ÜBER EINIGE SUMMEN, DIE VON DEN NULLSTELLEN DER RIEMANN'SCHEN ZETAFUNKTION ABHÄNGEN.

VON

EDMUND LANDAU

IN GÖTTINGEN.

Einleitung.

Es bezeichne $\psi(x)$ die bekannte[1] TSCHEBYSCHEF'sche Funktion

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$

wo p^m alle Primzahlpotenzen bis x durchläuft, und es sei, wie üblich,

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Dann ist die Relation

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x})$$

unmittelbar aus TSCHEBYSCHEF's Ergebnissen abzulesen, so dass alle Abschätzungen von $\psi(x)$, deren Restglied schlechter als $O(\sqrt{x})$ ist, auch für $\vartheta(x)$ gelten. Es werde

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{für solche } x > 1, \text{ die keine Primzahlpotenz sind,} \\ \psi(x) - \frac{1}{2}\log p_0 & \text{für } x = p_0^{m_0} \end{cases}$$

gesetzt; Herr VON MANGOLDT[2] hat als erster bewiesen, dass für alle $x > 1$

---

[1] Über Bezeichnungen sowie Beweise des Bekannten und historische Angaben vergl. mein *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und Berlin (Teubner), 1909].

[2] **2** im Literaturverzeichnis des Handbuchs. Vergl. z. B. Handbuch, S. 365.

$$\Psi(x) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} \tag{1}$$

ist, wo ϱ die nicht reellen (d. h. dem Streifen $0 \leq \Re(s) \leq 1$ angehörigen) Nullstellen $\varrho = \alpha + \beta i$ von $\zeta(s)$, nach wachsenden $|\beta|$ geordnet, durchläuft. Wegen der Unstetigkeit von $\Psi(x)$ an den Stellen p^m kann die Reihe

$$\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} \qquad (x > 1) \tag{2}$$

in keinem ein p^m enthaltenden Intervall gleichmässig konvergieren. Herr von Koch[1] warf nun die Frage auf, ob nicht trotzdem $\Psi(x)$ mit angebbarer nicht trivialer Annäherung durch einen Ausdruck dargestellt werden könne, der von ähnlicher Bauart ist als die rechte Seite von (1), aber nur endlich viele ϱ (nämlich alle, deren Ordinate absolut kleiner ist wie eine passend zu wählende Funktion von x) enthält. Er beantwortete diese Frage bejahend, indem er dem allgemeinen Glied $\frac{x^\varrho}{\varrho}$ als approximationserzeugenden Faktor einen Ausdruck $\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{z}\right)$ hinzufügte, in dem z eine Funktion von x ist. Der springende Punkt ist, dass die Reihe

$$\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{z}\right),$$

wo $x > 0$ und $z > 0$ ist, absolut konvergiert.[2] Herrn von Koch's prägnantestes Resultat[3] lautet: Wenn k irgend eine Konstante ist, die dem Intervall $1 < k < \frac{\pi}{2}$ angehört, und wenn μ eine Konstante ist, die dem Intervall $0 < \mu < 1$ angehört, so ist[4]

---

[1] *Contribution à la théorie des nombres premiers* [Acta Mathematica, Bd. XXXIII (1910), S. 293—320]. Diese vom 31. 8. 1908 datierte Arbeit wurde, wie auf den Bogen vermerkt ist, am 9. 11. 1909 gedruckt, und mein Buch konnte daher keinen Einfluss mehr ausüben. In diesem Buch (S. 364—368) habe ich u. a. zum ersten Mal bewiesen, dass die Reihe (2) in jedem von den p^m freien Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$, wo $x_0 > 1$ ist, gleichmässig konvergiert.

[2] Dies ist ein Analogon zu der Tatsache, dass in Herrn de la Vallée Poussin's berühmten Primzahlarbeiten statt der schwer zu behandelnden Reihe (2) die absolut konvergente Reihe $\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho(\varrho - 1)}$ eine ausschlaggebende Rolle spielt.

[3] Wenn auch dies das Hauptergebnis seiner interessanten Arbeit ist, so möchte ich doch nicht unerwähnt lassen, dass er mit denselben Methoden auch andere ältere und neue Resultate beweist, von denen in meiner vorliegenden Abhandlung nicht die Rede ist.

[4] Es sei hierbei erwähnt, dass Herr von Koch bei der Herleitung von (3) ganz am Schluss ein Versehen macht, welches sich, wie er mir auf meine Anfrage hin freundlichst mitteilt, durch etwas veränderte Fassung der früheren Rechnungen beseitigen lässt. Herr von Koch

$$(3)\qquad \psi(x) = x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(\mathrm{I} - \frac{\mu\varrho\log x}{k x^\mu}\right) + O(x^{1-\mu}\log^2 x).$$

Also Herr VON KOCH hat die von ihm gestellte Frage durch den Beweis der Relation (3) beantwortet; speziell für $\mu = \frac{\mathrm{I}}{2}$ besagt (3)

$$(4)\qquad \psi(x) = x - \sum_{|\beta| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(\mathrm{I} - \frac{\varrho\log x}{2k\sqrt{x}}\right) + O(\sqrt{x}\log^2 x).$$

Meine im Handbuch ausführlich dargestellten Methoden gestatten, auf anderem als dem von Herrn VON KOCH eingeschlagenen Wege seine Frage zu bejahen und zwar — das ist das Neue, welches ich (nachdem in den §§ 1—2 Hilfssätze vorangeschickt sind) im § 3 der vorliegenden Arbeit auseinandersetzen will — ohne Einführung eines approximationserzeugenden Faktors. Ich werde ganz glatt in der VON KOCH'schen Formel (3) den Γ-Faktor weglassen können und für $0 < \mu < 1$, auch für $\mu = 1$

$$(5)\qquad \psi(x) = x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(x^{1-\mu}\log^2 x)$$

beweisen. Speziell für $\mu = \frac{\mathrm{I}}{2}$ besagt dies

$$(6)\qquad \psi(x) = x - \sum_{|\beta| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(\sqrt{x}\log^2 x).$$

