SUR LES FONCTIONS A UN NOMBRE FINI DE BRANCHES DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

PAR

J. MALMQUIST

à STOCKHOLM.

Les fonctions analytiques les plus simples sont les fonctions uniformes et les fonctions à un nombre fini de déterminations. Les fonctions les plus importantes de cette classe satisfont à des équations différentielles algébriques de forme simple. Il est donc naturel de se poser la question d'étudier toutes les fonctions de la classe considérée que l'on peut rencontrer par l'intégration d'équations différentielles algébriques, et en particulier le problème suivant:

Étudier les propriétés des intégrales d'une équation différentielle algébrique quand chaque intégrale est une fonction à n déterminations au plus.

BRIOT et BOUQUET ont étudié ce problème pour une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0,$$

F étant une fonction entière et rationnelle de $\frac{dy}{dx}$ et de y, mais ne contenant pas x,[1] et ils ont montré que, sous la condition posée, y doit être ou bien une fonction algébrique de x, ou bien une fontion algébrique de e^{gx}, ou bien une fonction algébrique de $p(gx), g$ étant une constante.

C'est M. PAINLEVÉ qui a abordé le problème pour une équation différentielle du premier ordre sans faire aucune supposition sur la forme de l'équation.[2] Les méthodes qu'il a proposées pour la solution du problème consistent à l'étude de l'intégrale générale comme fonction des valeurs initiales, et il vient facilement

[1] BRIOT et BOUQUET, *Intégrations des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques* (Journal de l'École Polytechnique, t. XXI).

[2] PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, et *Note sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches*, publiée dans le livre de M. BOUTROUX, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* (Collection de monographies sur la théorie des fontions publiée sous la direction de M. ÉMILE BOREL).

au but quand il suppose que chaque intégrale admet le même nombre de déterminations, sauf peut-être certaines intégrales exceptionnelles formant un ensemble dénombrable. Pour démontrer que les intégrales exceptionnelles forment effectivement un ensemble dénombrable il a tenté deux méthodes différentes, mais il n'a considéré que des cas particuliers, et il ne semble pas que ses méthodes puissent donner la solution du problème dans le cas général.

Dans le mémoire présent nous allons traiter le problème en question par une méthode qui est de tout autre nature de celle de M. PAINLEVÉ. Nous ferons appliquer les résultats intéressants de M. BOUTROUX concernant la croissance des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre[1], à étudier la nature d'une intégrale à un nombre fini de déterminations. Nous arrivons ainsi non seulement à résoudre le problème de M. PAINLEVÉ, mais aussi à fixer le caractère de toute intégrale particulière qui est une fonction à un nombre fini de déterminations. De plus, nous aurons un résultat général sur la nature de certains points singuliers.

Pour obtenir une théorie complète nous exposons dans le premier chapitre les résultats de M. BOUTROUX; dans le second chapitre nous les appliquons au problème considéré.

La méthode s'applique à une équation différentielle d'un degré quelconque par rapport à $\frac{dy}{dx}$, mais nous n'étudions pour le moment que l'équation suivante du premier degré en $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{1}$$

P, Q étant des polynomes en x, y.

I. Les résultats de M. Boutroux.

1. Pour être complets nous rappelons certains résultats classiques que l'on a obtenus pour l'équation (1) et dont nous aurons besoin dans la suite. Partons du théorème fondamental de CAUCHY:

Si x_0, y_0 sont des valeurs finies telles que $Q(x_0, y_0) \neq 0$, il existe une seule série de puissance de $x - x_0$ qui converge dans un certain cercle, qui satisfait à l'équation différentielle et qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$. Si $Q(x, y) \neq 0$ pour $|x - x_0| \leq r$, $|y - y_0| \leq r'$ et si $\left|\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\right| < M$ pour ces valeurs de x, y, la série converge au moins pour $|x - x_0| < r\left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right)$.

[1] BOUTROUX, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, p. 39—54.

Faisons le prolongement analytique de cette série le long d'un certain chemin jusqu'à ce que l'on rencontre un point singulier. Soit a ce point singulier et désignons par y la branche définie par les prolongements successives. On conclut facilement que l'un des cas suivants doit avoir lieu:

1) on a $\lim\limits_{x=a} y = b$ avec $Q(a, b) = 0$,

2) on a $\lim\limits_{x=a} y = \infty$,

3) y ne tend vers aucune valeur déterminée (finie ou infinie) quand x tend vers a.

En s'appuyant sur le théorème de CAUCHY, M. PAINLEVÉ a démontré le théorème fondamental que *le troisième cas ne peut avoir lieu que si a est un point satisfaisant à l'une des conditions suivantes:*[1]

1) $Q(a, y)$ est identiquement nulle,

2) les équations $P(a, y) = 0$, $Q(a, y) = 0$ ont une solution commune,

3) posant $y = \frac{1}{z}$ on aura une équation nouvelle, soit $\frac{dz}{dx} = \frac{P_1(x, z)}{Q_1(x, z)}$: on a $P_1(a, 0) = 0$, $Q_1(a, 0) = 0$,

4) si $a = \infty$ on pose $x = \frac{1}{u}$, et pour l'équation nouvelle, $u = 0$ doit satisfaire à l'une des conditions précédentes.

Supposons que a soit distinct des points ξ en nombre fini définis par ces conditions. Si l'on a $\lim\limits_{x=a} y = b$ et $Q(a, b) = 0$ et si $y = b$ est racine d'ordre ν de l'équation $Q(a, y) = 0$, on démontre facilement qu'il existe une série de la forme

$$(x-a)^{\frac{1}{\nu+1}} \mathfrak{P}\left((x-a)^{\frac{1}{\nu+1}}\right),$$

avec $\mathfrak{P}(0) \neq 0$, telle que

$$y = b + (x-a)^{\frac{1}{\nu+1}} \mathfrak{P}\left((x-a)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)$$

pour une certaine détermination de $(x-a)^{\frac{1}{\nu+1}}$.

Si l'on a $\lim\limits_{x=a} y = \infty$, on pose $y = \frac{1}{z}$; si $Q_1(a, 0) \neq 0$ on aura une égalité de la forme

$$z = (x-a)^n \mathfrak{P}(x-a), \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0$$

d'où

$$y = (x-a)^{-n} \mathfrak{P}_1(x-a).$$

Si $Q_1(a, 0) = 0$ et si $z = 0$ est racine d'ordre ν de l'équation $Q_1(a, z) = 0$, on aura une égalité de la forme

[1] PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 23.

$$y=(x-a)^{-\frac{1}{\nu+1}}\mathfrak{P}\left((x-a)^{\frac{1}{\nu+1}}\right),\ \mathfrak{P}(0)\neq 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

A l'exception des points ξ, une intégrale quelconque de l'équation (1) *ne saurait admettre d'autres points singuliers que des points singuliers algébriques.*

Il est à remarquer que les séries rencontrées toute-à-l'heure sont parfaitement déterminées par le point a et par leurs valeurs initiales pour $x=a$: p. ex. si $Q(a, b)=0$ il existe une seule série $b+(x-a)^{\frac{1}{\nu+1}}\mathfrak{P}\left((x-a)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)$ qui satisfait à l'équation différentielle.

2. Abordons maintenant l'exposition des résultats de M. BOUTROUX. Nous considérons d'abord l'équation suivante

$$(1')\qquad \frac{dy}{dx}=a_0y^p+a_1y^{p-1}+\cdots+a_p,$$

$a_0, a_1, \ldots a_p$ étant des fonctions rationnelles de x.

Il s'agit d'étudier la croissance des intégrales dans le voisinage d'un point ξ. Pour simplifier l'écriture nous supposons que $\xi=\infty$.

En général, il existe des points singuliers dans le voisinage de $x=\infty$ pour lesquels l'intégrale devient infini. Pour obtenir une exposition plus claire nous considérons d'abord un cas particulier où de tels singularités n'existent pas. Plus précisement, nous considérons une branche d'intégrale que l'on définie en partant d'une certaine série de puissance qui satisfait à l'équation (1') et en faisant des prolongements analytiques de toutes les manières possibles le long de chemins à l'extérieur d'un certain cercle $|x|=r$; et nous supposons que cette branche n'a aucun point singulier à distance finie. La branche ne sera pas nécessairement uniforme, un nombre fini ou une infinité de branches uniformes peuvent s'échanger quand x tourne autour du point $x=\infty$. Désignant la branche par $f(x)$ nous démontrons le théorème suivant:

Théorème A'. *Il existe un nombre r tel que toute détermination de $f(x)$ satisfait à l'inégalité*

$$|f(x)|<|x|^r$$

pour tout point x à l'extérieur d'un cercle $|x|=R$ assez grand.

Posons

$$a_i=x^{\lambda_i}\left(a_i^{(0)}+a_i^{(1)}\frac{1}{x}+\cdots\right),\ a_i^{(0)}\neq 0\ \ (i=0, 1, \ldots p)$$

les séries étant convergentes si $|x|$ est assez grand. Le second membre de l'équation (1') s'écrit donc

$$y^p x^{\lambda_0}\Big\{a_0^{(0)} + a_0^{(1)}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{y}x^{\lambda_1-\lambda_0}\Big(a_1^{(0)} + a_1^{(1)}\frac{1}{x} + \cdots\Big) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{y^p}x^{\lambda_p-\lambda_0}\Big(a_p^{(0)} + a_p^{(1)}\frac{1}{x} + \cdots\Big)\Big\}$$

$$= y^p x^{\lambda_0}(a_0^{(0)} + \varphi(x, y)),$$

et si y satisfait aux conditions

$$|y|^i \geqq |x|^{\lambda_i-\lambda_0+\varepsilon} \ (i = 1, \ldots p)$$

ε étant un nombre positif, et $\bar{\varepsilon}$ est un nombre positif plus petit que les nombres ε et 1, $\varphi(x, y)$ satisfait à l'inégalité

$$|\varphi(x, y)| < |x|^{-\varepsilon}$$

si $|x|$ est assez grand. Supposons que ceci a lieu pour $|x| > r$.

Les conditions pour y sont remplies si l'on a

$$|y| \geqq |x|^{\sigma+\varepsilon}$$

σ désignant le plus grand des nombres

$$\frac{1}{i}(\lambda_i - \lambda_0) \ (i = 1, \ldots p).$$

Maintenant, trois cas sont à distinguer:

1) on a $|f(x)| < |x|^{\sigma+\varepsilon}$ si $|x|$ est assez grand,

2) on a $|f(x)| \geqq |x|^{\sigma+\varepsilon}$ si $|x|$ est assez grand,

3) on a tantôt l'une, tantôt l'autre inégalité dans un entourage arbitrairement petit de $x = \infty$.

Nous démontrons que c'est le premier cas seul qui peut avoir lieu. Considérons d'abord le second cas, en supposant que l'inégalité $|f(x)| \geqq |x|^{\sigma+\varepsilon}$ ait lieu pour $|x| > r'$. Nous allons tirer certaines conclusions qui aboutissent à une contradiction, si ε satisfait à une certaine inégalité que nous écrirons dans un moment.

Soit $y = \mathfrak{P}(x - x_0)$ un élément de $f(x)$, $|x_0|$ étant plus grand que r, r'. Intégrant l'équation

$$y^{-p}\frac{dy}{dx} = x^{\lambda_0}(a_0^{(0)} + \varphi(x, y))$$

on aura

$$-y^{-(p-1)} + y_0^{-(p-1)} = (p-1)a_0^{(0)}\int_{x_0}^{x} x^{\lambda_0}dx + (p-1)\int_{x_0}^{x} x^{\lambda_0}\varphi(x, y)\,dx,$$

où $y_0 = \mathfrak{P}(0)$.

La première intégrale se calcule immédiatement. En la développant suivant les puissances de $x-x_0$ on voit qu'elle peut s'écrire

$$(x-x_0)\, x_0^{\lambda_0}\left(1+\varphi\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)\right)$$

et que

$$\left|\varphi\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)\right| < k\varepsilon'$$

pour $\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right| < \varepsilon' < 1$, k étant un nombre positif indépendant de x_0, x.

Nous prenons $|x_0|$ assez grand pour que $\varepsilon'|x_0|$ soit plus petit que $|x_0|-r$, $|x_0|-r'$. Si $|x-x_0| < \varepsilon'|x_0|$ on aura donc, pour la seconde intégrale, en supposant que l'intégration soit effectuée le long d'une ligne droite

$$\left|\int_{x_0}^{x} x^{\lambda_0}\varphi(x,y)\,dx\right| \leqq \int_{x_0}^{x} |x^{\lambda_0}\varphi(x,y)|\,|dx| < \int_{x_0}^{x} |x|^{\lambda_0-\varepsilon}\,|dx| < k_1 |x_0|^{\lambda_0-\varepsilon}|x-x_0|,$$

k_1 étant le plus grand des nombres $(1\pm\varepsilon')^{\lambda_0-\varepsilon}$.

Si l'on écrit

$$-y^{-(p-1)} + y_0^{-(p-1)} = (p-1)\, a_0^{(0)}(x-x_0)\, x_0^{\lambda_0}(1+\varphi_1(x,x_0))$$

il résulte que

$$|\varphi_1(x,x_0)| < k\varepsilon' + \frac{k_1}{|a_0^{(0)}|}|x_0|^{-\varepsilon} < 2k\varepsilon',$$

si $|x_0|$ est choisi suffisamment grand. Comme on a, d'après la supposition, $|y_0| \geqq |x_0|^{\sigma+\varepsilon}$ on aura donc

$$|y|^{-(p-1)} > (p-1)|a_0^{(0)}|\,|x-x_0|\,|x_0|^{\lambda_0}(1-2k\varepsilon') - |x_0|^{-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}.$$

Nous supposons le nombre ε' assez petit pour que $2k\varepsilon' < 1$, et en prenant x sur la circonférence

$$|x-x_0| = h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)},$$

de manière que l'inégalité précédente s'écrit

$$|y|^{-(p-1)} > [h(p-1)|a_0^{(0)}|(1-2k\varepsilon') - 1]\,|x_0|^{-(p-1)(\sigma+\varepsilon)},$$

nous supposons que h a une valeur fixe telle que

$$h(p-1)|a_0^{(0)}|(1-2k\varepsilon')\geq 2.$$

Comme on a supposé dans le précédent que x satisfait à l'inégalité $|x-x_0|<\varepsilon'|x_0|$, il faut que l'égalité $|x-x_0|=h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$ ne soit pas en contradiction avec cette inégalité. A cet effet il suffit que ε satisfait à l'inégalité

$$-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)<1,$$

et que $|x_0|$ est plus grand qu'un certain nombre, qui dépend naturellement de la valeur de h.

Si x est un point quelconque sur la circonférence $|x-x_0|=h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$, il résulte que l'on a

$$|y|^{-(p-1)}>|x_0|^{-(p-1)(\sigma+\varepsilon)},$$

d'où

$$|y|<|x_0|^{\sigma+\varepsilon}.$$

D'après un théorème de CAUCHY-WEIERSTRASS on en conclut que

$$|y_0|<|x_0|^{\sigma+\varepsilon}.$$

Or, ceci est contraire à l'hypothèse, et il est donc démontré que le second des trois cas énumérés ne peut pas avoir lieu.

