FORMULES EXPRIMANT LES VALEURS DES COEFFICIENTS DES SÉRIES DE PUISSANCES INVERSES.

PAR

FRANZ KAMBER

à LAUSANNE.

§ 1.

Soit donnée la relation

$$x^m = y^m(1 + m\,T), \tag{1}$$

où T représente la série

$$T = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \cdots \tag{2}$$

et où m est un nombre complexe imaginaire quelconque.

A partir de (1), on peut obtenir le développement formel de y^n suivant les puissances croissantes de x. Nous poserons

$$y^n = x^n(1 + n\,S_n), \tag{3}$$

où il faut faire

$$S_n = b_{n,1}\,x + b_{n,2}\,x^2 + b_{n,3}\,x^3 + \cdots. \tag{4}$$

Considérons la série

$$F(v) = \varkappa_1 v + \varkappa_2 v^2 + \varkappa_3 v^3 + \cdots,$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable v. Si son rayon de convergence n'est pas nul, il en est de même de celui de la série représentant la fonction

$$H(v) = [1 + F(v)]^p,$$

où l'exposant p est un nombre complexe imaginaire. En effet, dans le plan de la variable imaginaire v, cette dernière série converge à l'intérieur du plus grand cercle ne contenant pas de points singuliers de $H(v)$. Or, ceux-ci sont ou des points singuliers de $F(v)$ ou des racines de l'équation

$$1 + F(v) = 0,$$

la valeur absolue desquelles est nécessairement positive.

Si donc la série (1) possède un rayon de convergence non nul, c'est aussi le cas pour la série

$$x = y(1 + mT)^{\frac{1}{m}},$$

puis, d'après Cauchy[1], pour la série inverse

$$y = x(1 + S_1),$$

ensuite pour la série (3).

Nous nous proposons d'exprimer les coefficients $b_{n,\nu}$ en fonction des coefficients c_ν.

Nous ferons usage de la formule de Lagrange[2]:

Soit y une racine de l'équation

$$y - y_0 - xf(y) = 0, \tag{5}$$

où $f(y)$ est une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour C tracé dans le plan imaginaire des y et enfermant le point y_0. Une fonction $\Phi(y)$ holomorphe à l'intérieur du contour C s'exprime pour des valeurs suffisamment petites de x par la série

$$\Phi(y) = \Phi(y_0) + \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \Psi_\nu^{(\nu-1)}(y_0), \tag{6}$$

le symbole $\Psi_\nu^{(j)}(y)$ désignant la dérivée d'ordre j de la fonction

$$\Psi_\nu(y) = \Phi'(y)[f(y)]^\nu. \tag{7}$$

La formule (6) est applicable à la question qui nous occupe, lorsque n est un entier positif. Nous devons faire

$$y_0 = 0,$$
$$f(y) = (1 + mT)^{-\frac{1}{m}},$$
$$\Phi(y) = y^n.$$

---

[1] Voir par ex. K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 3[e] édition, 1931 p. 186.

[2] Voir Goursat, *Cours d'analyse*, tome I, 1933, p. 471 et tome II, 1933, p. 116.

La formule (7) devient

(8) $$\Psi_\nu(y) = n\,y^{n-1}(1 + m\,T)^{-\frac{\nu}{m}}.$$

L'équation (6) s'écrit donc

$$y^n = \sum_\nu^{1,\,\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}\,\Psi_\nu^{(\nu-1)}(0)$$

ou

$$y^n = x^n \sum_\nu^{0,\,\infty} \frac{x^\nu}{(\nu+n)!}\,\Psi_{\nu+n}^{(\nu+n-1)}(0),$$

car $\Psi_\nu^{(j)}(0) = 0$ pour $j < n-1$, ou encore

$$y^n = x^n \left\{ 1 + \sum_\nu^{1,\,\infty} \frac{x^\nu}{(\nu+n)!}\,\Psi_{\nu+n}^{(\nu+n-1)}(0) \right\}.$$