Die auf die ϱ mit reellem Teil $\alpha = \frac{\mathrm{I}}{2}$ bezügliche Summe

---

hatte nämlich (3) zunächst (S. 319) nur bei wachsendem x der Form »ganze Zahl $+ \frac{1}{2}$» bewiesen. Um dies Ergebnis auf stetig wachsendes x auszudehnen, weist er darauf hin, dass der Sprung von $\psi(x)$ bei den Unstetigkeitsstellen x nur $O(\log x)$ ist; daraus allein folgt es aber nicht, da auch die Änderung der rechten Seite beim Übergang von x zu $[x] + \frac{\mathrm{I}}{2}$ diskutiert werden müsste. Diese Diskussion würde allerdings im Falle $0 < \mu \leqq \frac{\mathrm{I}}{2}$ $\Big($nicht aber im Falle $\frac{\mathrm{I}}{2} < \mu < 1\Big)$ leicht zu dem Ergebnis führen, dass der Fehler gegen das Schlussglied $O(x^{1-\mu}\log^2 x)$ vernachlässigt werden kann. Herr VON KOCH hat mir nun freundlichst mitgeteilt, dass man durch folgende kleine Modifikation seines Weges für alle erforderlichen μ (d. h. für $0 < \mu < 1$) sofort zu (3) bei stetig wachsenden x gelangt: »Man füge den Formeln (36), (37) und (41) rechts das Glied $O(\log x)$ hinzu; dann ist aus der Definition (1) auf S. 296 und der in No 8 (S. 315—320) angewandten Methode ersichtlich, dass diese drei Formeln für stetig wachsendes x giltig bleiben».

Der Leser meiner vorliegenden Abhandlung braucht die Arbeit von Herrn VON KOCH übrigens nicht zu kennen.

$$\sum_{\substack{|\beta| < x^\mu \\ \alpha = \frac{1}{2}}} \frac{x^\varrho}{\varrho}$$

ist

$$O \cdot \sum_{0<\beta<x^\mu} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\beta} = O\left(x^{\frac{1}{2}} \sum_{0<\beta<x^\mu} \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x\right),$$

da ja bekanntlich[1]

$$\sum_{0<\beta<y} \frac{1}{\beta} = O(\log^2 y)$$

ist. (6) lässt sich also — parallel zu einer von Herrn VON KOCH angegebenen Transformation seiner Formel (4) — auch so schreiben:

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{|\beta| < \sqrt{x} \\ \alpha \gtreqless \frac{1}{2}}} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(\sqrt{x} \log^2 x). \tag{7}$$

(7) (gleichwie die von Herrn VON KOCH aus (4) abgeleitete entsprechende Formel) setzt die zuerst von Herrn VON KOCH vor 10 Jahren[2] bewiesene Tatsache in Evidenz, dass unter der Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung $\alpha = \frac{1}{2}$ die Relation

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x)$$

besteht.

Mein Resultat (5) lässt sich wegen

$$\sum_{p^m \leqq x-1} \log p = \psi(x) + O(\log x)$$

auch so schreiben:

$$\sum_{p^m \leqq x-1} \log p = x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(x^{1-\mu} \log^2 x) \tag{8}$$

für $0 < \mu \leqq 1$. In den §§ 4—5 werde ich nun folgende Verallgemeinerung von (8) beweisen. ϱ^ν bedeute für $0 < \nu \leqq 1$ den in der von 0 bis $-\infty$ aufgeschnittenen

[1] Vergl. z. B. S. 388 des Handbuchs.
[2] **6.**

ϱ-Ebene eindeutigen Wert, der für $\varrho > 0$ positiv ist; mit anderen Worten: es sei $\varrho^\nu = e^{\nu \log \varrho}$, wo der Koeffizient von i in $\log \varrho$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Dann ist für $0 < \nu \leqq 1$, $0 < \mu \leqq 1$

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) = x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + O(x^{1-\mu\nu} \log^2 x).$$

Dies enthält offenbar (8) als Spezialfall $\nu = 1$; in den §§ 4—5 darf ich mich also auf $0 < \nu < 1$ beschränken.

Erster Teil.

§ 1.

Hilfssatz 1: *Es sei* $\eta > 0$, $T > 0$. *Dann ist bei gerader Bahn*

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s} ds - 2\pi i \right| \leqq \frac{2}{T} \frac{y^\eta}{\log y} \quad \textit{für} \quad y > 1,$$

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s} ds \right| \leqq \frac{2}{T} \frac{y^\eta}{-\log y} \quad \textit{für } 0 < y < 1.$$

Beweis: Vergl. z. B. S. 342—346 des Handbuchs.

Hilfssatz 2: *Es sei* $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $0 < y < 2$. *Dann ist bei gerader Bahn*

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s} ds \right| < 10\pi.$$

Beweis:[1] 1) Es sei $0 < y \leqq 1$. Die Anwendung des CAUCHY'schen Satzes auf die Strecke $\eta - Ti$ bis $\eta + Ti$ und den über ihr als Sehne nach rechts beschriebenen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt 0, also dem Radius $\sqrt{\eta^2 + T^2} = R$ ergibt

---

[1] Natürlich ist der Hilfssatz 2 nicht neu. Auch der obige Beweis ist nichts als genau die Anwendung des CAUCHY'schen Satzes, welche Herrn SCHNEE zu einem weitergehenden Hilfssatz auf S. 12—13 seiner Abhandlung geführt hat: *Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen* [Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1910, S. 1—42]. Mir genügt der obige Wortlaut, und ich habe kein Interesse daran, die absolute Konstante rechts möglichst klein herauszubekommen.

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s}\,ds\right| < \pi R\frac{y^\eta}{R}$$
$$\leqq \pi.$$

2) Es sei $y > 1$. Dann ergibt die Anwendung des CAUCHY'schen Satzes auf die Strecke $\eta - Ti$ bis $\eta + Ti$ und den nach links über ihr beschriebenen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt 0

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s}\,ds - 2\pi i\right| < 2\pi R\frac{y^\eta}{R}$$
$$< 8\pi,$$
$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s}\,ds\right| < 10\pi.$$

Hilfssatz 3: *Es sei für alle ganzen* $n \geqq 2$

$$|a_n| < c\log n, \tag{9}$$

also — was auch a_1 *sei —*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma > 1$ *konvergent. Es sei ferner für* $1 < \eta < 2$

$$(\eta - 1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\eta}$$

beschränkt.[1] *Dann ist für* $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s}f(s)\,ds - 2\pi i\sum_{n=1}^{x}a_n\right| < c_1\left(\frac{x^\eta}{T(\eta-1)} + \frac{x\log^2 x}{T} + \log x\right),$$

wo c_1 *von* η, T *und* x *unabhängig*[2] *ist.*

---

[1] Aus der vorangegangenen Voraussetzung (9) folgt nur die Beschränktheit von $(\eta - 1)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\eta}$.