Par des raisonnements analogues on démontre qu'il en est de même du troisième cas. En effet, supposons que l'on ait $|y_0|\geq|x_0|^{\sigma+\varepsilon}$, y_0 étant l'une des valeurs de $f(x)$ pour $x=x_0$ et $|x_0|$ étant assez grand, et considérons l'élément y de $f(x)$ qui pour $x=x_0$ devient égal à y_0. De l'inégalité $|y_0|\geq|x_0|^{\sigma+\varepsilon}$ nous pouvons conclure que l'inégalité $|y|>\frac{|x|^{\sigma+\varepsilon}}{K}$ doit avoir lieu pour $|x-x_0|<h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$, si K désigne le plus grand des nombres $K_1(1\pm\varepsilon')^{\sigma+\varepsilon}$, K_1 étant défini par l'égalité

$$K_1^{p-1}=h(p-1)|a_0^{(0)}|(1+2k\varepsilon')+1.$$

On voit d'abord que la dite inégalité a lieu dans un certain entourage de $x=x_0$, supposons qu'elle ait lieu pour $|x-x_0|<\varrho<h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$. Par suite, on a $|y|\geq\frac{|x|^{\sigma+\varepsilon}}{K}$ pour $|x-x_0|\leq\varrho$. On en conclut que, pour ces dernières valeurs de x, $\varphi(x,y)<|x|^{-\bar{\varepsilon}}$, si $|x_0|$ est choisi assez grand. Par suite, on peut répéter les raisonnements qui nous ont conduits dans le cas 2) à l'inégalité $|\varphi_1(x,x_0)|<2k\varepsilon'$. On aura donc

$$|y|^{-(p-1)}<(p-1)|a_0^{(0)}||x-x_0||x_0|^{\lambda_0}(1+2k\varepsilon')+|x_0|^{-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$$

$$< [h(p-1)|a_0^{(0)}|(1+2k\varepsilon')+1]|x_0|^{-(p-1)(\sigma+\varepsilon)},$$

d'où l'on conclut que

$$|y| > \frac{|x|^{\sigma+\varepsilon}}{K}.$$

Cette inégalité a donc lieu non seulement pour $|x-x_0|<\varrho$, mais aussi pour $|x-x_0|=\varrho$, par suite, elle a lieu dans un cercle plus grand. De proche en proche on voit qu'elle doit avoir lieu pour $|x-x_0|<h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$.

Par les raisonnements du cas 2) on aboutit donc à l'inégalité $|y_0|<|x_0|^{\sigma+\varepsilon}$, qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Par là, le théorème A' est démontré, le nombre τ étant égal à $\sigma+\varepsilon$; ε est un nombre positif satisfaisant à la seule inégalité $-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)<1$ écrite plus haut.

3. Nous considérons maintenant le cas général où il existe des points singuliers dans le voisinage de $x=\infty$. Soit $\bar{x}$ un point dans le voisinage de $x=\infty$ et soit

$$y=(x-\bar{x})^{-\frac{1}{p-1}}\mathfrak{P}\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}\right)$$

l'intégrale qui a le point singulier $\bar{x}$. Nous démontrons d'abord le théorème suivant:

Théorème B'. *Si h est un nombre donné quelconque et si $|\bar{x}|$ est suffisamment grand, la série $\mathfrak{P}\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}\right)$ converge pour*

$$|x-\bar{x}|<h|\bar{x}|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}.$$

Supposons que le rayon de convergence ϱ soit plus petit que $h|\bar{x}|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$. En raisonnant comme au n:o précédent on voit que l'inégalité $|y|>\frac{|x|^{\sigma+\varepsilon}}{K}$ a lieu pour $|x-\bar{x}|<\varrho$ et que l'on a, pour ces mêmes valeurs de x, $|\varphi_1(x,\bar{x})|<2k\varepsilon'$, $\varphi_1(x,\bar{x})$ étant définie par l'égalité

$$-y^{-(p-1)}=(p-1)\,a_0^{(0)}(x-\bar{x})\,\bar{x}^{\lambda_0}(1+\varphi_1(x,\bar{x})).$$

Si l'on prend $\varrho'<\varrho$, il existe donc un nombre G (qui dépend de $\bar{x},\varrho'$) tel que $|y|<G$ pour toute détermination de $(x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}$ et pour $\varrho'<|x-\bar{x}|<\varrho$. Or, il existe nécessairement sur le cercle $|x-\bar{x}|=\varrho$ un point singulier $\bar{x}_1$ tel que $\lim_{x=\bar{x}_1} y=\infty$, si l'on choisit une certaine détermination de $(x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}$. Cette contradiction démontre le théorème.

Nous prenons maintenant le nombre h de manière que $h(p-1)|a_0^{(0)}|>2$, et nous démontrons le théorème suivant:

Théorème C'. *Soit* $\mathfrak{P}(x-x_0)$ *l'intégrale qui pour* $x=x_0$ *devient égale à* y_0. *Si* $|x_0|$ *est assez grand et si la série* $\mathfrak{P}(x-x_0)$ *converge pour* $|x-x_0|<h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$ *on a nécessairement* $|y_0|<|x_0|^{\sigma+\varepsilon}$.

Nous prenons le nombre ε' de manière que $h(p-1)|a_0^{(0)}|(1-2k\varepsilon')\geqq 2$ et nous supposons que l'on ait $|y_0|\geqq|x_0|^{\sigma+\varepsilon}$. En raisonnant de la même manière qu'au n:o précédent, on aboutit alors à l'inégalité $|y_0|<|x_0|^{\sigma+\varepsilon}$. Cette contradiction démontre le théorème.

Nous avons énoncé les résultats de M. Boutroux sans introduire la notion d'une surface de Riemann appartenant à une intégrale donnée. C'est ce que nous avons fait parce qu'il y a, en général, une certaine difficulté à concevoir une telle surface. Mais si on introduit la surface,[1] on peut énoncer, avec M. Boutroux les résultats précédents d'une manière plus intuitive. Considérons, pour chaque point singulier $\bar{x}$ d'une intégrale, un cercle sur la surface de Riemann, ayant le centre $\bar{x}$ et le rayon $h|\bar{x}|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$. On conclut facilement du théorème B' que *deux cercles correspondants à des points singuliers* $\bar{x}$ *assez éloignés n'ont aucun point commun*, et on conclut du théorème C' que *l'inégalité* $|y|\leqq|x|^{\sigma+\varepsilon}$ *a lieu à l'extérieur de ces cercles si* $|x|$ *est assez grand.*

4. Nous étudions maintenant l'équation générale (1). Il est permis, comme on le sait, de supposer que les degrés p, q des fonctions P, Q par rapport à y sont liés par la relation $p=q+2$. Car si cette relation n'est pas remplie, on obtiendra, par la substitution $y=\alpha+\frac{1}{z}$, une équation différentielle pour laquelle elle a lieu, si α est une constante telle que $P(x,\alpha)$ et $Q(x,\alpha)$ ne sont pas nulles identiquement.

Supposons que $x=\infty$ soit un point ξ et étudions la croissance des intégrales dans le voisinage de ce point. Posons

$$P(x,y)=a_0y^p+\cdots+a_p$$

$$Q(x,y)=b_0y^q+\cdots+b_q$$

et

$$a_i=x^{\lambda_i}\left(a_i^{(0)}+a_i^{(1)}\frac{1}{x}+\cdots\right),\quad a_i^{(0)}\neq 0\quad(i=0,1,\ldots p)$$

$$b_i=x^{\mu_i}\left(b_i^{(0)}+b_i^{(1)}\frac{1}{x}+\cdots\right),\quad b_i^{(0)}\neq 0\quad(i=0,1,\ldots q)$$

[1] Voir Poincaré, *Bulletin de la Société Mathématique*, 1883, et *Acta mathematica*, t. XXXI.

les séries étant convergentes si $|x|$ est suffisamment grand. En posant

$$\frac{P}{Q} = y^2 x^{\lambda_0 - \mu_0} \left(\frac{a_0^{(0)}}{b_0^{(0)}} + \varphi(x, y) \right)$$

et en supposant que

$$|y| \geqq |x|^{\sigma + \varepsilon},$$

où σ désigne le plus grand des nombres

$$\frac{1}{i}(\lambda_i - \lambda_0) \quad (i = 1, \ldots p)$$

$$\frac{1}{i}(\mu_i - \mu_0) \quad (i = 1, \ldots q)$$

et ε un nombre positif, on voit que l'inégalité

$$|\varphi(x, y)| < |x|^{-\bar{\varepsilon}}$$

a lieu si $|x|$ est assez grand, $\bar{\varepsilon}$ étant un nombre positif plus petit que les nombres ε, 1.

L'équation $Q(x, y) = 0$ donne, dans le voisinage de $x = \infty$ un certain nombre q' de séries

$$\beta^{(i)} = x^{\frac{\lambda'_i}{\mu'_i}} \mathfrak{P}_i \left(x^{-\frac{1}{\mu'_i}} \right) \quad (i = 1, \ldots q').$$

Nous posons $y = \beta^{(j)} + \frac{1}{z}$, et nous aurons pour z une équation différentielle de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a_{0j} z^p + \cdots + a_{pj}}{b_{\nu_j j} z^{q - \nu_j} + \cdots + b_{qj}},$$

si ν_j désigne l'ordre de multiplicité de la racine $\beta^{(j)}$ de l'équation $Q(x, y) = 0$ pour une valeur quelconque de x. Posons

$$a_{ij} = x^{\lambda_{ij}} \left(a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} x^{-\frac{1}{\mu'_j}} + \cdots \right), \; a_{ij}^{(0)} \neq 0 \quad (i = 0, 1, \ldots p)$$

$$b_{ij} = x^{\mu_{ij}} \left(b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} x^{-\frac{1}{\mu'_j}} + \cdots \right), \; b_{ij}^{(0)} \neq 0 \quad (i = \nu_j, \ldots q)$$

les séries étant convergentes si $|x|$ est suffisamment grand.

Écrivons l'équation différentielle pour z sous la forme

$$\frac{dz}{dx} = z^{\nu_j + 2} x^{\lambda_{0j} - \mu_{\nu_j j}} \left(\frac{a_{0j}^{(0)}}{b_{\nu_j j}^{(0)}} + \varphi_j(x, z) \right)$$

et supposons que

$$|z| \geqq |x|^{\sigma_j + \varepsilon_j},$$

où σ_j désigne le plus grand des nombres

$$\frac{1}{i}(\lambda_{ij} - \lambda_{0j}) \quad (i = 1, \ldots p)$$

$$\frac{1}{i - \nu_j}(\mu_{ij} - \mu_{\nu_j j}) \quad (i = \nu_j + 1, \ldots q)$$

et ε_j un nombre positif. Si $\bar{\varepsilon}$ est un nombre positif plus petit que les nombres ε_j et 1, on voit que l'inégalité

$$|\varphi_j(x, z)| < |x|^{-\bar{\varepsilon}}$$

a lieu si $|x|$ est suffisamment grand.

Cela posé, considérons d'abord une branche d'intégrale y définie par prolongement analytique dans un certain domaine $|x| > r$, dans lequel les convergences et les inégalités précédentes ont lieu, et satisfaisant à la condition que les égalités $y = \beta^{(j)}(x)$ n'ont aucune racine à distance finie. La branche z définie par l'égalité $y = \beta^{(j)} + \frac{1}{z}$ n'a donc aucun point singulier à distance finie.

Rapportons nous à la démonstration du n:o 2 en partant de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = z^{\nu_j + 2} x^{\lambda_{0j} - \mu_{\nu_j j}} \left(\frac{a_{0j}^{(0)}}{b_{\nu_j j}^{(0)}} + \varphi_j(x, z) \right)$$

et en supposant que le nombre ε_j satisfait à l'inégalité

$$-(\lambda_{0j} - \mu_{\nu_j j}) - (\nu_j + 1)(\sigma_j + \varepsilon_j) < 1.$$

On obtiendra facilement le théorème suivant:

Théorème A. *Pour tout point x à l'extérieur d'un cercle $|x| = r$ de rayon assez grand on a*

$$\left| \frac{1}{y - \beta^{(i)}} \right| < |x|^{\sigma_i + \varepsilon_i} \quad (i = 1, \ldots q'),$$

ces inégalités ayant lieu pour toute détermination de y et de $\beta^{(i)}$.

Considérons maintenant l'intégrale $(x-\bar{x})^{-1}\mathfrak{P}(x-\bar{x})$ qui pour $x=\bar{x}$ devient égale à ∞, et l'intégrale

$$y=\bar{\beta}^{(i)}+(x-\bar{x})^{\frac{1}{\nu_i+1}}\bar{\mathfrak{P}}_i\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{\nu_i+1}}\right),\quad \bar{\mathfrak{P}}_i(0)\neq 0$$

qui pour $x=\bar{x}$ devient égale à $\bar{\beta}^{(i)}=\beta^{(i)}(\bar{x})$, et posons

$$\frac{1}{y-\beta^{(i)}}=(x-\bar{x})^{-\frac{1}{\nu_i+1}}\mathfrak{P}_i\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{\nu_i+1}}\right).$$

Si le nombre ε satisfait à l'inégalité

$$-(\lambda_0-\mu_0)-(\sigma+\varepsilon)<1,$$

on démontre comme au n:o 3 le théorème suivant:

Théorème B*. *Si h est un nombre donné quelconque et si $|\bar{x}|$ est suffisamment grand, la série $\mathfrak{P}(x-\bar{x})$ converge pour*

$$|x-\bar{x}|<h|\bar{x}|^{-(\lambda_0-\mu_0)-(\sigma+\varepsilon)}$$

et la série $\mathfrak{P}_i\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{\nu_i+1}}\right)$ pour

$$|x-\bar{x}|<h|\bar{x}|^{-(\lambda_{0i}-\mu_{\nu_i i})-(\nu_i+1)(\sigma_i+\varepsilon_i)}.$$

En effet, supposons p.ex. que le rayon de convergence ϱ de $y=(x-\bar{x})^{-1}\mathfrak{P}(x-\bar{x})$ soit plus petit que $h|\bar{x}|^{-(\lambda_0-\mu_0)-(\sigma+\varepsilon)}$. Pour $|x-\bar{x}|<\varrho$ on aura

$$-y^{-1}=\frac{a_0^{(0)}}{b_0^{(0)}}(x-\bar{x})\bar{x}^{\lambda_0-\mu_0}(1+\bar{\varphi}_1(x,\bar{x}))$$

avec $|\bar{\varphi}_1(x,x)|<2k\varepsilon'$. Si l'on prend $\varrho'<\varrho$ il existe donc un nombre G tel que $|y|<G$ pour $\varrho'<|x-\bar{x}|<\varrho$.

De plus on aura pour $|x-\bar{x}|<\varrho$

$$|y|>\left|\frac{b_0^{(0)}}{a_0^{(0)}}\right|\frac{|\bar{x}|^{\sigma+\varepsilon}}{h(1+2k\varepsilon')},$$

par suite

$$|Q(x, y)| > |b_0^{(0)}| |x|^{\mu_0} |y|^q (1 - |\bar{x}|^{-\varepsilon})$$

$$> \frac{1}{2} |b_0^{(0)}| |x|^{\mu_0} |y|^q,$$

si $|\bar{x}|$ est assez grand.

Or, il existe nécessairement sur la circonférence $|x - \bar{x}| = \varrho$ un point $\bar{x}_1$ tel que l'on ait ou bien $\lim\limits_{x = \bar{x}_1} y = \infty$, ou bien $\lim\limits_{x = \bar{x}_1} Q(x, y) = 0$. Cette contradiction démontre le théorème pour la série $\mathfrak{P}(x - \bar{x})$. De la même manière on le démontre pour $\mathfrak{P}_i\left((x - \bar{x})^{\frac{1}{\nu_i + 1}}\right)$.

