$ *ist.*

In § 2 wollen wir durch einige hinzugefügten Bemerkungen einen weitergehenden Satz erhalten, in welchem wir von der gegebenen Funktion $f(s)$ nur voraussetzen, 1) dass sie auf *einer einzigen Geraden* (statt in einem ganzen Streifen) ein fastperiodisches Verhalten aufweist, und 2) dass sie auf dieser Geraden nur *generalisiert fastperiodisch* (statt fastperiodisch) ist.

§ 1.

In genauer Formulierung besagt der zu beweisende Satz:

Satz. *Es sei eine in* (α, β) *fastperiodische Funktion* $f(s) = \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ *gegeben. In einem umfassenderen Streifen* $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$, *für welchen also* $\alpha_1 \leqq \alpha < \beta \leqq \beta_1$, *sei* $f(s)$ *regulär, besitze für jedes* σ *aus* $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ *einen endlichen*

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(\sigma + it)|^2 dt = K_\sigma$$

und sei als Funktion von t *von endlicher Ordnung gleichmässig in* σ, *d. h. es existiere eine positive ganze Zahl* m *und eine absolute Constante* C, *so dass*

$$|f(\sigma + it)| < C \left| \frac{t}{2} \right|^{m - \frac{1}{2}} \tag{3}$$

in $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$, $|t| > 1$. *Dann existiert bei jedem* σ_0 *des Intervalles* $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ *der Mittelwert*

$$M\{|f(\sigma_0 + it)|^2\}$$

und ist gleich

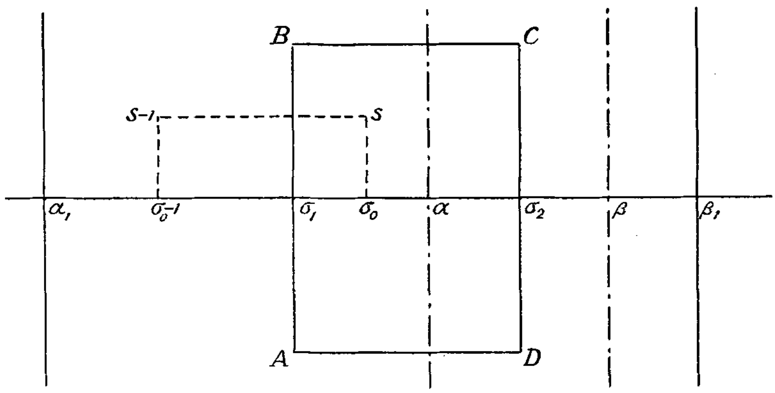
$$\Sigma |A_n|^2 e^{2\Lambda_n \sigma_0}.$$

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es offenbar den Fall $\alpha_1 < \alpha$ und eine Abszisse σ_0 mit $\alpha_1 < \sigma_0 < \alpha$ zu betrachten. Wir wählen (siehe Figur) zwei feste Abszissen σ_1 und σ_2, so dass

$$\operatorname{Max}(\alpha_1, \sigma_0 - 1) < \sigma_1 < \sigma_0$$

und $\alpha < \sigma_2 < \beta$, etwa

$$\sigma_2 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$



Für einen beliebigen Punkt $s = \sigma_0 + it$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ betrachten wir (bei einen $T > |t|$) das Rechteck

$$A = \sigma_1 - iT,\; B = \sigma_1 + iT,\; C = \sigma_2 + iT,\; D = \sigma_2 - iT.$$

Bei jedem positiven λ besteht dann die Gleichung

$$f(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ABCD} \frac{f(z)\, e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}\, dz,$$

d. h.

$$f(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + iT} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - iT}^{\sigma_2 + iT} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 + iT}^{\sigma_2 + iT} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_2 - iT}.$$