[2] c_1 darf also nur von den a_n abhängen. Dasselbe gilt in der Folge von $c_2, c_3, \cdots$.

Beweis: Es ist für $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$\int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} f(s)\, ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{x} a_n = \int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\, ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{x-1} a_n - 2\pi i\, a_{[x]}$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} a_n \left(\int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\, ds - 2\pi i \right) + \sum_{n=x}^{x+1} a_n \int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\, ds + \sum_{n=x+2}^{\infty} a_n \int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s}\, ds - 2\pi i\, a_{[x]}.$$

Nun werde in der ersten und dritten Summe, d. h. für $n \leqq [x] - 1$ und $n \geqq [x] + 2$ der Hilfssatz 1 angewendet, dagegen in der zweiten Summe, d. h. für $n = [x]$ und $n = [x] + 1$ der Hilfssatz 2; letzterer gilt gerade, da $\frac{x}{[x]} < \frac{3}{2} < 2$ und $\frac{x}{[x]+1} < 1 < 2$ ist. Dadurch erhält man, alsbald für $n = [x]$ und $n = [x] + 1$ die Voraussetzung (9) benutzend,

$$\left| \int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} f(s)\, ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{x} a_n \right| \leqq \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{x-1} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{x}{n}} + 10\pi \left(|a_{[x]}| + |a_{[x]+1}| \right)$$

$$+ \frac{2}{T} \sum_{n=x+2}^{\infty} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{n}{x}} + 2\pi |a_{[x]}|$$

$$< \frac{2x^\eta}{T} \left(\sum_{n=1}^{x-1} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{x}{n}} + \sum_{n=x+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{n}{x}} \right) + c_2 \log x. \tag{10}$$

Hierin ist nach den gemachten Voraussetzungen

$$\sum_{n=1}^{x-1} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{x}{n}} = \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{x}{n}} + \sum_{n=\left[\frac{x}{2}\right]+1}^{[x]-1} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{x}{n}}$$

$$\leqq \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]} \frac{|a_n|}{n^\eta} + \sum_{n=\left[\frac{x}{2}\right]+1}^{[x]-1} \frac{c \log n}{n^\eta \log \frac{x}{n}}$$

$$\leqq \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta} + \frac{c \log x}{\left(\frac{x}{2}\right)^\eta} \sum_{n=\left[\frac{x}{2}\right]+1}^{[x]-1} \frac{1}{\log \frac{[x]}{n}}$$

$$< \frac{c_3}{\eta - 1} + \frac{c_4 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]-\left[\frac{x}{2}\right]-1} \frac{1}{\log \frac{[x]}{[x]-v}}$$

$$\leqq \frac{c_3}{\eta - 1} + \frac{c_4 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]-1} \frac{1}{-\log\left(1 - \frac{v}{[x]}\right)},$$

also (wegen der für $0 < z < 1$ giltigen Ungleichung $-\log(1 - z) > z$)

$$\leqq \frac{c_3}{\eta - 1} + \frac{c_4 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]-1} \frac{1}{\frac{v}{[x]}}$$

$$= \frac{c_3}{\eta - 1} + \frac{c_4 \log x}{x^\eta} [x] \sum_{v=1}^{[x]-1} \frac{1}{v}$$

(11) $$< \frac{c_3}{\eta - 1} + c_5 \frac{\log^2 x}{x^{\eta-1}};$$

ferner ist

$$\sum_{n=x+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{n}{x}} = \sum_{n=[x]+2}^{[2x]} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{n}{x}} + \sum_{n=[2x]+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta \log \frac{n}{x}}$$

$$< \sum_{n=[x]+2}^{[2x]} \frac{c \log n}{n^\eta \log \frac{n}{x}} + \frac{1}{\log 2} \sum_{n=[2x]+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta}$$

$$< \frac{c \log (2x)}{x^\eta} \sum_{n=[x]+2}^{[2x]} \frac{1}{\log \frac{n}{[x]+1}} + \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\eta}$$

$$< \frac{c_6 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[2x]-[x]-1} \frac{1}{\log \frac{[x]+1+v}{[x]+1}} + \frac{c_3}{\eta - 1}$$

$$\leqq \frac{c_6 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{v}{[x]+1}\right)} + \frac{c_3}{\eta - 1},$$

also $\left(\text{wegen der für } 0 < z < 1 \text{ giltigen Ungleichung } \log(1 + z) > \frac{z}{2}\right)$

$$\leqq \frac{2c_6 \log x}{x^\eta} \sum_{v=1}^{[x]} \frac{1}{\frac{v}{[x]+1}} + \frac{c_3}{\eta - 1}$$

$$= \frac{2c_6 \log x}{x^\eta} ([x]+1) \sum_{v=1}^{[x]} \frac{1}{v} + \frac{c_3}{\eta - 1}$$

$$(12) \qquad < c_7 \frac{\log^2 x}{x^{\eta-1}} + \frac{c_3}{\eta - 1}.$$

(11) und (12) geben, in (10) eingesetzt,

$$\left| \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} f(s)\,ds - 2\pi i \sum_{n=1}^{x} a_n \right| < \frac{2x^\eta}{T} \left(\frac{c_8}{\eta - 1} + \frac{c_9 \log^2 x}{x^{\eta-1}} \right) + c_2 \log x,$$

also, wie behauptet,

$$< c_1 \left(\frac{x^\eta}{T(\eta - 1)} + \frac{x \log^2 x}{T} + \log x \right).$$

§ 2.

Es durchlaufe ϱ in beliebiger Reihenfolge die nicht reellen, d. h. dem Streifen $0 \leqq \alpha \leqq 1$ angehörigen[1] Nullstellen $\alpha + \beta i$ der RIEMANN'schen Zetafunktion. Dann ist bekanntlich[2]

$$(13) \qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_\varrho \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \right),$$

wo b eine Konstante ist. Ferner ist bekanntlich[3] für jedes $T \geqq 2$, dem keine Nullstelle mit T als Ordinate entspricht, falls $x > 1$ und $\eta > 1$ ist,

---

[1] Übrigens ist bekanntlich $0 < \alpha < 1$.

[2] Vergl. z. B. Handbuch, S. 316.