Prenons maintenant les nombres h, h_i de manière que $h\left|\frac{a_0^{(0)}}{b_0^{(0)}}\right| > 2$, $h_i(\nu_i + 1)\left|\frac{a_{0\,i}^{(0)}}{b_{\nu_i\,i}^{(0)}}\right| > 2$, et soit $y = \mathfrak{P}(x - x_0)$ l'intégrale qui pour $x = x_0$ devient égale à y_0, $Q(x_0, y_0)$ étant différent de zéro. Posons de plus $\frac{1}{y - \beta^{(i)}} = \mathfrak{P}^{(i)}(x - x_0)$ en choisissant une certaine détermination de $\beta^{(i)}$. On démontre comme au n:o 3 le théorème suivant:

Théorème C*. *Si $|x_0|$ est assez grand et si la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$ converge pour $|x - x_0| \leqq h |x_0|^{-(\lambda_0 - \mu_0) - (\sigma + \varepsilon)}$, on a nécessairement $|y_0| \leqq |x_0|^{\sigma + \varepsilon}$. Si la série $\mathfrak{P}^{(i)}(x - x_0)$ converge pour $|x - x_0| \leqq h_i |x_0|^{-(\lambda_{0i} - \mu_{\nu_i i}) - (\nu_i + 1)(\sigma_i + \varepsilon_i)}$, on a $\left|\frac{1}{y_0 - \beta^{(i)}(x_0)}\right| \leqq |x_0|^{\sigma_i + \varepsilon_i}$.*

Il importe pour le suivant de choisir les nombres ε, ε_i de manière que tous les exposants

$$-(\lambda_0 - \mu_0) - (\sigma + \varepsilon), \quad -(\lambda_{0i} - \mu_{\nu_i i}) - (\nu_i + 1)(\sigma_i + \varepsilon_i)$$

deviennent égals. Si τ' désigne le plus grand nombre que l'on peut obtenir de cette manière, et si h' désigne le plus grand des nombres h, h_i, on peut énoncer, au lieu des théorèmes B*, C*, les théorèmes suivants qui sont un peu moins précis, mais se prètent mieux pour les applications:

Théorème B. *Si h est un nombre positif donné quelconque et si $|\bar{x}|$ est suffisamment grand, les séries $\mathfrak{P}(x - \bar{x})$, $\mathfrak{P}_i\left((x - \bar{x})^{\frac{1}{\nu_i + 1}}\right)$ convergent pour*

$$|x - \bar{x}| < h |\bar{x}|^{\tau'}.$$

Théorème C. *Si $|x_0|$ est assez grand et si la série $\mathfrak{P}(x - x_0)$ converge pour $|x - x_0| \leqq h' |x_0|^{\tau'}$, on a nécessairement $|y_0| \leqq |x_0|^{\sigma + \varepsilon}$. Si la série $\mathfrak{P}^{(i)}(x - x_0)$ converge pour $|x - x_0| \leqq h' |x_0|^{\tau'}$, on a $\left|\frac{1}{y_0 - \beta^{(i)}(x_0)}\right| \leqq |x_0|^{\sigma_i + \varepsilon_i}$.*

Introduisons maintenant une surface de RIEMANN appartenant à une intégrale donnée, et considérons pour chaque pôle $\bar{x}$ un cercle ayant le centre $\bar{x}$ et le rayon $h'|\bar{x}|^{\tau'}$. On voit que *deux cercles correspondant à des pôles $\bar{x}$ assez éloignés n'ont aucun point commun, et que l'on a une inégalité de la forme $|y| < |x|^{\tau}$ pour tout point assez éloigné situé à l'extérieur de ces cercles.*

Le nombre τ s'obtient de la manière suivante. Si $\bar{x}$ est un point critique algébrique tel que $y - \beta^{(i)}$ s'annule pour $x = \bar{x}$, on a, pour $|x - \bar{x}| < h'|\bar{x}|^{\tau'}$, une égalité de la forme

$$-(y - \beta^{(i)})^{\nu_i + 1} = (\nu_i + 1) \frac{a_{0i}^{(0)}}{b_{\nu_i i}^{(0)}} (x - \bar{x})\, x^{\lambda_{0i} - \mu_{\nu_i i}} (1 + \bar{\varphi}_i(x, \bar{x}))$$

avec $|\bar{\varphi}_i(x, \bar{x})| < 2k\varepsilon'$. Par suite, on aura une inégalité de la forme

$$|y| < |x|^{\tau_i}$$

à l'intérieur du cercle considéré. Le nombre τ est le plus grand des nombres $\sigma + \varepsilon$, τ_i $(i = 1, \ldots q')$.

On aura facilement un énoncé analogue pour les quotients $\frac{1}{y - \beta^{(i)}}$, mais nous n'y insistons pas.

II. Étude d'une intégrale particulière à un nombre fini de déterminations.

5. Nous appliquons maintenant les résultats précédents à l'étude d'une intégrale de l'équation (1) qui satisfait à la condition suivante: si x_0 est un point quelconque, il n'existe qu'un nombre fini de séries de puissance de $x - x_0$ qui appartiennent à l'intégrale considérée. On voit facilément que ce nombre est le même pour tout point x_0 qui n'est pas un point singulier de l'intégrale. Nous le désignons par m. On dit que l'intégrale considérée est une fonction à m déterminations.

Nous commençons par l'étude d'une fonction uniforme qui satisfait à l'équation (1). Pour une telle fonction, M. PETROVITCH a démontré certains résultats intéressants:[1] supposons que l'on a fait au besoin une transformation linéaire $y = \alpha + \frac{1}{z}$, de manière que les degrés p, q des fonctions P, Q par rapport à y sont liés par la relation $p = q + 2$; alors, si l'équation $Q(x, y) = 0$ en y a au moins trois racines distinctes, *toute intégrale uniforme est une fonction rationnelle.* Si l'équation $Q(x, y) = 0$ n'a que deux racines distinctes, *il ne peut y avoir deux intégrales uniformes qui soient des transcendantes distinctes.* Enfin, si l'équation

[1] Voir É. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 356.

$Q(x, y) = 0$ n'a qu'une seule racine, *il ne peut y avoir plus de deux intégrales uniformes qui soient des transcendantes distinctes.* Si $Q(x, y)$ est indépendante de y, on a une équation de RICCATI, et alors il ne peut y avoir plus de trois intégrales transcendantes distinctes. A l'aide du théorème A nous démontrons maintenant le théorème suivant:

Théorème 1. *Si l'équation* (1) *n'est pas une équation de Riccati, toute intégrale uniforme est une fonction rationnelle.*

Soit $y = f(x)$ une fonction uniforme qui satisfait à l'équation (1). A l'exception des points ξ, cette fonction n'a d'autres points singuliers que des pôles. Il est facile à voir que $\frac{1}{Q(x, y)}$ est une fonction uniforme qui n'a aucun point singulier en dehors des points ξ. En effet, si $\bar{x}$ est un pôle de $f(x)$ c'est un zéro de $\frac{1}{Q(x, y)}$, et si x_0 est un point régulier de $f(x)$ on a nécessairement $Q(x_0, f(x_0)) \neq 0$, car dans le cas contraire on aurait $\frac{dy}{dx} = \infty$ pour $x = x_0$, les expressions $P(x_0, f(x_0))$, $Q(x_0, f(x_0))$ ne pouvant pas être nulles en même temps si x_0 est différent des points ξ.

En s'appuyant sur le théorème de LAURENT on aura donc, dans le voisinage d'un point ξ,

$$\frac{1}{Q(x, y)} = G\left(\frac{1}{x - \xi}\right) + \mathfrak{P}(x - \xi),$$

$G(u)$ étant une fonction entière de u. Or, il résulte du théorème A qu'il existe un nombre ϱ tel que

$$\left|\frac{1}{Q(x, y)}\right| < |x - \xi|^{\varrho}$$

pour tout point x dans un certain voisinage de ξ. Par suite, si $\varepsilon > 0$ on aura

$$|G(u)| < |u|^{-\varrho + \varepsilon}$$

pour toute valeur de u assez grande en valeur absolue. D'après un théorème connu il en résulte que $G(u)$ se réduit à un polynome.

Il est donc démontré que $\frac{1}{Q(x, y)}$ n'a d'autres points singuliers que des pôles, c'est donc une fonction rationnelle. Par suite, $f(x)$ est une fonction algébrique; comme elle est uniforme elle est donc rationnelle.

6. Nous étudions maintenant une intégrale à un nombre de déterminations qui est plus grand que 1. Nous considérons d'abord l'équation (1') (voir p. 300), et nous démontrons le théorème suivant:

Théorème 2'. *Si l'équation* (1') *ne se transforme pas à une équation de Riccati*

$$\frac{dz}{dx} = az^2 + bz + c$$

par une transformation de la forme

$$z = \frac{y^n + \beta_1 y^{n-1} + \cdots + \beta_n}{y^{n-p+1} + \alpha_p y^{n-p} + \cdots + \alpha_n},$$

les coefficients $a, b, c, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_p, \ldots \beta_n$ *étant des fonctions rationnelles de* x, *toute intégrale à un nombre fini de déterminations est nécessairement une fonction algébrique.*

Ce théorème sera démontré par une démonstration indirecte: en ne faisant à priori aucune supposition sur la forme de l'équation différentielle, nous partons de la supposition, qu'il existe une intégrale *transcendante* à un nombre fini de déterminations, et nous en conclurons que l'équation se transforme nécessairement à une équation de Riccati de la manière indiquée.

Soit donc $f(x)$ une intégrale transcendante à un nombre fini m de déterminations. Il est évidemment permis de supposer que $p > 2$. Alors, il existe nécessairement une infinité de points singuliers de $f(x)$. En effet, à l'aide du théorème A' on démontre, comme au n:o précédent, que toute intégrale à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points singuliers est nécessairement une fonction algébrique.

Les points singuliers distincts des points ξ sont des points critiques algébriques. Il importe de former des expressions symétriques de certaines déterminations de $f(x)$ en nombre aussi petit que possible de manière que ces expressions définissent des fonctions qui sont uniformes au voisinage des dits points singuliers. On parvient à ce but de la manière suivante. Soient $y_1, \ldots y_m$ m déterminations de $f(x)$ (m séries de puissances d'une même différence $x - x_0$). On démontre facilement qu'elles se répartissent en groupes à un même nombre n' d'éléments de la manière suivante: on peut venir d'un élément à un autre appartenant à un même groupe par prolongement analytique le long d'un chemin fermé qui ne tourne autour d'aucun point ξ,[1] mais on ne peut pas venir de cette manière d'un élément y_α à un autre élément y_β qui n'appartient pas au groupe de y_α. On dit que les éléments d'un même groupe se permutent autour des points singuliers de $f(x)$ distincts des points ξ. On voit facilement que le nombre n' est le même pour tout système de m déterminations de $f(x)$.

---

[1] On dit qu'un chemin fermé ne tourne pas autour du point a, si l'on peut le réduire à un point par déformation continue sans qu'il passe par le point a (cf. la *Note* citée de M. Painlevé, p. 147).

Si l'on prend certains points singuliers ξ' de $f(x)$ en nombre fini distincts des points ξ, et si l'on suppose que les chemins fermés ne tournent non plus autour de ces points ξ', on pourrait obtenir une valeur plus petite de n'. Nous désignons par n le plus petit nombre que l'on peut obtenir en ajoutant de cette manière aux points ξ un nombre fini de points singuliers de $f(x)$. A chaque point x_0 distinct des points ξ et des points singuliers de $f(x)$ correspond donc un certain nombre de groupes à n éléments en lesquels se répartissent les séries de puissance de $x-x_0$ appartenant à $f(x)$, les éléments d'un même groupe se permutant autour des points singuliers de $f(x)$ qui sont distincts des points ξ et d'un nombre *fini* d'autres points choisis arbitrairement.

Supposons que les groupes sont

$$\begin{gathered} y_1, \ldots y_n, \\ y_{n+1}, \ldots y_{2n}, \\ \cdots\cdots \\ y_{m-n+1}, \ldots y_m, \end{gathered}$$

et considérons les fonctions symétriques élémentaires $f_\nu(y_1, \ldots y_n)$ $(\nu = 1, \ldots n)$ de $y_1, \ldots y_n$ ainsi que $f_\nu(y_{n+1}, \ldots y_{2n}), \ldots f_\nu(y_{m-n+1}, \ldots y_m)$ $(\nu = 1, \ldots n)$. Les expressions $f_\nu(y_1, \ldots y_n)$, $f_\nu(y_{n+1}, \ldots y_{2n}), \ldots f_\nu(y_{m-n+1}, \ldots y_m)$ définissent des éléments d'une même fonction $f_\nu(x)$. Il est facile à voir que cette fonction n'a, en dehors des points ξ et des points singuliers ajoutés à ces points, d'autres points singuliers que des pôles, ce que nous exprimons plus brièvement en disant que $f_\nu(x)$ est de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés. En effet, prenons $\bar{x}$ distinct des points ξ et des points ajoutés et considérons les deux cas suivants: 1:o il n'existe aucune série de la forme $(x-\bar{x})^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P}\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}\right)$ qui appartient à $f(x)$, 2:o il existe une telle série. Dans le premier cas le point $\bar{x}$ est un point régulier de toutes les fonctions $f_\nu(x)$. Dans le second cas, les $p-1$ déterminations de la série en question et certaines séries de puissance de $x-\bar{x}$ en nombre de $n-p+1$ constituent un système de n déterminations de $f(x)$ qui se permutent autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés; la $\nu^{\text{ième}}$ expression symétrique de ces n déterminations, qui définit une branche de $f_\nu(x)$, s'écrit sous la forme

$$(x-\bar{x})^{-\frac{\nu}{p-1}} \mathfrak{P}_1\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}\right),$$

où les puissances fractionnaires disparaissent. On voit donc que $\bar{x}$ est au plus un pôle de $f_\nu(x)$.

Si $\nu < p-1$ les puissances négatives disparaissent. Les fonctions $f_1(x), \ldots f_{p-2}(x)$ n'ont donc aucun point singulier en dehors des points ξ. Cette remarque et les théorèmes B', C'' nous permettrons de démontrer la proposition suivante:

Les fonctions $f_1(x), \ldots f_{p-2}(x)$ sont des fonctions algébriques.

Nous supposons que $x = \infty$ soit un point ξ et nous démontrons qu'il existe un nombre G tel que l'inégalité

$$|f_\nu(x)| < G|x|^{\nu(\sigma+\varepsilon)}$$

a lieu pour tout point x assez éloigné.

Prenons à cet effet le point x_0 assez éloigné distinct des points singuliers de $f(x)$, soient $\mathfrak{P}_\nu(x-x_0)$ $(\nu = 1, \ldots n)$ n éléments de $f(x)$ qui se permutent autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés et posons $f_\nu(\mathfrak{P}_1(x-x_0), \ldots \mathfrak{P}_n(x-x_0)) = \mathfrak{P}^{(\nu)}(x-x_0)$ $(\nu = 1, \ldots p-2)$.

Nous cherchons d'abord le nombre maximum de points singuliers que l'on peut rencontrer en prolongeant les séries $\mathfrak{P}_\nu(x-x_0)$ $(\nu = 1, \ldots n)$ dans le cercle

$$|x-x_0| < \frac{4(n+p-1)}{p-1} h |x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}.$$

Supposons qu'il existe un point singulier $\bar{x}$ de $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ dans ce cercle. Dans le voisinage de $\bar{x}$ on aura donc

$$\mathfrak{P}_1(x-x_0) = (x-\bar{x})^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P}\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{p-1}}\right).$$

Il résulte du théorème B' que la série au second membre converge pour

$$|x-\bar{x}| < \frac{8(n+p-1)}{p-1} h |\bar{x}|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$$

si $|\bar{x}|$ est assez grand. Par suite, elle converge dans le cercle considéré tout-à-l'heure si $|x_0|$ est assez grand. En prolongeant la série $\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ dans ce cercle on ne peut donc rencontrer aucun point singulier autre que $\bar{x}$. Or, nous savons que $p-1$ des séries $\mathfrak{P}_\nu(x-x_0)$ $(\nu = 1, \ldots n)$ admettent le point singulier $\bar{x}$. On voit donc que le nombre des points singuliers que l'on rencontre en prolongeant ces séries dans le cercle considéré est au plus égal à $\frac{n}{p-1}$.

On en conclut qu'il existe dans ce cercle une couronne circulaire de centre x_0 et de largeur $4h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$ qui ne contient aucun des dits points singuliers.

