ÜBER DIE FOURIERKOEFFIZIENTEN EINER STETIGEN FUNKTION.

(Aus einem Brief an Herrn A. WIMAN.)

VON

TORSTEN CARLEMAN

in UPPSALA.

Vor einiger Zeit haben Sie die Frage aufgeworfen, ob die Ordnung des zu einem stetigen Kern gehörigen FREDHOLM'schen Nenners die obere Schranke 2 erreichen kann. Ich werde im folgenden ein Beispiel angeben, für das diese Grenze tatsächlich erreicht wird. Das Beispiel hängt übrigens mit einer Konvergenzfrage betreffend die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion zusammen, welche vielleicht auch an und für sich nicht ohne Interesse ist.

Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ definierte Funktion, deren Quadrat integrierbar ist. Bekanntlich konvergiert die Reihe

$$\sum (a_n^2 + b_n^2),$$

wo a_n und b_n die Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos n x \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin n x \, dx$$

bedeuten. Nach dem FISCHER-RIESZ'schen Satze kann man keinen Exponenten $2 - \delta$ $(\delta > 0)$ finden, so dass

$$\sum (|a_n|^{2-\delta} + |b_n|^{2-\delta})$$

für alle quadratisch integrierbaren Funktionen konvergiert. Betrachtet man hingegen nur Funktionen $f(x)$ von beschränkter Schwankung, so wissen wir, dass es eine Konstante c gibt, so beschaffen, dass

$$|a_n| < \frac{c}{n}, \quad |b_n| < \frac{c}{n}.$$

Folglich konvergiert in diesem Falle die Reihe

$$\sum (|a_n|^{1+\varepsilon} + |b_n|^{1+\varepsilon})$$

für jedes positive ε. M. a. W. der Konvergenzexponent der Folge a_n, b_n ist hier höchstens gleich Eins. So wird man zu der Frage geführt: Welche ist die obere Grenze der Konvergenzexponenten, wenn $f(x)$ die Gesamtheit der stetigen Funktionen durchläuft?

Diese Grenze ist 2. Ich werde in der Tat eine stetige Funktion angeben, bei der

$$\sum (|a_n|^{2-\delta} + |b_n|^{2-\delta})$$

für alle positive δ divergiert.

Die wesentlichste Schwierigkeit bei dieser Konstruktion ist durch den folgenden Satz von S. Bernstein[1] erledigt. Sei p eine ungerade Primzahl von der Form $4\mu + 1$ und $\left(\frac{k}{p}\right)$ das zahlentheoretische Symbol von Legendre $\left(\left(\frac{k}{p}\right) = +1\right.$ oder -1, je nachdem k in bezug auf p quadratischer Rest oder Nichtrest ist$\left.\right)$. Dann hat das trigonometrische Polynom

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{p-1} (p-k) \left(\frac{k}{p}\right) \cos kx = \sum_{k=1}^{p-1} a_k^{(p)} \cos kx$$

folgende Eigenschaften:

$$|f_p(x)| < 1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} |a_k^{(p)}| = \frac{p-1}{\sqrt{p}}. \tag{2}$$

Ich behaupte, dass die Reihe

[1] C. R. Juin 1914.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} f_{p_\nu}(x) = F(x) \tag{3}$$

die erwünschte Eigenschaft besitzt. Dabei bedeutet $p_1, p_2, \ldots p_\nu, \ldots$ eine wachsende Folge ungerader Primzahlen von der Form $4\mu + 1$, die noch folgenden Bedingungen genügen

$$p_n > e^n, \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{p_{n-1}-1} |a_\nu^{(p_n)}| < 1. \tag{5}$$

Dass es immer möglich ist (5) zu erfüllen, folgt daraus, dass bei festgehaltenem k

$$\lim_{p=\infty} |a_k^{(p)}| = \lim_{p=\infty} \frac{2(p-k)}{p^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Da wegen (1) die Reihe (3) offenbar gleichmässig konvergiert, so ist $F(x)$ eine stetige Funktion, deren Fourierkoeffizienten, die wir mit A_n, B_n bezeichnen wollen, durch die Relationen

$$A_0 = 0,$$

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_n^{(p_\nu)}}{\nu^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$B_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gegeben sind. Die Summe

$$S_{p_n-1} = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{p_n-1}|$$

lässt sich nun, bei Berücksichtigung, dass $a_k^{(p_\nu)} = 0$ für $k \geq p_\nu$, folgendermassen abschätzen:

$$S_{p_n-1} \geq \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |A_k| = \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_k^{(p_\nu)}}{\nu^2} \right| = \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} \left| \frac{a_k^{(p_n)}}{n^2} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_k^{(p_\nu)}}{\nu^2} \right| > \frac{1}{n^2} \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |a_k^{(p_n)}| -$$

$$- \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |a_k^{(p_\nu)}|}{\nu^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{p_n-1} |a_k^{(p_n)}| - \frac{\sum\limits_{k=1}^{p_{n-1}-1} |a_k^{(p_n)}|}{n^2} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |a_k^{(p_\nu)}|}{\nu^2}.$$