[3] Die Formel (14) ergibt sich nämlich sofort durch Anwendung des CAUCHY'schen Satzes auf das Rechteck mit den Ecken $\eta \pm Ti$, $z \pm Ti$, wo z eine negative ungerade Zahl ist, und Grenzübergang $z = -\infty$ auf Grund des Hilfssatzes der S. 336. Dies ist in dem auf S. 349—351 Durchgeführten als Spezialfall $r = 0$ enthalten; denn, dass die Zahl T gerade eine der dort mit T_g bezeichneten Zahlen ist, war bis zu jener Stelle noch nicht benutzt.

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = -x+\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\log(2\pi)+\sum_{|\beta|<T}\frac{x^\varrho}{\varrho} \\ \qquad -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty-Ti}^{\eta-Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds. \end{cases}$$

Zur weiteren Ausbeutung dieser Identität setze ich folgende vier Ungleichungen als bekannt voraus:

Erstens[1] ist für $\sigma \leqq -1,\ t \geqq 2$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < C_1 \log|s|,$$

also[2]

$$\left|\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < C_1\frac{\log|s|}{|s|}$$

$$(15)\qquad < C_2\frac{\log t}{t}.$$

Zweitens[3] ist für $-1 \leqq \sigma \leqq 2,\ t \geqq 2$

$$(16)\qquad \left|\sum_{|\beta-t|\geqq 1}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{1}{\varrho}\right)\right| < C_3 \log t;$$

die Summe bedeutet, dass ϱ alle komplexen Nullstellen durchläuft, die nicht innerhalb des Streifens $t-1<\beta<t+1$ gelegen sind.

Drittens[4] genügt die Anzahl der ϱ in $t-1<\beta<t+1$ für $t \geqq 2$ der Ungleichung

$$(17)\qquad \text{Anzahl} < C_4 \log t.$$

Viertens[5] ist für $-1 \leqq \sigma \leqq 2,\ t \geqq 2$

$$(18)\qquad \left|\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\right| < C_5 \log t.$$

---

[1] Vergl. z. B. Handbuch, S. 336. Jetzt bezeichnen im Text $C_1, C_2, \ldots$ absolute Konstanten.

[2] In der Tat nimmt für $y \geqq e$ die Funktion $\frac{\log y}{y}$ mit wachsendem y ab, und für $\sigma \leqq -1,\ t \geqq e$ ist $|s| > t \geqq e$; für $\sigma \leqq -1,\ 2 \leqq t < e$ ist $\frac{\log|s|}{|s|}$ und $1 : \frac{\log t}{t}$ beschränkt.

[3] Vergl. z. B. Handbuch, S. 339.

[4] Vergl. z. B. Handbuch, S. 337.

[5] Vergl. z. B. Handbuch, S. 334.

§ 3.

Satz 1: *Es gibt eine absolute Konstante K derart, dass für* $x \geqq 3, T \geqq 3$

$$\left|\psi(x) - x + \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho}\right| \leqq K\left(x \log^2 x \frac{1}{T} + x \frac{\log T}{T} + \log x\right)$$

ist.

Beweis: Nach (15) ist für $x > 1$, $T \geqq 2$

$$\left|\int_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds\right| < C_2 \frac{\log T}{T} \int_{-\infty}^{-1} x^\sigma d\sigma$$

(19) $$= \frac{C_2 \log T}{T x \log x}.$$

Nach (13), (16), (17) und (18) ist für wurzelfreies $t \geqq 2$ und $-1 \leqq \sigma \leqq 2$

(20) $$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{|\beta - t| < 1} \frac{1}{s - \varrho}\right| < C_6 \log t;$$

für wurzelfreies $T \geqq 2$, $x > 1$, $1 < \eta < 2$ ist daher

$$\left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds\right| < \left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \sum_{|\beta - T| < 1} \frac{1}{s - \varrho} ds\right| + \frac{C_6 \log T}{T} \int_{-1}^{\eta} x^\sigma d\sigma$$

$$< \sum_{|\beta - T| < 1} \left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{ds}{s - \varrho}\right| + \frac{C_6 \log T}{T} \int_{-\infty}^{\eta} x^\sigma d\sigma$$

(21) $$= \sum_{|\beta - T| < 1} \left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} \frac{ds}{s - \varrho}\right| + \frac{C_6 \log T}{T} \frac{x^\eta}{\log x}.$$

Es werde nun von $-1 + Ti$ bis $\eta + Ti$ in jedem einzelnen Summengliede der Weg nach folgender Vorschrift deformiert. Wenn β dem Intervall $T - 1 < \beta < T$ angehört, werde um $\alpha + Ti$ (d. h. die senkrechte Projektion von ϱ auf den Integrationsweg) die halbkreisförmige Ausbuchtung $\alpha - (\eta - 1) + Ti$ bis $\alpha + (\eta - 1) + Ti$ nach oben gemacht; wenn $T < \beta < T + 1$ ist, werde diese halbkreisförmige Ausbuchtung nach unten gemacht. Dann ist unterwegs durchweg $|s - \varrho| > \eta - 1$, also der Beitrag des Halbkreises

$$< \pi(\eta - 1)\frac{x^{\alpha+(\eta-1)}}{T-1}\frac{1}{\eta-1}$$

$$\leqq \pi \frac{x^{1+(\eta-1)}}{T-1}$$

$$\leqq 2\pi \frac{x^{\eta}}{T},$$

der Beitrag der horizontalen Wegteile

$$< \frac{1}{T(\eta-1)}\int_{-1}^{\eta} x^{\sigma}\, d\sigma$$

$$< \frac{x^{\eta}}{T(\eta-1)\log x}.$$

Nach (21) ist also, da die Anzahl der Glieder in der Summe rechts wegen (17) kleiner als $C_4 \log T$ ist,

$$\left|\int_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| < C_4 \log T\left(2\pi\frac{x^{\eta}}{T} + \frac{x^{\eta}}{T(\eta-1)\log x}\right) + \frac{C_6 \log T}{T}\frac{x^{\eta}}{\log x}$$

$$< C_7 \frac{x^{\eta}\log T}{T}\left(1 + \frac{1}{(\eta-1)\log x}\right).$$

Dies und (19) ergeben zusammen für wurzelfreies $T \geqq 2$, $x > 1$, $1 < \eta < 2$

$$\left|\int_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| < C_8 \frac{x^{\eta}\log T}{T}\left(1 + \frac{1}{(\eta-1)\log x}\right). \tag{22}$$