Prenons un point x_1 sur la circonférence de centre x_0 dont le rayon est la valeur moyenne des deux rayons de la couronne. Le cercle $|x-x_1| < 2h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$ ne contient donc aucun des points singuliers considérés. Par suite, en prolongeant les séries $\mathfrak{P}_\nu(x-x_0)$ $(\nu = 1, \ldots n)$ le long d'un chemin de x_0 à x_1 à l'intérieur du cercle $|x-x_0| < \frac{4(n+p-1)}{p-1} h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$ on obtiendra n séries $\overline{\mathfrak{P}}_\nu(x-x_1)$ $(\nu = 1, \ldots n)$ qui convergent pour $|x-x_1| < 2h|x_0|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$. Elles convergent donc pour $|x-x_1| < h|x_1|^{-\lambda_0-(p-1)(\sigma+\varepsilon)}$, si l'on a choisi x_0 assez éloigné, et il résulte maintenant du théorème C' que

$$|\overline{\mathfrak{P}}_\nu(0)| \leqq |x_1|^{\sigma+\varepsilon} \quad (\nu = 1, \ldots n).$$

Si $|x_0|$ est assez grand, il résulte de la supposition que les séries $\mathfrak{P}^{(\nu)}(x-x_0)$ $(\nu = 1, \ldots p-2)$ convergent pour $|x-x_0| \leqq |x_1-x_0|$. On peut donc écrire

$$|\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1-x_0)| \leqq \binom{n}{\nu} |x_1|^{\nu(\sigma+\varepsilon)} \quad (\nu = 1, \ldots p-2)$$

et ces inégalités ont lieu pour tout point x_1 de la circonférence considérée. Si l'on introduit x_0 au lieu de x_1 dans les seconds membres on aura des inégalités de la forme

$$|\mathfrak{P}^{(\nu)}(x_1-x_0)| < g|x_0|^{\nu(\sigma+\varepsilon)} \quad (\nu = 1, \ldots p-2)$$

où g désigne un certain nombre qui dépend de x_0 mais pas de x_1 et qui reste, comme on le voit facilement, plus petit qu'un certain nombre G quand x_0 tend vers l'infini.

Comme les dernières inégalités ont lieu sur toute une circonférence de centre x_0, on aura aussi

$$|\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)| < G|x_0|^{\nu(\sigma+\varepsilon)} \quad (\nu = 1, \ldots p-2).$$

Comme x_0 est un point quelconque distinct de certains points isolés (points singuliers de $f(x)$) on aura donc

$$|f_\nu(x)| \leqq G|x|^{\nu(\sigma+\varepsilon)} \quad (\nu = 1, \ldots p-2)$$

pour tout point x assez éloigné et pour toute détermination de $f_\nu(x)$.

Comme les fonctions $f_\nu(x)$ ont un nombre fini de déterminations on peut maintenant démontrer, comme au n:o précédent, que le point $x = \infty$ est au plus un point singulier algébrique pour les fonctions $f_1(x), \ldots f_{p-2}(x)$, et il est donc démontré que c'est fonctions n'ont d'autres points singuliers que des points singuliers algébriques. Comme elles ont un nombre fini de branches elles sont donc des fonctions algébriques.

7. Nous étudions ensuite les fonctions $f_{p-1}(x), \ldots f_n(x)$. A cet effet, nous déduisons d'abord un système d'équations différentielles pour $f_1(x), \ldots f_n(x)$.

Soit x_0 un point distinct des points ξ et considérons n séries de puissance de $x-x_0$: $y_1, \ldots y_n$ qui satisfont à l'équation (1') (certaines de ces séries pouvant être identiques). Désignons par $z_1, \ldots z_n$ les fonctions symétriques élémentaires de $y_1, \ldots y_n$. En dérivant l'équation

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n = 0,$$

où y désigne l'une quelconque des séries $y_1, \ldots y_n$, et en s'appuyant sur l'équation (1') on obtiendra

$$(n y^{n-1} + (n-1) z_1 y^{n-2} + \cdots + z_{n-1})(a_0 y^p + \cdots + a_p)$$
$$+ \frac{dz_1}{dx} y^{n-1} + \cdots + \frac{dz_n}{dx} = 0.$$

Ajoutons à cette équation l'équation suivante

$$(B_1 y^{p-1} + \cdots + B_p)(y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n) = 0,$$

$B_1, \ldots B_p$ étant déterminés de manière que l'on obtienne une équation de degré $n-1$. Cette équation de degré $n-1$ aura la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu B_p + \cdots + z_{\nu+p-1} B_1 + A_\nu) y^{n-\nu} = 0,$$

où

$$A_\nu = (n-\nu+1) a_p z_{\nu-1} + \cdots + (n-\nu-p+1) a_0 z_{\nu+p-1} + \frac{dz_\nu}{dx}$$
$$(\nu = 1, \ldots n)$$

et $z_\nu = 0$ si $\nu > n$. Elle est remplie pour $y = y_1, \ldots y = y_n$, et si certaines de ces séries sont identiques, la somme des ordres de multiplicité de ses racines est égale à n. Par suite, elle se réduit à une identité et on aura donc les équations suivantes

$$z_\nu B_p + \cdots + z_{\nu+p-1} B_1 + A_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \ldots n).$$

On voit de suite que $B_1, \ldots B_{p-1}$, $B_p + (p-1) a_0 z_{p-1}$ s'écrivent comme des fonctions entières et rationnelles de $a_0, a_1, \ldots a_p, z_1, \ldots z_{p-2}$. Les dernières équations peuvent donc s'écrire, si l'on introduit les expressions pour $A_1, \ldots A_n$:

$$\frac{dz_\nu}{dx} = -(p-1)a_0 z_{p-1} z_\nu + \sum_{\mu=p-1}^{n} \alpha_\mu^{(\nu)} z_\mu + \alpha^{(\nu)}, \tag{2}$$

$$(\nu = 1, \ldots n)$$

les coefficients $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\alpha^{(\nu)}$ étant des fonctions entières et rationnelles de $a_0, a_1, \ldots a_p, z_1, \ldots z_{p-2}$. C'est le système d'équations différentielles que nous voulions obtenir.

Inversement, si $z_1, \ldots z_n$ est une solution quelconque du système (2), toute solution de l'équation

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1'). Car soient $y_1^{(0)}, \ldots y_n^{(0)}$ les valeurs pour $x = x_0$ de ces solutions. Les fonctions symétriques élémentaires des intégrales de (1') correspondant aux valeurs initiales $y_1^{(0)}, \ldots y_n^{(0)}$ pour $x = x_0$ constituent une solution du système (2) correspondant à des valeurs initiales pour $x = x_0$ égales aux valeurs pour $x = x_0$ de $z_1, \ldots z_n$. Cette solution est donc identique à la solution $z_1, \ldots z_n$, ce qui démontre notre assertion.

8. Pour préparer l'étude des fonctions $f_{p-1}(x), \ldots f_n(x)$ dans le cas de n quelconque nous étudions d'abord quelques cas particuliers. Afin d'avoir des valeurs aussi petites que possibles de n nous considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 \tag{1''}$$

pour laquelle $p = 3$ (pour p quelconque on a $n \geqq p - 1$), et nous étudions les cas $n = 2, 3, 4$.

Pour ces valeurs de n le système (2) s'écrit

$$n = 2 \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = (2a_1 - 3a_0 z_1) z_2 + a_0^2 z_1^3 - a_1 z_1^2 + a_2 z_1 - 2a_3 \\[2ex] \dfrac{dz_2}{dx} = -2a_0 z_2^2 + (a_0 z_1^2 - a_1 z_1 + 2a_2) z_2 - a_3 z_1 \end{cases}$$

$$n = 3 \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = 3a_0 z_3 + (2a_1 - 3a_0 z_1) z_2 + a_0 z_1^3 - a_1 z_1^2 + a_2 z_1 - 3a_3 \\[2ex] \dfrac{dz_2}{dx} = -2a_0 z_2^2 + (3a_1 - a_0 z_1) z_3 + (a_0 z_1^2 - a_1 z_1 + 2a_2) z_2 - 2a_3 z_1 \\[2ex] \dfrac{dz_3}{dx} = -2a_0 z_2 z_3 + (a_0 z_1^2 - a_1 z_1 + 3a_2) z_3 - a_3 z_2 \end{cases}$$

$$n=4\begin{cases}\dfrac{dz_1}{dx}=3a_0z_3+(2a_1-3a_0z_1)z_2+a_0z_1^3-a_1z_1^2+a_2z_1-4a_3\\[2mm] \dfrac{dz_2}{dx}=-2a_0z_2^2+4a_0z_4+(3a_1-a_0z_1)z_3+(a_0z_1^2-a_1z_1+2a_2)z_2-3a_3z_1\\[2mm] \dfrac{dz_3}{dx}=-2a_0z_2z_3+(4a_1-a_0z_1)z_4+(a_0z_1^2-a_1z_1+3a_2)z_3-2a_3z_2\\[2mm] \dfrac{dz_4}{dx}=-2a_0z_2z_4+(a_0z_1^2-a_1z_1+4a_2)z_4-a_3z_3\end{cases}$$

Etudions d'abord le cas $n=2$. La fonction $f_1(x)$ est une fonction algébrique. Au contraire, $f_2(x)$ est nécessairement transcendante, sinon $f(x)$ serait algébrique. Si z_1, z_2 sont des éléments de $f_1(x)$, $f_2(x)$ resp., la première équation du système (2) doit donc être indépendante de z_2, par suite

$$z_1=\frac{2a_1}{3a_0},$$

$$\frac{dz_1}{dx}=a_0z_1^3-a_1z_1^2+a_2z_1-2a_3,$$

ce qui donne une équation de conditon pour a_0, a_1, a_2, a_3. Si cette condition est remplie, le système (2) se réduit pour $z_1=\frac{2a_1}{3a_0}$ à la seconde équation seule:

$$\frac{dz_2}{dx}=-2a_0z_2^2+(a_0z_1^2-a_1z_1+2a_2)z_2-a_3z_1.$$

Par suite, si l'on pose $z_2=-z$ on aura le résultat suivant:

Si z est une solution quelconque de l'équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx}=2a_0z^2+(a_0z_1^2-a_1z_1+2a_2)z+a_3z_1$$

toute solution de l'équation

$$y^2+z_1y=z$$

satisfait à l'équation différentielle (1'').

Par là, le théorème 2' est démontré dans le cas $n=2$.

C'est ce cas qui a été étudié par M. Painlevé dans la Note citée. On voit comment la démonstration précédente est plus simple que celle de M. Painlevé. Pour l'équation générale (1) la démonstration devient un peu plus compliquée, mais la complication est principalement de nature formelle, comme nous allons le voir dans le n:o 12.

Considérons maintenant le cas $n=3$. La fonction $f_1(x)$ est toujours une fonction algébrique, mais $f_2(x)$ et $f_3(x)$ ne sont pas toutes deux des fonctions algébriques. Si z_1, z_2, z_3 sont des éléments des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ resp., la première équation du système (2) donne pour z_3 une expression linéaire de z_2 dont les coefficients sont des éléments de fonctions algébriques. Il est donc impossible que $f_2(x)$ soit une fonction algébrique. Au contraire, $f_3(x)$ pourrait être une fonction algébrique; à cet effet il faut que $z_1 = \frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0}$, $z_3 = -\frac{1}{2}\frac{a_3}{a_0}$. Ce cas se traite facilement comme le cas $n=2$: la première et la troisième équation du système (2) donnent deux équations de conditions pour a_0, a_1, a_2, a_3 et, si ces conditions sont remplies, le système se réduit pour $z_1 = \frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0}$, $z_3 = -\frac{1}{2}\frac{a_3}{a_0}$ à la seconde équation seule, qui est une équation de Riccati.

Supposons que $z_1 \neq \frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0}$. Nous introduisons l'expression de z_3 donnée par la première équation du système (2) dans les deux autres équations. Nous aurons deux équations de la forme

$$\frac{dz_2}{dx} = -2a_0 z_2^2 + \alpha z_2 + \beta,$$

α, β étant des expressions rationnelles de a_0, a_1, a_2, a_3, z_1 et leurs dérivées. Ces deux équations doivent être identiques car dans le cas contraire on aurait, en les retranchant l'une de l'autre, pour z_2 un élément d'une fonction algébrique. Par suite, nous aurons deux équations différentielles pour z_1. Par des calculs, qui sont très longues, on peut déduire de ces équations une équation de condition pour a_0, a_1, a_2, a_3 et pour z_1 une expression rationnelle de a_0, a_1, a_2, a_3 et leurs dérivées, soit $z_1 = \gamma$.[1] Si la dite condition est remplie, le système (2) se réduit pour $z_1 = \gamma$ à la seule équation $\frac{dz_2}{dx} = -2a_0 z_2^2 + \alpha z_2 + \beta$ écrite plus haut et à une équation $z_3 = \delta z_2 + \varepsilon$, δ, ε étant des expressions de la même forme que α, β, γ. Par suite, nous aurons le résultat suivant qui démontre le théorème 2':

Si z est une solution quelconque de l'équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx} = 2a_0 z^2 + \alpha z - \beta$$

[1] Nous n'essayons pas d'effectuer les calculs, car un raisonnement de M. Painlevé, que nous allons reproduire dans le cas général, montre que z_1 doit être une fonction rationnelle.

toute solution de l'équation

$$\frac{y^3+\gamma y^2+\varepsilon}{y+\delta}=z$$

satisfait à l'équation différentielle (1″).

Considérons maintenant le cas $n=4$. Si z_1, z_2, z_3, z_4 sont des éléments des fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ resp., la première équation du système (2) donne pour z_3 une expression linéaire de z_2 dont les coefficients sont des éléments de fonctions algébriques. En mettant cette expression dans les deux équations suivantes du même système on trouve

$$4a_0z_4=2a_0z_2^2+\frac{dz_2}{dx}+\alpha z_2+\beta,$$

$$(10a_1-3a_0u)z_4=3u\left(2a_0z_2^2+\frac{dz_2}{dx}\right)+\alpha_1 z_2+\beta_1,$$

où $u=z_1-\frac{2a_1}{3a_0}$ et $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ sont des expressions rationnelles de a_0, a_1, a_2, a_3, z_1 et de leurs dérivées. En multipliant la première de ces équations par $3u$ et retranchant de la seconde on aura

$$(2a_1-3a_0u)z_4=\alpha_2 z_2+\beta_2.$$

Si $u\neq\frac{2a_1}{3a_0}$ on aura donc pour z_3 et z_4 des expressions linéaires de z_2, et on peut ensuite raisonner comme dans le cas $n=3$.

Mais nous devons aussi étudier le cas $u=\frac{2a_1}{3a_0}$. Alors, on a nécessairement $\alpha_2=0$ car dans le cas contraire on aurait pour z_2, et par suite aussi pour z_3, z_4 (en vertu des deux premières équations du système (2)), un élément d'une fonction algébrique. On trouve facilement que $\alpha_2=\frac{du}{dx}-a_0u^3+a_1u^2-a_2u+2a_3$, et on aura donc

$$\frac{du}{dx}=a_0u^3-a_1u^2+a_2u-2a_3,$$

ce qui donne une équation de condition pour a_0, a_1, a_2, a_3. On voit que c'est la condition qui caractérisait le cas $n=2$. L'équation (1″) doit donc se transformer à l'équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx}=2a_0z^2+(a_0u^2-a_1u+2a_2)z+a_3u$$

par la transformation

$$y^2 + uy = z.$$

Or, on voit immédiatement que tous les points singuliers de cette équation de RICCATI sont des points ξ. Par suite, toute intégrale de (1″) admet au plus deux déterminations permutables autour des points singuliers distincts des points ξ, ce qui est contre l'hypothèse $n = 4$. Il est donc impossible que l'on ait $u = \frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0}$. Par suite, le théorème $2'$ est démontré pour $n = 4$.