Wir vollziehen den Grenzübergang $T\to\infty$ und erhalten wegen (3)

$$f(s)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}. \tag{4}$$

Wir betrachten zunächst das zweite Integral zur rechten Hand

$$\psi(s,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\frac{f(z)e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz$$

und wollen von ihm beweisen, dass es bei einem beliebigen Zahl γ des Intervalles $\alpha<\sigma<\sigma_2$ (und beliebig festgehaltenem $\lambda>0$) eine im Streifen (α_1,γ) im Bohrschen Sinne fastperiodische Funktion ist. Denn, es sei $\tau=\tau(\varepsilon)$ eine beliebige zu ε gehörige Verschiebungszahl der (fastperiodischen) Funktion $f(\sigma_2+it)$, dann folgt für jedes $s=\sigma+it$ des Streifens $\alpha_1<\sigma<\gamma$

$$\psi(s+i\tau,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\frac{f(z)e^{\lambda(z-s-i\tau)}}{(z-s-i\tau)(z-s-i\tau+1)^m}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\frac{f(z+i\tau)e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz,$$

also

$$\psi(s+i\tau,\lambda)-\psi(s,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\frac{[f(z+i\tau)-f(z)]e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz,$$

und daraus

$$|\psi(s+i\tau,\lambda)-\psi(s,\lambda)|\leqq\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\left|\frac{e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}\right||dz|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2\pi}e^{\lambda(\sigma_2-\alpha_1)}\int\limits_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\frac{|dz|}{|z-s|^{m+1}}<\frac{\varepsilon}{2\pi}e^{\lambda(\sigma_2-\alpha_1)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{|(\sigma_2-\gamma)+iy|^{m+1}}$$

$$=B\varepsilon,$$

wo B eine Konstante ist, d. h. nicht von ε und s abhängt. Jede Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ der Funktion $f(\sigma_2+it)$ ist also zugleich eine Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon B)$ der Funktion $\psi(s, \lambda)$ in (α_1, γ), womit die Fastperiodizität dieser letzten Funktion in (α_1, γ) nachgewiesen ist.

Die Funktion

$$\varphi(s)=f(s)-\psi(s, \lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{f(z)e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz \tag{5}$$

ist ein Integral derselben Art, wie das von Carlson betrachtete. Wir werden es mit denselben Mitteln wie Carlson behandeln, und zwar bei einem festgehaltenen $T>1$ das Integral

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T}|\varphi(\sigma_0+it)|^2 dt$$

abschätzen. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst, bei einem beliebigen Punkte $s=\sigma_0+it$ der Strecke $-T\leqq t\leqq T$ (und indem wir $z=\sigma_1+iy$ schreiben) die Zerlegung vor:

$$\varphi(s)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{f(z)e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz=-\frac{e^{\lambda(\sigma_1-\sigma_0)}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{f(z)e^{i\lambda(y-t)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz$$

$$=-\frac{e^{\lambda(\sigma_1-\sigma_0)}}{2\pi i}(\varphi_1+\varphi_2)$$

mit

$$\varphi_1(s)=\int\limits_{\sigma_1-2Ti}^{\sigma_1+2Ti}, \quad \varphi_2(s)=\int\limits_{\sigma_1+2Ti}^{\sigma_1+i\infty}+\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1-2Ti}.$$

Auf Grund von (3) ist dann, wenn wir die kleinste der beiden positiven Zahlen $\sigma_0-\sigma_1$ und $\sigma_1-(\sigma_0-1)$ mit a bezeichnen und $|t|<T$ berücksichtigen,

$$\left|\int\limits_{\sigma_1+2Ti}^{\sigma_1+i\infty}\frac{f(z)e^{i\lambda(y-t)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz\right|\leqq\int\limits_{2T}^{\infty}\frac{C\left(\frac{y}{2}\right)^{m-\frac{1}{2}}dy}{[a^2+(y-t)^2]^{\frac{m+1}{2}}}<C\int\limits_{2T}^{\infty}\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{m-\frac{1}{2}}dy}{\left(\frac{y}{2}\right)^{m+1}}=\frac{4C}{\sqrt{T}}$$

und daher

$$(6) \qquad |\varphi_2| < \frac{8\,C}{\sqrt{T}}.$$

Für φ_1 erhalten wir die Abschätzung

$$|\varphi_1| \leqq \int\limits_{-2T}^{+2T} \frac{|f(\sigma_1+iy)|}{[a^2+(y-t)^2]^{\frac{m+1}{2}}}\,dy,$$

also nach der Schwarzschen Ungleichung

$$|\varphi_1|^2 \leqq \int\limits_{-2T}^{+2T} \frac{|f(\sigma_1+iy)|^2}{a^2+(y-t)^2}\,dy \int\limits_{-2T}^{+2T} \frac{dy}{[a^2+(y-t)^2]^m}.$$