Das ist eine Abschätzung des letzten Integrals in (14) und gilt aus Symmetriegründen auch für das vorletzte Integral ebenda. (14) und (22) liefern also für wurzelfreies $T \geqq 2$, $x > 1$, $1 < \eta < 2$

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds + x - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - \log(2\pi) - \sum_{|\beta|<T} \frac{x^{\varrho}}{\varrho}\right| \\ &\qquad\qquad\qquad < \frac{1}{\pi} C_8 \frac{x^{\eta}\log T}{T}\left(1 + \frac{1}{(\eta-1)\log x}\right). \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Nach dem Hilfssatz 3, wenn er auf

$$f(s) = -\sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

angewendet[1] wird, ist nun für $T > 0$, $x > 2$, $1 < \eta < 2$

$$(24) \qquad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + \psi(x) \right| < C_9 \left(\frac{x^\eta}{T(\eta - 1)} + \frac{x \log^2 x}{T} + \log x \right).$$

Aus (23) und (24) folgt für $x > 2$, wurzelfreies $T \geqq 2$, $1 < \eta < 2$

$$(25) \qquad \begin{cases} \left| \psi(x) - x + \sum\limits_{|\beta| < T} \dfrac{x^\varrho}{\varrho} \right| \\ \qquad < C_{10} \left(x^\eta \dfrac{\log T}{T} + \dfrac{x^\eta}{(\eta - 1) \log x} \dfrac{\log T}{T} + \dfrac{x^\eta}{\eta - 1} \dfrac{1}{T} + x \log^2 x \dfrac{1}{T} + \log x \right). \end{cases}$$

Die linke Seite von (25) hängt von η gar nicht ab. Ich verfüge zur Erzielung einer möglichst günstigen Abschätzung über η so, dass ich $x \geqq 3$ annehme und $\eta = 1 + \frac{1}{\log x}$ setze, was wirklich zwischen 1 und 2 liegt. Dadurch erhalte ich für $x \geqq 3$ nebst wurzelfreiem $T > 2$

$$(26) \qquad \left| \psi(x) - x + \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho} \right| \leqq C_{11} \left(x \log^2 x \frac{1}{T} + x \frac{\log T}{T} + \log x \right).$$

Jetzt lasse ich auch zu, dass die Ordinate T Nullstellen enthält. Wegen

$$\sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho} = \lim_{\delta = 0} \sum_{|\beta| < T - \delta} \frac{x^\varrho}{\varrho}$$

(wo das positive δ zu Null abnimmt) ist klar, dass (26) für $x \geqq 3$ und alle $T > 2$ bestehen bleibt.

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Folgerung: Bisher waren x und T ganz unabhängig. Es bezeichne nun $T = T(x)$ irgend eine Funktion von x, die von einem x an $\geqq 3$ ist. Dann besagt der Satz 1

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} \right) + O\left(\frac{x \log T}{T} \right) + O(\log x).$$

---

[1] Der Hilfssatz 3 ist anwendbar, weil $|a_n| \leqq \log n$ und $\lim\limits_{\eta = 1} (\eta - 1) \sum\limits_{p,m} \frac{\log p}{p^{m\eta}} = 1$ ist.

Speziell für $T = x^{\mu}$, wo $0 < \mu \leqq 1$ ist, ergibt sich

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < x^{\mu}} \frac{x^{\varrho}}{\varrho} + O(x^{1-\mu} \log^2 x),$$

womit (5), das Hauptziel dieser Abhandlung, erreicht ist und damit auch die in der Einleitung angegebenen Konsequenzen (6) und (7) daraus.

Zweiter Teil.

§ 4.

Jetzt sei durchweg $0 < \nu < 1$, und es bedeute s^{ν} den in der von 0 bis $-\infty$ aufgeschnittenen Ebene eindeutigen Zweig, der für $s > 0$ positiv ist.

Hilfssatz 4: *Es sei* $\eta > 0$, $T > 0$. *Dann ist bei gerader Bahn*

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s^{\nu}} ds - 2\pi i \frac{\log^{\nu - 1} y}{\Gamma(\nu)} \right| \leqq \frac{2}{T^{\nu}} \frac{y^{\eta}}{\log y} \qquad \textit{für} \qquad y > 1,$$

$$\left| \int_{\eta - Ti}^{\eta + Ti} \frac{y^s}{s^{\nu}} ds \right| \leqq \frac{2}{T^{\nu}} \frac{y^{\eta}}{-\log y} \qquad \textit{für } 0 < y < 1.$$

Beweis: Es ist für alle $s \neq 0$, auch auf beiden Ufern des Schnittes

$$\left| \frac{y^s}{s^{\nu}} \right| = \frac{y^{\sigma}}{e^{\nu \Re \log s}}$$

$$= \frac{y^{\sigma}}{e^{\nu \log |s|}}$$

$$(27) \qquad = \frac{y^{\sigma}}{|s|^{\nu}},$$

also für $\sigma \leqq -1$ und $\sigma \geqq 1$

$$(28) \qquad \left| \frac{y^s}{s^{\nu}} \right| \leqq y^{\sigma}.$$

1) Es sei $y > 1$. Dann wähle ich ein $z < 0$ und wende den Cauchy'schen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $\eta \pm Ti$, $z \pm Ti$ an, welches von z bis 0 aufgeschnitten ist, so dass beide Ufer dieses Schnittes in den Integrationsweg eingeschaltet werden. Dann ergiebt sich

$$-\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} = \int_{\eta+Ti}^{z+Ti} + \int_{z+Ti}^{z} + \int_{z}^{0} + \int_{0}^{z} + \int_{z}^{z-Ti} + \int_{z-Ti}^{\eta-Ti}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6,$$

wo alle Wege geradlinig sind und in I_3 am oberen, in I_4 am unteren Ufer des Schnittes integriert wird. Natürlich darf in $s = 0$ hinein integriert werden.

