ZUR THEORIE DER LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG VOM ELLIPTISCHEN TYPUS. DIE ERSTE RANDWERTAUFGABE FÜR ANALYTISCHE GEBIETE MIT ECKEN.

VON

LEON LICHTENSTEIN

in BERLIN.

Es sei T_0 ein von einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurven, die einander weder schneiden noch berühren, begrenztes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene der Variablen X und Y. Die Gesamtheit der Begrenzungskurven von T_0 sei mit S_0 bezeichnet. Es mögen A, B, C, F stetige Funktionen von X und Y bezeichnen; A und B haben in T_0 und auf S_0 stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, C und F erfüllen in jedem ganz im Innern von T_0 gelegenen Gebiete die HÖLDER'sche Bedingung

$$(1)\qquad \begin{aligned} &|C(X+h,\ Y+h')-C(X,\ Y)|<\beta[|h|+|h'|]^{\lambda}, \\ &|F(X+h,\ Y+h')-F(X,\ Y)|<\beta[|h|+|h'|]^{\lambda}, \quad 0<\lambda<1. \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet β eine gewisse positive Grösse. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+A\frac{\partial U}{\partial X}+B\frac{\partial U}{\partial Y}+CU=F.$$

Die Bestimmung derjenigen Lösung der Differentialgleichung (2), die in T_0 und auf S_0 stetig ist, auf S_0 verschwindet und deren partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung im Innern von T_0 sich stetig verhalten, ist von den Herren HILBERT und PICARD auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückgeführt worden.[1] Haben die vorgeschriebenen Randwerte, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung, so führt die Substitution

$$U(X,\ Y) = U_1(X,\ Y) + v_0(X,\ Y), \tag{3}$$

worin v_0 die in T_0 reguläre Potentialfunktion mit gleichen Randwerten bezeichnet, das Problem auf das vorerwähnte zurück.

Sind die vorgeschriebenen Randwerte schlechthin stetig, oder, noch allgemeiner, beschränkt und integrierbar, so führt, da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v_0}{\partial X}, \frac{\partial v_0}{\partial Y}$ am Rande im allgemeinen nicht existieren, die Substitution (3) nicht mehr zum Ziele.

In einer in den Mathematischen Annalen veröffentlichten Arbeit, sowie in einer Note in den Comptes rendus habe ich den Existenzbeweis der Lösung für abteilungsweise stetige Randwerte geführt.[2] In einer weiteren kurz darauf erschienenen Note[3] habe ich den besonderen Fall eines Gebietes behandelt, welches durch Vermittelung einer analytischen Funktion von der Form

$$z - z_0 = (Z - Z_0)^\nu\, \mathfrak{P}[(Z - Z_0)^\nu],\quad \mathfrak{P}(0) \neq 0,\quad \nu > 0 \tag{4}$$

auf den Einheitskreis konform abgebildet werden kann. Diese Untersuchung soll in der vorliegenden Arbeit auf allgemeinere Gebiete mit Ecken ausgedehnt werden.

Das Randwertproblem wird durch geeignete Modifikation der von den Herren HILBERT und PICARD zuerst eingeführten Methode der teilweisen Integration auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung mit unstetigem Kerne zurückgeführt. Es ist in unserem Falle der Gebiete mit Ecken nicht möglich, durch

---

[1] Vergl. HILBERT, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Gött. Nachr., 1904, S. 248 u. ff., PICARD, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1906, S. 250—254, und Annales de l'Ecole Normale, 1906, S. 509 u. ff.

[2] Vergl., Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus, Math. Annalen, 1909, S. 559—575, ferner, Sur la détermination des intégrales de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$ par leurs valeurs le long d'un contour fermé, Comptes rendus, 18. 10. 1909.

[3] Sur la détermination des intégrales de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$ par leurs valeurs le long d'un contour fermé dans le cas des pointes, Comptes rendus, 29. 11. 1909.

wiederholte Iteration zu einem stetigen Kerne zu gelangen. Nichts desto weniger führt, wie ich in der zweiten der soeben genannten Noten zuerst nachgewiesen habe, die FREDHOLM'sche Methode unmittelbar zum Ziele. Der Behandlung der erwähnten Integralgleichung, insbesondere der genauen Durchführung der etwas schwierigen Iteration ist ein beträchtlicher Teil des ersten Kapitels gewidmet. In dem zweiten Kapitel wird zunächst die GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (2) gebildet; sodann wird ihr Verhalten bei einer unendlich kleinen Aenderung der Form des Gebietes untersucht. Auf die Ergebnisse dieser Betrachtungen gestützt, wird schliesslich, in diesem Umfange zum ersten Male, die bekannte Fundamentalformel bewiesen, welche die Lösung der Differentialgleichung (2) als Funktion ihrer Randwerte angibt. Die bekannten Beweise dieser Formel setzen stillschweigend stetig gekrümmte Gebiete und Randwerte, welche, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetig sind und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben, voraus.

Hiermit ist das erste Randwertproblem vollständig erledigt. Die soeben genannte Fundamentalformel gestattet, wie ich an einer anderen Stelle gezeigt habe, eine Anzahl anderer Randwertaufgaben, darunter die Bestimmung periodischer und doppeltperiodischer Lösungen auf die Auflösung linearer Integralgleichungen zurückzuführen.

Kapitel I. Die Auflösung des ersten Randwertproblems.

§ 1.

Es sei T ein einfach zusammenhängendes, von einer endlichen Anzahl Stücke regulär analytischer Linien[1] begrenztes Gebiet ohne Spitzen.[2] Die Randkurwe von T soll mit S bezeichnet sein.

Wie ich an einer anderen Stelle bewiesen habe, gilt nun der folgende Satz:[3]

Es sei $z = z(Z) = x(X, Y) + iy(X, Y) = x + iy$ eine analytische Funktion, durch deren Vermittelung das Gebiet T in der Ebene (X, Y) auf die Fläche K des Einheitskreises in der Ebene (x, y) konform abgebildet werden kann. Die Peripherie von K sei mit C bezeichnet. Es mögen $A_1 = (X_1, Y_1), \dots A_k = (X_k, Y_k)$

[1] Durch die Bezeichnung »regulär analytisch» soll angedeutet werden, dass jedes Kurvenstück über die beiden auf ihm liegenden Ecken hinaus analytisch fortgesetzt werden kann.

[2] Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur einfach zusammenhängende Gebiete. Am Schluss dieses Kapitels wird der allgemeine Fall eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes kurz erledigt werden.

[3] Vrgl. die inzwischen erschienene Abhandlung des Verfassers, Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken, Journal für Mathematik 1910, S. 100—119.

die Eckpunkte von T sein; $\alpha_1\pi, \ldots \alpha_k\pi$ mögen die Winkel, welche die Seiten von S entsprechend in $A_1, \ldots A_k$ einschliessen, bezeichnen. Es ist $0 < \alpha_1 \leqq 2, \ldots 0 < \alpha_k \leqq 2$. Den Punkten A_i, $(i = 1, \ldots k)$ mögen in der Ebene (x, y) die Punkte $B_i = (x_i, y_i)$, $(i = 1, \ldots k)$ entsprechen. *Man kann dann setzen*

$$\frac{dz}{dZ} = \prod_{i=1}^{k} (Z - Z_i)^{\frac{1}{\alpha_i} - 1} \tau_1(Z), \tag{5}$$

oder auch

$$\frac{dz}{dZ} = \prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{1-\alpha_i} \tau_2(z), \quad z_i = p_i + q_i i. \tag{6}$$

Die Funktion $\tau_1(Z)$ ist in T regulär und auf S stetig. Desgleichen ist $\tau_2(z)$ in K regulär und auf C stetig. Das Minimum des absoluten Betrages der Funktionen $\tau_1(Z)$ und $\tau_2(z)$ ist von Null verschieden.

Es sei jetzt diejenige in T und auf S beschränkte, im Innern von T mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $U(X, Y)$ der Differentialgleichung (2) zu bestimmen, die auf S eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Folge von Werten annimmt.[1] Führt man durch die Gleichungen

$$x = x(X, Y), \quad y = y(X, Y) \tag{7}$$

x und y als neue unabhängige Veränderlichen ein und setzt man $U(X, Y) = u(x, y)$, so geht das zuerst vorgelegte Problem in das folgende über:

Es ist diejenige in K und auf C beschränkte, im Innern von K mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(A \frac{\partial X}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(A \frac{\partial X}{\partial y} + B \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + C u \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right] = F \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{8}$$

[1] Ist die Randfunktion beschränkt und im LEBESGUE'schen Sinne integrierbar, so lautet die Randbedingung genauer: die Lösung $U(X, Y)$ soll bei der Annäherung an den Rand längs einer beliebigen, die Begrenzung nicht berührenden Kurve, ausser höchstens in einer Punktmenge vom Masse Null, die vorgeschriebenen Werte annehmen. Es sei vorübergehend die Randfunktion mit $\varphi(s)$ bezeichnet. Wie sich bald zeigen wird, nimmt $U(X, Y)$ jedenfalls in allen denjenigen Punkten die vorgeschriebenen Werte wirklich an, in denen $\varphi(s)$ die Ableitung des unbestimmten Integrals $\int \varphi(s)\,ds$ darstellt, insbesondere also in allen Stetigkeitspunkten von $\varphi(s)$.

zu bestimmen, die auf C eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolge annimmt.[1]

Wir schreiben zur Vereinfachung

$$a(x, y) = A \frac{\partial X}{\partial x} + B \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad b(x, y) = A \frac{\partial X}{\partial y} + B \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad c(x, y) = C\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$(9) \quad f(x, y) = F\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right], \quad d(x, y) = \frac{\partial a(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial b(x, y)}{\partial y} - c(x, y) =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{\partial B}{\partial Y} - C\right],$$

somit

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial x}{\partial y} + cu = f.$$

Die Funktionen a und b haben im Innern und auf dem Rande von K, ausser in den Punkten B_i, $(i = 1, \dots k)$, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Die Funktionen c, d und f sind in K und auf C, ausser in den Punkten B_i stetig; c und f erfüllen im Innern von K die HÖLDER'sche Bedingung. Es sei vorübergehend $r_i = \sqrt{(p - p_i)^2 + (q - q_i)^2}$ gesetzt. Beachten wir die Formel (6), so finden wir

$$(11) \qquad a(p, q) = \prod_{i=1}^{k} r_i^{a_i - 1} \pi(p, q), \quad b(p, q) = \prod_{i=1}^{k} r_i^{a_i - 1} \nu(p, q),$$

$$c(p, q) = \prod_{i=1}^{k} r_i^{2(a_i - 1)} \vartheta(p, q),$$

$$(12) \qquad d(p, q) = \prod_{i=1}^{k} r_i^{2(a_i - 1)} \mu(p, q), \quad f(p, q) = \prod_{i=1}^{k} r_i^{2(a_i - 1)} \varepsilon(p, q).$$

Die Funktionen $\pi, \nu, \vartheta, \mu, \varepsilon$ sind im Innern und auf dem Rande von K beschränkt und, ausser etwa in den Punkten B_i, stetig.

Es sei C' der Kreis um den Koordinatenursprung in der Ebene (x, y) vom Halbmesser $1 - \delta$. Das von ihm begrenzte Gebiet sei mit K' bezeichnet. Es sei ferner (x, y) ein Punkt im Innern von K'. Wir bezeichnen mit $G'(x, y; p, q)$ die zu dem Gebiete K' gehörige GREEN'sche Funktion im engeren Sinne, mit $v'(x, y)$ diejenige im Innern von K' reguläre Potentialfunktion, die auf C' dieselben Werte

[1] Vrgl. die vorhergehende Fussnote.

wie die Funktion $u(x, y)$ annimmt. Einer bekannten Formel der Potentialtheorie zufolge ist

$$(13)\qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K'} G'(x, y; p, q)\left[a(p, q)\frac{\partial u}{\partial p} + b(p, q)\frac{\partial u}{\partial q} + \right.$$

$$\left. + c(p, q)u(p, q) - f(p, q)\right] dp\,dq + v'(x, y),$$

oder nach einer teilweisen Integration

$$(14)\qquad u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K'}\left[\frac{\partial G'(x, y; p, q)}{\partial p}a(p, q) + \frac{\partial G'(x, y; p, q)}{\partial q}b(p, q) + \right.$$

$$\left. + d(p, q)G'(x, y; p, q)\right]u(p, q)\,dp\,dq + v'(x, y) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K'} f(p, q)G'(x, y; p, q)\,dp\,dq.$$

Es sei $v(x, y)$ diejenige beschränkte, im Innern von K reguläre Potentialfunktion, welche auf C, ausser in den Unstetigkeitsstellen der Randfunktion, die vorgeschriebenen Randwerte annimmt.[1] Es sei ferner $G(x, y; p, q)$ die zu K gehörige GREEN'sche Funktion im engeren Sinne. Lassen wir jetzt die Grösse δ gegen Null, somit den Kreis K' gegen den Einheitskreis K konvergieren und sehen wir zu, welche die Grenzwerte der einzelnen Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (14) sind.