Comparant avec (3) et (4), il s'ensuit

(9) $$b_{n,\,\nu} = \frac{\Psi_{\nu+n}^{(\nu+n-1)}(0)}{n\,(\nu+n)!}.$$

La relation (8) nous donne

$$\frac{1}{n}\,\Psi_{\nu+n}(y) = y^{n-1}(1 + m\,T)^{-\frac{\nu+n}{m}}.$$

Pour y et, par conséquent, T assez petits, on a

$$\begin{aligned}(1 + m\,T)^{-\frac{\nu+n}{m}} &= 1 - (\nu+n)\,T + \frac{1}{2!}(\nu+n)(\nu+n+m)\,T^2 \\ &\quad - \frac{1}{3!}(\nu+n)(\nu+n+m)(\nu+n+2m)\,T^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}(\nu+n)(\nu+n+m)\ldots(\nu+n+\overline{\lambda-1}\,m)\,T^\lambda + \cdots.\end{aligned}$$

Suivant la formule polynomiale[1], le coefficient de y^ν dans le développement de T^λ a pour valeur

$$U = \sum_{(\alpha)} \frac{\lambda!\,c_1^{\alpha_1}\,c_2^{\alpha_2}\ldots c_\nu^{\alpha_\nu}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\nu!},$$

[1] Voir VON MANGOLDT-KNOPP, *Einführung in die höhere Mathematik*, 1931, p. 34.

la somme devant être étendue à toutes les combinaisons des quantités entières, positives ou nulles, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, qui satisfont aux conditions

$$(10) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \lambda$$

et

$$(11) \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + \nu\alpha_\nu = \nu.$$

Par suite, le coefficient de $y^{\nu+n-1}$ dans le développement de $\frac{1}{n}\Psi_{\nu+n}(y)$ est

$$\sum_{\lambda}^{1,\nu} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}(\nu+n)(\nu+n+m)\ldots(\nu+n+\overline{\lambda-1}\,m)\,U.$$

On en déduit

$$\frac{1}{n}\Psi_{\nu+n}^{(\nu+n-1)}(0) = \sum_{\lambda}^{1,\nu} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}(\nu+n)!\,(\nu+n+m)(\nu+n+2m)\ldots(\nu+n+\overline{\lambda-1}\,m)\,U.$$

Portant cette valeur dans (9), on obtient[1]

$$(12) \quad b_{n,\nu} = \sum_{\lambda}^{1,\nu}(-1)^\lambda(\nu+n+m)(\nu+n+2m)\ldots(\nu+n+\overline{\lambda-1}\,m)\sum_{(\alpha)}\frac{c_1^{\alpha_1}\,c_2^{\alpha_2}\ldots c_\nu^{\alpha_\nu}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\nu!}.$$

On a en particulier

$$b_{n,1} = -c_1$$

$$b_{n,2} = \frac{1}{2}(2+n+m)c_1^2 - c_2$$

$$b_{n,3} = -\frac{1}{6}(3+n+m)(3+n+2m)c_1^3 + (3+n+m)c_1c_2 - c_3$$

$$b_{n,4} = \frac{1}{24}(4+n+m)(4+n+2m)(4+n+3m)c_1^4$$
$$-\frac{1}{2}(4+n+m)(4+n+2m)c_1^2c_2 + (4+n+m)\left(\frac{c_2^2}{2} + c_1c_3\right) - c_4.$$

La formule (12) a été établie en supposant n entier positif. Nous en tirons

$$(13) \qquad 1 + S_1 = 1 - c_1x + \left[\frac{1}{2}(3+m)c_1^2 - c_2\right]x^2 + \cdots.$$

---

[1] Cf. R. Birkeland, *Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen*, Mathematische Zeitschrift, 26. Band, 1927.