Aus (28) folgt, dass jedes dieser 6 Integrale für $z = -\infty$ einen Limes hat, davon I_2 und I_5 den Limes 0. Das liefert

$$-\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} = \int_{\eta+Ti}^{-\infty+Ti} + \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{-\infty} + \int_{-\infty-Ti}^{\eta-Ti}$$

$$= I_7 + I_8 + I_9 + I_{10}.$$

Hierin ist nach (27)

$$|I_7| \leqq \frac{1}{T^\nu} \int_{-\infty}^{\eta} y^\sigma \, d\sigma$$

$$= \frac{1}{T^\nu} \frac{y^\eta}{\log y},$$

ebenso aus Symmetriegründen

$$|I_{10}| \leqq \frac{1}{T^\nu} \frac{y^\eta}{\log y}.$$

Ferner ist am oberen Ufer des Schnittes

$$\frac{1}{s^\nu} = e^{-\nu(\log(-\sigma) + \pi i)}$$

$$= (-\sigma)^{-\nu} e^{-\nu \pi i},$$

am unteren Ufer

$$\frac{1}{s^\nu} = (-\sigma)^{-\nu} e^{\nu \pi i};$$

daher ist

$$I_8 + I_9 = \int_{-\infty}^{0} y^\sigma (-\sigma)^{-\nu} (e^{-\nu \pi i} - e^{\nu \pi i}) \, d\sigma$$

$$= -2 i \sin(\pi \nu) \int_{0}^{\infty} y^{-u} u^{-\nu} \, du$$

$$= -2i\sin(\pi\nu)\int_0^\infty e^{-u\log y}\,u^{-\nu}\,du$$

$$= -2i\sin(\pi\nu)\log^{\nu-1}y\int_0^\infty e^{-v}\,v^{-\nu}\,dv$$

$$= -2i\log^{\nu-1}y\sin(\pi\nu)\,\Gamma(1-\nu)$$

$$= -2\pi i\,\frac{\log^{\nu-1}y}{\Gamma(\nu)}.$$

Daher kommt heraus

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s^\nu}\,ds - 2\pi i\,\frac{\log^{\nu-1}y}{\Gamma(\nu)}\right| \leqq \frac{2}{T^\nu}\,\frac{y^\eta}{\log y},$$

wie behauptet.

2) Es sei $0 < y < 1$. Dann ist in der für $z > 0$ giltigen Gleichung

$$-\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} = \int_{\eta+Ti}^{z+Ti} + \int_{z+Ti}^{z-Ti} + \int_{z-Ti}^{\eta-Ti}$$

nach (28) der Limes jedes der drei Integrale rechts für $z = \infty$ vorhanden und 0 beim zweiten. Daher ist

$$-\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} = \int_{\eta+Ti}^{\infty+Ti} + \int_{\infty-Ti}^{\eta-Ti},$$

also nach (27)

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s^\nu}\,ds\right| \leqq \frac{1}{T^\nu}\int_\eta^\infty y^\sigma\,d\sigma + \frac{1}{T^\nu}\int_\eta^\infty y^\sigma\,d\sigma$$

$$= \frac{2}{T^\nu}\,\frac{y^\eta}{-\log y}.$$

Hilfssatz 5: *Für* $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $0 < y < 2$ *ist*

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s^\nu}\,ds\right| < \frac{8}{1-\nu}\,T^{1-\nu}.$$

Beweis: Es ist auf dem Wege

$$\begin{aligned}|y^s| &= y^\eta \\ &< 4,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{y^s}{s^\nu}\,ds\right| &< 4\int_{-T}^{T}\frac{dt}{|t|^\nu} \\ &= 8\int_0^T\frac{dt}{t^\nu} \\ &= \frac{8}{1-\nu}\,T^{1-\nu}.\end{aligned}$$

Hilfssatz 6: *Es sei für alle ganzen* $n \geqq 2$

$$|a_n| < c\log n, \tag{9}$$

also — was auch a_1 *sei —*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma > 1$ *konvergent. Es sei ferner für* $1 < \eta < 2$

$$(\eta-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^\eta}$$

beschränkt. Dann ist für $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s^\nu}f(s)\,ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=1}^{x-1}a_n\log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right)\right| < b_1\left(\frac{x^\eta}{T^\nu(\eta-1)} + \frac{x\log^2 x}{T^\nu} + T^{1-\nu}\log x\right),$$

wo b_1 *von* η, T *und* x *unabhängig ist (aber von den* a_n *und* ν *abhängt).*

Beweis: Es ist für $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s^\nu}f(s)\,ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=1}^{x-1}a_n\log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{x-1} a_n \left(\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^\nu} ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) \right) + \sum_{n=x}^{x+1} a_n \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^\nu} ds + \sum_{n=x+2}^{\infty} a_n \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^\nu} ds.$$

Es werde für $n \leqq [x]-1$ und $n \geqq [x]+2$ der Hilfssatz 4 angewendet, für $n=[x]$ und $n=[x]+1$ der Hilfssatz 5. Dadurch kommt heraus:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \left| \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} f(s)\, ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=1}^{x-1} a_n \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{n}\right) \right| &\leqq \frac{2}{T^\nu} \sum_{n=1}^{x-1} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{x}{n}} \\ &+ \frac{8\,T^{1-\nu}}{1-\nu} (|a_{[x]}| + |a_{[x]+1}|) + \frac{2}{T^\nu} \sum_{n=x+2}^{\infty} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{n}{x}}. \end{aligned} \right.$$

Nun war beim Beweise des Hilfssatzes 3 festgestellt, dass

$$\sum_{n=1}^{x-1} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{x}{n}} + \sum_{n=x+2}^{\infty} |a_n| \frac{x^\eta}{n^\eta \log \frac{n}{x}} < b_2 \left(\frac{x^\eta}{\eta-1} + x \log^2 x \right)$$

ist. Also ist die rechte Seite von (29)

$$< \frac{b_1}{T^\nu} \left(\frac{x^\eta}{\eta-1} + x \log^2 x + T \log x \right),$$

womit der Hilfssatz 6 bewiesen ist.

Hilfssatz[1] **7:** *Es sei q irgend eine feste positive Konstante. Dann ist für $\sigma \leqq -1$, $t \geqq q$*

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < D_1 \log |s|.$$

Beweis: Bekanntlich[2] ist

$$\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \log(2\pi) + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{s\pi}{2} - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

---

[1] Ich beweise dies wörtlich so, wie man die in § 2 benutzte Relation

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < C_1 \log |s|$$

für $\sigma \leqq -1$, $t \geqq 2$ zu beweisen pflegt.

[2] Vergl. z. B. Handbuch, S. 336.