Berücksichtigen wir, dass gemäss (2) und (5)

$$\sum_{k=1}^{p_n-1} |a_k^{(p_n)}| = \frac{p_n - 1}{\sqrt{p_n}}, \qquad \sum_{k=1}^{p_{n-1}-1} |a_k^{(p_n)}| < 1,$$

$$\sum_{k=p_{n-1}}^{p_n-1} |a_k^{(p_\nu)}| < 1, \qquad (\nu = n+1, n+2, \ldots)$$

so ergibt sich

$$S_{p_n - 1} > \frac{p_n - 1}{n^2 \sqrt{p_n}} - \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} > \frac{p_n - 1}{n^2 \sqrt{p_n}} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

Da aber $n < \log p_n$, folgt hieraus schliesslich, dass für genügend grosse n

$$S_{p_n - 1} > \frac{\sqrt{p_n}}{2 \log^2 p_n}$$

ist. Wir können somit behaupten: Es gibt unendlich viele positive ganze Zahlen m, für welche

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| > \frac{\sqrt{m}}{2 \log^2 m}. \tag{6}$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{2-\delta} \qquad (\delta > 0)$$

divergiert. Denn wäre sie konvergent, so gäbe es eine von n unabhängige Zahl L derart, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n} |A_\nu|^{2-\delta} < L$$

und es wäre nach einer bekannten Ungleichung

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |A_\nu|^{2-\delta}\right)^{\frac{1}{2-\delta}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} 1\right)^{\frac{1-\delta}{2-\delta}} < L^{\frac{1}{2-\delta}} n^{\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2(2-\delta)}},$$

was offenbar dem Resultat (6) widerspricht.

Wir kehren nun zu der am Anfang erwähnten Frage zurück. Man bestätigt leicht, dass die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

mit dem stetigen Kern

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi}(F(x-y) - F(x+y)),$$

die Eigenfunktionen $\sin kx$ und die entsprechenden Eigenwerten $\lambda_k = \frac{1}{A_k}$ besitzt. Da also die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i|^{2-\delta}}$$

für alle $\delta > 0$ divergiert, kann die Ordnung der zugehörigen FREDHOLM'schen Nenner nicht kleiner als 2 sein.

Man kann mit Hilfe der Funktion $F(x)$ noch folgende Frage beantworten. Es sei $K(x,y)$ ein für $0 \leq {x \atop y} \leq \pi$ definierter reeller symmetrischer Kern so beschaffen, dass

$$\int_0^\pi\int_0^\pi (K(x,y))^2\,dx\,dy \tag{7}$$

konvergiert. Die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen bezeichnen wir mit λ_ν bzw. $\varphi_\nu(x)$. Ferner möge $u(x)$ eine beliebige stetige Funktion sein. Dann gelten die Entwicklungssätze:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi K(x,y)\,u(x)\,u(y)\,dx\,dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}\left(\int_0^\pi u(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx\right)^2, \tag{8}$$

$$\int_0^\pi K(x,y)\,u(y)\,dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}\int_0^\pi u(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx\,.\,\varphi_\nu(x). \tag{9}$$

Die Reihen rechter Hand sind absolut konvergent. Es ist bei den Beweisen von HILBERT und SCHMIDT wesentlich vorausgesetzt, dass das Doppelintegral (7) konvergiert. Es erhebt sich die Frage, ob diese Sätze auch für allgemeinere Kerne gelten, etwa für Kerne von der Form

$$K(x,y) = \frac{H(x,y)}{|x-1|^\alpha} \qquad \left(\frac{1}{2} < \alpha < 1\right), \tag{10}$$

worin $H(x,y)$ beschränkt bleibt. Der erste Satz (8) ist auch in diesem Falle gültig,[1] der zweite aber nicht, was das folgende Beispiel zeigt. Man setze

$$(11)\qquad K(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\nu x\cos\nu y}{\nu^{1-\alpha}} = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu(x+y)+\cos\nu(x-y)}{\nu^{1-\alpha}}.$$