Faisons une remarque d'un certain intérêt se rapportant au cas étudié tout-à-l'heure. Il résulte que le cas $u = \frac{2}{3}\frac{a_1}{a_0}$ a lieu effectivement si $n = 2$, si l'on part de quatre déterminations y_1, y_2, y_3, y_4 de $f(x)$, y_1 et y_2 d'une part et y_3, y_4 d'autre part se permutant autour des points singuliers distincts des points ξ, et si z_1, z_2, z_3, z_4 sont les expressions symétriques de y_1, y_2, y_3, y_4. Comme $z_1 = 2u$ on voit facilement que le système (2) se réduit à l'équation linéaire

$$z_3 = uz_2 - u^3$$

et au *système* suivant d'équations différentielles

$$\frac{dt_1}{dx} = -2a_0 t_1^2 + (a_0 u^2 - a_1 u + 2a_2) t_1 + 4a_0 t_2 - 2a_3 u,$$

$$\frac{dt_2}{dx} = -2a_0 t_1 t_2 + 2(a_0 u^2 - a_1 u + 2a_2) t_2 - a_3 u t_1,$$

où nous avons posé

$$t_1 = z_2 - u^2, \quad t_2 = z_4.$$

Par suite, si t_1, t_2 est une solution de ce système, toute solution de l'équation

$$y^4 + 2uy^3 + (t_1 + u^2) y^2 + u t_1 y + t_2 = 0$$

satisfait à l'équation (1″). On voit le sens de ce résultat si l'on introduit les racines v_1, v_2 de l'équation

$$v^2 + t_1 v + t_2 = 0.$$

Alors, l'équation algébrique en y s'écrit

$$(y^2 + uy - v_1)(y^2 + uy - v_2) = 0.$$

De plus, le système différentiel pour t_1, t_2 est le système différentiel pour les fonctions symétriques de deux solutions v_1, v_2 de l'équation de RICCATI

$$\frac{dv}{dx} = 2a_0 v^2 + (a_0 u^2 - a_1 u + 2a_2) v + a_3 u.$$

Par suite, le résultat énoncé tout-à-l'heure dit simplement que toute solution de l'équation

$$(y^2 + uy - v_1)(y^2 + uy - v_2) = 0$$

satisfait à l'équation (1″) si v_1, v_2 sont deux intégrales de cette équation de RICCATI.

On retrouve, en étudiant le cas de n quelconque, la nécessité d'étudier la supposition que le système (2) ne se réduise pas à une seule équation différentielle. Pour $n = 4$ nous avons vu que cette supposition entraîne l'égalité $n = 2$, et la démonstration était essentiellement basée de ce que les calculs, dans le cas $n = 2$, étaient très simples. Pour n quelconque les calculs devient très compliqués; c'est pourquoi nous devons trouver alors une autre démonstration.

9. Dans l'étude suivante des fonctions $f_{p-1}(x), \ldots f_n(x)$ nous désignons par $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ n déterminations — séries de puissance d'une même différence $x - x_0$, où x_0 est différent des points ξ et des points ajoutés — de $f(x)$ qui se permutent autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés, par $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_n$ les séries définies par les expressions symétriques de $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ et par $\bar{\alpha}_\mu^{(\nu)}$, $\bar{\alpha}^{(\nu)}$ les séries que l'on obtient en posant $z_1 = \bar{z}_1, \ldots z_{p-2} = \bar{z}_{p-2}$ dans les expressions $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\alpha^{(\nu)}$.

Il résulte de la proposition démontrée au n:o 6 que $\bar{\alpha}_\mu^{(\nu)}$, $\bar{\alpha}^{(\nu)}$ *sont des éléments de fonctions algébriques.*

Introduisons dans le système (2) $z_1 = \bar{z}_1, \ldots z_n = \bar{z}_n$. Les $p - 2$ premières équations donnent des relations linéaires entre $\bar{z}_{p-1}, \ldots \bar{z}_n$ avec coefficients qui sont des éléments de fonctions algébriques. Les fonctions $f_{p-1}(x), \ldots f_n(x)$ ne sont donc pas des transcendantes distinctes. En employant les $n - p + 2$ dernières équations du système (2) on pourra obtenir des relations linéaires nouvelles. En effet, partant d'une relation linéaire

$$\beta_{p-1} \bar{z}_{p-1} + \cdots + \beta_n \bar{z}_n = \beta$$

et dérivant on obtiendra

$$\sum_{\nu=p-1}^{n}\frac{d\beta_\nu}{dx}\bar z_\nu-(p-1)a_0\bar z_{p-1}\sum_{\nu=p-1}^{n}\beta_\nu\bar z_\nu+\sum_{\nu=p-1}^{n}\beta_\nu\left(\sum_{\mu=p-1}^{n}\bar\alpha_\mu^{(\nu)}\bar z_\mu+\bar\alpha^{(\nu)}\right)=\frac{d\beta}{dx},$$

donc

$$\sum_{\mu=p-1}^{n}\left(\frac{d\beta_\mu}{dx}+\sum_{\nu=p-1}^{n}\bar\alpha_\mu^{(\nu)}\beta_\nu\right)\bar z_\mu-(p-1)a_0\beta\bar z_{p-1}+\sum_{\nu=p-1}^{n}\bar\alpha^{(\nu)}\beta_\nu-\frac{d\beta}{dx}=0,$$

et c'est une relation linéaire entre $\bar z_{p-1},\ldots \bar z_n$ dont les coefficients sont des éléments de fonctions algébriques en même temps que $\beta_{p-1},\ldots\beta_n,\beta$.

Faisons ces opérations en partant de chacune des relations linéaires données par les $p-2$ premières équations du système (2) et en partant ensuite des relations nouvelles que l'on pourra obtenir par ces opérations, et ainsi de suite. Il est facile à voir que l'on *ne peut obtenir de cette manière plus de $n-p+1$ relations distinctes.* Car si l'on obtenait $n-p+2$ relations résolubles par rapport à $\bar z_{p-1},\ldots\bar z_n$, toutes ces séries seraient des éléments de fonctions algébriques. Par suite, $f(x)$ serait une fonction algébrique, ce qui est contre l'hypothèse.

Ce résultat entraîne une conséquence importante. Désignons par π le nombre des relations distinctes, et soient

$$\beta_{p-1}^{(\nu)}\bar z_{p-1}+\cdots+\beta_n^{(\nu)}\bar z_n=\beta^{(\nu)}\qquad(\nu=1,\ldots\pi)$$

ces relations. Considérons les équations

$$\beta_{p-1}^{(\nu)}z_{p-1}+\cdots+\beta_n^{(\nu)}z_n=\beta^{(\nu)}\qquad(\nu=1,\ldots\pi),\tag{3}$$

supposons qu'elles peuvent être résolues par rapport à $z_{\mu_1},\ldots z_{\mu_\pi}$ et mettons les expressions que l'on obtient par la résolution dans celles des équations

$$\frac{dz_\nu}{dx}=-(p-1)a_0z_{p-1}z_\nu+\sum_{\mu=p-1}^{n}\bar\alpha_\mu^{(\nu)}z_\mu+\bar\alpha^{(\nu)}\qquad(\nu=p-1,\ldots n)$$

qui correspondent aux valeurs de ν distinctes de $\mu_1,\ldots\mu_\pi$. Désignant ces valeurs par $\mu'_1,\ldots\mu'_{\pi'}$ on aura un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dz_{\mu'_\nu}}{dx}=-(p-1)a_0z_{p-1}z_{\mu'_\nu}+\sum_{\lambda=1}^{\pi'}b_{\lambda\nu}z_{\mu'_\lambda}+c_\nu\quad(\nu=1,\ldots\pi'),\tag{4}$$

où z_{p-1} doit être remplacé par son expression si $p-1$ est un des nombres $\mu_1, \dots \mu_\pi$. Nous démontrons maintenant la proposition suivante:

Si $z_{\mu'_1}, \dots z_{\mu'_{\pi'}}$ est une solution quelconque du système (4) *et si $z_{\mu_1}, \dots z_{\mu_\pi}$ sont déterminées par les équations* (3), *toute solution de l'équation*

$$(5) \qquad y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{z}_{p-2} y^{n-p+2} + z_{p-1} y^{n-p+1} + \cdots + z_n = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1').

Si l'on pose

$$\frac{dz_\nu}{dx} + (p-1) a_0 z_{p-1} z_\nu - \sum_{\mu=p-1}^{n} \bar{\alpha}_\mu^{(\nu)} z_\mu - \bar{\alpha}^{(\nu)} = \varDelta_\nu \quad (\nu = p-1, \dots n)$$

il résulte de la supposition, si l'on voit à la loi de formation du système (4), que les équations $\varDelta_{\mu'_1} = 0, \dots \varDelta_{\mu'_{\pi'}} = 0$ sont remplies. Partons alors de l'équation

$$\beta_{p-1}^{(\lambda)} z_{p-1} + \cdots + \beta_n^{(\lambda)} z_n = \beta^{(\lambda)}$$

et faisons les opérations par lesquelles nous déduisions successivement les relations linéaires entre $\bar{z}_{p-1}, \dots \bar{z}_n$; on aura

$$\sum_{\mu=p-1}^{n} \left(\frac{d\beta_\mu^{(\lambda)}}{dx} + \sum_{\nu=p-1}^{n} \bar{\alpha}_\mu^{(\nu)} \beta_\nu^{(\lambda)} \right) z_\mu - (p-1) a_0 \beta^{(\lambda)} z_{p-1} + \sum_{\nu=p-1}^{n} \bar{\alpha}^{(\nu)} \beta_\nu^{(\lambda)} - \frac{d\beta^{(\lambda)}}{dx} = \sum_{\nu=p-1}^{n} \beta_\nu^{(\lambda)} \varDelta_\nu .$$

Or, le premier membre peut s'écrire comme une expression linéaire et homogène des expressions $\beta_{p-1}^{(\lambda)} z_{p-1} + \cdots + \beta_n^{(\lambda)} z_n - \beta^{(\lambda)} (\lambda = 1, \dots \pi)$, il est donc nul. Par suite, on aura les équations

$$\sum_{\nu=p-1}^{n} \beta_\nu^{(\lambda)} \varDelta_\nu = 0 \quad (\lambda = 1, \dots \pi).$$

En posant ici $\varDelta_{\mu'_1} = 0, \dots \varDelta_{\mu'_{\pi'}} = 0$ on aura

$$\beta_{\mu_1}^{(\lambda)} \varDelta_{\mu_1} + \cdots + \beta_{\mu_\pi}^{(\lambda)} \varDelta_{\mu_\pi} = 0 \quad (\lambda = 1, \dots \pi),$$

d'où l'on conclut que les équations

$$\varDelta_{\mu_1} = 0, \dots \varDelta_{\mu_\pi} = 0$$

sont aussi remplies. Par là, il est démontré que $\bar{z}_1, \dots \bar{z}_{p-2}, z_{p-1}, \dots z_n$ est une solution du système (2). Par suite, toute solution de l'équation (5) satisfait à l'équation différentielle (1').

On voit donc que l'intégration de l'équation (1') est réduite, par les équations (3), (5), à l'intégration du système (4).

Démontrons qu'il est permis de supposer que $p-1$ est un des nombres $\mu'_1, \ldots \mu'_{\pi'}$. Si $p-1$ est un des nombres $\mu_1, \ldots \mu_\pi$, on a pour z_{p-1} une expression linéaire en $z_{\mu'_1}, \ldots z_{\mu'_{\pi'}}$. Si cette expression dépend effectivement de certaines des $z_{\mu'_1}, \ldots z_{\mu'_{\pi'}}$ on peut résoudre par rapport à l'une d'elles et alors, z_{p-1} appartient aux $z_{\mu'_1}, \ldots z_{\mu'_{\pi'}}$. Si l'expression considérée ne dépend pas de $z_{\mu'_1}, \ldots z_{\mu'_{\pi'}}$, on aura z_{p-1} égale à un élément de fonction algébrique. Comme $\bar{z}_{p-1}, \ldots \bar{z}_n$ satisfont aux équations (3), on voit donc que $\bar{z}_{p-1}$ doit être élément d'une fonction algébrique. Or, ceci est impossible, car il est facile à voir que $f_{p-1}(x)$ a nécessairement une infinité de points singuliers. C'est ce qui résulte de ce que $f(x)$ a une infinité de points singuliers. Car si $\bar{x}$ est un point singulier de $f(x)$ distinct des points ξ et des points ajoutés, il existe une série de la forme $(x-\bar{x})^{-\frac{1}{p-1}} \mathfrak{P}\left((x-\bar{x})^{-\frac{1}{p-1}}\right)$, avec $\mathfrak{P}(0) \neq 0$, qui appartient à $f(x)$, et si l'on forme la $(p-1)$:ième fonction symétrique des $p-1$ déterminations de cette série et de $n-p+1$ séries de puissance de $x-\bar{x}$ qui se permutent avec ces déterminations autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés, on aura un élément de $f_{p-1}(x)$ de la forme

$$\frac{[\mathfrak{P}(0)]^{p-1}}{x-\bar{x}} + \mathfrak{P}_1(x-\bar{x})$$

ayant $\bar{x}$ comme pôle. Tout point singulier de $f(x)$ distinct des points ξ et des points ajoutés est donc un pôle de $f_{p-1}(x)$. Par là, il est démontré que z_{p-1} dépend nécessairement de certaines des $z_{\mu'_1}, \ldots z_{\mu'_{\pi'}}$, il est donc permis de supposer que $p-1$ est un des nombres $\mu'_1, \ldots \mu'_{\pi'}$. Nous supposons que $p-1 = \mu'_1$. Le système (4) s'écrit donc

$$\frac{dz_{\mu'_\nu}}{dx} = -(p-1)a_0 z_{\mu'_1} z_{\mu'_\nu} + \sum_{\lambda=1}^{\pi'} b_{\lambda\nu} z_{\mu'_\lambda} + c_\nu \quad (\nu = 1, \ldots \pi').$$

10. L'intégration d'un tel système est bien connue.[1] L'intégrale générale s'écrit

$$z_{\mu'_\nu} = \frac{\zeta_{\mu'_\nu}}{\zeta} \quad (\nu = 1, \ldots \pi')$$

$\zeta, \zeta_{\mu'_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots \pi')$ étant l'intégrale générale du système linéaire

---

[1] Voir p. ex. LIE-SCHEFFERS, *Continuierliche Gruppen*, p. 780.

$$\frac{d\zeta}{dx} = (p-1)\,a_0\,\zeta_{\mu'_1}$$

$$\frac{d\zeta_{\mu'_\nu}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{\pi'} b_{\lambda\nu}\,\zeta_{\mu'_\lambda} + c_\nu\,\zeta \quad (\nu = 1, \ldots \pi').$$

Les coefficients $b_{\lambda\nu}, c_\nu$ sont des expressions rationnelles de $a_0, a_1, \ldots a_p$, $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_{p-1}$ et de leurs dérivées, ils définissent donc des éléments de fonctions algébriques. Il est évidemment permis de supposer que les points singuliers de ces fonctions appartiennent aux points que nous avons ajoutés aux points ξ. Par suite, écrivant

$$\zeta = \xi_0 C_0 + \xi_1 C_1 + \cdots + \xi_{\pi'} C_{\pi'},$$

$$\zeta_\mu = \xi_{\mu 0} C_0 + \xi_{\mu 1} C_1 + \cdots + \xi_{\mu\pi'} C_{\pi'} \quad (\mu = \mu'_1, \ldots \mu'_{\pi'}),$$

où $C_0, C_1, \ldots C_{\pi'}$ sont les constantes d'intégration, les fonctions $\xi_\nu, \xi_{\mu\nu}$ sont de caractère entière en dehors des points ξ et des points ajoutés.