Wegen

$$\int\limits_{-2T}^{+2T} \frac{dy}{[a^2+(y-t)^2]^m} \leqq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(a^2+u^2)^m} < \frac{\pi}{a^{2m-1}}$$

ist also

$$|\varphi_1|^2 \leqq \frac{\pi}{a^{2m-1}} \int\limits_{-2T}^{+2T} \frac{|f(\sigma_1+iy)|^2}{a^2+(y-t)^2}\,dy.$$

Bezeichnen wir

$$\frac{1}{2\,T} \int\limits_{-T}^{+T} |f(\sigma_1+iy)|^2\,dy = K(T),$$

dann ergibt sich

$$\frac{1}{2\,T} \int\limits_{-T}^{+T} |\varphi_1|^2\,dt < \frac{\pi}{a^{2m-1}}\,\frac{1}{2\,T} \int\limits_{-2T}^{+2T} |f(\sigma_1+iy)|^2\,dy \int\limits_{-T}^{+T} \frac{dt}{a^2+(y-t)^2} < \frac{2\,\pi^2}{a^{2m}}\,K(2\,T).$$

Auf Grund von (6) haben wir

$$|\varphi_1+\varphi_2|^2 \leqq |\varphi_1|^2 + \frac{16\,C}{\sqrt{T}}\,|\varphi_1| + \frac{64\,C^2}{T},$$

und wegen

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|\varphi_1|\,dt \leqq \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|\varphi_1|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\pi}{a^m}\sqrt{2K(2T)}$$

erhalten wir

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|\varphi_1+\varphi_2|^2dt < \frac{2\pi^2}{a^{2m}}K(2T) + \frac{16C}{\sqrt{T}}\frac{\pi}{a^m}\sqrt{2K(2T)} + \frac{64C^2}{T}.$$

Wegen

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|\varphi(\sigma_0+it)|^2dt = \frac{e^{2\lambda(\sigma_1-\sigma_0)}}{4\pi^2}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|\varphi_1+\varphi_2|^2dt$$

liefert also der Grenzübergang $T\to\infty$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|\varphi(\sigma_0+it)|^2dt \leqq \frac{1}{2a^{2m}}e^{2\lambda(\sigma_1-\sigma_0)}\limsup_{T\to\infty}K(2T) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2a^{2m}}e^{2\lambda(\sigma_1-\sigma_0)}K_{\sigma_1}.$$

Wenn wir nun der Grösse λ eine Folge von Werten

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \qquad (\lambda_k\to\infty)$$

erteilen, konvergiert die rechte Seite von (7) gegen Null. Die Funktion $f(\sigma_0+it)$ ist also im Mittel durch die Folge von fastperiodischen Funktionen

$$\Phi_k(t) = \psi(\sigma_0+it,\lambda_k) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

approximierbar, d. h. $f(\sigma_0+it)$ ist eine generalisiert fastperiodische Funktion. Um den Beweis unserer Behauptung

$$M\{|f(\sigma_0+it)|^2\} = \Sigma|A_n|^2e^{2\Lambda_n\sigma_0}$$

zu vollenden, haben wir daher nur noch nachzuweisen, dass die (generalisiert fastperiodische) Funktion $f(\sigma_0+it)$ die »richtige» Fourierreihe, d. h. die Fourierreihe