Ferner wird statt $u(x)$ die oben besprochene Funktion $F(x)$ gesetzt. Es ist leicht zu bestätigen, dass $K(x,y)$ in der Form (10) dargestellt werden kann. Die Reihe (9) ist in diesem Falle

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{\nu^{1-\alpha}}\cos\nu x.$$

Damit diese Reihe für alle x absolut konvergiere (oder für x-Werte die eine Punktmenge bilden, deren Mass grösser als Null ist), ist notwendig und hinreichend, dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|A_\nu|}{\nu^{1-\alpha}}$$

konvergiert.[2] Diese Reihe divergiert aber für $\alpha > \frac{1}{2}$. Denn es gilt für unendlich viele m

$$\sum_{\nu=1}^{m}\frac{|A_\nu|}{\nu^{1-\alpha}} > \frac{1}{m^{1-\alpha}}\sum_{\nu=1}^{m}|A_\nu| > \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2\,m^{1-\alpha}\log^2 m} = \frac{m^{\alpha-\frac{1}{2}}}{2\log^2 m}.$$

Ich will schliesslich noch die BERNSTEIN'sche Konstruktion auf ein Problem anwenden, das die im Einheitskreise beschränkten Potenzreihen betrifft. Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion, welche der Bedingung

$$(12)\qquad |f(z)| < 1 \qquad (|z| < 1)$$

genügt. LANDAU hat die obere Grenze von $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ bei der Bedingung (12) genau bestimmt, und diese obere Grenze ist von der Grössenordnung $\log n$. Ich will nun an einem Beispiel zeigen, dass die Grössenordnung der oberen Grenze (G_n) von

$$\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|$$

---

[1] Vgl. CARLEMAN, Über das Neumann-Poincarésche Problem etc. Diss. Uppsala 1916. S. 45.

[2] FATOU. Bull. de la soc. math. de France 1913.

nicht erheblich kleiner als $\sqrt{n}$ sein kann. Dass sie nicht grösser ist, folgt leicht aus der bekannten Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Herr FEKETE[1] hat in einer anders gerichteten Untersuchung gelegentlich den folgenden Satz ausgesprochen: Es sei $\varphi(x)$ eine nach 2π periodische, beschränkte, im RIEMANN'schen Sinne integrierbare Funktion von x und

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

die zu ihr gehörige Fourierreihe. Dann ist

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} (-b_\nu \cos \nu x + a_\nu \sin \nu x)\right| \leq CM \log n,$$

wo M die obere Grenze von $|\varphi(x)|$ und C eine von M und n unabhängige Konstante bedeutet.[2]

Da ich mich auf diesen Satz stützen will, füge ich dessen Beweis hier ein.

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} (-b_\nu \cos \nu x + a_\nu \sin \nu x)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu(x-s)\right)\varphi(s)\,ds\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{n(x-s)}{2}\sin\frac{(n+1)(x-s)}{2}}{\sin\frac{x-s}{2}}\varphi(s)\,ds\right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\frac{n(x-s)}{2}}{\sin\frac{x-s}{2}}\right| ds = \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\frac{ns}{2}\right|}{\sin\frac{s}{2}}\,ds.$$

Bekanntlich ist das Integral in der letzten Zeile kleiner als $C \log n$.

---

[1] Journal für Mathematik 146.

[2] Die Funktion

$$\varphi(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

zeigt übrigens, dass eine bessere Grössenordnung nicht zu erzielen ist, da für $x = 0$

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \cdots + \frac{\cos nx}{n} \backsim \log n.$$

Ich betrachte nun das Polynom

$$\frac{1}{2C\log p}\cdot\frac{2}{p^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{p-1}(p-k)\left(\frac{k}{p}\right)z^k=\sum_{\nu=1}^{p-1}a_\nu z^\nu,$$

dessen Realteil für $z=e^{i\theta}$ gleich $\frac{1}{2C\log p}f_p(\theta)$ wird. Der Satz von FEKETE ergibt nun bei Berücksichtigung der Ungl. (1), dass

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p-1}a_\nu z^\nu\right|<1 \qquad (|z|<1)$$

ist. Da ferner

$$\sum_{\nu=1}^{p-1}|a_\nu|=\frac{1}{2C\log p}\cdot\frac{p-1}{\sqrt{p}}=\frac{1}{2C\log p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sqrt{p},$$

können wir den Schluss ziehen

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log G_n}{\log n}=\frac{1}{2}.$$

Zürich den 6. Dezember 1917.