Il est facile d'en conclure que le système (4) se réduit nécessairement à une seule équation. En effet, supposons que $\pi' > 1$. Introduisons dans les équations (3) $z_{\mu'_\nu} = \dfrac{\zeta_{\mu'_\nu}}{\zeta}\ (\nu = 1, \ldots \pi')$, désignons par $\dfrac{\zeta_{\mu_\nu}}{\zeta}(\nu = 1, \ldots \pi)$ les expressions que l'on trouve pour $z_{\mu_1}, \ldots z_{\mu_\pi}$ et posons

$$\zeta_\mu = \xi_{\mu 0} C_0 + \xi_{\mu 1} C_1 + \cdots + \xi_{\mu\pi'} C_{\pi'} \quad (\mu = \mu_1, \ldots \mu_\pi).$$

L'équation (5) peut s'écrire

$$(5') \qquad \zeta\,(y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{z}_{p-2}\, y^{n-p+2}) + \zeta_{p-1}\, y^{n-p+1} + \cdots + \zeta_n = 0,$$

et il est visiblement possible de déterminer des valeurs non toutes nulles de $C_0, C_1, \ldots C_{\pi'}$ telles que cette équation soit remplie pour $x = x_0, y = y_0, y_0$ étant la valeur pour $x = x_0$ de l'une des séries $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$, disons de $\bar{y}_1$. Il est impossible que l'on ait $\zeta = 0$, $\zeta_\mu = 0$ $(\mu = p-1, \ldots n)$ pour $x = x_0$, car ces équations ne donnent que $C_0 = 0, \ldots C_{\pi'} = 0$. On peut choisir $C_0, \ldots C_{\pi'}$ de manière que $\zeta \neq 0$ pour $x = x_0$, sinon l'équation $\zeta = 0$ serait une conséquence de l'équation $\zeta_{p-1} y^{n-p+1} + \cdots + \zeta_n = 0$ pour $x = x_0, y = y_0$, et si ceci avait lieu quel que soit x_0, on aurait

$$\xi_0 (\xi_{p-1\,\nu}\, \bar{y}_1^{\,n-p+1} + \cdots + \xi_{n\nu}) \equiv \xi_\nu (\xi_{p-1\,0}\, \bar{y}_1^{\,n-p+1} + \cdots + \xi_{n0})$$

$$(\nu = 1, \ldots \pi').$$

Les coefficients ξ_ν, $\xi_{\mu\nu}$ sont de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés. Comme $f(x)$ admet n déterminations permutables autour des points singuliers distincts de ces points, on devait donc avoir

$$\xi_0 \xi_{\mu\nu} \equiv \xi_\nu \xi_{\mu 0},$$

par suite $\frac{\zeta_\mu}{\zeta}$ seraient indépendants de $C_0, C_1, \ldots C_{\pi'}$, ce qui est impossible. Si x_0 a été choisi convenablement, nous pouvons donc prendre des valeurs de $C_0, C_1, \ldots C_{\pi'}$ telles que l'équation (5') soit remplie pour $x = x_0, y = y_0$ et que l'on ait $\zeta \neq 0$ pour ces mêmes valeurs. Alors, la solution de l'équation (5') qui pour $x = x_0$ devient égale à y_0 est nécessairement une intégrale de (1'), elle est donc $\bar{y}_1$. Par suite

$$\zeta(\bar{y}_1^n + \bar{z}_1 \bar{y}_1^{n-1} + \cdots + \bar{z}_{p-2} \bar{y}_1^{n-p+1}) + \zeta_{p-1} \bar{y}_1^{n-p+1} + \cdots + \zeta_n = 0;$$

de plus

$$\bar{y}_1^n + \bar{z}_1 \bar{y}_1^{n-1} + \cdots + \bar{z}_n = 0,$$

donc

$$(\zeta_{p-1} - \zeta \bar{z}_{p-1}) \bar{y}_1^{n-p+1} + \cdots + \zeta_n - \zeta \bar{z}_n = 0,$$

d'où l'on conclut comme tout-à-l'heure que

$$\zeta_{p-1} = \zeta \bar{z}_{p-1}, \ldots \zeta_n = \zeta \bar{z}_n.$$

Les quotients $\frac{\zeta_{p-1}}{\zeta}, \ldots \frac{\zeta_n}{\zeta}$ devaient donc être indépendants de constantes arbitraires si $C_0, C_1, \ldots C_{\pi'}$ satisfont à une certaine équation linéaire et homogène et à la condition d'inégalité: $\zeta \neq 0$ pour $x = x_0$; ce qui est impossible si $\pi' > 1$. Il est donc démontré que $\pi' = 1$.

11. L'équation différentielle à laquelle se réduit le système (4) est une équation de Riccati qui s'écrit

$$\frac{dz}{dx} = -(p-1) a_0 z^2 + bz - c. \tag{6}$$

Si l'on écrit, en résolvant les équations (3),

$$z_\mu = \alpha_\mu z_{p-1} + \beta_\mu \quad (\mu = p, \ldots n)$$

on aura le résultat suivant:

Si z est une solution quelconque de l'équation (6), *toute solution de l'équation*

$$(7)\qquad y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{z}_{p-2} y^{n-p+2} + z y^{n-p+1} + \sum_{\nu=p}^{n} (\alpha_\nu z + \beta_\nu) y^{n-\nu} = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1').

L'équation écrite donne donc une transformation de l'équation (1') à l'équation de Riccati (6). Il s'agit maintenant d'étudier les coefficients $b, c, \alpha_\nu, \beta_\nu$ $(\nu = p, \ldots n)$. Ils sont des expressions rationnelles de $a_0, a_1, \ldots a_p, \bar{z}_1, \ldots \bar{z}_{p-2}$ et de leurs dérivées, ils définissent donc des éléments de fonctions algébriques de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés. Il reste à démontrer que ces fonctions sont de caractère rationnelle aussi à ces points exceptés. A cet effet il suffit de montrer que $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_{p-2}$ sont des éléments de fonctions uniformes.

Prolongeons les séries $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_n$ le long d'un chemin fermé et supposons que l'on obtienne un nouvel système de séries $\bar{\bar{z}}_1, \ldots \bar{\bar{z}}_n$. En partant de ces dernières séries on obtiendra comme précédemment une équation de Riccati

$$(6')\qquad \frac{dz}{dx} = -(p-1) a_0 z^2 + \bar{b} z - \bar{c}$$

à laquelle se transforme l'équation (1') par une transformation de la forme

$$y^n + \bar{\bar{z}}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{\bar{z}}_{p-2} y^{n-p+2} + z y^{n-p+1} + \sum_{\nu=p}^{n} (\bar{\alpha}_\nu z + \bar{\beta}_\nu) y^{n-\nu} = 0.$$

Nous savons que $z = \bar{z}_{p-1}$ satisfait à l'équation (6), par suite l'intégrale générale de cette équation s'écrit

$$z = \bar{z}_{p-1} + \frac{1}{\alpha C + \beta}.$$

De même l'intégrale générale de (6') s'écrit

$$z = \bar{\bar{z}}_{p-1} + \frac{1}{\bar{\alpha} C + \bar{\beta}}.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} \bar{z}_\nu &= \alpha_\nu \bar{z}_{p-1} + \beta_\nu, \\ \bar{\bar{z}}_\nu &= \bar{\alpha}_\nu \bar{\bar{z}}_{p-1} + \bar{\beta}_\nu. \end{aligned} \qquad (\nu = p, \ldots n)$$

Par suite, nous aurons les deux équations suivantes

$$y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{z}_n + \frac{1}{\alpha C + \beta}(y^{n-p+1} + \alpha_p y^{n-p} + \cdots + \alpha_n) = 0,$$

$$y^n + \bar{\bar{z}}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{\bar{z}}_n + \frac{1}{\bar{\alpha}\bar{C} + \bar{\beta}}(y^{n-p+1} + \bar{\alpha}_p y^{n-p} + \cdots + \bar{\alpha}_n) = 0,$$

dont toute solution satisfait à l'équation différentielle (1').

Posant dans ces équations $x = x_0, y = y_0$ on aura pour $C, \bar{C}$ des fonctions rationnelles de $y_0 : C = C(y_0)$, $\bar{C} = \bar{C}(y_0)$.[1] Si l'on introduit pour $C, \bar{C}$ ces fonctions rationnelles, on aura deux équations qui sont satisfaites par l'intégrale de (1') correspondant à la valeur initiale y_0 pour $x = x_0$. D'après la supposition, $\bar{\bar{z}}_1, \ldots \bar{\bar{z}}_{p-2}$ ne sont pas identiques à $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_{p-2}$ resp.; par suite, le nombre des solutions communes de ces équations est nécessairement plus petit que n. Soit n' le nombre des solutions communes pour une valeur arbitraire de y_0. Le plus grand commun diviseur des premiers membres s'écrit

$$y^{n'} + r_1(y_0 | x) y^{n'-1} + \cdots + r_{n'}(y_0 | x) = r(y, y_0 | x),$$

$r_1, \ldots r_{n'}$ étant des fonctions rationnelles de y_0 et de $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_n, \bar{\bar{z}}_1, \ldots \bar{\bar{z}}_n, \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$, $\alpha_\nu, \bar{\alpha}_\nu$ $(\nu = p, \ldots n)$.

Il n'existe aucune valeur de y_0 pour laquelle $\frac{1}{\alpha C(y_0) + \beta}$ ou $\frac{1}{\bar{\alpha}\bar{C}(y_0) + \bar{\beta}}$ soit égal à l'infini identiquement (pour toute valeur de x). Par suite, il n'existe non plus une valeur de y_0 pour laquelle l'une des expressions $r_1, \ldots r_{n'}$ soit égale à l'infini identiquement. On en conclut que, pour toute valeur de y_0, la fonction $r(y, y_0 | x)$ est diviseur de la fonction

$$y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{z}_n + \frac{1}{\alpha C(y_0) + \beta}(y^{n-p+1} + \alpha_p y^{n-p} + \cdots + \alpha_n).$$

En particulier, si $C(\bar{y}_0) = \infty$ $r(y, \bar{y}_0 | x)$ est diviseur de $y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{z}_n$.

Or, les expressions $r_1(\bar{y}_0 | x), \ldots r_{n'}(\bar{y}_0 | x)$ définissent des éléments de fonctions qui sont de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés, si l'on suppose que les points singuliers de l'équation de Riccati (6) appartiennent

[1] Pour la démonstration suivante cf. Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 44, 45.

aux points ajoutés, ce qui est évidemment permis. Par suite, $f(x)$ admet au plus n' déterminations permutables autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés. Or, ceci est contraire à la définition de n. Par suite, la supposition faite doit être rejetée.

Donc, $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_{p-2}$ sont des éléments de fonctions uniformes. Par là, le théorème $2'$ est démontré.

Faisons une remarque au sujet du nombre n. Il pourrait arriver que l'équation de RICCATI (6) ait des points singuliers en dehors des points ξ. Soit a un tel point, et démontrons qu'il n'existe qu'une seule intégrale de (6) qui soit singulière pour $x=a$. Si a est point singulier pour toute intégrale de (6), l'équation (7) a, quelle que soit l'intégrale z de (6), une solution, singulière pour $x=a$. Cette solution, qui est intégrale de (1') est nécessairement une série de la forme $(x-a)^{-\frac{1}{p-1}}\mathfrak{P}\left((x-a)^{\frac{1}{p-1}}\right)$ parfaitement déterminée par le point a. On en conclut que les fonctions

$$y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{z}_{p-2} y^{n-p+2} + \alpha_p y^{n-p} + \cdots + \alpha_n,$$

$$\beta_p y^{n-p} + \cdots + \beta_n$$

ont un diviseur commun; par suite, toute intégrale de (1') et en particulier $f(x)$ admet moins de n déterminations permutables autour des points singuliers distincts des points ξ et des points ajoutés, ce qui est contre l'hypothèse. Le point a ne saurait donc être point singulier pour toute intégrale de (6). En posant $z = \frac{1}{(p-1)a_0}\frac{u'}{u}$ on aura pour u une équation linéaire et homogène du second ordre, et comme a n'est pas un zéro de a_0 (les zéros de a_0 appartiennent aux points ξ) il résulte que cette équation linéaire a toutes ses intégrales régulières pour $x=a$; de plus, il n'existe qu'une seule intégrale qui a le point a comme zéro. Par suite, il n'existe qu'une seule intégrale de (6) qui est singulière pour $x=a$, et cette intégrale a en a un pôle. De là, on conclut que toute intégrale de (1') admet au plus n déterminations permutables autour des points singuliers *distincts des points* ξ. En particulier, $f(x)$ admet n déterminations permutables de cette manière. Les nombre n, n' définis à la page 312 sont donc identiques.

12. Nous étudions maintenant l'équation générale (1), et nous supposons alors que $p=q+2$. Soit $f(x)$ une intégrale transcendante à un nombre fini m de déterminations, prenons un point x_0 distinct des points ξ et des points singu-

liers de $f(x)$, et soient $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_m$ les séries de puissance de $x - x_0$ qui appartiennent à $f(x)$. Elles se partagent en groupes

$$\begin{gathered} \bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n \\ \bar{y}_{n+1}, \ldots \bar{y}_{2n} \\ \cdots\cdots \\ \bar{y}_{m-n+1}, \ldots \bar{y}_m \end{gathered}$$

à un même nombre n de séries de telle manière que les séries d'un même groupe se permutent autour des points singuliers distincts des points ξ et de certains points ajoutés en nombre fini, tandis que deux séries qui appartiennent à des groupes différents ne se permutent pas de cette manière. Les expressions symétriques $f_\nu(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n), f_\nu(\bar{y}_{n+1}, \ldots \bar{y}_{2n}), \ldots f_\nu(\bar{y}_{m-n+1}, \ldots \bar{y}_m)$ définissent des éléments d'une fonction $f_\nu(x)$ qui est de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés.

Pour étudier les fonctions $f_1(x), \ldots f_n(x)$ nous étudions d'abord certaines combinaisons de ces fonctions. Nous supposons que x_0 soit distinct des points singuliers des fonctions algébriques définies par l'équation en y $Q(x, y) = 0$, nous désignons par $\beta_1, \ldots \beta_q$ les séries de puissance de $x - x_0$ qui satisfont à cette équation, certaines de ces séries pouvant être identiques, et nous considérons les expressions symétriques

$$f_\nu\left(\frac{1}{\bar{y}_1 - \beta_i}, \ldots \frac{1}{\bar{y}_n - \beta_i}\right) \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots \nu_i \\ i = 1, \ldots q \end{pmatrix},$$

ν_i désignant l'ordre de multiplicité de la racine β_i de l'équation $Q(x, y) = 0$ pour une valeur arbitraire de x. On voit facilement que ces expressions définissent des éléments de fonctions qui n'admettent *aucun point singulier* en dehors des points ξ, des points ajoutés et des points singuliers non polaires des fonctions algébriques dont $\beta_1, \ldots \beta_q$ sont des éléments. En effet, supposons qu'un point $\bar{x}$ distinct de ces points soit singulier pour la branche que l'on obtient en prolongeant la série définie par l'expression $f_\nu\left(\frac{1}{\bar{y}_1 - \beta_i}, \ldots \frac{1}{\bar{y}_n - \beta_i}\right)$ le long d'un chemin de $\bar{x}_0$ à $\bar{x}$. En prolongeant les séries définies par les expressions $\frac{1}{\bar{y}_1 - \beta_i}, \ldots \frac{1}{\bar{y}_n - \beta_i}$ le long du même chemin on obtiendra n branches dont certaines doivent être infinies pour $x = \bar{x}$. Ces branches sont données, dans le voisinage de $\bar{x}$, par les déterminations d'une série de la forme

$$(x-\bar{x})^{-\frac{1}{\nu_i+1}} \mathfrak{P}\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{\nu_i+1}}\right).[1]$$

Les autres branches sont régulières pour $x=\bar{x}$. Par suite, la branche définie par prolongement analytique de $f_\nu\left(\frac{1}{\bar{y}_1-\beta_i}, \dots \frac{1}{\bar{y}_n-\beta_i}\right)$ s'obtient dans le voisinage de $\bar{x}$ par une série de la forme

$$(x-\bar{x})^{-\frac{\nu}{\nu_i+1}} \mathfrak{P}_1\left((x-\bar{x})^{\frac{1}{\nu_i+1}}\right),$$

où les puissances fractionnaires disparaissent. Si $\nu \leqq \nu_i$ les puissances négatives disparaissent, le point $\bar{x}$ ne saurait donc être point singulier.

En s'appuyant sur ce résultat et sur les théorèmes B, C on démontre comme au n:o 6 la proposition suivante.

Les fonctions dont les expressions

$$f_\nu\left(\frac{1}{\bar{y}_1-\beta_i}, \dots \frac{1}{\bar{y}_n-\beta_i}\right) \quad \begin{pmatrix}\nu=1, \dots \nu_i\\ i=1, \dots q\end{pmatrix}$$

définissent des éléments sont des fonctions algébriques.