Soit maintenant n un nombre complexe imaginaire quelconque. A l'aide de (13) et de la relation

$$1 + n S_n = (1 + S_1)^n,$$

nous obtiendrons le développement de S_n, valable lorsque x est assez petit. Nous aurons de la sorte des expressions bien déterminées pour les coefficients $b_{n,\nu}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$). Comme elles s'appliquent également au cas de n entier positif, elles devront coïncider avec les expressions (12). Celles-ci sont donc exactes pour tout n.

§ 2.

La formule (12) résout la question proposée. Elle permet de calculer $b_{n,\nu}$ sans qu'il soit nécessaire de connaître les valeurs de $b_{n,\nu-1}, b_{n,\nu-2}, \ldots$ Toutefois, la recherche des différentes combinaisons des nombres α_h est assez longue. Nous arriverons à une formule plus simple en remarquant que les expressions $b_{n,\nu}$ peuvent être mises sous forme de déterminants.

On a

$$b_{n,1} = -c_1,$$

$$b_{n,2} = \frac{1}{2!(2+n)} \begin{vmatrix} (2+n)c_1 & 2(2+n)c_2 \\ 1 & (2+n+m)c_1 \end{vmatrix},$$

$$b_{n,3} = -\frac{1}{3!(3+n)} \begin{vmatrix} (3+n)c_1 & 2(3+n)c_2 & 3(3+n)c_3 \\ 1 & (3+n+m)c_1 & (6+2n+m)c_2 \\ 0 & 2 & (3+n+2m)c_1 \end{vmatrix},$$

$$b_{n,4} = \frac{1}{4!(4+n)} \begin{vmatrix} (4+n)c_1 & 2(4+n)c_2 & 3(4+n)c_3 & 4(4+n)c_4 \\ 1 & (4+n+m)c_1 & (8+2n+m)c_2 & (12+3n+m)c_3 \\ 0 & 2 & (4+n+2m)c_1 & (8+2n+2m)c_2 \\ 0 & 0 & 3 & (4+n+3m)c_1 \end{vmatrix},$$

et, en général,

$$b_{n,\nu} = \frac{(-1)^\nu D_\nu}{\nu!(\nu+n)}, \tag{14}$$

si l'on pose

$$
(15)\quad D_\nu = \begin{vmatrix}
(\nu+n)c_1 & 2(\nu+n)c_2 & 3(\nu+n)c_3 & 4(\nu+n)c_4 & \cdots & (\nu-1)(\nu+n)c_{\nu-1} & \nu(\nu+n)c_\nu \\
1 & (\nu+n+m)c_1 & (2\nu+2n+m)c_2 & (3\nu+3n+m)c_3 & \cdots & [(\nu-2)(\nu+n)+m]c_{\nu-2} & [(\nu-1)(\nu+n)+m]c_{\nu-1} \\
0 & 2 & (\nu+n+2m)c_1 & (2\nu+2n+2m)c_2 & \cdots & [(\nu-3)(\nu+n)+2m]c_{\nu-3} & [(\nu-2)(\nu+n)+2m]c_{\nu-2} \\
0 & 0 & 3 & (\nu+n+3m)c_1 & \cdots & [(\nu-4)(\nu+n)+3m]c_{\nu-4} & [(\nu-3)(\nu+n)+3m]c_{\nu-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & [\nu+n+(\nu-2)m]c_1 & [2(\nu+n)+(\nu-2)m]c_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu-1 & [\nu+n+(\nu-1)m]c_1
\end{vmatrix}
$$

Appelons $a_{l,k}$ l'élément situé à la k^{e}-place de la l^{e}-ligne d'un déterminant.

Dans le cas du déterminant (15), nous avons

$$
(16)\qquad a_{l,k} = [(k-l+1)(\nu+n) + (l-1)m]\, c_{k-l+1},
$$

à condition de faire $c_0 = \frac{1}{m}$, et $c_\nu = 0$ pour $\nu < 0$.

Il s'agit de démontrer la formule (14).

Désignons par $D_\nu^{[s]}$ le mineur constitué par les éléments de D_ν qui restent après suppression des $\nu-s$ dernières lignes et des $\nu-s$ dernières colonnes. Soit, de plus, $D_\nu^{[0]} = 1$.