Nach einer bekannten Formel der Potentialtheorie ist

$$(15)\quad v(x, y) - v'(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial G'(x, y; p_0, q_0)}{\partial n}[v(p_0, q_0) - v'(p_0, q_0)](1-\delta)\,d\theta.$$

Hierin bezeichnen: p_0, q_0 die Koordinaten eines variablen Punktes auf C', $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale im Punkte (p_0, q_0). Wir lassen jetzt beim festgehaltenen Verhältnis $\frac{p_0}{q_0}$ die Grösse δ gegen Null konvergieren. Alsdann ist zunächst

$$(16)\qquad \lim_{\delta=0}\frac{\partial G'(x, y; p_0, q_0)}{\partial n} = \frac{\partial G(x, y; \bar p, \bar q)}{\partial n},\ \bar p = \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}},\ \bar q = \frac{q_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}.$$

[1] Ist die Randfunktion im LEBESGUE'schen Sinne integrierbar, so ist im allgemeinen eine gewisse Nullmenge von Randpunkten auszuschliessen. Vergl. FATOU, Séries trigonométriques et séries de TAYLOR, Acta Mathematica, Bd. 30 (1906).

Die Punkte (p_0, q_0) auf C' und $(\bar{p}, \bar{q})$ auf C liegen auf demselben Halbmesser von K.

Es ist weiter, ausser in den Unstetigkeitspunkten der Randfunktion,

$$\lim_{\delta=0} [v(p_0, q_0) - v'(p_0, q_0)] = 0.\text{[1]} \tag{17}$$

Ferner ist für alle hinreichend kleinen δ und alle θ

$$\left|\frac{\partial G'(x, y; p_0, q_0)}{\partial n}\right| < m_1, \qquad |v(p_0, q_0) - v_1(p_0, q_0)| < m_2, \tag{18}$$

worin m_1 und m_2 gewisse positive Werte bezeichnen.

Nach bekannten Sätzen ist

$$\lim_{\delta=0} [v(x, y) - v'(x, y)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial G(x, y; \bar{p}, \bar{q})}{\partial n} \lim_{\delta=0} [v(p_0, q_0)] - v'(p_0, q_0)] d\theta = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{\delta=0} v'(x, y) = v(x, y).\text{[2]} \tag{20}$$

Es sei, wie vorhin, (x, y) ein Punkt im Innern von K'.

Wir schreiben in der üblichen Weise

$$\begin{cases} G'(x, y; p, q) = \log \dfrac{1}{\sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}} + g'(x, y; p, q), \\ G(x, y; p, q) = \log \dfrac{1}{\sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}} + g(x, y; p, q). \end{cases} \tag{21}$$

Nunmehr betrachten wir die Differenz

$$I^{(1)} = \iint_K f(p, q)\, G(x, y; p, q)\, dp\, dq - \iint_{K'} f(p, q)\, G'(x, y; p, q)\, dp\, dq =$$

---

[1] In jedem die Unstetigkeitspunkte der Randfunktion nicht enthaltenden Teile von C ist der Grenzübergang gleichmässig.

[2] Diese Beziehung gilt, wie man leicht zeigen kann, auch wenn die Randfunktion beschränkt und im LEBESGUE'schen Sinne integrierbar ist.

$$(22) \qquad = \iint\limits_{K-K'} f(p,q)\,G(x,y;p,q)\,dp\,dq +$$
$$+ \iint\limits_{K'} f(p,q)\,[g(x,y;p,q) - g'(x,y;p,q)]\,dp\,dq = I^{(2)} + I^{(3)}.$$

$G(x, y; p, q)$ ist, als Funktion von (p, q) betrachtet, in dem Gebiete $K - K'$ stetig, die Funktion $f(p, q)$ wird nach (12) in den Punkten B_i, sofern $\alpha_i < 1$, wie $r_i^{2(\alpha_i - 1)}$ unendlich. Offenbar wird $I^{(2)}$ mit δ zugleich gleich Null. Beachten wir die bekannte Bedeutung der Funktionen $g(x, y; p, q)$ und $g'(x, y; p, q)$, so überzeugen wir uns leicht, dass man eine Zahl $\delta_1 > 0$ so klein wählen kann, dass für alle $\delta < \delta_1$ in allen Punkten (p, q) von K'

$$(23) \qquad |g(x,y;p,q) - g'(x,y;p,q)| < \varepsilon$$

wird. Daraus folgt aber

$$(24) \qquad |I^{(3)}| < \varepsilon \iint\limits_{K'} |f(p,q)|\,dp\,dq < \varepsilon \iint\limits_{K} |f(p,q)|\,dp\,dq = \gamma\varepsilon,$$

unter γ eine Konstante verstanden. *Es wird daher $I^{(3)}$, somit auch $I^{(1)}$ mit δ zugleich unendlich klein.*

In analoger Weise kann gezeigt werden, dass das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (14) für $\delta = 0$ gegen das Integral

$$(25) \qquad -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K} u(p,q) \Big[a(p,q) \frac{\partial G(x,y;p,q)}{\partial p} + b(p,q) \frac{\partial G(x,y;p,q)}{\partial q} +$$
$$+ d(p,q)\,G(x,y;p,q) \Big]\,dp\,dq$$

konvergiert. Beachten wir dies, so finden wir durch Grenzübergang

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K} u(p,q) \Big[a(p,q) \frac{\partial G(x,y;p,q)}{\partial p} + b(p,q) \frac{\partial G(x,y;p,q)}{\partial q} +$$
$$(26) \qquad + d(p,q)\,G(x,y;p,q) \Big]\,dp\,dq + v(x,y) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K} f(p,q)\,G(x,y;p,q)\,dp\,dq.$$

Wir erhalten somit als erstes Hauptresultat den Satz:

Jede in K und auf C beschränkte Lösung der partiellen Differentialgleichung (10), *die im Innern von K mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten*

Ordnung sich stetig verhält und auf dem Rande eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolge annimmt,[1] *ist zugleich eine Lösung der linearen Integralgleichung* (26).

Der Auflösung dieser Integralgleichung wenden wir uns nunmehr zu.

§ 2.

In den folgenden Betrachtungen nehmen wir zur Vereinfachung an, dass die Anzahl der Punkte B_i, in denen die Funktionen $a(p, q)$, $b(p, q)$, $c(p, q)$, $d(p, q)$, $f(p, q)$ (für $\alpha_i < 1$) unendlich gross werden können, gleich eins ist. Der allgemeine Fall $k > 1$ erledigt sich in genau derselben Weise, nur dass die Rechnungen entsprechend komplizierter werden. Den einzigen singulären Punkt bezeichnen wir nunmehr mit $H = (i, j)$, den zugehörigen charakteristischen Exponenten mit α. Wir nehmen $0 < \alpha < 1$ an. Der Fall $1 \leqq \alpha \leqq 2$ ist beträchtlich leichter zu erledigen.

Es sei (x^*, y^*) der zu dem Punkte (x, y) in bezug auf den Kreis K konjugierte Punkt. Bekanntlich ist

$$(27) \qquad G(x, y; p, q) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2} + g(x, y; p, q) =$$

$$= \frac{1}{2} \log \left[\frac{(x^*-p)^2 + (y^*-q)^2}{(x-p)^2 + (y-q)^2} (x^2 + y^2)\right].$$

$g(x, y; p, q)$ ist, als Funktion von (p, q) betrachtet, diejenige in K reguläre Potentialfunktion, welche am Rande die Werte $-\frac{1}{2} \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2}$ annimmt. Wie man leicht zeigen kann, ist

$$(28) \qquad |G(x, y; p, q)| < \varrho_0 + \frac{1}{2} |\log \{(x-p)^2 + (y-q)^2\}|,$$

unter ϱ_0 eine gewisse positive Zahl verstanden.

Es ist ferner

$$\left|\frac{\partial g(x, y; p, q)}{\partial p}\right| \leqq \frac{1}{[(x^*-p)^2 + (y^*-q)^2]^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{[(x-p)^2 + (y-q)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left|\frac{\partial g(x, y; p, q)}{\partial q}\right| < \frac{1}{[(x-p)^2 + (y-q)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

[1] Vrgl. die Fussnote auf der Seite 348.

daher

$$\text{(29)}\qquad \left|\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p}\right| < \frac{2}{[(x-p)^2+(y-q)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\left|\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q}\right| < \frac{2}{[(x-p)^2+(y-q)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Wir bezeichnen den Kern der Integralgleichung (26) mit $K(x, y; p, q)$. Aus (28) und (29) ergibt sich die weitere Ungleichheitsbedingung

$$\text{(30)}\qquad |K(x, y; p, q)| = \frac{1}{2\pi}\left|a(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right.$$

$$\left. + d(p, q)G(x, y; p, q)\right| < P r_{pi}^{a-1}\cdot\frac{1}{[(x-p)^2+(y-q)^2]^{\frac{1}{2}}} + Q r_{pi}^{2(a-1)} +$$

$$+ R r_{pi}^{2(a-1)} |\log\{(x-p)^2+(y-q)^2\}| = K_0(x, y; p, q).$$

Hierin bezeichnet $r_{pi} = r_{ip}$ den Ausdruck

$$r_{pi} = [(p-i)^2 + (q-j)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

P, Q und R sind gewisse positive Werte.

Wir führen zur Vereinfachung die weiteren Bezeichnungen

$$r_{ip'} = r_{p'i} = [(p'-i)^2 + (q'-j)^2]^{\frac{1}{2}},\ r_{px} = r_{xp} = [(p-x)^2 + (q-y)^2]^{\frac{1}{2}},\ r_{p'x} = r_{xp'} =$$

$$= [(p'-x)^2 + (q'-y)^2]^{\frac{1}{2}},\ r_{xi} = [(x-i)^2 + (y-j)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ u. s. w.}$$

ein und schreiben demgemäss

$$\text{(31)}\qquad K_0(x, y; p, q) = P r_{pi}^{a-1}\frac{1}{r_{px}} + Q r_{pi}^{2(a-1)} + R r_{pi}^{2(a-1)}|\log r_{px}|.$$

Von dem Kerne $K(x, y; p, q)$ gehen wir zu den iterierten Kernen über. Es soll nunmehr gezeigt werden, *dass man nach einer endlichen Anzahl von Iterationen zu einem Kerne von der Form*

$$r_{pi}^{2(a-1)} f(x, y; p, q)$$

gelangen wird. Hierin bezeichnet $f(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion von $x, y; p, q$.[1]

Neben dem Kerne $K(x, y; p, q)$ und seinen Iterationen $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots$ betrachten wir den Kern $K_0(x, y; p, q)$ und die aus ihm durch wiederholte Iteration

[1] In meiner zweiten Comptes rendus Note habe ich irrtümlicherweise angegeben, diese Form käme bereits dem zweiten iterierten Kerne zu.

entstandenen Kerne $K_0^{(1)}, K_0^{(2)}, \ldots$. Unter diesen gibt es, wie gleich gezeigt werden soll, einen Kern $K_0^{(n)}$, welcher der Ungleichheitsbedingung

$$K_0^{(n)}(x, y; p, q) < \Theta r_{pi}^{2(a-1)}, \tag{32}$$

unter Θ eine gewisse positive Grösse verstanden, genügt.