Hierin ist für $t \leqq -q$

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{tg} \frac{s\pi}{2} \right| &= \left| -i \frac{e^{s\pi i} - 1}{e^{s\pi i} + 1} \right| \\ &\leqq \frac{e^{-\pi t} + 1}{e^{-\pi t} - 1} \\ &\leqq \frac{e^{\pi q} + 1}{e^{\pi q} - 1} \\ &= D_2 \end{aligned}$$

und für $\sigma \geqq 2$ bekanntlich[1]

$$\left| \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \right| < D_3 \log |s|;$$

also ist für $\sigma \geqq 2$, $t \leqq -q$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \right| &< \log(2\pi) + \frac{\pi}{2} D_2 + D_3 \log|s| - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \\ &< D_4 \log|s|, \end{aligned}$$

folglich für $\sigma \leqq -1$, $t \geqq q$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &< D_4 \log|1-s| \\ &< D_4 \log(D_5 |s|) \\ &= D_6 + D_4 \log|s| \\ &< D_1 \log|s|. \end{aligned}$$

§ 5.

Satz 2: *Es gibt eine nur von ν abhängige Konstante b derart, dass für $x \geqq 3$, $T \geqq 3$*

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) - x + \sum_{|\beta| < T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} \right| \leqq b \left(x \log^2 x \frac{1}{T^\nu} + x \frac{\log T}{T^\nu} + T^{1-\nu} \log x \right)$$

ist.

[1] Vergl. z. B. Handbuch, S. 334.

Beweis: Ich wähle eine absolute Konstante[1] q derart, dass $0 < q < 2$ und q kleiner als die kleinste positive Ordinate β eines ϱ ist. Da ich mir ν und q fest denke, dürfen alle in der Folge fortlaufend numerierten Konstanten von ν und q abhängen.

Es sei $T \geqq 2$ und T von allen β verschieden. Es sei $x > 0$. Ich wende den Cauchy'schen Satz bei beliebigem $z < 0$ auf

$$\int \frac{x^s}{s^\nu} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$$

und den Integrationsweg an, der durch sukzessive geradlinige Verbindung folgender Punkte entsteht:

$$2 - Ti,\ 2 + Ti,\ z + Ti,\ z + qi,\ qi,\ -qi,\ z - qi,\ z - Ti,\ 2 - Ti.$$

Der Integrand ist auf dem Wege bis auf den nicht störenden Punkt $s = 0$ regulär; er ist in dem umlaufenen Gebiet regulär bis auf die Pole erster Ordnung $s = 1$ und die $s = \varrho$, für welche $|\beta| < T$ ist. Da eine Nullstelle k-ter Ordnung $s = \varrho$ als Pol des Integranden das Residuum $k \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}$ liefert, kommt heraus:

$$\begin{aligned}\int_{2-Ti}^{2+Ti} &= \int_{2-Ti}^{z-Ti} + \int_{z-Ti}^{z-qi} + \int_{z-qi}^{-qi} + \int_{-qi}^{qi} + \int_{qi}^{z+qi} + \int_{z+qi}^{z+Ti} + \int_{z+Ti}^{2+Ti} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} \\ &= I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15} + I_{16} + I_{17} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}.\end{aligned}$$

Nun sei $x > 1$. Dann behaupte ich, dass die sechs von z abhängigen Integrale rechts für $z = -\infty$ einen Limes haben, davon I_{12} und I_{16} den Limes 0. In der Tat ist nach dem Hilfssatz 7 in der Viertelebene $\sigma \leqq -1$, $t \geqq q$, also auch in der Viertelebene $\sigma \leqq -1$, $t \leqq -q$

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{s^\nu} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &< D_1 \frac{\log |s|}{|s|^\nu} \\ &< b_3,\end{aligned}$$

[1] Es wäre leicht, ein q numerisch anzugeben; doch brauche ich dies für meine Zwecke nicht.

$$\left|\frac{x^s}{s^\nu}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < b_3 x^\sigma;$$

daraus folgt es unmittelbar. Somit erhalte ich

$$\int_{2-Ti}^{2+Ti} = \int_{2-Ti}^{-\infty-Ti} + \int_{-\infty-qi}^{-qi} + \int_{-qi}^{qi} + \int_{qi}^{-\infty+qi} + \int_{-\infty+Ti}^{2+Ti} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}$$

$$= I_{18} + I_{19} + I_{20} + I_{21} + I_{22} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}. \tag{30}$$

Hierin hängen I_{19}, I_{20} und I_{21} nicht von T ab; ich behaupte, dass der absolute Betrag ihrer Summe für $x \geqq 2$ unterhalb einer festen Schranke liegt. In der Tat ist nach Hilfssatz 7 für $\sigma \leqq -1$, also auch für $\sigma \leqq 0$ der Ausdruck $\frac{1}{(\sigma+qi)^\nu}\frac{\zeta'(\sigma+qi)}{\zeta(\sigma+qi)}$ beschränkt; folglich ist für $x \geqq 2$

$$\left|\int_{qi}^{-\infty+qi} \frac{x^s}{s^\nu}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| \leqq \int_{-\infty}^{0} x^\sigma b_4\,d\sigma$$
$$= \frac{b_4}{\log x}$$
$$< b_5,$$

also auch

$$\left|\int_{-\infty-qi}^{-qi} \frac{x^s}{s^\nu}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| < b_5;$$

schliesslich ist auf der Strecke $-qi$ bis qi die Funktion $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ beschränkt, also

$$\left|\int_{-qi}^{qi} \frac{x^s}{s^\nu}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds\right| \leqq b_6 \int_{-q}^{q} \frac{dt}{|t|^\nu}$$
$$= b_7.$$

(30) lässt sich also folgendermassen schreiben:

$$\int_{2-Ti}^{2+Ti} = \int_{2-Ti}^{-\infty-Ti} + \int_{-\infty+Ti}^{2+Ti} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + J(x), \tag{31}$$

wo $J(x)$ nicht von T abhängt und für $x \geqq 2$ die Bedingung

$$(32) \qquad |J(x)| < b_8$$

erfüllt.

Es sei nun $\eta > 1$. Dann ist nach (31), wenn noch der CAUCHY'sche Satz auf das Rechteck mit den Ecken $2 \pm Ti$, $\eta \pm Ti$ angewendet wird,

$$(33) \qquad \int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} = \int\limits_{\eta-Ti}^{-\infty-Ti} + \int\limits_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti} - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^{\nu}} + J(x).$$

Damit ist die Relation entwickelt, welche der im ersten Teil als bekannt vorausgesetzten Identität (14) entspricht.