En développant $D_\nu^{[s]}$ suivant les éléments de la s^{e}-colonne, on obtient la relation de récurrence

$$
\begin{aligned}
(17)\quad D_\nu^{[s]} = {} & [\nu + n + (s-1)m]\, c_1 D_\nu^{[s-1]} - \\
& -(s-1)\,[2(\nu+n) + (s-2)m]\, c_2 D_\nu^{[s-2]} + \cdots \\
& + (-1)^{h-1}\frac{(s-1)!}{(s-h)!}[h(\nu+n)+(s-h)m]\, c_h D_\nu^{[s-h]} + \cdots \\
& + (-1)^{s-1} s!\,(\nu+n)\, c_s D_\nu^{[0]}.
\end{aligned}
$$

Nous allons prouver que l'on a

$$
\begin{aligned}
(18)\quad D_\nu^{[s]} = \sum_{\lambda}^{1,s} (-1)^{s+\lambda} s!\,(\nu+n)(\nu+n+m)(\nu+n+2m)\cdots \\
\cdots(\nu+n+\overline{\lambda-1}\,m) \sum_{(\alpha)}{}' \frac{c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2}\ldots c_s^{\alpha_s}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!},
\end{aligned}
$$

la somme $\sum\limits_{(\alpha)}{}'$ étant étendue à toutes les combinaisons des valeurs de α_h entières, positives ou nulles, satisfaisant aux conditions

$$
(19)\qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = \lambda, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + s\alpha_s = s. \end{cases}
$$

Pour abréger, désignons par Θ_s le coefficient de $c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2}\ldots c_s^{\alpha_s}$ dans (18). Remplaçant s par $s-h$, la formule (18) nous donne pour $D_\nu^{[s-h]}$ une expression qui contient entre autres le terme

$$\Theta_{s-h}\, c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_{h-1}^{\alpha_{h-1}} c_h^{\alpha_h - 1} c_{h+1}^{\alpha_{h+1}} \ldots c_s^{\alpha_s},$$

où l'on a posé

$$(20) \qquad \Theta_{s-h} = \frac{(-1)^{s-h+\lambda-1}(s-h)!\,(\nu+n)(\nu+n+m)\ldots(\nu+n+\overline{\lambda-2}\,m)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{h-1}!\,(\alpha_h-1)!\,\alpha_{h+1}!\ldots\alpha_s!} = $$

$$= \frac{(-1)^{h-1}(s-h)!\,\alpha_h\,\Theta_s}{s!\,(\nu+n+\overline{\lambda-1}\,m)}.$$

Ce coefficient s'annule lorsque $\alpha_h = 0$.

L'équation (17) ayant lieu quelles que soient les quantités c_ν, elle doit être satisfaite séparément par les coefficients de chacune des expressions telles que $c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_s^{\alpha_s}$. On doit donc avoir

$$\Theta_s = \sum_h^{1,\,s} (-1)^{h-1} \frac{(s-1)!}{(s-h)!} [h(\nu+n) + (s-h)m]\, \Theta_{s-h}$$

ou, d'après (20),

$$\Theta_s \sum_h^{1,\,s} \frac{[h(\nu+n)+(s-h)m]\,\alpha_h}{s(\nu+n+\overline{\lambda-1}\,m)} = \Theta_s$$

ou

$$\sum_h^{1,\,s} [h(\nu+n)+(s-h)m]\,\alpha_h = s(\nu+n+\overline{\lambda-1}\,m).$$

Or, cette relation est vérifiée en vertu des équations (19).

Nous reconnaissons donc que l'expression (18) satisfait à la relation de récurrence (17). Comme elle est exacte pour $s = 1$, elle l'est par suite aussi pour $s = 2, 3, \ldots, \nu$.