Betrachten wir den Kern

$$K_0^{(1)}(x, y; p, q) = \iint\limits_K K_0(x, y; p', q') K_0(p', q'; p, q)\, dp'\, dq'.$$

Die Funktion $K_0^{(1)}(x, y; p, q)$ besteht aus einem Aggregat von Gliedern von der Form

$$I_1 = r_{pi}^{a-1} \iint\limits_K r_{p'i}^{a-1} \cdot \frac{1}{r_{p'x}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}}\, dp'\, dq'; \; I_2 = r_{pi}^{2(a-1)} \iint\limits_K \frac{1}{r_{p'x}} \cdot r_{p'i}^{a-1}\, dp'\, dq';$$

$$I_3 = r_{pi}^{2(a-1)} \iint\limits_K r_{p'i}^{a-1} \cdot \frac{1}{r_{p'x}} \cdot |\log r_{p'p}|\, dp'\, dq'; \; I_4 = r_{pi}^{a-1} \iint\limits_K r_{p'i}^{2(a-1)} \cdot \frac{1}{r_{p'p}}\, dp'\, dq';$$

$$I_5 = r_{pi}^{2(a-1)} \iint\limits_K r_{p'i}^{2(a-1)}\, dp'\, dq'; \; I_6 = r_{pi}^{2(a-1)} \iint\limits_K r_{p'i}^{2(a-1)} |\log r_{p'p}|\, dp'\, dq'; \tag{33}$$

$$I_7 = r_{pi}^{a-1} \iint\limits_K r_{p'i}^{2(a-1)} |\log r_{p'x}| \cdot \frac{1}{r_{p'p}}\, dp'\, dq'; \; I_8 = r_{pi}^{2(a-1)} \iint\limits_K r_{p'i}^{2(a-1)} |\log r_{p'x}|\, dp'\, dq';$$

$$I_9 = r_{pi}^{2(a-1)} \iint\limits_K r_{p'i}^{2(a-1)} |\log r_{p'x}|\, |\log r_{p'p}|\, dp'\, dq'.$$

Wir suchen jetzt diese Ausdrücke einzeln abzuschätzen. Es mögen w_1, w_2, ν positive Zahlen bezeichnen. Ist $w_1 \geqq w_2$, so ist $\frac{1}{w_1^\nu w_2} \leqq \frac{1}{w_2^{1+\nu}}$, ist dagegen $w_1 \leqq w_2$, so ist $\frac{1}{w_1^\nu w_2} \leqq \frac{1}{w_1^{1+\nu}}$. In beiden Fällen ist daher

$$\frac{1}{w_1^\nu w_2} < \frac{1}{w_1^{1+\nu}} + \frac{1}{w_2^{1+\nu}}. \tag{34}$$

Betrachten wir den Ausdruck I_1. Aus (34) folgt, dass

$$
(35)\quad
\begin{aligned}
I_1 &< r_{pi}^{a-1}\iint\limits_K \frac{1}{r_{p'i}^{2-a}}\cdot\frac{1}{r_{p'p}}\,dp'\,dq' + r_{pi}^{a-1}\iint\limits_K \frac{1}{r_{p'x}^{2-a}}\cdot\frac{1}{r_{p'p}}\,dp'\,dq' < \\
&< r_{pi}^{a-1}\iint\limits_\omega \frac{1}{r_{p'i}^{2-a}}\cdot\frac{1}{r_{p'p}}\,dp'\,dq' + r_{pi}^{a-1}\iint\limits_\omega \frac{1}{r_{p'x}^{2-a}}\cdot\frac{1}{r_{p'p}}\,dp'\,dq' = I_{10}+I_{11}.
\end{aligned}
$$

In I_{10} und I_{11} sind die Integrale über die ganze unendliche Ebene zu erstrecken.

Um den Ausdruck I_{10} abzuschätzen, setzen wir vorübergehend $r_{pi}=h$, $p=h\bar p$, $q=h\bar q$, $r_{\bar p\bar p'}=\sqrt{(\bar p-\bar p')^2+(\bar q-\bar q')^2}$ u. s. w.[1] Wir erhalten

$$\iint\limits_\omega \frac{1}{r_{p'i}^{2-a}}\cdot\frac{1}{r_{p'p}}\,dp'\,dq' = \frac{1}{h^{1-a}}\iint\limits_\omega \frac{1}{r_{\bar p'\bar i}^{2-a}}\cdot\frac{1}{r_{\bar p'\bar p}}\,d\bar p'\,d\bar q'.$$

Da nunmehr $r_{\bar p\bar i}=1$ ist, so ist das Integral rechts eine Konstante. Wir setzen

$$\iint\limits_\omega \frac{1}{r_{p'i}^{2-a}}\cdot\frac{1}{r_{p'p}}\,dp'\,dq' = \frac{1}{r_{pi}^{1-a}}\cdot\theta_1.$$

In analoger Weise finden wir

$$\iint\limits_\omega \frac{1}{r_{p'x}^{2-a}}\cdot\frac{1}{r_{p'p}}\,dp'\,dq' = \frac{1}{r_{px}^{1-a}}\cdot\theta_2.$$

θ_2 bezeichnet ebenso, wie die später vorkommenden Grössen $\theta_3, \theta_4, \ldots$ eine gewisse Konstante. Wir erhalten somit

$$(36)\qquad I_1 < \theta_1\frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} + \theta_2\frac{1}{r_{pi}^{1-a}\,r_{px}^{1-a}}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(37)\qquad I_2 < \theta_3\frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}}.$$

Es sei $\alpha' < \alpha$ eine beliebig kleine positive Zahl. Bei geeigneter Festsetzung einer positiven Zahlgrösse θ_4, können wir setzen

---

[1] Diese Transformation entnehme ich der Abhandlung von Herrn PETRINI, Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique, Journal de Mathématiques, 1909, p. 127—223. Sie leistet auch bei der Abschätzung verschiedener anderer Integrale gute Dienste.

$$I_3 < \theta_4 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}} \iint\limits_K \frac{1}{r_{p'i}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{p'x}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}^{a'}} dp'\,dq' < \theta_4 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}} \iint\limits_K \left[\frac{1}{r_{p'i}^{2-a+a'}} + \frac{1}{r_{p'x}^{2-a+a'}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_{p'p}^{2-a+a'}}\right] dp'\,dq' < \theta_5 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}},$$

$$I_7 < \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \iint\limits_K \frac{1}{r_{p'p}} \left[\frac{1}{r_{p'i}^{2-2a+a'}} + \frac{1}{r_{p'x}^{2-2a+a'}}\right] dp'\,dq' < \theta_6 \frac{1}{r_{pi}^{2-3a+a'}} + \theta_7 \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-2a+a'}} <$$

$$< \theta'_6 \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} + \theta'_7 \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-a}}.$$

In änlicher Weise findet man

$$I_4 < \theta_8 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}}, \quad I_5 < \theta_9 \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}}, \quad I_6 < \theta_{10} \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}}, \quad I_8 < \theta_{11} \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}}, \quad I_9 < \theta_{12} \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}},$$

daher schliesslich

$$(38) \qquad K_0^{(1)}(x, y;\ p, q) < \theta_{13} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} + \theta_{14} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-a}}.$$

Wir bilden jetzt den Kern

$$(39) \qquad K_0^{(2)}(x, y;\ p, q) = \iint\limits_K K_0^{(1)}(x, y;\ p', q')\, K_0^{(1)}(p', q';\ p, q)\, dp'\,dq'.$$

Nunmehr haben wir folgende Ausdrücke abzuschätzen:

$$I_{12} = \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} \iint\limits_K \frac{1}{r_{p'i}^{2-2a}} dp'\,dq', \quad I_{13} = \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \iint\limits_K \frac{1}{r_{p'i}^{2-2a}} \cdot \frac{1}{r_{pp'}^{1-a}} dp'\,dq',$$

$$I_{14} = \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} \iint\limits_K \frac{1}{r_{p'x}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{p'i}^{1-a}} dp'\,dq', \quad I_{15} = \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \iint\limits_K \frac{1}{r_{p'x}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{p'i}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{p'p}^{1-a}} dp'\,dq'.$$

Die Betrachtungen, die den soeben durchgeführten ganz analog sind, ergeben die Ungleichheitsbedingungen

$$I_{12} < \theta_{15} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}}, \quad I_{13} < \theta_{16} \frac{1}{r_{pi}^{2-4a}}, \quad I_{14} < \theta_{17} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}}, \quad I_{15} < \theta_{18} \frac{1}{r_{pi}^{2-4a}} + \theta_{19} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-3a}},$$

somit

(40) $$K_0^{(2)}(x, y; p, q) < \theta_{20} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} + \theta_{21} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-3a}}.$$ [1]

Der nächstfolgende iterierte Kern

$$K_0^{(3)}(x, y; p, q) = \iint\limits_K K_0^{(2)}(x, y; p', q') \, K_0^{(2)}(p', q'; p, q) \, dp' \, dq'$$

erfüllt die Ungleichheitsbedingung

(41) $$K_0^{(3)}(x, y; p, q) < \theta_{22} \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}} + \theta_{23} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} \cdot \frac{1}{r_{px}^{1-7a}}.$$

So geht man weiter. Nach einer *endlichen* Anzahl von Iterationen erhält man einen Kern $K_0^{(n)}$, welcher die Ungleichheitsbedingung erfüllt

(42) $$K_0^{(n)}(x, y; p, q) < \Theta \frac{1}{r_{pi}^{2(1-a)}}.$$

Kehren wir nunmehr zu dem Kerne $K(x, y; p, q)$ der Integralgleichung (26) zurück. Man überzeugt sich leicht, dass die iterierten Kerne $K^{(1)}$, $K^{(2)}, \ldots$ sich stetig verhalten, ausser höchstens wenn (43) $x = p$, $y = q$ oder (44) $p = i$, $q = j$ wird. Überdies ist für alle ν

(45) $$|K^{(\nu)}(x, y; p, q)| < K_0^{(\nu)}(x, y; p, q).$$

Der Ausdruck $r_{pi}^{2(1-a)} K^{(n)}(x, y; p, q)$ stellt somit eine beschränkte Funktion von $x, y; p, q$ dar, die mit etwaiger Ausnahme der Werte (43) und (44) ihrer Argumente sich stetig verhält. Man überzeugt sich nunmehr leicht, dass der Kern

(46) $$K^{(n+1)}(x, y; p, q) = \iint\limits_K K^{(n)}(x, y; p', q') \, K^{(n)}(p', q'; p, q) \, dp' \, dq'$$

in der Form

(47) $$K^{(n+1)}(x, y; p, q) = r_{pi}^{2(a-1)} f(x, y; p, q)$$

---

[1] Die für $K_0^{(2)}$ aufgestellten Ungleichheitsbedingungen gelten für $a < \frac{1}{3}$. Ist $a = \frac{1}{3}$, so ist z. B. $K_0^{(2)}(x, y; p, q) < \theta'_{20} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}} + \theta'_{21} \frac{1}{r_{pi}^{1-a}} |\log r_{px}|$. Ist $a > \frac{1}{3}$, so erhält man $K_0^{(2)}(x, y; p, q) < \theta''_{20} \frac{1}{r_{pi}^{2-2a}}$.

dargestellt werden kann. Hierin bezeichnet $f(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion von $x, y; p, q$.

Ist die Anzahl k der Punkte, die wir am Anfange dieses Kapitels mit $B_i = (p_i, q_i)$, $(i = 1, \ldots, k)$ bezeichnet haben, mithin die Anzahl der Eckpunkte des Gebietes T grösser als eins, so führt die wiederholte Iteration nach einer *endlichen* Anzahl von Operationen auf einen Kern von der Form

$$(48) \qquad K^*(x, y; p, q) = f^*(x, y; p, q) \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{r_{pp_i}^{2(1-a_i)}}.$$ [1]

Hierin bezeichnet $f^*(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion. Der Ausdruck r_{pp_i} ist mit der am Anfang dieses Kapitels mit r_i bezeichneten Grösse identisch.

Die Integralgleichung (26) ist der Integralgleichung

$$(49) \qquad u(x, y) + \iint_K K^*(x, y; p, q)\, u(p, q)\, dp\, dq = \psi(x, y)$$

äquivalent. Der Ausdruck $\psi(x, y)$ stellt eine in K und auf C beschränkte, im Innern von K stetige Funktion dar. Am Rande nimmt $\psi(x, y)$, ausser in den etwaigen Unstetigkeitsstellen der Randfunktion, die vorgeschriebenen Werte an.

Betrachten wir allgemeiner die Integralgleichung

$$(50) \qquad u(x, y) + \lambda \iint_K K^*(x, y; p, q)\, u(p, q)\, dp\, dq = \psi(x, y).$$

Man bemerkt leicht, *dass es nicht möglich ist, durch wiederholte Iteration zu einem*

---

[1] Wir nahmen $0 < a_i < 1$ an. Wir können daher die Beziehungen (11) durch die Gleichungen $a(p, q) \doteq \sum r_i^{a_i - 1} \pi_1(p, q)$; $b(p, q) = \sum r_i^{a_i - 1} \nu_1(p, q)$; $c(p, q) = \sum r_i^{a_i - 1} \vartheta_1(p, q)$; $d(p, q) = \sum r_i^{2(a_i - 1)} \mu_1(p, q)$; $f(p, q) = \sum r_i^{(2a_i - 1)} \varepsilon_1(p, q)$, worin $\pi_1, \ldots \varepsilon_1$ gewisse in K und auf C beschränkte, in K stetige Funktionen bezeichnen, ersetzen. Hierdurch wird die Abschätzung der iterierten Kerne etwas übersichtlicher. Als Endergebnis erhält man die Formel (48), für die man auch ebenso gut hätte

$$K^*(x, y; p, q) = f_1^*(x, y; p, q) \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{r_{pp_i}^{2(1-a_i)}}$$

setzen können.