$$\Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0+it)}$$

besitzt. Dies ergibt sich ohne irgendwelche Rechnung durch die folgende Überlegung. Bei einem festen σ^* aus $\alpha<\sigma<\gamma$ wissen wir, dass die Fourierreihe der (sogar im Bohrschen Sinne fastperiodischen) Funktion $f(\sigma^*+it)$ durch $\Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma^*+it)}$ gegeben wird. Da aber die obigen (von σ_0 unabhängigen) fastperiodischen Funktionen $\psi(s, \lambda_m)$, wie aus der obigen Rechnungen sofort zu ersehen ist, für $s=\sigma^*+it$ fastperiodische Funktionen ergeben, die für $m\to\infty$ im Mittel gegen $f(\sigma^*+it)$ konvergieren, müssen für $s=\sigma^*+it$ ihre Fourierreihen durch den formalen Grenzübergang $m\to\infty$ in die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma^*+it)}$ übergehen. Hieraus folgt aber sofort (indem einfach der Buchstabe σ^* durch σ_0 ersetzt wird), dass die Fourierreihe von $\psi(\sigma_0+it, \lambda_m)$ für $m\to\infty$ formal in die Reihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0+it)}$ übergeht, so dass diese letzte Reihe also tatsächlich die Fourierreihe von $f(\sigma_0+it)$ darstellt.

Wir bemerken schliesslich, dass in dem obigen Satze die Voraussetzung, dass $f(s)$ im Streifen $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ *regulär* sei, durch die geringere Voraussetzung ersetzt werden kann, dass sie in diesem Streifen nur *endlich viele Pole* besitze. Bei der Bildung des Mittelwertes $M\{|f(\sigma_0+it)|^2\}$ sollen etwaige Pole auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ mit Hilfe kleiner Intervalle ausgeschnitten werden.

An Stelle der Gleichung (5) tritt hier die Gleichung

$$f(s)-\psi(s,\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1+\infty i}\frac{f(z)e^{\lambda(z-s)}\,dz}{(z-s)(z-s+1)^m}-P(s),$$

wo $P(s)$ die Summe der Residuen einiger Pole der Funktion

$$\frac{f(z)e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}$$

ist (und etwaige Pole auf dem Integrationswege durch kleine Halbkreise umgangen werden).

Es ist leicht einzusehen, dass $P(s)$ ein mit $e^{-\lambda s}$ multiplizierter echter Bruch in s ist, und dass daher

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|P(\sigma_0+it)^2|\,dt\to 0 \quad \text{für} \quad T\to\infty.$$

Die Funktion $f(\sigma_0+it)$ ist also auch in diesem Falle durch die oben angegebene Funktion $\Phi_m(t)$ im Mittel approximierbar, so dass alle obigen Schlüsse unverändert bestehen bleiben.

§ 2.

Der verallgemeinerte Satz lautet:

Eine in einem Streifen $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ (bis auf höchstens endlich viele Pole) reguläre analytische Funktion, die für jedes σ aus $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ einen endlichen

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |f(\sigma+it)|^2 dt = K_\sigma$$

besitzt, und gleichmässig von endlicher Ordnung in t ist, möge auf einer einzigen Geraden $\sigma=\sigma_2$ generalisiert fastperiodisch sein, etwa mit der Fourierreihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma_2+it)}$.

Dann ist sie auf jeder Geraden $\sigma=\sigma_0$ des Streifens generalisiert fastperiodisch mit der »entsprechenden» Fourierreihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0+it)}$, so dass bei jedem σ_0 des Intervalles $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ die Parsevalsche Gleichung

$$M\{|f(\sigma_0+it)|^2\} = \Sigma|A_n|^2 e^{2\Lambda_n\sigma_0}$$

besteht.

Wir können beim Beweise annehmen, dass es keine Pole im Streifen gibt; die Verallgemeinerung auf Pole verläuft ganz wie in § 1. Wir nehmen z. B. $\sigma_0<\sigma_2$ an und erhalten wörtlich wie in § 1 die Darstellung

$$f(\sigma_0+it) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{f(z)e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \frac{f(z)e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz,$$

wo σ_1 eine feste Abszisse aus dem Intervalle $\mathrm{Max}(\alpha_1, \sigma_0-1)<\sigma<\sigma_0$ bezeichnet.