L'équation (14) peut s'écrire

$$b_{n,\nu} = \frac{(-1)^\nu D_\nu^{[\nu]}}{\nu!\,(\nu+n)}.$$

Portant dans cette expression la valeur de $D_\nu^{[\nu]}$ tirée de (18), on obtient précisément l'équation (12). La formule (14) est donc démontrée.

§ 3.

En application de ce qui précède, considérons la relation

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}} = \sqrt{y}\left(1 + \frac{y}{3} + \frac{y^2}{5} + \cdots\right).$$

On en déduit

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{e^{2\sqrt{x}}+1}{e^{2\sqrt{x}}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 + \sum_{\nu}^{1,\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} 2^{2\nu} B_\nu}{(2\nu)!} x^\nu\right],$$

où B_ν désigne le nombre de Bernoulli d'ordre ν.

Dans le cas présent, il faut poser

$$m = +\frac{1}{2},$$

$$n = -\frac{1}{2},$$

$$c_\nu = \frac{2}{2\nu+1},$$

$$b_{-\frac{1}{2},\nu} = \frac{(-1)^\nu D_\nu}{\nu!\left(\nu-\frac{1}{2}\right)} = \frac{(-1)^\nu 2^{2\nu+1} B_\nu}{(2\nu)!}.$$

Il s'ensuit

$$(21) \qquad B_\nu = \frac{(2\nu)!\, D_\nu}{\nu!\, 2^{2\nu}(2\nu-1)} = \frac{(2\nu-3)!\, D_\nu}{(\nu-2)!\, 2^{2\nu-2}},$$

où l'on a

$$(22) \quad D_\nu = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}(2\nu-1) & \frac{2}{5}(2\nu-1) & \frac{3}{7}(2\nu-1) & \frac{4}{9}(2\nu-1) & \cdots & \nu\frac{2\nu-1}{2\nu+1} \\ 1 & \frac{2\nu}{3} & \frac{4\nu-1}{5} & \frac{6\nu-2}{7} & \cdots & \frac{2\nu^2-3\nu+2}{2\nu-1} \\ 0 & 2 & \frac{2\nu+1}{3} & \frac{4\nu}{5} & \cdots & \frac{2\nu^2-5\nu+4}{2\nu-3} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{2\nu+2}{3} & \cdots & \frac{2\nu^2-7\nu+6}{2\nu-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{3\nu-2}{3} \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant ont pour expressions

$$a_{l,k} = \begin{cases} \dfrac{2(k-l+1)\nu+2l-k-2}{2k-2l+3} & \text{lorsque} \quad l \leq k+1, \\ 0 & \quad \text{»} \qquad l > k+1. \end{cases}$$

§ 4.

Soit donnée la série

$$(23) \qquad \xi = \gamma_1 \eta + \gamma_2 \eta^2 + \cdots,$$

où l'on suppose $\gamma_1 \neq 0$. On demande la valeur des coefficients β_ν de la série inverse

$$(24) \qquad \eta = \beta_1 \xi - \beta_2 \xi^2 + - + \cdots.$$

Il suffira de faire $m = n = 1$, $x = \frac{\xi}{\gamma_1}$, $y = \eta$ dans les formules précédentes. Nous obtenons

$$c_\nu = \frac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_1},$$

$$\beta_1 \gamma_1 = 1,$$

$$b_{1,\nu} = (-1)^\nu \beta_{\nu+1} \gamma_1^{\nu+1}.$$

Nous avons donc

$$\beta_1 = \frac{1}{\gamma_1}$$

et nous poserons

$$(25) \qquad \beta_{\nu+1} = \frac{(-1)^\nu b_{1,\nu}}{\gamma_1^{\nu+1}} = \frac{\Delta_\nu}{(\nu+1)!\, \gamma_1^{2\nu+1}}.$$

La formule (12) devient

$$b_{1,\nu} = \sum_\lambda^{1,\nu} \frac{(-1)^\lambda}{\gamma_1^\lambda} (\nu+2)(\nu+3)\ldots(\nu+\lambda) \sum_{(\alpha)} \frac{\gamma_2^{\alpha_1} \gamma_3^{\alpha_2} \cdots \gamma_{\nu+1}^{\alpha_\nu}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\nu!}.$$