überall stetigen Kerne zu gelangen; alle iterierten Kerne haben, in der Tat, die Gestalt

$$\bar{K}(x, y; p, q) = \bar{f}(x, y; p, q) \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_{pp_i}^{2(1-\alpha_i)}},$$

worin $\bar{f}(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion von $x, y; p, q$ bezeichnet. *Nichts desto weniger bleibt,* wie sich gleich zeigen wird, *die* FREDHOLM'*sche Theorie auf die Integralgleichung* (50) *im vollen Umfange anwendbar.*

Es möge zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_{pp_i}^{2(1-\alpha_i)}} = \varphi(p, q), \quad K^*(x, y; p, q) = f^*(x, y; p, q)\,\varphi(p, q)$$

gesetzt werden. Betrachten wir den FREDHOLM'schen Ausdruck

$$H(x, y; p, q; \lambda) = \frac{\sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} A_m(x, y; p, q)}{1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{m!} A_m} = \frac{D\left(\lambda; \begin{matrix} x, y \\ p, q \end{matrix}\right)}{D(\lambda)}. \tag{51}$$

Im vorliegenden Falle ist

$$A_m(x, y; p, q) = \int \cdots \int \begin{vmatrix} f^*(x, y; p, q)\varphi(p, q); & f^*(s_1, t_1; p, q)\varphi(p, q); & \ldots & f^*(s_m, t_m; p, q)\varphi(p, q) \\ f^*(x, y; s_1, t_1)\varphi(s_1, t_1); & f^*(s_1, t_1; s_1, t_1)\varphi(s_1, t_1); & \ldots & f^*(s_m, t_m; s_1, t_1)\varphi(s_1, t_1) \\ f^*(x, y; s_2, t_2)\varphi(s_2, t_2); & f^*(s_1, t_1; s_2, t_2)\varphi(s_2, t_2); & \ldots & f^*(s_m, t_m; s_2, t_2)\varphi(s_2, t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^*(x, y; s_m, t_m)\varphi(s_m, t_m); & f^*(s_1, t_1; s_m, t_m)\varphi(s_m, t_m); & \ldots & f^*(s_m, t_m; s_m, t_m)\varphi(s_m, t_m) \end{vmatrix} \tag{52}$$

$$.\,ds_1\,dt_1\,ds_2\,dt_2 \ldots ds_m\,dt_m, \quad A_0(x, y; p, q) = f^*(x, y; p, q)\,\varphi(p, q),$$

$$A_m = \iint_K A_m(s_0, t_0; s_0, t_0)\,ds_0\,dt_0. \tag{53}$$

Für (52) können wir auch setzen

$$(54)\quad A_m(x,y;\,p,q)=\varphi(p,q)\int\cdots\int\begin{vmatrix} f^*(x,y;\,p,q);\; f^*(s_1,t_1;\,p,q);\;\ldots\; f^*(s_m,t_m;\,p,q)\\ f^*(x,y;\,s_1,t_1);\; f^*(s_1,t_1;\,s_1,t_1);\;\ldots\; f^*(s_m,t_m;\,s_1,t_1)\\ f^*(x,y;\,s_2,t_2);\; f^*(s_1,t_1;\,s_2,t_2);\;\ldots\; f^*(s_m,t_m;\,s_2,t_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f^*(x,y;\,s_m,t_m);\; f^*(s_1,t_1;\,s_m,t_m);\;\ldots\; f^*(s_m,t_m;\,s_m,t_m)\end{vmatrix}$$

$$.\,\varphi(s_1,t_1)\,\varphi(s_2,t_2)\ldots\varphi(s_m,t_m)\,.\,ds_1\,dt_1\ldots ds_m\,dt_m.$$

Es sei $M=\mathrm{Max}\,|f^*(x,y;\,p,q)|$ für alle $x,y;\,p,q$ in K und auf C,

$$\sigma=\iint\limits_K\varphi(s,t)\,ds\,dt.$$

Der bekannte Determinantensatz von Herrn HADAMARD ergibt, wie man leicht sieht, die Ungleichheitsbedingungen

$$(55)\quad \begin{gathered}\left|\frac{A_m(x,y;\,p,q)}{\varphi(p,q)}\right|<(m+1)^{\frac{m+1}{2}}M^{m+1}\sigma^m,\\ |A_m|<m^{\frac{m}{2}}M^m\sigma^m.\end{gathered}$$

Offenbar ist

$$\frac{H(x,y;\,p,q;\,\lambda)}{\varphi(p,q)}$$

eine in K und auf C stetige Funktion von $x,y;\,p,q$ und eine meromorphe Funktion von λ. Wir setzen

$$(56)\quad H(x,y;\,p,q;\,\lambda)=h(x,y;\,p,q;\,\lambda)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_{pp_i}^{2(1-a_i)}}.$$

Ist $\lambda = 1$ keine Unendlichkeitsstelle der Funktion $h(x, y; p, q; \lambda)$, so lässt sich in bekannter Weise zeigen, dass die Funktion

$$\psi(x, y) - \iint_K H(x, y; p, q; 1)\psi(p, q)\,dp\,dq$$

die Lösung der Integralgleichung (49) darstellt.

Ist λ eine Nullstelle von $D(\lambda)$, so ist die homogene Integralgleichung

$$u(x, y) + \lambda \iint_K K^*(x, y; p, q)\,u(p, q)\,dp\,dq = 0$$

auflösbar. Die Übertragung der bekannten weiteren Schlüsse von Herrn Fredholm bietet keine Schwierigkeiten.

§ 3.

Wir haben in § 1 gezeigt, dass jede beschränkte Lösung der Differentialgleichung (10), die sich mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung in K stetig verhält und auf C eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolge annimmt, zugleich eine Lösung der Integralgleichung (26) darstellt. Eine auf C verschwindende, in K stetige Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

ist insbesondere eine Lösung der zu (26) gehörigen homogenen Integralgleichung.

Es sei jetzt umgekehrt $u(x, y)$ eine Lösung der Integralgleichung (26) oder der zugehörigen homogenen Integralgleichung. Wir wollen zeigen, dass $u(x, y)$ im Innern von K stetige partielle Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung hat und entsprechend der Differentialgleichung (10) oder der zugehörigen homogenen Differentialgleichung genügt. Im ersteren Falle nimmt $u(x, y)$ auf C die vorgeschriebenen Randwerte; im letzteren Falle ist $u(x, y)$ auf dem Rande des Gebietes gleich Null.

Es sei $r(p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion. Betrachten wir das logarithmische Potential

$$R(x, y) = \frac{1}{2} \iint\limits_K r(p, q) \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2} dp\, dq.$$

Nach einem bekannten Hilfssatze erfüllen die Funktionen

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \iint\limits_K r(p, q) \frac{\partial}{\partial p} \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2} dp\, dq,$$

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2} \iint\limits_K r(p, q) \frac{\partial}{\partial q} \log \frac{1}{(x-p)^2 + (y-q)^2} dp\, dq$$

in K und auf C die HÖLDER'sche Bedingung

$$\left| \frac{\partial R(x+h, y+h')}{\partial x} - \frac{\partial R(x, y)}{\partial x} \right| < \gamma [|h| + |h'|]^\lambda,$$

$$\left| \frac{\partial R(x+h, y+h')}{\partial y} - \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} \right| < \gamma [|h| + |h'|]^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1,$$

unter γ eine gewisse positive Grösse verstanden.[1]

Es sei jetzt K' wie in § 1 die mit K konzentrische Kreisfläche vom Halbmesser $1 - \delta$. Betrachten wir die Integralgleichung (26). Das erste Integral rechterhand erfüllt, wie aus dem soeben erwähnten Hilfssatze geschlossen werden kann, im Innern von K die HÖLDER'sche Bedingung; die beiden übrigen Glieder besitzen daselbst stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung; daher genügt $u(x, y)$ in K der HÖLDER'schen Bedingung. Die Funktionen $a(p, q)$ und $b(p, q)$ besitzen im Innern von K stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Aus den bekannten Sätzen der Potentialtheorie folgt nunmehr, dass $u(x, y)$ im Innern von K stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Wir setzen jetzt

$$\begin{aligned} u(x, y) = &-\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K'} u(p, q) \left[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \right. \\ (57) \quad & \left. + d(p, q) G(x, y; p, q) \right] dp\, dq - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K-K'} + v(x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_K f(p, q) G(x, y; p, q)\, dp\, dq, \end{aligned}$$

[1] Vrgl. U. DINI, Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, Acta Mathematica, Bd. 25 (1902), S. 185—230. Siehe insbesondere S. 191—196.

oder nach einer teilweisen Integration

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K'} G(x, y; p, q)\left[a(p, q)\frac{\partial u(p, q)}{\partial p} + b(p, q)\frac{\partial u(p, q)}{\partial q} +\right.$$

$$\left. + c(p, q)\,u(p, q)\right]dp\,dq - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K-K'} u(p, q)\left[a(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} +\right.$$

$$(58)\quad \left. + b(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + d(p, q)\,G(x, y; p, q)\right]dp\,dq -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C'} u(p, q)\,G(x, y; p, q)\,[a(p, q)\,dq - b(p, q)\,dp] -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K} f(p, q)\,G(x, y; p, q)\,dp\,dq + v(x, y).$$

Eine Wiederholung der zuletzt durchgeführten Überlegung zeigt zunächst, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ in K' der HÖLDER'schen Bedingung genügen; daraus folgt aber, dass die Lösung $u(x, y)$ im Innern von K' stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat. Die über C' und $K - K'$ erstreckten Integrale stellen im Innern von K' reguläre Potentialfunktionen dar. Nach bekannten Sätzen ist somit, wie behauptet,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} - b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)\,u + f(x, y).$$

Nun die Randwerte der Funktion $u(x, y)$. Es sei B_0 irgendein Punkt auf der Peripherie der Kreisfläche K; insbesondere kann B_0 mit irgendeinem der Punkte B_i, $(i = 1, \ldots k)$ zusammenfallen. In den folgenden Ausführungen nehmen wir gerade diesen, offenbar schwierigeren Fall an und setzen etwa $B_0 = B_1$. Um den Punkt $B_0 = B_1$ beschreiben wir zwei kleine Kreise P_1 und P_2 von den Halbmessern η_1 und $\eta_2 < \frac{\eta_1}{2}$. Die Gebiete, die sie mit K gemeinsam haben, mögen entsprechend mit K_1 und K_2 bezeichnet sein. Betrachten wir das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung (26):

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K} u(p, q)\left[a(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} +\right.$$

$$(59) \qquad + d(p, q) G(x, y; p, q)\Big] dp\,dq = -\iint\limits_K u(p, q) K(x, y; p, q) dp\,dq =$$

$$= -\iint\limits_{K_1} u(p, q) K(x, y; p, q) dp\,dq - \iint\limits_{K-K_1} u(p, q) K(x, y; p, q) dp\,dq.$$

Es sei ε eine beliebig kleine positive Grösse. Wir können r_1 so klein annehmen, dass für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von K_2

$$(60) \qquad \iint\limits_{K_1} u(p, q) K(x, y; p, q) dp\,dq < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. In der Tat ist, beispielsweise,

$$(61) \qquad \left|\iint\limits_{K_1} u(p, q) a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} dp\,dq\right| < \omega \iint\limits_{K_1} \frac{1}{r_{pp_1}^{1-\alpha_1}} \cdot \frac{1}{r_{px}} dp\,dq <$$

$$< \omega \iint\limits_{K_1} \frac{1}{r_{pp_1}^{2-\alpha_1}} dp\,dq + \omega \iint\limits_{K_1} \frac{1}{r_{px}^{2-\alpha_1}} dp\,dq,$$

worin ω eine gewisse positive Grösse bezeichnet. Die beiden zuletzt hingeschriebenen Doppelintegrale konvergieren aber mit r_1 gegen Null.

Die Funktionen $\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p}$, $\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q}$, $G(x, y; p, q)$ sind für alle (x, y) in K_2 und alle (p, q) in $K - K_1$ (mit Einschluss der Begrenzung der beiden Gebiete) stetig. Sie sind für alle (x, y) auf dem in P_2 enthaltenen Teile von C und alle (p, q) im Innern und auf dem Rande von $K - K_1$ gleich Null. Die Funktion $u(p, q)$ ist beschränkt. Beachten wir dies, so sehen wir, dass man bei festgehaltem r_1 die Zahl r_2 so klein wählen kann, dass für alle (x, y) in K_2

$$(62) \qquad \left|\iint\limits_{K-K_1} u(p, q) K(x, y; p, q) dp\,dq\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Aus (60) und (62) ergibt sich für alle (x, y) in K_2 die weitere Ungleichheitsbedingung

$$(63) \qquad \left|\iint\limits_K u(p, q) K(x, y; p, q) dp\,dq\right| < \varepsilon.$$

Der Ausdruck (63) konvergiert mit η_2 gegen Null, übrigens, wie eine genauere Durchführung der angedeuteten Rechnungen zeigt, für alle Punkte der Kurve C in gleichem Grade. Dieselbe Eigenschaft kommt dem Integrale

$$\iint\limits_K f(p, q)\, G(x, y;\, p, q)\, dp\, dq$$

zu. Hieraus und aus der Gleichung (26) folgt, wie behauptet, dass die Randwerte der Lösung $u(x, y)$ mit den Randwerten der Potentialfunktion $v(x, y)$ übereinstimmen.[1] Ist insbesondere $f(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$, genügt also $u(x, y)$ der zu (26) gehörigen homogenen Integralgleichung, so ist $u(x, y)$ eine am Rande verschwindende Lösung der homogenen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Wir haben zur Vereinfachung das zuerst vorgelegte Gebiet T einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Es sei jetzt T mehrfach zusammenhängend. Das Gebiet T lässt sich durch Vermittelung einer analytischen Funktion $z = z(Z)$, deren Verhalten in der Nachbarschaft der Ecken durch die Gleichungen (5) und (6) charakterisiert ist, auf ein von geschlossenen analytischen, singularitätenfreien Kurven begrenztes Gebiet R konform abbilden. Hierdurch wird das vorliegende Problem auf die Bestimmung derjenigen beschränkten, im Innern des Gebietes R mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetigen Lösung der Differentialgleichung (10) zurückgeführt, die auf den, als geschlossen und regulär analytisch vorauszusetzenden, Randkurven L vorgeschriebene abteilungsweise stetige Wertfolgen annimmt. Dieses Problem wird mutatis mutandis wie das vorhin ausführlich betrachtete speziellere Problem erledigt. Der Kreis C' ist hierbei durch die im Innern des Gebietes R zu den Begrenzungskurven L im Abstande δ gezeichneten gleichfalls regulär analytischen Parallelkurven L' zu ersetzen. Die GREEN'sche Funktion $G(x, y;\, \xi, \eta)$ hat nicht mehr die einfache Gestalt (27), sodass die Entwicklungen entsprechend komplizierter ausfallen. Prinzipielle Schwierigkeiten treten indessen nicht auf, weshalb von der Durchführung der Rechnungen an dieser Stelle abgesehen werden kann.