Désignons par $\bar{z}_\nu$, $\bar{z}_{\nu i}$ les séries de puissance définies par les expressions $f_\nu(\bar{y}_1, \dots \bar{y}_n)$, $f_\nu\left(\frac{1}{\bar{y}_1-\beta_i}, \dots \frac{1}{\bar{y}_n-\beta_i}\right)$ resp. et posons

$$\bar{\varphi}(y)=y^n+\bar{z}_1 y^{n-1}+\cdots+\bar{z}_n.$$

On aura

$$f_\nu\left(\frac{1}{\bar{y}_1-y}, \dots \frac{1}{\bar{y}_n-y}\right)=\frac{1}{\underline{|\nu}} \frac{\bar{\varphi}^{(\nu)}(y)}{\bar{\varphi}(y)},$$

par suite

$$\frac{1}{\underline{|\nu}} \frac{\bar{\varphi}^{(\nu)}(\beta_i)}{\bar{\varphi}(\beta_i)}=\bar{z}_{\nu i} \quad \begin{pmatrix}\nu=1, \dots \nu_i\\ i=1, \dots q\end{pmatrix}.$$

Ces équations peuvent s'écrire comme des relations linéaires entre $\bar{z}_1, \dots \bar{z}_n$ avec coefficients qui sont des éléments de fonctions algébriques.

[1] Il pourrait exister un nombre fini de points $\bar{x}$ tels que la valeur obtenue pour $x=\bar{x}$ en prolongeant β_i le long du chemin considéré soit racine de l'équation $Q(\bar{x}, y)=0$ d'un ordre de multiplicité plus grand que ν_i; pour un tel point, on doit remplacer ν_i par un nombre plus grand, mais on voit facilement que cela ne fait aucune difficulté pour les raisonnemants suivants.

Nous déduisons maintenant un système d'équations différentielles pour $f_1(x), \dots f_n(x)$. Nous considérons n séries de puissance $y_1, \dots y_n$ d'une même différence $x - x_0$ qui satisfont à l'équation (1) et nous désignons les expressions symétriques de ces séries par $z_1, \dots z_n$. En dérivant l'équation

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n = 0,$$

où y désigne l'une quelconque des séries $y_1, \dots y_n$ on aura

$$\begin{aligned}(8)\qquad & (ny^{n-1} + (n-1) z_1 y^{n-2} + \cdots + z_{n-1})(a_0 y^p + \cdots + a_p) + \\ & \qquad + \left(\frac{dz_1}{dx} y^{n-1} + \cdots + \frac{dz_n}{dx}\right)(b_0 y^q + \cdots + b_q) = 0.\end{aligned}$$

Ajoutons à cette équation l'équation suivante

$$(9)\qquad (y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n)(B_1 y^{p-1} + \cdots + B_p) = 0,$$

$B_1, \dots B_p$ étant déterminés de manière que l'on obtienne une équation de degré $n-1$. Soit

$$\sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu B_p + \cdots + z_{\nu+p-1} B_1 + A_\nu) y^{n-\nu} = 0$$

cette équation, où

$$\begin{aligned}A_\nu = (n-\nu+1) a_p z_{\nu-1} + (n-\nu) a_{p-1} z_\nu + \cdots + (n-\nu-p+1) a_0 z_{\nu+p-1} + \\ + b_q \frac{dz_\nu}{dx} + \cdots + b_0 \frac{dz_{\nu+q}}{dx}\end{aligned}$$

$$(\nu = 1, \dots n)$$

et $z_\nu = 0$ si $\nu > n$. Cette équation doit être une identité. On obtiendra donc

$$\begin{aligned}(10)\qquad & b_q \frac{dz_\nu}{dx} + \cdots + b_0 \frac{dz_{\nu+q}}{dx} = -(n-\nu+1) a_p z_{\nu-1} - \\ & \qquad - z_\nu (B_p + (n-\nu) a_{p-1}) - \cdots - z_{\nu+p-1}(B_1 + (n-\nu-p+1) a_0),\end{aligned}$$

$$(\nu = 1, \dots n)$$

et ces équations ont lieu même si certaines des séries $y_1, \dots y_n$ sont identiques.

En déterminant les quantités $B_1, \dots B_p$ de proche en proche, on aura pour B_1, B_2

$$B_1 = -na_0,$$
$$B_2 = -na_1 + a_0 z_1;$$

mais pour $B_3, \dots B_p$ on aura des expressions qui dépendent linéairement des dérivées $\frac{dz_1}{dx}, \dots \frac{dz_n}{dx}$. Afin de résoudre les équations (10) par rapport à ces dérivées nous déduisons d'abord, en nous appuyants sur les dites équations, des expressions de $B_3, \dots B_p$ qui ne dépendent pas des dérivées. A cause des équations (10), la somme des premiers membres des équations (8), (9) est identiquement nulle. En posant $y = \beta_i$ on aura donc

$$(B_1 \beta_i^{p-1} + \cdots + B_p)(\beta_i^n + z_1 \beta_i^{n-1} + \cdots + z_n) +$$
$$+ (n\beta_i^{n-1} + (n-1) z_1 \beta_i^{n-2} + \cdots + z_{n-1})(a_0 \beta_i^p + \cdots + a_p) = 0$$
$$(i = 1, \dots q)$$

ou

$$B_1 \beta_i^{p-1} + \cdots + B_p = -P(\beta_i) \frac{\varphi'(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} \quad (i = 1, \dots q)$$

si l'on pose

$$P(y) = a_0 y^p + \cdots + a_p, \ \varphi(y) = y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n.$$

Nous supposons d'abord que les racines $\beta_1, \dots \beta_q$ soient distinctes. En résolvant les dernières équations par rapport à $B_3, \dots B_p$ on aura donc

$$\left| \beta_i^{q-1}, \dots \beta_i, 1 \right|_{i=1,\dots q} B_{\nu+2} =$$
$$= -\left| \beta_i^{q-1}, \dots \beta_i^{q-\nu+1}, B_1 \beta_i^{q+1} + B_2 \beta_i^q + P(\beta_i) \frac{\varphi'(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)}, \beta_i^{q-\nu-1}, \dots \beta_i, 1 \right|_{i=1,\dots q}$$
$$(\nu = 1, \dots q).$$

Introduisons les expressions de B_1, B_2 écrites plus haut. Si l'on pose

$$R_\nu = \frac{\left| \beta_i^{q-1}, \dots \beta_i^{q-\nu+1}, P(\beta_i) \frac{\varphi'(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)}, \beta_i^{q-\nu-1}, \dots \beta_i, 1 \right|_{i=1,\dots q}}{\left| \beta_i^{q-1}, \dots \beta_i, 1 \right|_{i=1,\dots q}} \quad (\nu = 1, \dots q),$$

on aura donc, en s'appuyant sur les valeurs connues des déterminants $\left| \beta_i^{r_1}, \dots \beta_i^{r_q} \right|_{i=1,\dots q}$:[1]

[1] Voir p. ex. BALTZER, *Theorie und Andwendung der Determinanten*, p. 95, ou PASCAL, *Die Determinanten*, p. 128.

$$B_{\nu+2} = \frac{b_\nu}{b_0} a_0 z_1 - n a_1 \frac{b_\nu}{b_0} + \frac{n a_0}{b_0^2} \begin{vmatrix} b_\nu & b_0 \\ b_{\nu+1} & b_1 \end{vmatrix} - R_\nu \quad (\nu = 1, \ldots q).$$

En introduisant les expressions trouvées pour $B_1, \ldots B$ dans les équations (10) et en résolvant les équations ainsi obtenues par rapport à $\frac{dz_\nu}{dx} + \frac{a_0}{b_0} z_1 z_\nu \; (\nu = 1, \ldots n)$ on obtiendra le système suivant d'équations différentielles

$$\text{(11)} \qquad \frac{dz_\nu}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z_1 z_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{q} \alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)} R_\lambda + \alpha_\mu^{(\nu)} \right\} z_\mu + \alpha^{(\nu)} \quad (\nu = 1, \ldots n),$$

$\alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)}$, $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\alpha^{(\nu)}$ étant des fonctions rationnelles de $a_0, a_1, \ldots a_p, b_0, b_1, \ldots b_q$.[1]

Si les racines $\beta_1, \ldots \beta_q$ ne sont pas distinctes, les expressions R_λ deviennent indéterminées. Mais on peut écrire R_λ sous la forme d'un quotient entre deux fonctions entières et rationnelles de $z_1, \ldots z_n, b_0, b_1, \ldots b_q$

$$R_\lambda = \frac{G_\lambda}{G} \quad (\lambda = 1, \ldots q),$$

G étant le résultant des deux fonctions de y

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n, \; b_0 y^q + \cdots + b_q.$$

La fonction G ne peut jamais être identiquement nulle, car une racine β_i ne peut pas satisfaire à l'équation différentielle. Si l'on écrit R_λ sous cette forme, elle ne devient donc pas indéterminée quand les racines $\beta_1, \ldots \beta_q$ ne sont pas distinctes.

Nous avons déduit le système (11) sous la condition que les racines $\beta_1, \ldots \beta_q$ soient distinctes. Mais comme le système (11) est obtenu par la résolution des équations (10) par rapport aux dérivées et comme $R_\lambda = \frac{G_\lambda}{G} \; (\lambda = 1, \ldots q)$ restent finies et déterminées dans le cas où $\beta_1, \ldots \beta_q$ ne sont pas distincts, il est évident que le système (11) subsiste même dans ce dernier cas.

Dans le cas où les racines $\beta_1, \ldots \beta_q$ ne sont pas distinctes nous écrivons

---

[1] $b_q^n \alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)}, b_q^n b_0^2 \alpha_\mu^{(\nu)}$ sont des fonctions entières et rationnelles de $a_0, a_1, \ldots a_p, b_0, b_1, \ldots b_q$; $\alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ sont indépendantes de $a_0, a_1, \ldots a_p$; $\alpha^{(1)}$ est égale à $-n\frac{a_p}{b_q}$ et $\alpha^{(2)}, \ldots \alpha^{(n)}$ sont nulles.

R_λ sous une forme qui rappelle la forme primitive de R_λ valable si $\beta_1, \dots \beta_q$ sont distinctes. Partons de l'expression

$$\frac{\left| \gamma_i^{q-1}, \dots \gamma_i^{q-\nu+1}, P(\gamma_i)\frac{\varphi'(\gamma_i)}{\varphi(\gamma_i)}, \gamma_i^{q-\nu-1}, \dots \gamma_i, 1 \right|_{i=1,\dots q}}{\left| \gamma_i^{q-1}, \dots \gamma_i, 1 \right|_{i=1,\dots q}},$$

où $\gamma_1, \dots \gamma_q$ sont des indéterminés, et faisons tendre $\gamma_1, \dots \gamma_q$ vers les racines $\beta_1, \dots \beta_q$. Si β_i est racine d'ordre ν_i, on voit que R_λ peut s'écrire comme une fonction linéaire de

$$\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial \beta_i^{\nu-1}}\left[P(\beta_i)\frac{\varphi'(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)}\right] \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, \dots \nu_i \\ i = 1, \dots q \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $\beta_1, \dots \beta_q$. Par suite, R_λ s'écrit comme une fonction linéaire de

$$\frac{\varphi^{(\nu)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, \dots \nu_i \\ i = 1, \dots q \end{pmatrix}.$$

Introduisant dans R_λ $z_1 = \bar{z}_1, \dots z_n = \bar{z}_n$ on obtiendra une expression $\overline{R}_\lambda$ qui s'écrit comme une fonction linéaire des expressions

$$\frac{\overline{\varphi}^{(\nu)}(\beta_i)}{\overline{\varphi}(\beta_i)} \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, \dots \nu_i \\ i = 1, \dots q \end{pmatrix}.$$

Nous avons démontrés que ces dernières expressions définissent des éléments de fonctions algébriques. Par suite, il en est de même des expressions $\overline{R}_1, \dots \overline{R}_q$.

Considérons maintenant les équations différentielles suivantes

$$\text{(12)} \qquad \frac{dz_\nu}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z_1 z_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{q} \alpha_{\lambda\mu}^{(\nu)} \overline{R}_\lambda + \alpha_\mu^{(\nu)} \right\} z_\mu + \alpha^{(\nu)} \quad (\nu = 1, \dots n)$$

qui ont la même forme que les équations considérées au n:o 9. Elles sont remplies pour $z_1 = \bar{z}_1, \dots z_n = \bar{z}_n$. En partant des relations linéaires

$$\frac{1}{\underline{|\nu}} \overline{\varphi}^{(\nu)}(\beta_i) = \bar{z}_{\nu i} \overline{\varphi}(\beta_i) \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, \dots \nu_i \\ i = 1, \dots q \end{pmatrix}$$

et en faisant des dérivations successives on obtiendra comme au n:o cité une suite de relations linéaires entre $\bar{z}_1, \dots \bar{z}_n$ dont les coefficients sont des éléments de fonctions algébriques. Comme on a supposé que la fonction $f(x)$ est transcendante, il est impossible que toutes les fonctions $f_1(x), \dots f_n(x)$ soient algébriques. Par suite, on obtiendra au plus $n-1$ relations linéaires distinctes. Désignons par π le nombre des relations distinctes et soient

$$\beta_1^{(\lambda)} \bar{z}_1 + \cdots + \beta_n^{(\lambda)} \bar{z}_n = \beta^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, \dots \pi)$$

ces relations.

Considérons les équations

$$\beta_1^{(\lambda)} z_1 + \cdots + \beta_n^{(\lambda)} z_n = \beta^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, \dots \pi) \tag{13}$$

et distinguons deux cas. Si elles peuvent être résolues par rapport à des variables $z_{\mu_1}, \dots z_{\mu_\pi}$ parmi lesquelles ne figure pas z_1, on obtiendra, en mettant les expressions trouvées pour $z_{\mu_1}, \dots z_{\mu_\pi}$ dans celles des équations (12) qui correspondent aux valeurs $\mu'_1, \dots \mu'_{\pi'}$ de ν distinctes de $\mu_1, \dots \mu_\pi$, un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dz_{\mu'_\nu}}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z_{\mu'_1} z_{\mu'_\nu} + \sum_{\lambda=1}^{\pi'} b_{\lambda\nu} z_{\mu'_\lambda} + c_\nu \quad (\nu = 1, \dots \pi'), \tag{14}$$

où nous avons posé $z_1 = z_{\mu'_1}$. Si z_1 figure nécessairement dans tout système de variables par rapport auxquelles les équations (13) peuvent être résolues, on aura pour z_1 une expression qui ne dépend d'aucune des autres variables. Cette expression est donc égale à $\bar{z}_1$ (car $\bar{z}_1, \dots \bar{z}_n$ satisfont aux équations (13)) et définit, comme les coefficients des équations (13), un élément d'une fonction algébrique. Par suite, $f_1(x)$ devait être une fonction algébrique. Or, ceci est impossible, car tout pôle de $f(x)$ distinct des points ξ et des points ajoutés est nécessairement un pôle de $f_1(x)$, et la fonction $f(x)$ a une infinité de pôles, comme on le voit en remarquant que si $f(x)$ n'avait qu'un nombre fini de pôles, cette fonction n'aurait, en vertu des inégalités de M. Boutroux, d'autres points singuliers que des points singuliers algébriques, et serait par conséquent une fonction algébrique. On voit donc que le cas considéré maintenant ne peut pas entrer.

De la même manière qu'au n:o 9 on obtiendra maintenant le résultat suivant:

Soit $z_{\mu'_1}, \dots z_{\mu'_{\pi'}}$ *une solution du système* (14), *déterminons* $z_{\mu_1}, \dots z_{\mu_\pi}$ *par les équations* (13) *et supposons que* $\beta_i^n + z_1 \beta_i^{n-1} + \cdots + z_n \neq 0$ $(i = 1, \dots q)$. *Alors, toute solution de l'équation*

$$y^n + z_1 y^{n-1} + \cdots + z_n = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1).