La relation (25) donne par suite

$$(26) \qquad \Delta_\nu = \sum_\lambda^{1,\nu} (-\gamma_1)^{\nu-\lambda} (\nu+\lambda)! \sum_{(\alpha)} \frac{\gamma_2^{\alpha_1} \gamma_3^{\alpha_2} \cdots \gamma_{\nu+1}^{\alpha_\nu}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_\nu!}.$$

De (14) et de (25) on tire

$$\Delta_\nu = \gamma_1^\nu D_\nu.$$

D'après (15) on a donc

$$(27) \qquad \Delta_\nu = \begin{vmatrix} (\nu+1)\gamma_2 & (2\nu+2)\gamma_3 & (3\nu+3)\gamma_4 & (4\nu+4)\gamma_5 & \cdots & \nu(\nu+1)\gamma_{\nu+1} \\ \gamma_1 & (\nu+2)\gamma_2 & (2\nu+3)\gamma_3 & (3\nu+4)\gamma_4 & \cdots & \nu^2\gamma_\nu \\ 0 & 2\gamma_1 & (\nu+3)\gamma_2 & (2\nu+4)\gamma_3 & \cdots & \nu(\nu-1)\gamma_{\nu-1} \\ 0 & 0 & 3\gamma_1 & (\nu+4)\gamma_2 & \cdots & \nu(\nu-2)\gamma_{\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\nu\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant sont

$$a_{l,k} = [(k - l + 1)\nu + k]\,\gamma_{k-l+2},$$

à condition de faire $\gamma_\nu = 0$ quand $\nu < 1$.

§ 5.

Supposant $\gamma_1 \neq 0$, l'équation algébrique ou transcendante

$$0 = \gamma_0 + \gamma_1(z - z_0) + \gamma_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{28}$$

admet une racine qui tend vers z_0 lorsque γ_0 tend vers 0. Les formules du § 4 sont applicables au calcul de cette racine. Il suffit de poser $\xi = -\gamma_0$, $\eta = z - z_0$. On a en conséquence

$$z = z_0 - \beta_1\gamma_0 - \beta_2\gamma_0^2 - \beta_3\gamma_0^3 - \cdots$$

ou

$$z = z_0 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\gamma_0^2}{2!\,\gamma_1^3}\Delta_1 - \frac{\gamma_0^3}{3!\,\gamma_1^5}\Delta_2 - \frac{\gamma_0^4}{4!\,\gamma_1^7}\Delta_3 - \cdots \tag{29}$$

ou, en substituant l'expression (27) de Δ_ν,

$$z = z_0 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\gamma_0^2}{2!\,\gamma_1^3}\cdot 2\gamma_2 - \frac{\gamma_0^3}{3!\,\gamma_1^5}\begin{vmatrix} 3\gamma_2 & 6\gamma_3 \\ \gamma_1 & 4\gamma_2 \end{vmatrix} - \frac{\gamma_0^4}{4!\,\gamma_1^7}\begin{vmatrix} 4\gamma_2 & 8\gamma_3 & 12\gamma_4 \\ \gamma_1 & 5\gamma_2 & 9\gamma_3 \\ 0 & 2\gamma_1 & 6\gamma_2 \end{vmatrix} - \cdots. \tag{29 bis}$$

Dans le plan de la variable imaginaire γ_0, cette série converge à l'intérieur du plus grand cercle ayant son centre à l'origine et ne contenant pas de points singuliers.

Parmi ceux-ci se trouvent les racines de l'équation

$$\frac{d\gamma_0}{dz} = 0,$$

c-à-d. les racines de l'équation

$$0 = \gamma_1 + 2\gamma_2(z - z_0) + 3\gamma_3(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Portant les valeurs de $z - z_0$ qui satisfont à cette équation dans la relation (28), on obtient les valeurs correspondantes de γ_0.