Wir fassen jetzt die Ergebnisse dieses Kapitels in dem folgenden Satze zusammen:

---

[1] Vrgl. die Fussnote auf der Seite 348.

Es sei T ein von einer endlichen Anzahl Stücke regulär analytischer Kurven begrenztes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet ohne Spitzen. Auf den Randkurven S von T mögen abteilungsweise stetige Folgen von Werten vorgeschrieben sein. Es mögen ferner A, B, C und F stetige Funktionen von X, Y bezeichnen. A und B haben in T und auf S stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, C und F genügen in T der HÖLDER*'schen Bedingung* (1). *Alsdann tritt von zwei möglichen Fällen der eine oder der andere ein. Entweder hat die nicht homogene partielle Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A\frac{\partial U}{\partial X} + B\frac{\partial U}{\partial Y} + CU = F \tag{2}$$

eine und nur eine beschränkte, in T mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige Lösung, welche, ausser in den Unstetigkeitsstellen der Randfunktion, die vorgeschriebenen Werte annimmt, oder die homogene partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A\frac{\partial U}{\partial X} + B\frac{\partial U}{\partial Y} + CU = 0 \tag{64}$$

hat eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen, die im Innern von T sich mit ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen stetig verhalten und auf dem Rande verschwinden. Im ersteren Falle hat die homogene Differentialgleichung (64) *keine stetige, von Null verschiedene, am Rande verschwindende Lösung. In dem anderen Falle hat die partielle Differentialgleichung* (2) *nur für spezielle Funktionen $F(x, y)$ stetige, am Rande verschwindende Lösungen, die homogene Differentialgleichung* (64) *ist nur für spezielle Randwerte in dem hier gemeinten Sinne lösbar.*

Die Integralgleichung (26) *liefert in allen Fällen alle Lösungen des Randwertproblems.*

Der obige Satz gilt, wie man sich leicht überzeugt, im vollen Umfange, wenn die Begrenzung des Gebietes T aus geschlossenen Kurven S mit durchweg stetiger Tangente und abteilungsweise stetiger Krümmung besteht. Denn man kann gewiss T durch Vermittelung einer analytischen Funktion $z = z(Z)$, deren Ableitung $\frac{dz}{dZ}$ in T and auf S stetig und von Null verschieden ist, auf ein von geschlossenen regulär analytischen Kurven begrenztes Gebiet konform abbilden.

Kapitel II. Die zu dem ersten Randwertproblem gehörige Green'sche Funktion.

§ 1.

Der Einfachheit halber betrachten wir in diesem Kapitel nur einfach zusammenhängende Gebiete. Wir nehmen ferner die Anzahl der Ecken des Gebietes T wieder gleich eins an.

In der Ebene (x, y) entspricht T, wie vorhin, der Einheitskreis K; der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+A\frac{\partial U}{\partial X}+B\frac{\partial U}{\partial Y}+CU=F \tag{1}$$

entspricht die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f. \tag{2}$$

Wir nehmen im folgenden an, dass die homogene partielle Differentialgleichung

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0 \tag{3}$$

keine von Null verschiedene, im Innern von K mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, auf C verschwindende Lösung hat.

Es sei (x_1, y_1) ein Punkt im Innern von K. Wir suchen eine in K, ausser im Punkte (x_1, y_1), mit ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, am Rande verschwindende Lösung $u^*(x, y)$ der Differentialgleichung (3) zu bestimmen, die sich in der Nähe von (x_1, y_1) wie

$$\frac{1}{2}\log\frac{1}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

verhält. Die Differenz

$$u^*(x, y)-\frac{1}{2}\log\frac{1}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=U^*(x, y) \tag{4}$$

soll eine beschränkte, in K und auf C, ausser vielleicht in (x_1, y_1), stetige Funktion von x und y darstellen. Die Randwerte von $U^*(x, y)$ sind gleich

$$-\frac{1}{2}\log\frac{1}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}.$$

Für $U^*(x, y)$ ergibt sich die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned}(5)\quad &\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2}+a\frac{\partial U^*}{\partial x}+b\frac{\partial U^*}{\partial y}+cU^*=L\left[-\frac{1}{2}\log\frac{1}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\right]=\\ &=\frac{a(x-x_1)+b(y-y_1)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\frac{1}{2}c\log[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]=\Phi(x, y).\end{aligned}$$

Die Funktion $\Phi(x, y)$ verhält sich in jedem den Punkt (x_1, y_1) nicht enthaltenden Teile des Gebietes K stetig und erfüllt daselbst die HÖLDER'sche Bedingung. In der Umgebung des Punktes (x_1, y_1) wird $\Phi(x, y)$ wie

$$[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

unendlich. Das Doppelintegral

$$(6)\qquad J(x, y)=\iint\limits_K G(x, y; p, q)\Phi(p, q)\,dp\,dq$$

ist, als Funktion von (x, y) betrachtet, in K und auf C stetig. Nach den bekannten Sätzen der Potentialtheorie sind partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $J(x, y)$ überall in K, den Punkt (x_1, y_1) ausgenommen, vorhanden und stetig. In der Umgebung von (x_1, y_1) werden die Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial x}$, $\frac{\partial J}{\partial y}$ logarithmisch unendlich.[1]

Es sei jetzt $\overline{U}(x, y)$ die Lösung der linearen Integralgleichung

$$\begin{aligned}(7)\quad \overline{U}(x, y)=&-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \overline{U}(p, q)\left[a(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p}+b(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q}+\right.\\ &\left.+d(p, q)G(x, y; p, q)\right]dp\,dq+g(x_1, y_1; x, y)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \Phi(p, q)G(x, y; p, q)\,dp\,dq,\end{aligned}$$

worin $g(x_1, y_1; x, y)$ die durch die Gleichung (27) des Kapitels I definierte Funk-

[1] Dies lässt sich mit Hilfe des Verfahrens, welches wir in I § 2 zur Abschätzung des Integrals I_{10} benutzt hatten, leicht zeigen.

tion bezeichnet. Man kann wie in I § 3 zeigen, dass $\overline{U}(x, y)$ in K stetig ist und in jedem den Punkt (x_1, y_1) nicht enthaltenden Teilgebiete von K der HÖLDER'schen Bedingung genügt und daher auch stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Bei der jetzt folgenden teilweisen Integration (entsprechend der Formel (58) in I § 3) ist (x_1, y_1) durch einen kleinen Kreis K'' von dem Integrationsgebiete auszuschliessen. In $K' - K''$ erfüllen $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}$ die HÖLDER'sche Bedingung. In demselben Gebiete hat daher $\overline{U}(x, y)$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung und erfüllt die Differentialgleichung (5). Offenbar ist $\overline{U}(x, y)$ nichts anderes als die gesuchte Lösung $U^*(x, y)$. Wir setzen

$$
(8) \qquad \begin{aligned}
U^*(x, y) &= \gamma(x_1, y_1; x, y), \\
u^*(x, y) &= \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \gamma(x_1, y_1; x, y) = \Gamma(x_1, y_1; x, y).
\end{aligned}
$$

$\Gamma(x_1, y_1; x, y)$ ist die zu dem Gebiete K gehörige GREEN'*sche Funktion der Differentialgleichung* (3).

§ 2.

Es möge jetzt K' wie im Kapitel I die mit K konzentrische Kreisfläche vom Halbmesser $1 - \delta = \varrho$ bezeichnen. *Wir beweisen, dass es eine Zahl δ_1 gibt, so dass für alle $\delta < \delta_1$ die Differentialgleichung* (3) *keine von Null verschiedene, im Innern von K' mit ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, auf dem Rande C' von K' verschwindende Lösung hat. Hieraus wird dann sofort gefolgert, dass die zu K' gehörige* GREEN'*sche Funktion der Differentialgleichung* (3) *existiert.* Wir bezeichnen sie mit

$$
(9) \qquad \Gamma'(x_1, y_1; x, y) = \gamma'(x_1, y_1; x, y) + \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2},
$$

worin jetzt (x_1, y_1) und (x, y) zwei Punkte in K' bezeichnen. *Wir beweisen alsdann, dass*

$$
(10) \qquad \lim_{\varrho \to 1} \gamma'(x_1, y_1; x, y) = \gamma(x_1, y_1; x, y).
$$

Es sei, entgegen unserer Voraussetzung, $w(x, y)$ eine in K' samt ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige, auf C' verschwindende Lösung der Differentialgleichung (3). Führen wir durch die Formeln (11) $x = \varrho x_0$, $y = \varrho y_0$ neue Variablen ein und setzen wir

$$w(x, y) = w_0(x_0, y_0),\ \varrho a(x, y) = a_0(x_0, y_0),\ \varrho b(x, y) = b_0(x_0, y_0),$$
$$\varrho^2 c(x, y) = c_0(x_0, y_0),\ \varrho^2 d(x, y) = d_0(x_0, y_0),$$

so geht die Differentialgleichung (3) über in

$$\Delta(w_0) \equiv \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_0^2} + a_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_0} + b_0 \frac{\partial w_0}{\partial y_0} + c_0 w_0 = 0. \tag{12}$$

Nach dem, was wir im Kapitel I gesehen haben, muss $w_0(x, y)$ der linearen homogenen Integralgleichung

$$\begin{aligned} w_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_K w_0(p, q) \Big[a_0(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b_0(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \\ + d_0(p, q)\, G(x, y; p, q) \Big] dp\, dq \end{aligned} \tag{13}$$

genügen. Nach der Voraussetzung hat nun die homogene Integralgleichung

$$\begin{aligned} u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_K u(p, q) \Big[a(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial p} + b(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial q} + \\ + d(p, q)\, G(x, y; p, q) \Big] dp\, dq \end{aligned} \tag{14}$$

keine von Null verschiedene stetige Lösung. Wir zeigen, dass auch die Integralgleichung (13) keine von Null verschiedene stetige Lösungen haben kann, sobald $1 \geqq \varrho \geqq 1 - \delta_1$. Damit werden bereits die beiden ersten der vorhin ausgesprochenen Behauptungen bewiesen sein.

Wir führen den Punkt $H_0 = \left(\frac{1}{\varrho} i, \frac{1}{\varrho} j\right) = (i_0, j_0)$ ein und bezeichnen die Entfernung der Punkte (p, q) und (i_0, j_0) mit r_{pi_0}. Die Funktionen $a_0(p, q)$, $b_0(p, q)$, $d_0(p, q)$ sind für alle $\varrho < 1$ in K und auf C stetig. Die Produkte

$$r_{pi_0}^{1-a} a_0(p, q),\ r_{pi_0}^{1-a} b_0(p, q),\ r_{pi_0}^{2(1-a)} d_0(p, q) \tag{15}$$

sind für alle ϱ, die der Bedingung $1 \geqq \varrho \geqq 1 - \delta'$, $\delta' < 1$ genügen, in K und auf C dem absoluten Betrage nach kleiner, als eine gewisse positive Zahl M_0. Mit verschwindendem $\delta = 1 - \varrho$ gehen die Funktionen (15) in jedem den Punkt $H = (i, j)$ nicht enthaltenden Teile des Gebietes K gleichmässig über in

$$r_{pi}^{1-a} a(p, q),\ r_{pi}^{1-a} b(p, q),\ r_{pi}^{2(1-a)} d(p, q).$$ [1]

[1] Wir betrachten im folgenden, wie im Kapitel I, den schwierigeren Fall $0 < \alpha < 1$. Ist $1 \overline{\gtrless} \alpha \leqq 2$, so sind die Funktionen a, b, c, d und f im Punkte H stetig.