En voyant la démonstration du n:o 9 on peut facilement construire la démonstration si l'on remarque que les équations $\frac{1}{\underline{|\nu}} \varphi^{(\nu)}(\beta_i) = \bar{z}_{\nu i}\, \varphi(\beta_i)$ $(\nu = 1, \ldots \nu_i,$ $i = 1, \ldots q)$ se trouvent parmi les équations (13) et que R_λ, $\overline{R}_\lambda$ sont les mêmes expressions linéaires de $\frac{1}{\underline{|\nu}} \frac{\varphi^{(\nu)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)}$ $(\nu = 1, \ldots \nu_i, i = 1, \ldots q)$ et de $\bar{z}_{\nu i}$ $(\nu = 1, \ldots \nu_i,$ $i = 1, \ldots q)$ resp., d'où l'on conclut que les égalités $R_\lambda = \overline{R}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots q)$ sont une conséquence des équations (13) si $\beta_i^n + z_1 \beta_i^{n-1} + \ldots + z_n \neq 0$ $(i = 1, \ldots q)$.

En raisonnant comme au n:o 10 on démontre ensuite que le système (14) se réduit à une seule équation, qui est une équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z^2 + bz - c.$$

Ayant donc $\pi' = 1$ on peut résoudre les équations (13) par rapport à $z_2, \ldots z_n$:

$$z_\mu = \alpha_\mu z_1 + \alpha'_\mu \quad (\mu = 2, \ldots n),$$

et le résultat énoncé tout-à-l'heure peut être énoncé maintenant de la manière suivante:

Soit z une solution de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z^2 + bz - c$$

telle que

$$\beta_i^n + z\beta_i^{n-1} + (\alpha_2 z + \alpha'_2)\beta_i^{n-2} + \cdots + \alpha_n z + \alpha'_n \neq 0 \quad (i = 1, \ldots q).$$

Alors, toute solution de l'équation

$$y^n + zy^{n-1} + (\alpha_2 z + \alpha'_2) y^{n-2} + \cdots + \alpha_n z + \alpha'_n = 0$$

satisfait à l'équation différentielle (1).

Les coefficients b, c, α_ν, α'_ν $(\nu = 2, \ldots n)$, qui sont des expressions rationnelles de a_0, $a_1, \ldots a_p$, b_0, $b_1, \ldots b_q$, $\overline{R}_1, \ldots \overline{R}_q$ et de leurs dérivées, définissent des éléments de fonctions algébriques de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points ajoutés, $(\overline{R}_1, \ldots \overline{R}_q$ sont symétriques en $\beta_1, \ldots \beta_q)$. Par les raisonnements du n:o 11 on démontre que ces fonctions sont rationnelles. Nous aurons donc le théorème suivant.

Théorème 2. *Si l'équation* (1) *ne se transforme pas à une équation de Riccati*

$$\frac{dz}{dx} = az^2 + bz + c$$

par une transformation de la forme

$$z = \frac{y^n + \alpha'_2 y^{n-2} + \cdots + \alpha'_n}{y^{n-1} + \alpha_2 y^{n-2} + \cdots + \alpha_n},$$

les coefficients $a, b, c, \alpha_\nu, \alpha'_\nu$ $(\nu = 2, \ldots n)$ *étant des fonctions rationnelles de* x, *toute intégrale à un nombre fini de déterminations est nécessairement une fonction algébrique.*

De la même manière qu'au n:o précédent on démontre que $f(x)$ admet n déterminations permutables autour *des points singuliers distincts des points* ξ.

13. Considérons maintenant une équation différentielle (1) qui se transforme à une équation de Riccati de la manière indiquée et qui a une intégrale transcendante à un nombre fini de déterminations, et voyons quels sont les cas différents qui peuvent se présenter. Nous distinguons d'abord deux cas:

1) il existe des intégrales à une infinité de déterminations,

2) toute intégrale a un nombre fini de déterminations.

Etudions d'abord le premier cas, et considérons l'équation de Riccati, à laquelle se transforme l'équation (1). Si z_1, z_2, z_3, z sont des séries de puissance de $x - x_0$ qui satisfont à cette équation, on a

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = C.$$

Si z_1, z_2, z_3 étaient des éléments de fonctions à un nombre fini de déterminations on voit donc que toute intégrale de (1) aurait un nombre fini de déterminations. On voit donc que l'un des deux cas suivant doit avoir lieu: ou bien il existe deux intégrales uniformes de l'équation de Riccati, ou bien il existe une seule intégrale à un nombre fini de déterminations, cette intégrale étant ou bien une fonction uniforme ou bien une fonction à deux déterminations. S'il existe deux intégrales uniformes qui sont toutes deux transcendantes, on voit que l'équation (1) a deux intégrales transcendantes à un même nombre de déterminations, toutes les déterminations se permutant autour des points singuliers distincts des points ξ. En effet, si n désigne le nombre des déterminations de l'une des intégrales et si l'on suppose que toutes ces déterminations ne se permutaient pas autour des points singuliers distincts des points ξ, l'équation de Ric-

CATI aurait au moins trois éléments d'intégrales appartenant à des fonctions à un nombre fini de déterminations; par suite toute intégrale de (1) aurait un nombre fini de déterminations, ce qui est contre l'hypothèse. D'autre part, si le nombre des déterminations de l'autre intégrale était $< n$, l'intégrale considérée tout-à-l'heure admettrait un nombre de déterminations $< n$ permutables autour des points singuliers distinctes des points ξ. Supposons ensuite que l'équation de RICCATI ait une intégrale uniforme transcendante et une intégrale rationnelle. Alors, l'équation (1) a une seule intégrale transcendante à un nombre fini de déterminations et un certain nombre d'intégrales algébriques qui est au plus égal au nombre des déterminations de l'intégrale transcendante (la somme des nombres de déterminations des intégrales algébriques est au plus égale à ce nombre). Supposons enfin que l'équation de RICCATI ait une seule intégrale à un nombre fini de déterminations. Alors, il en est de même de l'équation (1).

Considérons maintenant le cas où toute intégrale de (1) ait un nombre fini de déterminations. Alors, on voit d'abord qu'il existe une limite supérieure pour le nombre des déterminations des intégrales de l'équation de RICCATI, par suite, la même chose a lieu pour l'équation (1).[1] Voyons ensuite comment varie d'une intégrale à l'autre le nombre des déterminations des intégrales. On voit d'abord que toutes les intégrales transcendantes admettent le même nombre de déterminations permutables autour des points singuliers distincts des points ξ, car si n désigne ce nombre pour l'une des intégrales transcendantes, il résulte de la démonstration du théorème 2, que ce nombre est au plus égal à n pour toute autre intégrale transcendante. Pour une intégrale algébrique ce nombre pourrait être plus petit que n. Quant à l'existence d'intégrales algébriques, on voit que pour l'équation de RICCATI les trois cas suivants sont les seuls possibles: 1) il existe deux intégrales rationnelles, 2) il existe une seule intégrale algébrique qui est ou bien rationnelle ou bien une fonction à deux déterminations, 3) il n'existe aucune intégrale algébrique. Dans le cas où il existe une intégrale algébrique, la somme des nombres de déterminations des intégrales algébriques de (1) est au plus égale à $2n$. Pour étudier comment varie d'une intégrale à l'autre le nombre total des déterminations des intégrales il suffit de faire une telle étude pour l'équation de RICCATI. Désignons par m' le nombre maximum de déterminations d'une intégrale de cette équation. Il existe au plus $2m' - 2$ intégrales pour lesquelles le nombre de déterminations est plus petit que m', car l'intégrale générale s'écrit $\frac{\alpha C + \beta}{C + \gamma}$, et une équation de la forme

[1] On aura donc la solution du problème posé par M. PAINLEVÉ dans la *Note* citée, p. 178, note.

$$\frac{\alpha C+\beta}{C+\gamma}=\frac{\alpha_1 C+\beta_1}{C+\gamma_1},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont des fonctions de x, ne peut être satisfaite que pour deux valeures au plus de C.

M. Painlevé appelle intégrale exceptionnelle d'espèce i_m une intégrale de (1) pour laquelle le nombre des déterminations permutables autour des points singuliers distincts des points ξ est plus petit que n, et intégrale exceptionnelle d'espèce i_f une intégrale dont le nombre total de déterminations est plus petit que $m = m'n$;[1] pour les intégrales d'espèce i_f nous ajoutons cette condition qu'elles ne soient en même temps des intégrales exceptionnelles d'espèce i_m. Avec cette terminologie nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Toute intégrale exceptionnelle d'espéce i_m est une fonction algébrique. La somme des nombres de déterminations de ces intégrales est au plus égale à $2n$. Il existe au plus $2m'-2$ intégrales exceptionnelles d'espèce i_f.

14. Nous allons généraliser maintenant les résultats du présent mémoire à être valables pour une branche d'intégrale. Appellons *branche algébroïde* ou *branche de caractère algébrique* une branche à un nombre fini de déterminations qui n'a, à *l'intérieur* du domaine où elle est définie, d'autres points singuliers que des points singuliers algébriques; au contraire, nous admettons l'existence de points singuliers non algébriques sur *la limite* du domaine. Nous démontrons alors le théorème suivant:

Théorème 3. *Si l'équation* (1) *ne se transforme pas à une équation de Riccati de la manière indiquée au théorème 2, toute branche d'intégrale à un nombre fini de déterminations est nécessairement une branche algébroïde.*

Supposons qu'il existe une branche d'intégrale $f(x)$ qui a un nombre fini de déterminations et qui n'est pas une branche algébroïde, et soit X le domaine où cette branche est définie. Les déterminations de $f(x)$ se répartissent en groupes à un même nombre n de déterminations de telle manière que les déterminations d'un même groupe se permutent autour des points singuliers de $f(x)$ distincts des points ξ et de certains points ajoutés en nombre fini, tandis que deux déterminations qui appartiennent à des groupes différents ne se permutent pas de cette manière. Soint $\overline{y}_1, \ldots \overline{y}_n$ les déterminations d'un certain groupe (séries de puissance d'une même différence $x-x_0$), désignons les expressions symétriques de $\overline{y}_1, \ldots \overline{y}_n$ par $\overline{z}_1, \ldots \overline{z}_n$ et considérons les expressions

---

[1] Voir la *Note* de M. Painlevé, p. 170.

$$\frac{1}{\underline{|\nu}} \frac{\varphi^{(\nu)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots \nu_i \\ i = 1, \ldots q \end{pmatrix}$$

où $\varphi(y) = y^n + \bar{z}_1 y^{n-1} + \cdots + \bar{z}_n$. Ces expressions s'écrivent comme des séries de puissance $\bar{z}_{\nu i}$; en partant de ces séries et en faisant des prolongements analytiques de toutes les manières possibles à l'intérieur de X on obtiendra certaines branches $\bar{z}_{\nu i}^X$. On démontre que ces branches sont des branches algébroïdes.

Répétons les raisonnements du n:o 13 en astreignons la variable x au domaine X. On aboutira alors au résultat suivant:

Il existe une équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a_0}{b_0} z^2 + b^X z - c^X$$

et une équation algébrique de degré n

$$y^n + z y^{n-1} + (\alpha_2^X z + \bar{\alpha}_2^X) y^{n-2} + \cdots + \alpha_n^X z + \bar{\alpha}_n^X = 0$$

qui ont la propriété suivante: si z est une solution de l'équation de Riccati telle que

$$\beta_i^n + z \beta_i^{n-1} + (\alpha_2^X z + \bar{\alpha}_2^X) \beta_i^{n-2} + \cdots + \alpha_n^X z + \bar{\alpha}_n^X \neq 0 \ (i = 1, \ldots q),$$

toute solution de l'équation algébrique satisfait à l'équation différentielle (1). Les coefficients b^X, c^X, α_ν^X, $\bar{\alpha}_\nu^X$ $(\nu = 2, \ldots n)$ sont des branches uniformes à caractère rationnelle.

Démontrons que ces coefficients sont des branches de fonctions rationnelles. On a $\bar{z}_\mu = \alpha_\mu^X \bar{z}_1 + \bar{\alpha}_\mu^X$ $(\mu = 2, \ldots n)$, donc

$$\frac{\varphi^{(\mu)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} = \frac{\psi^{(\mu)}(\beta_i)\bar{z}_1 + \chi^{(\mu)}(\beta_i)}{\psi(\beta_i)\bar{z}_1 + \chi(\beta_i)},$$

où

$$\psi(y) = y^{n-1} + \alpha_2^X y^{n-2} + \cdots + \alpha_n^X$$

$$\chi(y) = y^n + \bar{\alpha}_2^X y^{n-2} + \cdots + \bar{\alpha}_n^X.$$

En partant de $\bar{z}_1$ et en faisant des prolongements analytiques à l'intérieur de X on obtiendra une certaine branche qui a un nombre fini de déterminations et qui a nécessairement un point singulier essentiel à *l'intérieur* de X (cf. page 337). α_μ^X, $\bar{\alpha}_\mu^X$ $(\mu = 2, \ldots n)$ peuvent s'écrire comme des expressions rationnelles de a_0, $a_1, \ldots a_p$, b_0, $b_1, \ldots b_q$, $\beta_1, \ldots \beta_q$, $\bar{z}_{\nu i}^X$ $(\nu = 1, \ldots \nu_i$, $i = 1, \ldots q)$. Comme $\bar{z}_{\nu i}^X$ sont des branches algébroïdes on conclut donc que l'on aura de même des branches algébroïdes en partant de $\psi(\beta_i)$, $\chi(\beta_i)$, $\psi^{(\mu)}(\beta_i)$, $\chi^{(\mu)}(\beta_i)$ et en faisant des prolongements à l'intérieur de X. Par suite, l'expression linéaire de $\bar{z}_1$ écrite plus haut est nécessairement indépendante de $\bar{z}_1$, et on aura donc

$$\bar{z}_{\mu i} = \frac{\varphi^{(\mu)}(\beta_i)}{\varphi(\beta_i)} = \frac{\psi^{(\mu)}(\beta_i)}{\psi(\beta_i)} = \frac{\chi^{(\mu)}(\beta_i)}{\chi(\beta_i)} \begin{pmatrix} \mu = 1, \dots \nu_i \\ i = 1, \dots q \end{pmatrix}.$$

Or, en raisonnant comme à la fin du n:o 11 (page 330) on démontre que $b^X, c^X, a_\mu^X, \bar{a}_\mu^X$ $(\mu = 2, \dots n)$ sont des branches de fonctions qui sont de caractère rationnelle en dehors des points ξ, et par les raisonnements précédents du n:o cité on démontre que ces fonctions sont uniformes. Par suite, $\bar{z}_{\nu i}$ sont des éléments de fonctions à un nombre fini de déterminations (au plus égal à q) qui sont de caractère rationnelle en dehors des points ξ et des points singuliers des fonctions algébriques définies par l'équation $Q(x, y) = 0$. Comme au n:o 12 (page 331) on démontre que ces fonctions n'ont aucun point singulier en dehors des dits points, et par les théorèmes de M. Boutroux on démontre ensuite qu'elles sont des fonctions algébriques. Comme $b^X, c^X, a_\mu^X, \bar{a}_\mu^X$ $(\mu = 2, \dots n)$ peuvent s'écrire comme des expressions rationnelles de $a_0, a_1, \dots a_p, b_0, b_1, \dots b_q, \beta_1, \dots \beta_q, \bar{z}_{\nu i}$, elles sont donc aussi des branches de fonctions algébriques. Comme ces fonctions sont uniformes elles sont rationnelles. Par là, le théorème 3 est démontré.

Le cas le plus intéressant est celui où X contient un seul point ξ. On obtiendra alors un résultat sur la manière dont certaines intégrales se comportent au voisinage du point singulier ξ.

Considérons aussi le cas où l'équation (1) se transforme à une équation de Riccati et il existe une branche d'intégrale à un nombre fini de déterminations qui n'est pas une branche algébroïde. On démontre comme au n:o précédent que le nombre des déterminations d'une telle branche qui se permutent autour des points singuliers de la branche distinct des points ξ est un invariant, il ne varie pas d'une branche à une autre de la nature considérée, même si les branches sont définies dans des domaines différents. Considérons par exemple le cas où il existe une intégrale transcendante à un nombre fini de déterminations et entourons chaque point singulier essentiel de cette intégrale par un cercle arbitrairement petit: on obtiendra toujours le même nombre de déterminations si l'on tourne autour des points singuliers distincts des points ξ et situés dans un quelconque de ces cercles, et si l'on tourne autour de tous les points singuliers distincts des points ξ.