§ 6.

Les formules précédentes fournissent aussi l'expression de $\frac{d^\nu x}{d y^\nu}$ en fonction des dérivées d'ordres supérieurs d'y par rapport à x.

Soient

$$\sigma = \varphi(\tau), \qquad \sigma + \xi = \varphi(\tau + \eta),$$

$$\tau = \psi(\sigma), \qquad \tau + \eta = \psi(\sigma + \xi).$$

Appliquant la formule de Taylor, on a

$$\xi = \eta \frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{\eta^2}{2!}\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \cdots,$$

$$\eta = \xi \frac{d\tau}{d\sigma} + \frac{\xi^2}{2!}\frac{d^2\tau}{d\sigma^2} + \cdots.$$

Identifiant ces séries avec (23) et (24), on obtient

$$\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu \sigma}{d\tau^\nu} = \gamma_\nu,$$

$$\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu \tau}{d\sigma^\nu} = (-1)^{\nu-1}\beta_\nu.$$

Remplaçant τ par x, σ par y et posant

$$\frac{d^\nu y}{d x^\nu} = y^{(\nu)},$$

il s'ensuit

$$\gamma_\nu = \frac{y^{(\nu)}}{\nu!}$$

$$\beta_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\frac{d^\nu x}{d y^\nu}.$$

Lorsque $y' \neq 0$, on tire de (25) la relation

$$\frac{d^{\nu+1} x}{d y^{\nu+1}} = \frac{(-1)^\nu \Delta_\nu}{(y')^{2\nu+1}}. \tag{30}$$

La formule (26) devient ici

$$\Delta_\nu = \sum_{\lambda}^{1,\nu} (-y')^{\nu-\lambda}(\nu+\lambda)! \sum_{(\alpha)} \frac{(y'')^{\alpha_1}(y''')^{\alpha_2}\ldots(y^{(\nu+1)})^{\alpha_\nu}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\nu!\,2!^{\alpha_1}\,3!^{\alpha_2}\ldots(\nu+1)!^{\alpha_\nu}}. \tag{31}$$

Le déterminant (27) s'écrit

$$(32)\qquad \Delta_\nu = \begin{vmatrix} \frac{\nu+1}{2!}y'' & \frac{2\nu+2}{3!}y''' & \frac{3\nu+3}{4!}y^{(4)} & \frac{4\nu+4}{5!}y^{(5)} & \cdots & \frac{\nu y^{(\nu+1)}}{\nu!} \\ y' & \frac{\nu+2}{2!}y'' & \frac{2\nu+3}{3!}y''' & \frac{3\nu+4}{4!}y^{(4)} & \cdots & \frac{\nu y^{(\nu)}}{(\nu-1)!} \\ 0 & 2y' & \frac{\nu+3}{2!}y'' & \frac{2\nu+4}{3!}y''' & \cdots & \frac{\nu y^{(\nu-1)}}{(\nu-2)!} \\ 0 & 0 & 3y' & \frac{\nu+4}{2!}y'' & \cdots & \frac{\nu y^{(\nu-2)}}{(\nu-3)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu y'' \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant ont pour valeurs

$$a_{l,k} = \frac{(k-l+1)\nu + k}{(k-l+2)!}\, y^{(k-l+2)},$$

à condition de poser $y^{(\nu)} = 0$ pour $\nu < 1$.

On a de la sorte

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{y'^3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{1}{y'^5}\begin{vmatrix} \frac{3}{2}y'' & y''' \\ y' & 2y'' \end{vmatrix},$$

$$\frac{d^4x}{dy^4} = -\frac{1}{y'^7}\begin{vmatrix} 2y'' & \frac{4}{3}y''' & \frac{1}{2}y^{(4)} \\ y' & \frac{5}{2}y'' & \frac{3}{2}y''' \\ 0 & 2y' & 3y'' \end{vmatrix}, \ \cdots$$