Wie wir im Kapitel I gesehen haben, geht die Integralgleichung (14) nach einer endlichen Anzahl von Iterationen in eine Integralgleichung von der Form

$$(16) \qquad u(x, y) + \iint\limits_K f(x, y; p, q) \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}} u(p, q)\, dp\, dq = 0$$

über. Hierin bezeichnet $f(x, y; p, q)$ eine in K und auf C stetige Funktion. Gleichzeitig geht die Integralgleichung (13) über in die Gleichung

$$(17) \qquad w_0(x, y) + \iint\limits_K f_0(x, y; p, q) \frac{1}{r_{pi_0}^{2(1-\alpha)}} w_0(p, q)\, dp\, dq = 0.$$

Durch eine Rechnung, die zwar umständlich ist, aber keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet und daher an dieser Stelle übergangen werden kann, lässt sich zeigen, dass mit verschwindendem $\delta = 1 - \varrho$ der absolute Betrag der Differenz

$$f(x, y; p, q) - f_0(x, y; p, q)$$

gleichmässig gegen Null konvergiert.

Denken wir uns in die Integralgleichungen (16) und (17) den Parameter λ eingeführt und betrachten wir die Nenner $D(\lambda)$ und $D_0(\lambda)$ der zu (16) und (17) gehörigen FREDHOLM'schen Quotienten (vergl. die Formeln (51) bis (55) des ersten Kapitels). Die Glieder der Reihe $D_0(\lambda)$ gehen für $\delta = 0$ stetig in die korrespondierenden Glieder der Reihe $D(\lambda)$ über. Die Reihen $D_0(\lambda)$ und $D(\lambda)$ konvergieren für alle endlichen Werte von $|\lambda|$ und alle δ, die der Ungleichheitsbedingung $0 \leqq \delta < \delta' < 1$ genügen, in gleichem Grade. Nach bekannten Sätzen ist daher für alle endlichen λ

$$\lim_{\delta=0} D_0(\lambda) = D(\lambda).$$

Nach der Voraussetzung ist $D(1)$ von Null verschieden. Man kann daher, in der Tat, eine Zahl δ_1 so klein annehmen, dass für alle $\delta < \delta_1$ auch $D_0(1) \neq 0$ wird. *Damit sind die beiden ersten Teile unserer Behauptung bereits bewiesen.*

Betrachten wir nunmehr die Funktion $\gamma'(x_1, y_1; x, y)$, wofür wir der Kürze halber vorübergehend $U'(x, y)$ setzen wollen. Wir führen die Substitution

$$x = \varrho x_0, \; y = \varrho y_0; \; x_1 = \varrho x_1^0, \; y_1 = \varrho y_1^0$$

ein und setzen $U'(x, y) = U_0(x_0, y_0)$.

$U_0(x_0, y_0)$ stellt eine in K und auf C stetige Funktion von (x_0, y_0) dar, die am Rande die Werte

$$-\frac{1}{2}\log\frac{1}{(x_1^0-x_0)^2+(y_1^0-y_0)^2}+\log\varrho$$

annimmt. Im Innern von K, ausser vielleicht im Punkte (x_1^0, y_1^0), erfüllt die Funktion $U_0(x_0, y_0)$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2 U_0}{\partial y_0^2}+a_0\frac{\partial U_0}{\partial x_0}+b_0\frac{\partial U_0}{\partial y_0}+c_0 U_0=\frac{a_0(x_0-x_1^0)+b_0(y_0-y_1^0)}{(x_0-x_1^0)^2+(y_0-y_1^0)^2}+$$

(18)

$$+\frac{1}{2}c_0\log[(x_0-x_1^0)^2+(y_0-y_1^0)^2]+c_0\log\varrho=\Phi_0(x_0, y_0).$$

Offenbar ist $U_0(x_0, y_0)$ eine Lösung der linearen Integralgleichung

$$U_0(x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K U_0(p,q)\Big[a_0(p,q)\frac{\partial G(x_0,y_0;p,q)}{\partial p}+b_0(p,q)\frac{\partial G(x_0,y_0;p,q)}{\partial q}+$$

(19)

$$+d_0(p,q)G(x_0,y_0;p,q)\Big]dp\,dq+\log\varrho+g(x_1^0,y_1^0;x_0,y_0)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K\Phi_0(p,q)G(x_0,y_0;p,q)\,dp\,dq.$$

Diese Integralgleichung ist der Integralgleichung (7) ganz analog. (Wir denken uns in jener Gleichung vorübergehend (x_0, y_0) für (x, y) gesetzt.) Die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (19) nähern sich für $\varrho = 1$ den entsprechenden Gliedern der Gleichung (7) für alle (x_0, y_0) in K und auf C in gleichem Grade.

Nach einer endlichen Anzahl von Iterationen gehen die Integralgleichungen (7) und (19) entsprechend über in

$$(20)\qquad U^*(x_0,y_0)+\iint\limits_K f(x_0,y_0;p,q)\frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}}U^*(p,q)\,dp\,dq=\omega(x_0,y_0),$$

$$(21)\qquad U_0(x_0,y_0)+\iint\limits_K f_0(x_0,y_0;p,q)\frac{1}{r_{pi_0}^{2(1-\alpha)}}U_0(p,q)\,dp\,dq=\omega_0(x_0,y_0).$$ [1]

Die Funktion $\omega_0(x_0, y_0)$ konvergiert bei verschwindendem $\delta = 1 - \varrho$ in allen Punkten in K und auf C in gleichem Grade gegen die Funktion $\omega(x_0, y_0)$. Die lösenden Kerne der beiden Integralgleichungen (20) und (21) haben entsprechend die Gestalt

$$\frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}}\Theta(x_0,y_0;p,q)\ \text{und}\ \frac{1}{r_{pi_0}^{2(1-\alpha)}}\Theta_0(x_0,y_0;p,q).$$

[1] Wir denken uns in der Gleichung (7): $U^*(x,y)$ für $\overline{U}(x,y)$ gesetzt.

Die Funktion $\Theta_0(x_0, y_0; p, q)$ konvergiert bei verschwindendem $\varrho = 1 - \delta$ für alle (x, y) und (p, q) in K und auf C in gleichem Grade gegen die Funktion $\Theta(x_0, y_0; p, q)$. Nun ist bekanntlich

$$(22) \qquad U^*(x_0, y_0) = \omega(x_0, y_0) - \iint\limits_K \Theta(x_0, y_0; p, q) \frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}} \omega(p, q)\, dp\, dq$$

und

$$U_0(x_0, y_0) = \omega_0(x_0, y_0) - \iint\limits_K \Theta_0(x_0, y_0; p, q) \frac{1}{r_{pi_0}^{2(1-\alpha)}} \omega_0(p, q)\, dp\, dq.$$

Hieraus folgt leicht, dass der absolute Betrag der Differenz

$$U^*(x_0, y_0) - U_0(x_0, y_0)$$

mit δ gleichmässig gegen Null konvergiert.

Hieraus und aus der Stetigkeit von $\gamma(x_1, y_1; x, y)$ ergibt sich, dass der Ausdruck

$$|U^*(\varrho x_0, \varrho y_0) - U_0(x_0, y_0)| = |U^*(x, y) - U'(x, y)| = |\gamma(x_1, y_1; x, y) - \gamma'(x_1, y_1; x, y)|,$$

für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande jedes ganz im Innern von K enthaltenen Gebietes sich mit δ in gleichem Grade der Null nähert.[1]

Auch unsere dritte Behauptung ist hiermit vollständig bewiesen.

§ 3.

Kehren wir jetzt zu der Integralgleichung (7) zurück. Die Funktion $g(x_1, y_1; x, y)$ hat auf dem Rande des Gebietes K stetige partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$; das Integral $J = \iint\limits_K \Phi(p, q)\, G(x, y; p, q)\, dp\, dq$ hat, ausser im Punkte $H = (i, j)$, dieselbe Eigenschaft. In der Nähe dieses Punktes ist

$$(24) \qquad \left|\frac{\partial J}{\partial x}\right| < \theta_{24} \frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial J}{\partial y}\right| < \theta_{25} \frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}.\text{[2]}$$

[1] Vgl. die Fussnote auf d. S. 380.

[2] Diese Ungleichheitsbedingungen ergeben sich, wenn man die Integrale

$$\iint\limits_K \Phi(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial x}\, dp\, dq, \quad \iint\limits_K \Phi(p, q) \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial y}\, dp\, dq$$

wie die Integralausdrücke in I § 2 abschätzt. Sie gelten für $\alpha < \frac{1}{2}$. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ erhält man die Beziehungen $\left|\frac{\partial J}{\partial x}\right| < \theta_{28} |\log r_{xi}|$, $\left|\frac{\partial J}{\partial y}\right| < \theta_{29} |\log r_{xi}|$.

Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so sind die partiellen Ableitungen (24) beschränkt.

Wir beweisen jetzt, dass auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U^*}{\partial x}, \frac{\partial U^*}{\partial y}$ *sich auf* C, *ausser im Punkte* H, *stetig verhalten. In der Nähe dieses Punktes ist*

$$\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right| < \theta_{26}\frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial U^*}{\partial y}\right| < \theta_{27}\frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}.^{1} \tag{25}$$

Zu diesem Ende betrachten wir die beiden simultanen Integralgleichungen

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \frac{\partial G(x,y;p,q)}{\partial x}[a(p,q)u_1(p,q)+b(p,q)u_2(p,q)+c(p,q)U^*(p,q)]\,dp\,dq - \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \Phi(p,q)\frac{\partial G(x,y;p,q)}{\partial x}\,dp\,dq + \frac{\partial g(x_1,y_1;x,y)}{\partial x}, \\ u_2(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \frac{\partial G(x,y;p,q)}{\partial y}[a(p,q)u_1(p,q)+b(p,q)u_2(p,q)+c(p,q)U^*(p,q)]\,dp\,dq - \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \Phi(p,q)\frac{\partial G(x,y;p,q)}{\partial y}\,dp\,dq + \frac{\partial g(x_1,y_1;x,y)}{\partial y}. \end{aligned} \tag{26}$$

Man überzeugt sich leicht durch eine Wiederholung der im Kapitel I angewandten Schlüsse, dass diese Integralgleichungen durch eine endliche Anzahl von Iterationen der FREDHOLM'schen Methode zugänglich gemacht werden können. Wir bezeichnen mit $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ das System der Lösungen dieser Integralgleichungen, oder, falls sie nicht stets lösbar sein sollten, ein System der Lösungen der zugehörigen homogenen Integralgleichungen. Die Funktionen $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ sind in K und auf C, ausser in (x_1, y_1) und in H, stetig; in der Nachbarschaft von H ist sicher

$$|u_1(x,y)| < \theta_{30}\frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}, \quad |u_2(x,y)| < \theta_{31}\frac{1}{r_{xi}^{1-2\alpha}}. \tag{27}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K G(x,y;p,q)[a(p,q)u_1(p,q)+b(p,q)u_2(p,q)+c(p,q)U^*(p,q)]\,dp\,dq - \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K G(x,y;p,q)\Phi(p,q)\,dp\,dq + g(x_1,y_1;x,y). \end{aligned} \tag{28}$$

[1] Der im Text gegebene Beweis der Formeln (25) gilt nur, wenn $\alpha > \frac{1}{4}$, oder wenn $c = 0$. Im letzteren Falle sind $\frac{\partial U^*}{\partial x}, \frac{\partial U^*}{\partial y}$ in H beschränkt. Für $\alpha \leq \frac{1}{4}$, $c \neq 0$ würde, da $\psi_1(x_0, y_0)$ sich in H wie $\frac{\partial U^*}{\partial x}, \frac{\partial U^*}{\partial y}$ verhält, die FREDHOLM'sche Theorie auf (36) nicht anwendbar sein.

Sind die Integralgleichungen (26) nicht stets lösbar, so ist für (28) zu setzen

$$(28^*)\qquad V(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K G(x,y;p,q)[a(p,q)u_1(p,q)+b(p,q)u_2(p,q)]\,dp\,dq.$$

Offenbar ist in beiden Fällen

$$(29)\qquad u_1(x,y)=\frac{\partial V(x,y)}{\partial x},\quad u_2(x,y)=\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}.$$

Es ist nun zunächst leicht zu zeigen, dass die Integralgleichungen (26) stets lösbar sind. Andenfalls würde aus (28*) und (29) folgen

$$(30)\qquad V(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K G(x,y;p,q)\left[a(p,q)\frac{\partial V(p,q)}{\partial p}+b(p,q)\frac{\partial V(p,q)}{\partial q}\right]dp\,dq.$$

Hieraus würde man in bekannter Weise schliessen, dass

$$(31)\qquad \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2}=-a(x,y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}-b(x,y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}.$$

Da nun $V(x,y)$, wie aus (28*) folgt, auf C verschwindet, so würde nach bekannten Sätzen $V(x,y)$ in K und auf C identisch gleich Null sein.