Im zweiten Integral ist die Funktion $f(z)=f(\sigma_2+iy)$, nach Annahme, eine generalisiert fastperiodische Funktion von y; wir können sie daher, bei beliebig vorgegebenem $\delta>0$, in der Form schreiben

$$f(z) = f_1(z) + R(z),$$

wo $f_1(z)$ eine gewöhnliche fastperiodische Funktion bedeutet, wärend der Rest

$R(z)$ generalisiert fastperiodisch ist und der Relation

$$M\{|R(z)|^2\} = M\{|R(\sigma_2+iy)|^2\} < \delta$$

genügt. Wie in § 1 wird dann die Funktion

$$\psi(s, \lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \frac{f_1(z)e^{\lambda(z-s)}dz}{(z-s)(z-s+1)^m}$$

auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ fastperiodisch sein, und wir bekommen

$$f(\sigma_0+it)-\psi(\sigma_0+it, \lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{f(z)e^{\lambda(z-s)}dz}{(z-s)(z-s+1)^m} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} \frac{R(z)e^{\lambda(z-s)}}{(z-s)(z-s+1)^m}dz.$$

Die zwei Integrale auf der rechten Seite sind beide von derselben Art. Wie in § 1 können wir bei gegebenem ε das λ so gross wählen, dass der Mittelwert des Quadrates des ersten Integrales kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$ ist, und nachdem λ festgelegt ist, können wir (nach derselben Methode) das δ so klein wählen, dass der Mittelwert des Quadrates des zweiten Integrales ebenfalls $< \frac{\varepsilon}{4}$ ausfällt. Dann ist

$$M\{|f(\sigma_0+it)-\psi(\sigma_0+it, \lambda)|^2\} < \varepsilon.$$

Hiermit ist gezeigt, dass $f(\sigma_0+it)$ im Mittel durch fastperiodische Funktionen angenähert werden kann, d. h. dass $f(\sigma_0+it)$ generalisiert fastperiodisch ist. Es erübrigt zu beweisen, dass $f(\sigma_0+it)$ die »richtige» Fourierreihe besitzt, d. h. die Fourierreihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0+it)}$, welche mit der gegebenen Fourierreihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma_2+it)}$ der Funktion $f(\sigma_2+it)$ »übereinstimmt».

Den Nachweis hierfür erbringen wir in ähnlicher Weise wie in § 1. Wir führen eine Hilfsgerade $\sigma=\sigma^*$ ein, welche zur selben Seite von $\sigma=\sigma_2$ wie $\sigma=\sigma_0$ gelegen ist, und zwar weiter entfernt (aber immer noch im Streifen $\alpha_1<\sigma<\beta_1$).

Dann ist klar, dass die Fourierreihen von $f(\sigma_0+it)$ und $f(\sigma^*+it)$ mit einander übereinstimmen (weil wir beidemal dieselben fastperiodischen Approximationsfunktionen $\psi(s, \lambda)$ benutzen können). Nun wissen wir aber, dass $f(s)$ auch auf der Geraden $\sigma=\sigma^*$ generalisiert fastperiodisch ist, und wir können daher durch genau denselben Schluss ersehen, dass die Fourierreihen von $f(\sigma_0+it)$ und $f(\sigma_2+it)$ übereinstimmen, weil ja die Geraden $\sigma=\sigma_0$ und $\sigma=\sigma_2$ beide zur selben Seite von der Geraden $\sigma=\sigma^*$ liegen.

Verzeichnis der zitierten Literatur.

A. Besicovitsch. On generalised almost periodic functions. Proceedings of London Mathematical society 1926.

H. Bohr [1]. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. Acta math. Bd. 45 (1924).

[2]. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II. Acta math. Bd. 46 (1925).

[3]. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III. Acta math. Bd. 47.

F. Carlson [1]. Contributions à la théorie des séries de Dirichlet. Ark. för mat., astr. och fys. Bd. 16. 1922.