Nach Hilfssatz 6 ist für $1 < \eta < 2$, $T > 0$, $x > 2$

$$(34) \qquad \left| -\int\limits_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s^{\nu}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds - \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) \right| < \frac{b_1}{T^{\nu}} \left(\frac{x^{\eta}}{\eta - 1} + x \log^2 x + T \log x \right).$$

Aus (32), (33) und (34) folgt für $1 < \eta < 2$, wurzelfreies $T \geqq 2$, $x > 2$

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{2\pi i}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) - 2\pi i x + 2\pi i \sum_{|\beta|<T} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^{\nu}} \right| \\ & \qquad \leqq \left| \int\limits_{\eta-Ti}^{-\infty-Ti} \right| + \left| \int\limits_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti} \right| + \frac{b_1}{T^{\nu}} \left(\frac{x^{\eta}}{\eta - 1} + x \log^2 x + T \log x \right) + b_8. \end{aligned} \right.$$

Nun will ich die beiden Integrale rechts in (35) abschätzen. Aus Symmetriegründen brauche ich nur

$$(36) \qquad \int\limits_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti} = \int\limits_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} + \int\limits_{-1+Ti}^{\eta+Ti}$$

zu untersuchen. Nach Hilfssatz 7 ist für $s = \sigma + Ti$, $\sigma \leqq -1$ (weil $T > q$ ist)

$$\left| \frac{1}{s^{\nu}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < D_1 \frac{\log |s|}{|s|^{\nu}},$$

also (weil $T \geqq 2$ ist)[1]

$$< b_9 \frac{\log T}{T^\nu}.$$

Daher ist

$$\left| \int\limits_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} \right| < b_9 \frac{\log T}{T^\nu} \int\limits_{-\infty}^{-1} x^\sigma \, d\sigma$$

$$(37) \qquad = b_9 \frac{\log T}{T^\nu \, x \log x}.$$

Ferner ergibt sich genau nach der in § 3 angewandten Methode (Anwendung von (20) und Ausbuchtungen durch Halbkreise mit dem Radius $\eta - 1$)

$$\left| \int\limits_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right| < \sum_{|\beta - T| < 1} \left| \int\limits_{-1+Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s^\nu} \frac{ds}{s-\varrho} \right| + \frac{C_6 \log T}{T^\nu} \int\limits_{-1}^{\eta} x^\sigma \, d\sigma$$

$$< C_4 \log T \left(\pi(\eta - 1) \frac{x^\eta}{(T-1)^\nu} \frac{1}{\eta - 1} + \frac{1}{T^\nu (\eta - 1)} \int\limits_{-1}^{\eta} x^\sigma d\sigma \right) + \frac{C_6 \log T}{T^\nu} \int\limits_{-1}^{\eta} x^\sigma \, d\sigma$$

$$< C_4 \log T \left(\pi \frac{x^\eta}{(T-1)^\nu} + \frac{1}{T^\nu (\eta - 1)} \frac{x^\eta}{\log x} \right) + \frac{C_6 \log T}{T^\nu} \frac{x^\eta}{\log x}$$

$$(38) \qquad < b_{10} \frac{x^\eta \log T}{T^\nu} \left(1 + \frac{1}{(\eta - 1) \log x} \right).$$

Aus (36), (37) und (38) ergibt sich

$$\left| \int\limits_{-\infty+Ti}^{\eta+Ti} \right| < b_{11} \frac{x^\eta \log T}{T^\nu} \left(1 + \frac{1}{(\eta - 1) \log x} \right)$$

und für das zweite Integral rechts in (35) dasselbe. (35) verwandelt sich dadurch in

---

[1] In der Tat nimmt $\frac{\log y}{y^\nu}$ von $y = e^{\frac{1}{\nu}}$ an ab; für $\sigma \leqq -1$, $T \geqq e^{\frac{1}{\nu}}$ ist daher wegen $|s| > T$

$$\frac{\log |s|}{|s|^\nu} < \frac{\log T}{T^\nu},$$

und für $\sigma \leqq -1$, $2 \leqq T < e^{\frac{1}{\nu}}$ ist $\frac{\log |s|}{|s|^\nu}$ und $1 : \frac{\log T}{T^\nu}$ beschränkt.

$$(39)\quad \begin{cases} \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum\limits_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) - x + \sum\limits_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} \right| \\ \qquad < b_{12} \left(x^\eta \frac{\log T}{T^\nu} + \frac{x^\eta}{(\eta-1)\log x} \frac{\log T}{T^\nu} + \frac{x^\eta}{\eta-1} \frac{1}{T^\nu} + x \log^2 x \frac{1}{T^\nu} + \log x \,.\, T^{1-\nu} \right). \end{cases}$$

In (39) war $T \geqq 2$ und wurzelfrei, $x > 2$, $1 < \eta < 2$. Jetzt sei $x \geqq 3$, $T \geqq 2$ und wurzelfrei. Wenn ich $\eta = 1 + \frac{1}{\log x}$ setze, erhalte ich

$$(40)\quad \begin{cases} \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum\limits_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) - x + \sum\limits_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} \right| \\ \qquad\qquad\qquad \leqq b \left(x \frac{\log^2 x}{T^\nu} + x \frac{\log T}{T^\nu} + \log x \,.\, T^{1-\nu} \right); \end{cases}$$

wegen der Stetigkeit von

$$\sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu}$$

nach links gilt (40) für $x \geqq 3$ und alle $T > 2$ (auch, wenn es Wurzelordinaten sind).

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Folgerung: Es sei $T = T(x)$ irgend eine Funktion von x, die von einem x an $\geqq 3$ ist. Dann besagt das Gefundene:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) = x - \sum_{|\beta|<T} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T^\nu}\right) + O\left(\frac{x \log T}{T^\nu}\right) + O(T^{1-\nu} \log x).$$

Speziell für $T = x^\mu$, wo $0 < \mu \leqq 1$ ist, ergibt sich daher

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{p^m \leqq x-1} \log p \log^{\nu-1}\left(\frac{x}{p^m}\right) = x - \sum_{|\beta|<x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho^\nu} + O(x^{1-\mu\nu} \log^2 x).$$

Berlin, den 13. Juni 1911.