Aus (28) und (29) folgt nunmehr die Beziehung

$$(32)\qquad \begin{aligned} V(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K G(x,y;p,q)\left[a(p,q)\frac{\partial V(p,q)}{\partial p}+b(p,q)\frac{\partial V(p,q)}{\partial q}+c(p,q)U^*(p,q)\right]dp\,dq-\\ -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K G(x,y;p,q)\Phi(p,q)\,dp\,dq+g(x_1,y_1;x,y).\end{aligned}$$

Hieraus wird in bekannter Weise geschlossen, dass

$$(33)\qquad \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2}=-a(x,y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}-b(x,y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}-c(x,y)U^*(x,y)+\Phi(x,y).$$

Wir setzen

$$V(x,y)-U^*(x,y)=W(x,y).$$

Aus (33) und (5) folgt

$$\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}=-a(x,y)\frac{\partial W}{\partial x}-b(x,y)\frac{\partial W}{\partial y}.$$

Da nun die Funktion $W(x, y)$ auf C offenbar verschwindet, so ist sie in K und auf C identisch gleich Null. Wir finden somit

$$u_1(x, y) = \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial x}, \; u_2(x, y) = \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial y}.$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U^*(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial U^*(x, y)}{\partial y}$ *sind also in* K *und auf* C, *ausser in* (x_1, y_1) *und in dem Punkte* H *stetig, genügen in der Nachbarschaft von* H *den Ungleichheitsbedingungen* (25) *und erfüllen die beiden simultanen Integralgleichungen:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^*(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial x}\left[a(p, q)\frac{\partial U^*}{\partial p} + b(p, q)\frac{\partial U^*}{\partial q} + c(p, q)\, U^*(p, q)\right] dp\, dq\, - \\ - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \Phi(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial x}\, dp\, dq + \frac{\partial g(x_1, y_1; x, y)}{\partial x},\end{aligned}$$

(34)

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^*(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial y}\left[a(p, q)\frac{\partial U^*}{\partial p} + b(p, q)\frac{\partial U^*}{\partial q} + c(p, q)\, U^*(p, q)\right] dp\, dq\, - \\ - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \Phi(p, q)\frac{\partial G(x, y; p, q)}{\partial y}\, dp\, dq + \frac{\partial g(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}.\end{aligned}$$

Die Beziehungen (34) kann man, wenn man U^* als bekannt ansieht, als ein System linearer Integralgleichungen zur Bestimmung von $\frac{\partial U^*}{\partial x}$ und $\frac{\partial U^*}{\partial y}$ auffassen.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U_0}{\partial x_0}$, $\frac{\partial U_0}{\partial y_0}$ erfüllen die beiden ganz analogen Integralgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_0(x_0, y_0)}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial x_0}\left[a_0(p, q)\frac{\partial U_0}{\partial p} + b_0(p, q)\frac{\partial U_0}{\partial q} + c_0(p, q)\, U_0(p, q)\right] dp\, dq\, - \\ - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \Phi_0(p, q)\frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial x_0}\, dp\, dq + \frac{\partial g(x_1^0, y_1^0; x_0, y_0)}{\partial x_0},\end{aligned}$$

(35)

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_0(x_0, y_0)}{\partial y_0} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial y_0}\left[a_0(p, q)\frac{\partial U_0}{\partial p} + b_0(p, q)\frac{\partial U_0}{\partial q} + c_0(p, q)\, U_0(p, q)\right] dp\, dq\, - \\ - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_K \Phi_0(p, q)\frac{\partial G(x_0, y_0; p, q)}{\partial y_0}\, dp\, dq + \frac{\partial g(x_1^0, y_1^0; x_0, y_0)}{\partial y_0}.\end{aligned}$$

Der Gleichförmigkeit der Bezeichnung halber denken wir uns jetzt in den Gleichungen (34) vorübergehend x_0, y_0 für x, y gesetzt.

Wie schon Herr FREDHOLM bemerkt hatte, lässt sich ein System von n simultanen linearen Integralgleichungen mit n Unbekannten auf eine Integralgleichung mit einer Unbekannten zurückführen. Wir bezeichnen die den Systemen (34) und (35) äquivalenten Integralgleichungen mit F_1 und F_2. Nach einer endlichen Anzahl von Iterationen gehen F_1 und F_2 entsprechend über in Integralgleichungen von der Form

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\varphi_1(x_0, y_0) + \iint\limits_{\overline{K}} R_1(x_0, y_0;\, p, q)\frac{1}{r_{pi}^{2(1-\alpha)}}\varphi_1(p, q)\,dp\,dq = \psi_1(x_0, y_0),\\ &\varphi_2(x_0, y_0) + \iint\limits_{\overline{K}} R_2(x_0, y_0;\, p, q)\frac{1}{r_{pi_0}^{2(1-\alpha)}}\varphi_2(p, q)\,dp\,dq = \psi_2(x_0, y_0),\end{aligned}$$ [1]

worin R_1 und R_2 Funktionen bezeichnen, die in $\overline{K}$ und auf $\overline{C}$ sich stetig verhalten.

Man beweist nunmehr wie in § 2 dieses Kapitels, dass

$$(37)\qquad R_1 = \lim_{\delta=0} R_2.$$

Die Funktion R_2 nähert sich ihrem Grenzwerte für alle x_0, y_0 und p, q in $\overline{K}$ und auf $\overline{C}$ in gleichem Grade.

Wir denken uns um den Punkt (x_1, y_1) in jeder der beiden Ebenen $\overline{K}$ einen kleinen Kreis vom Halbmesser $\delta_0 > 2\delta$ beschrieben. Das von diesen beiden Kreisen umschlossene Gebiet bezeichnen wir mit $\overline{K}_1$. Offenbar liegen die beiden Punkte (x_1^0, y_1^0) im Innern von $\overline{K}_1$. Wir beschreiben schliesslich in jeder der beiden Ebenen $\overline{K}$ einen Kreis vom Halbmesser δ_0 um den Punkt (i, j). Das Gebiet, welches diese Kreise mit dem Gebiete $\overline{K}$ gemeinsam haben, sei mit $\overline{K}_2$ bezeichnet. Es sei schliesslich ε eine beliebig kleine Grösse. Es lässt sich zeigen, dass man nach Festsetzung der Grösse δ_0 eine Zahl δ_2 so klein annehmen kann, dass für alle $\delta < \delta_2$ in allen Punkten von $\overline{K} - \overline{K}_1 - \overline{K}_2$

[1] Das Integrationsgebiet besteht nunmehr in bekannter Weise aus zwei übereinander gelagerten Einheitskreisen. Ist (x_0, y_0) ein Punkt in der ersten Kreisfläche, so ist $\varphi_1(x_0, y_0) = \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial x_0}$, $\varphi_2(x_0, y_0) = \frac{\partial U_0(x_0, y_0)}{\partial x_0}$; ist dagegen (x_0, y_0) derselbe Punkt in der anderen Kreisfläche, so ist $\varphi_1(x_0, y_0) = \frac{\partial U(x_0, y_0)}{\partial y_0}$, $\varphi_2(x_0, y_0) = \frac{\partial U_0(x_0, y_0)}{\partial y_0}$. Die Begrenzung von $\overline{K}$ bezeichnen wir mit $\overline{C}$.

$$(38) \qquad |\psi_1(x_0, y_0) - \psi_2(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

wird. Hieraus und aus (37) folgt weiter, dass man eine Zahl δ_3 so klein wählen kann, dass für alle $\delta < \delta_3$ in $\overline{K} - \overline{K}_1 - \overline{K}_2$

$$(39) \qquad |\varphi_1(x_0, y_0) - \varphi_2(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

wird. Dies bedeutet nun aber folgendes: In allen Punkten im Innern und auf dem Rande jedes die Punkte (x_1, y_1) und (i, j) nicht enthaltenden Teilgebietes K^* von K nähern sich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial U_0}{\partial x_0}, \frac{\partial U_0}{\partial y_0}$ mit verschwindendem δ gleichmässig den Werten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial U^*}{\partial x_0}, \frac{\partial U^*}{\partial y_0}$ an. Hieraus folgt nun aber ohne Mühe, dass in allen Punkten im Innern und auf dem Rande jedes den Punkt (x_1, y_1) nicht enthaltenden, ganz im Innern von K gelegenen Gebietes

$$\lim_{\varrho=1} \frac{\partial U'(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial x}, \qquad \lim_{\varrho=1} \frac{\partial U'(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U^*(x, y)}{\partial y},$$

wofür wir auch schreiben können

$$(40) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\varrho=1} \dfrac{\partial \gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial \gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial x}, \\[2ex] \lim\limits_{\varrho=1} \dfrac{\partial \gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial \gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}. \end{cases}$$ [1]

Wir fassen jetzt die Ergebnisse dieses und des vorhergehenden Paragraphen in dem folgenden Satze zusammen:

Es sei ϱ_0 ein positiver echter Bruch. Es sei C' ein Kreis um den Koordinatenursprung in der Ebene (x, y), dessen Halbmesser der Ungleichheitsbedingung $\varrho_0 \leq \varrho < 1$ genügt. Das von ihm begrenzte Gebiet bezeichnen wir mit K'. Es sei C der Einheitskreis, K seine Fläche. Es sei ferner (x_1, y_1) irgendein Punkt, dessen Entfernung von dem Koordinatenursprung kleiner ist als ϱ_0.

Wir gingen von der Voraussetzung aus, dass die zu dem Gebiete K gehörige GREEN'*sche Funktion*

$$(41) \qquad \Gamma(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} + \gamma(x_1, y_1; x, y)$$

---

[1] Vgl. die Fussnote a. d. S. 380.

existiert. Alsdann haben wir in § 2 bewiesen, dass für alle hinreichend kleinen Werte von $1-\varrho$ *die zu dem Gebiete* K' *gehörige* GREEN'*sche Funktion*

$$\Gamma'(x_1, y_1; x, y) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2} + \gamma'(x_1, y_1; x, y) \tag{42}$$

existiert und dass in allen Punkten (x, y) *in* K

$$\lim_{\varrho=1}\gamma'(x_1, y_1; x, y) = \gamma(x_1, y_1; x, y). \tag{43}$$

Die Funktion $\gamma'(x_1, y_1; x, y)$ *nähert sich ihrem Grenzwerte in jedem den Umfang nicht enthaltenden Teilgebiete von* K *in gleichem Grade. Die Funktion* $\gamma(x_1, y_1; x, y)$ *hat in allen Punkten* (x, y) *in* K *und auf* C*, die Punkte* (x_1, y_1) *und* (i, j) *ausgenommen, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Desgleichen hat die Funktion* $\gamma'(x_1, y_1; x, y)$ *in* K' *und auf* C'*, ausser im Punkte* (x_1, y_1)*, stetige Ableitungen erster Ordnung.*

Es sei K^* *irgendein den Punkt* (x_1, y_1) *und die Randkurve* C *nicht enthaltendes Teilgebiet von* K*. Es ist in allen Punkten* (x, y) *in* K^*

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\varrho=1}\frac{\partial\gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial x} = \frac{\partial\gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial x},\\ &\lim_{\varrho=1}\frac{\partial\gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial y} = \frac{\partial\gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}.\end{aligned}\right. \tag{44}$$

Die Funktionen hinter dem Limeszeichen in (44) *nähern sich ihren Grenzwerten in* K^* *in gleichem Grade.*[1]

Aus den Beziehungen (44) können wir noch eine weitere Folgerung ziehen. Es sei C_1 irgendein kleiner, den Punkt (i, j) in seinem Inneren enthaltender Bogen von C. Die Endpunkte von C_1 denken wir uns mit dem Kreismittelpunkt durch Radien verbunden. Derjenige Teil von C', der innerhalb des so gebildeten Kreissektors liegt, möge C'_1 heissen. Wir denken uns vorübergehend diejenigen Punkte von $C - C_1$ und $C' - C'_1$, die auf demselben Radius liegen, einander zugeordnet. Es sei (ξ, η) und (ξ', η') ein Paar zugeordneter Punkte. *Alsdann ist*

$$\begin{aligned} &\lim_{\varrho=1}\left\{\frac{\partial\gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\xi'\\ y=\eta'}}\right\} = \frac{\partial\gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}},\\ &\lim_{\varrho=1}\left\{\frac{\partial\gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=\xi'\\ y=\eta'}}\right\} = \frac{\partial\gamma(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}.\end{aligned} \tag{45}$$

[1] In den zu (43) und (44) gehörigen Aussagen werden beliebige, die Kurve C nicht enthaltende Teilgebiete von K eingeführt, weil die Funktion $\gamma'(x_1, y_1; x, y)$, $\rho < 1$ für die Punkte (x, y) von C nicht definiert ist.

Die Ausdrücke $\left.\frac{\partial\gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=\xi' \\ y=\eta'}}$ *und* $\left.\frac{\partial\gamma'(x_1, y_1; x, y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=\xi' \\ y=\eta'}}$ *nähern sich mit verschwindendem* δ *ihren Grenzwerten für alle* (ξ, η) *auf* $C - C_1$ *in gleichem Grade.*

§ 4.

Wir nehmen jetzt zur Vereinfachung an, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial A}{\partial X}, \frac{\partial A}{\partial Y}, \frac{\partial B}{\partial X}, \frac{\partial B}{\partial Y}$ im Innern des Gebietes T der HÖLDER'schen Bedingung genügen. Die Funktionen $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, d$ haben alsdann im Innern des Kreises K dieselbe Eigenschaft.

Es sei

$$(46)\qquad M(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial(au)}{\partial x} - \frac{\partial(bu)}{\partial y} + cu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} - du = 0$$

die zu (3) adjungierte Differentialgleichung. Wir haben in diesem Kapitel vorausgesetzt, dass die partielle Differentialgleichung (3) keine von Null verschiedene, in K mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige, am Rande verschwindende Lösung hat. *Die Differentialgleichung* (46) *hat dieselbe Eigenschaft.* Hiervon kann man sich, wie folgt, leicht überzeugen.

Es sei, entgegen unserer Behauptung, $v_0(x, y)$ eine am Rande von K verschwindende, im Innern mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung stetige Lösung von (46). Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y}$ sind, wie durch eine den Betrachtungen des § 3 ganz analoge Untersuchung gezeigt werden kann, ausser in dem Punkte $H = (i, j)$, auf dem Rande des Gebietes stetig. In der Umgebung des Punktes H ist

$$(47)\qquad \left|\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x}\right| < \gamma r_{xi}^{2\alpha-1}, \qquad \left|\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y}\right| < \gamma r_{xi}^{2\alpha-1},$$

worin γ eine gewisse positive Grösse bezeichnet.

Setzen wir nunmehr in der GREEN'schen Formel

$$(48)\quad \iint\limits_K [wL(t)-tM(w)]\,dx\,dy = \int\limits_C \left[w\frac{\partial t}{\partial x}-t\frac{\partial w}{\partial x}+atw\right]dy - \int\limits_C \left[w\frac{\partial t}{\partial y}-t\frac{\partial w}{\partial y}+btw\right]dx$$ [1]

für $t(x,y)$ und $w(x,y)$ entsprechend $\Gamma(x_1,y_1;\,x,y)$ und $v_0(x,y)$ ein, so erhalten wir

$$v_0(x_1,y_1)\equiv 0.$$

Es sei jetzt $H(x_1,y_1;\,x,y)$ die zu dem Gebiete K gehörige GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (46), $u(x,y)$ diejenige beschränkte Lösung der Differentialgleichung (2), welche sich mit ihren partiellen Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung in K stetig verhält und auf C eine vorgeschriebene abteilungsweise stetige Folge von Werten annimmt. *Wir beweisen nunmehr die Fundamentalformel*

$$(49)\quad u(x_1,y_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C u(x,y)\frac{\partial H(x_1,y_1;\,x,y)}{\partial n}\,ds-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K f(p,q)\,H(x_1,y_1;\,p,q)\,dp\,dq.$$

Hierin bezeichnen: (x,y) einen variablen Punkt auf C, ds das Bogenelement, $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale im Punkte (x,y).

Sind die auf dem Umfange von K vorgeschriebenen Randwerte stetig und haben sie in bezug auf die Bogenlänge stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung, so bietet der Beweis der Formel (49) keine Schwierigkeiten. In der Tat, ist durch die vorhergehenden Entwicklungen die Existenz der Lösung $u(x,y)$ sichergestellt. Es lässt sich ferner durch eine den Untersuchungen des § 3 ganz analoge Betrachtung zeigen, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ sich auf C, ausser in dem Punkte $H=(i,j)$, stetig verhalten, während in der Umgebung dieses Punktes gewisse den Beziehungen (47) analoge Ungleichheitsbedingungen erfüllt sind. Es genügt nunmehr in der GREEN'schen Formel (48) für $t(x,y)$ und $w(x,y)$ entsprechend $u(x,y)$ und $H(x_1,y_1;\,x,y)$ einzusetzen, um die Formel (49) abzuleiten.[2]

In dem allgemeinen Falle ist indessen dieser einfache Weg nicht gangbar, da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ auf dem Rande im allgemeinen nicht existieren. Um die Formel (49) dennoch zu beweisen, muss ein anderes

[1] Vgl. SOMMERFELD, Encyklopädie der Math. Wissenschaften, Bd II, A 7 c, S. 513. Man überzeugt sich leicht, dass die Formel (48) im vorliegenden Falle ihre Gültigkeit behält.

[2] Vgl. SOMMERFELD, Encyklopädie d. Math. Wiss., Bd II, A 7 c, S. 516.

Verfahren eingeschlagen werden. Die Hilfsmittel hierzu bieten uns die Sätze, die wir in den vorhergehenden Paragraphen abgeleitet haben.

Wie wir in § 2 dieses Kapitels bewiesen haben, gibt es eine positive Zahl δ_1, so dass für alle positiven $\delta \leqq \delta_1$ die Differentialgleichung (3) keine von Null verschiedene, im Innern von K' mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, auf C' verschwindende Lösung hat. Es sei $H'(x_1, y_1; x, y)$ die zu dem Gebiete K' gehörige GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (46). Die Funktion $u(x, y)$ ist im Innern und auf dem Rande von K' mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig. Daher ist für alle (x_1, y_1) im Innern von K'

$$(50)\quad u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C'} u(x'_0, y'_0)\frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'}ds' - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K'} f(p, q) H'(x_1, y_1; p, q)dp\,dq.$$

Hierin bezeichnen: (x'_0, y'_0) einen variablen Punkt auf C', ds' das Bogenelement, $\frac{\partial}{\partial n'}$ die Ableitung in der Richtung der Normale im Punkte (x'_0, y'_0). Es mögen jetzt C_1, C'_1 dieselbe Bedeutung wie am Ende des § 4 haben. Die Länge des Bogens C_1 bezeichnen wir mit ν. Wir bezeichnen ferner mit (x_0, y_0) denjenigen Punkt von C, der mit dem Punkte (x'_0, y'_0) auf demselben Radius liegt. Es sei schliesslich ε eine beliebig kleine positive Zahl.

Wie aus unseren früheren Betrachtungen hervorgeht, ist

$$u(x'_0, y'_0)\frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'}$$

eine für alle $\delta \leqq \delta_1$ und alle (x_0, y_0) auf $C - C_1$ beschränkte Funktion von x'_0, y'_0, δ. Abgesehen von einer endlichen Anzahl von Punkten ist überdies, wie aus den Formeln (41), (42) und (45) hervorgeht,

$$\lim_{\delta=0} u(x'_0, y'_0)\frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'} = u(x_0, y_0)\frac{\partial H(x_1, y_1; x_0, y_0)}{\partial n}.$$

Nach bekannten Sätzen ist, da der Grenzübergang gleichmässig ist,

$$(51)\quad \lim_{\delta=0}\int\limits_{C'-C'_1} u(x'_0, y'_0)\frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'}ds' = \int\limits_{C-C_1} u(x_0, y_0)\frac{\partial H(x_1, y_1; x_0, y_0)}{\partial n}ds.$$

Man kann nun ferner, wie aus den Beziehungen (25) folgt, ν so klein wählen, dass für alle $\delta \leqq \delta_1$ die über C_1 und C'_1 erstreckten Integrale

$$\int\limits_{C_1} u(x_0, y_0) \frac{\partial H(x_1, y_1; x_0, y_0)}{\partial n} ds, \int\limits_{C'_1} u(x'_0, y'_0) \frac{\partial H'(x_1, y_1; x'_0, y'_0)}{\partial n'} ds'$$

dem absoluten Betrage nach kleiner werden als ε. Hieraus und aus den Beziehungen (50) und (51) folgt, wie behauptet,

$$(52) \qquad u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C} u(x_0, y_0) \frac{\partial H(x_1, y_1; x_0, y_0)}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K} f(p, q) H(x_1, y_1; p, q) dp\, dq.$$

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass $\frac{\partial A}{\partial X}, \frac{\partial A}{\partial Y}, \frac{\partial B}{\partial X}, \frac{\partial B}{\partial Y}$ im Innern von T der HÖLDER'schen Bedingung genügen. Diese Voraussetzung lassen wir nunmehr fallen: $\frac{\partial A}{\partial X}, \cdots \frac{\partial B}{\partial Y}$ sollen schlechthin stetige Funktionen von X und Y sein. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}$ sind alsdann in K schlechthin stetige Funktionen von x und y. Alle unsere Schlüsse bleiben, wie wir jetzt zeigen wollen, bestehen, wenn wir $M(u)$ durch den Ausdruck

$$(53) \quad \overline{M}(u) \equiv \lim_{h=0} \frac{1}{h} \left[\frac{\partial u(x+h, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y+h)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] - \\ - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} - du$$

ersetzen.

Betrachten wir noch einmal die Differentialgleichung

$$(54) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

und nehmen wir vorübergehend an, c und f seien schlechthin stetige Funktionen und erfüllen in K nicht mehr die HÖLDER'sche oder eine verwandte Bedingung. Wir können alsdann aus der Gleichung (26) des I Kapitels nicht mehr schliessen, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existieren und dass die Differentialgleichung (54) erfüllt ist.

Es sei $r(x, y)$ eine stetige Funktion von x und y. Wie Herr PETRINI bewiesen hat,[1] erfüllt das Integral

[1] Vgl. H. PETRINI, Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique, Journal de Mathématiques, 1909, [S. 127—223], S. 133.

$$\omega(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_K r(\xi, \eta)\; G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

die Beziehung

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial \omega(x+h, y)}{\partial x} - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \omega(x, y+h)}{\partial y} - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y}\right] = r(x, y).$$

Der hinter dem Limeszeichen stehende Ausdruck linkerhand nähert sich seinem Grenzwerte für alle (x, y) in K in gleichem Grade. Aus der Gleichung (58) des ersten Kapitels ergibt sich daher die Beziehung

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial u(x+h, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y+h)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right] +$$
$$+ a(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c(x, y)\, u(x, y) = f(x, y).$$

Die Funktion $h(x_1, y_1; x, y) = H(x_1, y_1; x, y) + \frac{1}{2}\log[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]$, die einer zu (7) analogen Integralgleichung genügt, hat nun im vorliegenden Falle in jedem (x_1, y_1) nicht enthaltenden Teilgebiete von K stetige Ableitungen erster Ordnung und erfüllt daselbst die Beziehung $\overline{M}(u) = 0$. Der Ausdruck hinter dem Limeszeichen nähert sich seinem Grenzwerte in gleichem Grade.

Man überzeugt sich nunmehr ohne Mühe, dass die GREEN'sche Formel (48) gültig bleibt, wenn man für $M(w)$ den Ausdruck $\overline{M}(w)$ einsetzt. Da nun offenbar auch die grundlegenden Hilfsätze in §§ 2 und 3 ihre Gültigkeit behalten, so haben wir an unseren Schlüssen nichts mehr zu ändern. Wir erhalten wieder die Formel (52). Das einzige, was wir uns zu merken haben, ist, dass $H(x_1, y_1; x, y)$ nicht mehr die Gleichung (46), sondern die Gleichung $\overline{M}(u) = 0$ erfüllt.

Gehen wir jetzt von dem Gebiete K vermittelst der Transformation

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y) \tag{55}$$

zu dem ursprünglichen, mit Ecken ausgestatteten Gebiete T zurück. Die Differentialgleichung (2) geht über in die ursprüngliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A\frac{\partial U}{\partial X} + B\frac{\partial U}{\partial Y} + CU = F, \tag{56}$$

die Gleichung (46) in die zu (56) adjungierte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial}{\partial X}(AU) - \frac{\partial}{\partial Y}(BU) + CU = 0 \tag{57}$$

über. Die Funktion

$$\overline{H}(X_1, Y_1; X, Y) = H(x_1, y_1; x, y) \tag{58}$$

ist, wie man sofort sieht, die zu dem Gebiete T gehörige GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung (57). Die Gleichung (52) geht über in

$$U(X_1, Y_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S U(X_0, Y_0)\frac{\partial \overline{H}(X_1, Y_1; X_0, Y_0)}{\partial n} ds - \\ - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_T F(P, Q)\overline{H}(X_1, Y_1; P, Q)\, dP\, dQ. \tag{59}$$

Wir haben zur Vereinfachung in diesem Kapitel das Gebiet T einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Die Zahl der Ecken haben wir gleich eins angenommen. Die Formel (59) gilt unverändert bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten mit einer endlichen Anzahl von Ecken. Der Beweis wäre analog zu führen.

Berlin, d. 19. Dezember 1910.

Nachtrag.

In einer in Veröffentlichung begriffenen grösseren Arbeit[1] habe ich die erste Randwertaufgabe noch einmal nach einem von dem obigen abweichenden Verfahren behandelt. An jener Stelle wird das erste Randwertproblem unter anderem für alle Gebiete erledigt, deren Begrenzung aus einer endlichen Anzahl Stücke von Kurven mit stetiger Tangente besteht, die beliebige Ecken oder *Spitzen* miteinander einschliessen. Die Randwerte werden als abteilungsweise stetig vorausgesetzt.

Berlin, d. 17 Oktober 1912.

[1] Vgl. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1913, Heft I, Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I. Die erste Randwertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete.