ZUR BIOGRAPHIE VON WEIERSTRASS.

VON

G. MITTAG-LEFFLER

in STOCKHOLM.

Unter dem hier angegebenen Titel werde ich in den folgenden Heften der Acta mathematica allerlei aus WEIERSTRASS' Nachlasse veröffentlichen. Es sind teils von ihm für eigenen Gebrauch verfertigte Manuskripte, teils Auszüge aus wissenschaftlichen Briefen, die entweder an mich gerichtet sind, oder an andere Mathematiker, die dieselben gütigst zu meiner Verfügung gestellt haben. Hoffentlich werden im Laufe dieser Publikation noch mehr solcher Manuskripte oder Briefe, von welchen eine grosse Zahl existiert, mir zur Publikation übergeben werden. Es scheint mir eine Pflicht jedes Schülers und Freundes des grossen Mathematikers seinerseits dazu beizutragen, dass eine solche Publikation stattfinde, weil noch viele von WEIERSTRASS' Freunden leben und etwa dunkle Punkte durch ihre persönlichen Mitteilungen aufgeklärt werden können. Wenn die Publikation nicht in der nächsten Zeit stattfindet, wird auch zweifellos sehr viel kostbares Material verschwinden. WEIERSTRASS übte in seiner Lebenszeit durch seine Gespräche und seine Vorlesung einen sehr grossen Einfluss auf die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft aus. Eine solche Publikation, wie ich sie hier anfange, wird zweifellos, wenn sie von anderen seiner Freunde und anderen Forschern unterstützt wird, diesen Einfluss noch lange Zeit und noch mehr als es nur durch seine Werke geschehen kann, fortsetzen.

Ich fange damit an verschiedene Mitteilungen über das n-Körperproblem, welches WEIERSTRASS immer ausserordentlich interessierte, zu veröffentlichen.

Auszug aus Briefen von C. Weierstrass an Sophie Kowalevski das n-Körperproblem betreffend.

16 December 1874.

. . . .

Der Gegenstand, womit ich mich noch weiter beschäftige, wird Dich noch mehr interessiren; leider kann ich in Beziehung auf denselben nur erst von einer Hoffnung auf Erfolg berichten, und muss ausführlichere Mittheilung überhaupt der mündlichen Besprechung vorbehalten. Du erinnerst Dich, liebes Herz, dass wir zu der Zeit, als unsere Freundschaft eine innigere geworden war, so dass ich zuweilen das Bedürfniss empfand, auch über Arbeiten, die ich gern machen möchte, mit Dir zu reden, und wir uns auch wohl in wissenschaftliche Träume und Phantasien verloren, oftmals von den Bedingungen der Stabilität des Weltsystems gesprochen haben, und den vielen Fragen, mit denen dies Problem zusammenhängt. Du weisst auch, dass die eigentliche mathematische Aufgabe, um die es sich handelt, folgendermassen formulirt werden kann.

Es seien zur Bestimmung von n Functionen einer reellen Grösse t gegeben n Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = G_1(x_1, \dots x_n)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = G_n(x_1, \dots x_n),$$

wo $G_1, \dots G_n$ ganze Functionen von $x_1, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten bezeichnen. Es fragt sich, wie müssen diese Functionen G beschaffen sein, und welche Bedingungen die Werthe von $x_1, \dots x_n$ für $t = 0$ erfüllen, damit $x_1, \dots x_n$ *reguläre* Functionen von t (innerhalb der Grenzen $-\infty$ $+\infty$) werden. Namentlich aber ist zu ermitteln, unter welchen Umständen jede der Grössen x beständig zwischen endlichen Grenzen schwankt. Endlich sollen, wo möglich, Entwicklungen von $x_1, \dots x_n$, die ihrem functionalen Charakter entsprechen, aufgefunden werden.

Ich habe mich nun einige Wochen sehr ernsthaft mit dieser Frage beschäftigt, glaube auch einen Weg gefunden zu haben, der dereinst zum Ziele führen wird — aber es wird noch grösserer Anstrengung bedürfen, um ihn überhaupt gangbar zu machen.

. . . .

1 Januar 1875.

Meine liebe Sonja.

Ich danke Dir recht herzlich für das schöne Weihnachtsgeschenk, das Du mir mit Deinem letzten Briefe gemacht hast. Es spricht sich in demselben ein wissenschaftlicher Enthusiasmus aus, der mich entzückt; sowie mich die treue Anhänglichkeit, die Du Deinem Lehrer und Freunde bewahrst, glücklich macht. Aber ich fürchte fast, ich habe zu grosse Erwartungen in Dir erregt, indem ich, was sonst nicht grade meine Gewohnheit ist, in der Uberzeugung, dass ich Dir eine Freude damit machen werde, mich verleiten liess, von dem zu sprechen, was ich noch zu arbeiten gedenke. Das Ziel, welches ich erreichen möchte, liegt noch in weiter Ferne, in unbestimmten Umrissen von mir; bis jetzt habe ich kaum etwas anderes gethan als über die Mittel gesonnen, durch welche ich mir den Weg zu ebnen hoffe. Ausserdem ist es, wie Du selbst einsiehst, eine dringende Nothwendigkeit, dass ich zunächst meine alten Arbeiten zum Abschluss bringe.

. . . .

15 August 1878.

. . . .

Weniger glücklich bin ich gewesen mit den angefangenen Untersuchungen über die Lösung der dynamischen Probleme durch Reihenentwicklungen, welche der Besonderheit der zu integrirenden Differentialgleichungen entsprechen. Ich komme bis zu einem gewissen Punkt; ich forme z. B. die Differentialgleichungen für das Problem der n Körper so um, dass sie eine beliebig weit fortzusetzende Integration in Reihenform formell gestatten, aber meine Versuche, die Convergenz der Entwicklung zu erweisen, scheitern an einem Hinderniss, das ich nicht zu bewältigen im Stande bin. Die Glieder der Reihen haben alle die Gestalt

$$A_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r}\cos\left[\nu_1 k_1(t-T_1)+\nu_2 k_2(t-T_2)+\ldots+\nu_r k_r(t-T_r)\right]$$

wo die A, k, T Constanten sind. Die Grössen $T_1, \ldots T_r$ sind, wenn die Ordnung des zu integrirenden Systems von Differentialgleichungen $2r$ ist, r der Integrations-Constanten. In den Coefficienten $A_{\nu_1\ldots\nu_r}$ kommen dieselben nicht vor, sondern andere, welche mit den $k_1, \ldots k_r$ durch r Gleichungen zusammenhängen. Diese Coefficienten erscheinen aber in Bruchform, und es werden die Nenner unendlich klein, wenn die Summe der absoluten Beträge der ganzen Zahlen $\nu_1, \ldots \nu_r$ unendlich gross wird. Es muss also gezeigt werden, dass auch die Zähler unendlich klein werden, und ebenso die Brüche selbst, was bei der complicirten Zusammensetzung der Ausdrücke unmöglich erscheint. — Das Factum selbst ist mir nicht auffallend, es kommt sehr oft vor, dass eine algebraische Function mehrerer Argumente sich *nur* in der Form eines Bruches darstellen lässt, wenn sie auch bei endlichen Werthen der Argumente niemals unendlich gross wird. Aber wie gesagt, ich komme über die daraus entspringende Schwierigkeit nicht hinweg.

. . . .

1 Februar 1881.

. . . .

Ich habe, seit Du fort bist, mich noch angestrengt mit den linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten reellperiodische Functionen einer Veränderlichen sind, beschäftigt, und glaube jetzt zur Behandlung derselben den richtigen Weg gefunden zu haben. Doch muss ich mich dabei auf eine besondere Gattung solcher Gleichungen beschränken, welche aber grade diejenige ist, die bei Problemen der analytischen Mechanik vorkommt.

Das Haupttheorem, welches sich mir dargeboten hat, will ich Dir mittheilen. »Es sei

$$F(x_1, \ldots x_{2n}) = \sum_{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}(t)\, x_\lambda x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots 2n)$$

eine homogene Function zweiten Grades der $2n$ Veränderlichen $x_1, \ldots x_{2n}$; ihre Coefficienten sollen reelle Functionen der Veränderlichen t und aus Gliedern von der Form

$$A \operatorname{Cos}(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \ldots)t + B \operatorname{Sin}(\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \ldots)t$$

zusammengesetzt sein, wo $a_1, a_2, \ldots$ beliebige reelle Grössen und $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ganze (pos. oder neg.) Zahlen bedeuten. Ferner nehme ich an, es seien die Functionen $F_{\lambda\mu}(t)$ so beschaffen, dass bei reellen Werthen von $t, x_1, \ldots x_{2n}$ die Function $F(x_1, \ldots x_{2n})$ ihr Zeichen nicht ändern kann. Dies vorausgesetzt nehme ich nun zwischen $x_1, \ldots x_{2n}$ und t die folgenden Differentialgleichungen an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= \frac{\partial F(x_1, \ldots x_{2n})}{\partial x_{n+\alpha}} \\ \frac{dx_{n+\alpha}}{dt} &= -\frac{\partial F(x_1, \ldots x_{2n})}{\partial x_\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

so haben die allgemeinsten, diesen Differentialgleichungen genügenden Ausdrücke von $x_1, \ldots x_{2n}$ die Form:

$$x_\lambda = \sum_\varrho \{f_{\lambda,\varrho}(t) \operatorname{Cos}(m_\varrho t) + f'_{\lambda,\varrho}(t) \operatorname{Sin}(m_\varrho t)\} \qquad \lambda = 1, \ldots 2n$$

wo die m_ϱ, deren Anzahl nicht grösser als n ist, reelle, im Allgemeinen aus den $a_1, a_2, \ldots$ nicht zusammensetzbare Constante, die $f_{\lambda,\varrho}(t)$ und $f'_{\lambda,\varrho}(t)$ aber Functionen von derselben Beschaffenheit und Zusammensetzungsweise wie die $F_{\lambda\mu}(t)$ sind.» — Streng beweisen kann ich dies Theorem bis jetzt nur für den Fall, dass die Zahl der Grössen $a_1, a_2, \ldots$ sich auf Eins reducirt. Der Weg aber, den ich zur wirklichen Entwicklung der Ausdrücke von $x_1, \ldots x_{2n}$ verfolge, ist unabhängig von dieser Voraussetzung, und wenn derselbe sich in dem speciellen Fall bewährt, so wird auch der allgemeine keine Schwierigkeit machen. Könnte ich jetzt einige Wochen ausschliesslich diesen Untersuchungen widmen, so würde ich bald zur Gewissheit darüber kommen, ob die Gedanken, von denen ich mich jetzt leiten lasse, richtig sind oder nicht. — Komme ich mit den linearen Differentialgleichungen von der angegebenen Form zurecht, so glaube ich, dass auch diejenigen Differentialgleichungen, die z. B. zur Bestimmung der Planetenbahnen dienen sollen, einer rationalen Behandlungsweise sich werden unterwerfen lassen. Dass alle bis jetzt versuchten Wege zur Integration derselben nicht zum Ziele führen können, davon bin ich jetzt mehr wie je überzeugt. . . . .

6 März 1881.

. . . . . . Von mir habe ich wenig zu sagen. Ich bin in diesem Jahre recht fleissig gewesen, aber doch nicht mit dem entsprechenden Erfolg. Deine Anwesenheit hat mich veranlasst, meine alten Untersuchungen über die Integration der dynamischen Differentialgleichungen wieder aufzunehmen; ich habe auch, wie ich Dir bereits schrieb, einige Fortschritte gemacht, aber immer noch sehe ich Schwierigkeiten vor mir, die mir zuweilen unüberwindlich vorkommen. Ich habe diesen Winter im Seminar mich ausführlich über die bisherigen Methoden zur Bestimmung der Planeten-Bewegungen unter den in unsrem Planetensystem stattfindenen Umständen ausgesprochen, und bin mehr und mehr zu der Ueberzeugung gekommen, dass zur wahren Lösung der Probleme, um die es sich dabei handelt, ganz andere Wege als die bisher betretenen eingeschlagen werden müssen — aber ich sehe diese neuen Wege immer noch nur in nebelhafter Form vor mir. Hätte ich Jemanden hier, mit dem ich mich täglich über alles das was ich versuche aussprechen könnte, so würde mir vielleicht vieles klarer werden. . . .

14 Juni 1882.

. . . . . . Die Abhandlung P.'s über die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

kenne ich nicht. Wo steht dieselbe? Was endlich die von P. angekündigte Integration der Differentialgleichungen der Mechanik angeht, so kann ich darüber folgendes sagen. Ich habe vor zwei Wintern im Seminar etwas über den Gegenstand vorgetragen und unter andern folgenden Satz bewiesen:

»Wenn beliebig viele materielle Punkte nach dem Newton'schen Gesetze — oder irgend einem andern, bei dem an die Stelle von r^2 eine analyt. Function von r tritt, die bei reellen und positiven Werthen der letztern Grösse nur für $r = 0$ unendlich gross wird — auf einander wirken, und es sind die Anfangsbedingungen der Bewegung so beschaffen, dass niemals zwei Punkte zusammentreffen, und auch keine zwei in's Unendliche sich von einander entfernen; so sind die Coordinaten der sich bewegenden Punkte analytische Functionen der Zeit t, eindeutig definirt nicht nur für alle reellen Werthe dieser Grösse, sondern auch für alle complexen, deren zweite Coordinate ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer bestimmten Grenze bleibt.» Der Satz, von dem nach APPELL's Mittheilung P. ausgeht, ist also nur richtig, wenn die Bedingungen der Stabilität des Weltsystems erfüllt sind. Die Feststellung dieser Bedingungen ist aber vielleicht der schwierigste Theil der ganzen Untersuchung. Wenn z. B. nur zwei Punkte vorhanden sind und zu irgend einer Zeit die Bewegung eines jeden gegen den andern gerichtet ist, so sind die Coordinaten nicht Functionen der Zeit von der angegebenen Beschaffenheit. Wenn P. im Stande ist, die Coefficienten der Reihe, in welche sich die Coordinaten unter Voraussetzung der Stabilität des Systems entwickeln lassen, wirklich zu bestimmen, so wäre es immerhin möglich, dass dann die Bedingungen, unter denen die Reihe convergirt, sich feststellen liessen, diese wären dann aber die Stabilitäts-Bedingungen. Aber auch dann glaube ich nicht, dass jene Reihenform den wahren analytischen Character der darstellenden Functionen ausdrücken werde; dem widerspricht schon der einfache Fall, in welchem zwei Punkte vorhanden sind und die Bewegung eines jeden um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt in einer Ellipse erfolgt. Aber wir wollen abwarten. . . . .

Auszug aus Briefen von C. Weierstrass an G. Mittag-Leffler das n-Körperproblem betreffend.

Berlin, W. Linkstr: 33. den 8:ten März 83.

. . . . .

Wenn Sie Herrn GYLDÉN sehen, so bitte ich, mich bei demselben entschuldigen zu wollen, dass ich seinen freundlichen Brief von vorigem Herbst noch nicht beantwortet habe. Ich wollte ihm gern einiges über die Störungstheorie schreiben, namentlich aber einige Punkte klar stellen, über die er durch die Aufzeichnungen eines Ihrer früheren Schüler aus meinen Seminar-Vorträgen, wie es mir scheint zu nicht zutreffenden Voraussetzungen verleitet worden ist.

Ich habe keineswegs, wie Herr GYLDÉN annimmt, Vorträge über die Störungstheorie gehalten, dazu würde ich nicht vorbereitet gewesen sein, wenn auch die Zeit gereicht hätte. Mein Thema war vielmehr, den analytischen Charakter der durch algebraische Differentialgleichungen definirten Functionen einer Veränderlichen festzustellen. Davon habe ich dann eine Anwendung auf die Differentialgleichungen des Problems der n Körper gemacht, und bei dieser Gelegenheit über die bisherige Behandlungsweise dieses Problems einige Bemerkungen ausgesprochen, in denen ich mit Herrn GYLDÉN vollständig darin übereinstimmte, dass die bisher versuchten Annäherungsmethoden, namentlich auch die auf der Variation der Constanten beruhenden, zur vollständigen Lösung des Problems, das heisst zur Erlangung von Ausdrücken, welche die *Coordinaten* der sich bewegenden Punkte als Functionen der Zeit für einen beliebig gross angenommenen Zeitraum und mit vorgeschriebener Genauigkeit geben, unbrauchbar seien.

Das Haupttheorem, das ich aus den vorangegangenen allgemeinen Untersuchungen über Differentialgleichungen für das Problem der n Körper zog, lautet in genauer Fassung also:

Es seien $m_1, m_2, \ldots m_n$ die Massen von n materiellen Punkten, $x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$ die Coordinaten von m_λ zur Zeit t, und es mögen sich die Punkte der folgenden Differentialgleichungen gemäss bewegen:

$$m_\lambda \frac{d^2 x_\lambda}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x_\lambda}, \; m_\lambda \frac{d^2 y_\lambda}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial y_\lambda}, \; m_\lambda \frac{d^2 z_\lambda}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots n)$$

in denen F eine analytische Function von $x_1 y_1 z_1 \ldots x_n y_n z_n$ bedeutet, welche für alle reellen Werthe dieser Grösse eindeutig definirt ist und einen ebenfalls reellen Werth besitzt der nur dann unendlich gross wird, wenn zwei der Punkte zusammentreffen (also auch dann nicht, wenn die Punkte zum Theil oder sämmtlich sich ins Unendliche entfernen). Angenommen nun, es gehe die Bewegung in der Art vor sich, dass niemals zwei Punkte zusammentreffen, so sind $x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n$ eindeutige analytische Functionen von t, nicht bloss für alle reellen Werthe dieser Grösse, sondern auch für alle complexen, in denen die zweite Coordinate (der Factor von i) dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegt. Dazu bemerke ich noch Folgendes. Man wird schwerlich *à priori* die Bedingungen ermitteln können, die erfüllt sein müssen, damit niemals zwei Punkte zusammentreffen können, man wird vielmehr dieselben als erfüllt voraussetzen müssen und dann giebt das vorstehende Theorem über die analytische Natur der darzustellenden Functionen in soweit Aufschluss, dass man auf sie die Ergebnisse der neueren Functionenlehre anzuwenden im Stande sein wird.

POINCARÉ hat, wie mir mitgetheilt worden ist, das in Rede stehende Theorem ebenfalls hergeleitet, wenigstens unter der Voraussetzung des NEWTON'schen Gesetzes und daraus die Folgerung gezogen, es sei möglich, die Coordinaten aller Punkte in convergirenden Reihen von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi(t)^\nu$$

zu entwickeln, wo $\varphi(t)$ eine *bestimmte* Function von t ist. Dies ist sehr leicht einzusehen. Der Bereich der Grösse t in dem die Coordinaten eindeutige Functionen sind, ist ein Parallelstreifen, der die Linie des reellen Werthes von t in sich fasst, diesen Streifen kann man auf einem Kreis abbilden, wodurch sich die Function $\varphi(t)$ ergiebt. Aber man erhält auf diese Weise nicht Aufschluss darüber, ob die gemachte Voraussetzung erfüllt ist oder nicht und es ist auch die Form, in der sich die Ausdrücke der Coordinaten darstellen, nicht die der Natur der zu beschreibenden Bewegungen angemessene.

Ich selbst habe über das Problem mancherlei Speculationen angestellt, deren Ergebnisse jedoch mich noch nicht befriedigen.

Berlin, 1 Jan. 85.

. . . . .

Dagegen scheint mir das Problem, die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Systems materieller Punkte in dem Falle, *wo* die Stabilität des Systems feststeht, durch convergirende Reihen zu integriren, ein zweckmässiges zu sein, dessen Bearbeitung möglicherweise einen schönen Erfolg haben könnte.[1] . . . . .

---

[1] Bezieht sich auf eine Ueberlegung über die Preisfragen, die für den Preis gestellt werden sollten, welchen König Oscar II am sechzigsten Jahrestage seiner Geburt auszutheilen bestimmt hatte.

Als erste Preisfrage wurde auch die folgende in der von Weierstrass gegebenen Fassung angenommen. »Es sollen für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfinde, die Coordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche, aus bekannten Functionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmässig convergirende Reihen entwickelt werden.

Dass die Lösung dieser Aufgabe, durch deren Erledigung unsere Einsicht in den Bau des Weltsystems auf das wesentlichste würde gefördert werden, nicht nur möglich, sondern auch mit den gegenwärtig uns zu Gebote stehenden analytischen Hülfsmitteln erreichbar sei, dafür spricht die Versicherung Lejeune-Dirichlet's, der kurz vor seinem Tode einem befreundeten Mathematiker mitgetheilt hat, dass er eine allgemeine Methode zur Integration der Differentialgleichungen der Mechanik entdeckt habe, sowie auch, dass es ihm durch Anwendung dieser Methode gelungen sei, die Stabilität unseres Planetensystems in vollkommen strenger Weise festzustellen. Leider ist uns von diesen Untersuchungen Dirichlet's, ausser der Andeutung, dass zur Auffindung seiner Methode die Theorie der kleinen Schwankungen einen gewissen Anhalt biete, nichts erhalten worden (Kummer, Gedächtnissrede auf Lejeune-Dirichlet, Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1860, p. 35); es darf aber als gewiss

Berlin, 7. 8. 85.

. . . . .

Ich beantworte nun zunächst Ihren letzten Brief, weil dies das Dringendste ist. Glücklicherweise bin ich im Stande, Ihnen über die zur Sprache gebrachten Punkte Auskunft zu geben — ich brauche mich nur auf einen Vortrag zu beziehen, den ich vor einigen Jahren im Seminar gehalten, und der damals, in Nachschriften verbreitet, ebenso wie jetzt die Preisfrage das Missfallen einiger Astronomen erregt hat, weil ich das Verlangen gestellt hatte, es müssten diejenigen, welche mit der Störungstheorie sich beschäftigen, zunächst die Ergebnisse der neueren Functionenlehre — im weitesten Sinne des Worts — sich gehörig zu eigen zu machen suchen, insbesondere bevor sie eine unbekannte Function darzustellen unternähmen, den analytischen Charakter derselben möglichst erforschen, um daraus für den zweckmässigsten Ausdruck der Function Aufschluss zu gewinnen. Viele von unseren Astronomen haben aber über den an sich lobenswerthen Eifer, die Methoden der praktischen Astronomie möglichst zu verwollkommnen, um sichere, in künftiger Zeit zu verwerthende Beobachtungen zu machen, den Sinn für das höchste Ziel ihrer Wissenschaft verloren, das doch kein anderes ist, als die Gewinnung möglichst vollkommener Einsicht in den Bau des Weltsystems und die Erkenntniss, dass und *wie* alle in denselben vor sich gehenden Bewegungen durch *ein* Grundgesetz bestimmt werden.

Doch zur Sache. In jenem Vortrag begann ich mit der Discussion der folgenden Differentialgleichungen, in denen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bestimmende Functionen einer Veränderlichen t bedeuten, $G_\lambda(x_1, \ldots x_n)$ aber (für $\lambda = 1, \ldots n$) eine gegebene ganze rationale Function von $x_1, \ldots x_n$, welche t nicht explicite enthält:

$$\frac{dx_\lambda}{dt} = G_\lambda(x_1, \ldots x_n) \qquad (\lambda = 1, \ldots n).$$

Setzt man fest, dass für einen bestimmten Werth t_0 von t $x_1, \ldots x_n$ beziehlich die willkürlich vorgeschriebenen Werthe $a_1, \ldots a_n$ erhalten sollen; so lassen sich zunächst $x_1, \ldots x_n$ in der Form von Potenzreihen von $t - t_0$ darstellen:

$$x_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t - t_0;\ a_1, \ldots a_n),$$

angenommen werden, dass sie nicht in schwierigen und verwickelten Rechnungen bestanden haben, sondern in der Durchführung eines einfachen Grundgedankens, den wieder aufzufinden ernster und beharrlicher Forschung wohl gelingen möchte.

Sollte indessen die gestellte Aufgabe Schwierigkeiten darbieten, die zur Zeit nicht zu überwinden wären, so könnte der Preis auch ertheilt werden für eine Arbeit, in der irgend ein anderes bedeutendes Problem der Mechanik in der oben angedeuteten Weise vollständig erledigt würde.» (Diese Zeitschrift, Bd 7.)

für deren Coefficienten sich Ausdrücke ergeben, welche ganze rationale Functionen von $a_1, \dots a_n$ und den Coefficienten der G_λ mit durchweg *positiven* Zahlcoefficienten sind.

Bildet man nun (für $\lambda = 1, \dots n$) eine ganze Function $\overline{G}_\lambda(x_1, \dots x_n)$ mit lauter reellen und *positiven* Coefficienten, die so gewählt werden müssen, das keiner von ihnen kleiner ist als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in G_λ, versteht unter A_λ eine positive Grösse, die nicht kleiner ist als $|a_\lambda|$ und ersetzt das vorgelegte System von Differential-Gleichungen durch dieses:

$$\frac{d\bar{x}_\lambda}{dt} = \overline{G}_\lambda(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n);$$

so erhält man

$$\bar{x}_\lambda = \overline{\mathfrak{P}}_\lambda(t - t_0;\ A_1, \dots A_n),$$

wo der Ausdruck auf der Rechten aus $\mathfrak{P}_\lambda(t - t_0;\ a_1, \dots a_n)$ dadurch hervorgeht, dass man in derselben jeden Coefficienten der Functionen G_λ durch den entsprechenden der Functionen $\overline{G}_\lambda$, und $a_1, \dots a_n$ beziehl. durch $A_1, \dots A_n$ ersetzt. Dann ist, wenn man einen beliebigen Coefficienten einer der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda$ herausgreift, der absolute Betrag desselben sicher nicht grösser als der entsprechende positive Coefficient von $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda$; folglich werden, wenn die Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_\lambda$ sämmtlich convergiren, wofern der absolute Betrag von $t - t_0$ kleiner als r ist, die Reihen $\mathfrak{P}_\lambda$ jedenfalls für dieselben Werthe von t convergiren und analytische Functionen dieser Grössen darstellen. (Ich führe diese bekannten Sachen nur des Zusammenhangs wegen an, und um jenen Vortrag getreu zu reproduciren). Functionen $\overline{G}_\lambda$, welche den gestellten Bedingungen entsprechen, erhält man z. B., wenn man unter g, a positive Grössen und unter m eine ganze positive Zahl verstehend

$$\overline{G}_\lambda = g(1 + x_1 + \cdots + x_n)^m$$

setzt, und g und m hinlänglich gross annimmt. Wenn man dann noch $A_1 = A_2 \cdots = A_n = a$ setzt, so werden die $\bar{x}_\lambda$ alle einander gleich, und man hat, wenn eine derselben mit x bezeichnet wird,

$$\frac{dx}{dt} = g(1 + nx)^m.$$

Daraus ergiebt sich:

(für $\nu = 1, 2, \dots \infty$)

$$\text{I)} \qquad \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} = (m, \nu)\, n^{\nu-1} g^\nu (1 + nx)^{\nu m - \nu + 1},$$

wo (m, ν) eine Zahl bezeichnet, die gleich 1 ist für $\nu = 1$ und für die übrigen Werthe von ν mittels der Relation

$$\text{II)} \qquad (m, \nu) = \frac{(\nu - 1)(m - 1) + 1}{\nu} (m, \nu - 1)$$

bestimmt wird. Demnach hat man

$$\text{III)} \qquad x = a + \sum_{\nu=1}^{\infty} (m, \nu)\, n^{\nu-1} g^{\nu} (1 + n a)^{\nu(m-1)+1} (t - t_0)^{\nu}$$

Dividirt man dann das $(\nu + 1)$:te Glied dieser Reihe durch das vorhergehende, so ist der Quotient

$$\text{IV)} \qquad \frac{\nu(m - 1) + 1}{\nu + 1} \cdot n g (1 + n a)^{m-1} (t - t_0);$$

Da nun $\lim\limits_{\nu = \infty} \dfrac{\nu(m-1)+1}{\nu + 1} = m - 1$ ist, so convergirt die vorstehende Reihe für jeden der Bedingung

$$|t - t_0| < \frac{1}{(m - 1) n g (1 + n a)^{m-1}}$$

genügenden Werth von t.

Hiermit ist nun bewiesen, nicht nur, dass die vorstehenden Reihen

$$\mathfrak{P}_\lambda (t - t_0;\ a_1, \ldots a_n)$$

stets einen gemeinschaftlichen Convergenzbezirk besitzen, wie man auch $a_1, a_2, \ldots a_n$ annehmen möge, sondern auch, *dass der Radius dieses Bezirks stets grösser bleibt als eine angebbare Grösse, wenn für den absoluten Betrag eines jeden Coefficienten der Functionen G_λ, sowie für den absoluten Betrag jeder der Grössen $a_1, \ldots a_n$ eine endliche, übrigens beliebig grosse obere Grenze festgesetzt wird.*

Sind also die Coefficienten der G_λ eindeutige analytische Functionen beliebig vieler, aber von t unabhängiger Grössen $p, q, \ldots$ und beschränkt man die letzteren auf einen bestimmten Bereich, dergestalt, dass im Innern und an der Grenze desselben keiner der genannten Coefficienten unendlich gross wird, die $a_1, \ldots a_n$ aber auf einen beliebigen, ganz im Endlichen liegenden Bereich; so existirt eine bestimmte positive Grösse τ, für welche gilt, *dass die Reihen*

$$\mathfrak{P}_1 (t - t_0;\ a_1 \ldots a_n), \ldots \mathfrak{P}_n (t - t_0;\ a_1, \ldots a_n)$$

eindeutige analytische Functionen der Grössen $t, p, q, \ldots a_1, \ldots a_n$ sind, wenn

$$|t - t_0| < \tau$$

angenommen und die Veränderlichkeit von $p, q, \ldots a_1, \ldots a_n$ so, wie angegeben, beschränkt wird.

Dieser Satz, der von grosser Tragweite ist, ergiebt sich einfach daraus, dass in Folge der für die Grösse der einzelnen Coefficienten der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda$ ermittelten Grenzbestimmung, jede dieser Reihen für alle, den gestellten Bedingungen genügenden Werthsysteme der Grössen $t, p, q, \ldots a_1, \ldots a_n$ *gleichmässig* convergirt.

Nunmehr mögen die Coefficienten der Functionen G_λ sämmtlich reelle Grössen sein und auch den $a_1, \ldots a_n, t_0$ bestimmte reelle Werthe beigelegt werden, so dass jetzt die Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_0;\ a_1, \ldots a_n), \ldots\ldots \mathfrak{P}_n(t-t_0;\ a_1, \ldots a_n),$$

wenn der Radius ihres gemeinschaftlichen Convergenzbezirks mit T bezeichnet wird, und der Veränderlichen t nur reelle, der Bedingung

$$-T < t - t_0 < T$$

genügende Werthe gegeben werden, ein bestimmtes, die vorgelegten Differentialgleichungen befriedigendes System reeller Functionen $x_1, \ldots x_n$ darstellen.

Diese Functionen lassen sich nun auf die gewöhnliche Weise fortsetzen.

Im gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(t-t_0; a_1, \ldots a_n)$ nehme man einen bestimmten reellen Werth t_1 von t beliebig an und setze

$$a'_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_1 - t_0;\ a_1, \ldots a_n),$$

so stellen die Reihen $\mathfrak{P}_1(t-t_1;\ a'_1, \ldots a'_n), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t_1;\ a'_1, \ldots a'_n)$ für die ihrem gemeinsamen Convergenzbezirk angehörigen Werthe von t Fortsetzungen der durch die ursprünglichen Reihen definirten Functionen dar. Mit diesen kann man dann in derselben Art weiter verfahren: man nimmt im gemeinsamen Convergenzbezirk derselben einen reellen Werth t_2 an, setzt

$$a''_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t_2 - t_1;\ a'_1, \ldots a'_n),$$

so stellen auch die Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_2;\ a''_1, \ldots a''_n), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t_2;\ a''_1, \ldots a''_n)$$

Fortsetzungen der in Rede stehenden Functionen dar; u. s. w.

Nun lässt sich leicht beweisen: Wenn t' ein bestimmter reeller Werth von t ist und es lässt sich auf die beschriebene Weise aus der ursprünglichen Reihe $\mathfrak{P}_\lambda$ ein System von Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t'), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t')$$

ableiten, so erhält man stets *dasselbe* System, wie man auch bei der Ableitung verfahren, d. h. welche vermittelnden Werthe $t_1, t_2, \ldots$ man auch anwenden möge. Ferner, wenn man für irgend einen Werth t' ein solches System von Reihen erhalten kann, so ist dies auch möglich für alle Werthe t'', die in einer gewissen

Umgebung von t' liegen. Daraus folgt denn, dass diejenigen Werthe t', für welche es möglich ist, ein System von Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t'), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t')$$

zu erhalten, welche aus den ursprünglichen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_0;\ a_1, \ldots a_n), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t_0;\ a_1, \ldots a_n)$$

auf die angegebene Weise abgeleitet werden, *eine continuirliche Folge* bilden, deren Grenzpunkte T_1, T_2 sein mögen ($T_1 < T_2$), wo dann T_1 auch $-\infty$ und $T_2 = +\infty$ sein kann.

Hiermit ist bewiesen:

Unter der Voraussetzung, dass unter t jetzt eine reelle Veränderliche verstanden werde und dass man festsetze, es sollen die Grössen $x_1, \ldots x_n$ für einen bestimmten Werth t_0 von t vorgeschriebene reelle Werthe $a_1, \ldots a_n$ erhalten, existirt für die zwischen zwei bestimmten Grenzen T_1, T_2 liegenden Werthe von t *ein* bestimmtes System reeller und continuirlicher Functionen $x_1, \ldots x_n$ welche den vorgelegten Differentialgleichungen genügen. Ist t' irgend ein bestimmter Werth von t und sind $x'_1, \ldots x'_n$ die zugehörigen Werthe von $x_1, \ldots x_n$, so ist für alle Werthe von t in einer gewissen Umgebung von t'

$$x_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t-t';\ x'_1, \ldots x'_n) \qquad (\lambda = 1, \ldots n).$$

Angenommen nun, es habe T_2 einen endlichen Werth. Dann wird, wenn t sich der Grenze T_2 nähert, wenigstens eine der Grössen x_λ unendlich gross. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde nach dem vorhin bewiesenen der Radius des gemeinsamen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_\lambda(t-t';\ x'_1, \ldots x'_n)$$

beständig grösser bleiben als eine endliche Grösse, wie nahe auch t' an T_2 heranrücken möge, und man könnte für einen Werth t'', der $> T_2$ wäre aus den vorstehenden Reihen andere

$$\mathfrak{P}_1(t-t''), \ldots \mathfrak{P}_n(t-t'')$$

ableiten; was wider die Annahme ist. Ebenso wird gezeigt, dass in dem Falle, wo T_1 einen endlichen Werth hat, und t sich der Grenze T_1 nähert, wenigstens eine der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ unendlich gross wird.

Ist dagegen $T_2 = +\infty$ oder $T_1 = -\infty$, so sind zwei Fälle möglich. Es werden entweder, wenn t sich der betr. Grenze nähert, einige der Grössen x_λ unendlich gross — in dem Sinne, dass unter den Werthen, welche sie nach und nach annehmen, beliebig grosse sich finden — oder es kann auch der absolute Betrag einer jeden beständig unter einer endlichen Grenze bleiben.

Nehmen wir nun an, es trete der letztere Fall ein, d. h. es existire für alle reellen Werthe der Veränderlichen t ein den vorgelegten Differentialgleichungen genügendes System continuirlicher Functionen $x_1, \dots x_n$, und es gebe zugleich für den absoluten Betrag einer jeden eine endliche obere Grenze, so dass auch positive Grössen $A_1, \dots A_n$ existiren, für welche bei jedem Werthe von t

$$|x_\lambda| < A_\lambda \text{ ist für } \lambda = 1, \dots n.$$

Nach dem Obigen giebt es nun für den Radius des gemeinsamen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_\lambda(t - t_0;\ a_1, \dots a_n)$$

eine endliche untere Grenze (τ), wenn den $a_1, \dots a_n$ nur solche Werthe beigelegt werden, deren absoluten Beträge nicht grösser sind als bez. $A_1, \dots A_n$.

Man hat aber, wenn für einen Werth t' von t

$$x_\lambda = x'_\lambda$$

ist,

$$x_1 = \mathfrak{P}_1(t - t';\ x'_1, \dots x'_n), \dots x_n = \mathfrak{P}_n(t - t';\ x'_1 \dots x'_n).$$

Diese Reihen convergiren also für jeden reellen und imaginären Werth von t, welcher der Bedingung

$$|t - t'| < \tau$$

genügt.

Wenn man also auf die vorhin beschriebene Weise aus dem Systeme der Functionen-Elemente

$$\mathfrak{P}_1(t - t_0;\ a_1, \dots a_n), \dots \mathfrak{P}_n(t - t_0;\ a_1, \dots a_n)$$

andere Systeme ableitet, dabei aber den vermittelnden Grössen t_1, t_2 u. s. w. ebenso wie der Grösse t_0 nur reelle Werthe giebt; so erhält man für *jeden* reellen Werth t' *ein* solches System, dessen Geltungsbereich alle reellen und complexen Werthe von t umfasst, für welche der absolute Betrag von $t - t'$ unter einer gewissen Grenze liegt; diese Grenze ist für jeden Werth von t' grösser als die eben definirte Grösse τ.

Dies vorausgeschickt, denke man sich in der die complexen Grössen repräsentirenden Ebene um jeden Punkt t' (unter t' wieder eine reelle Grösse verstanden) als Mittelpunkt einen Kreis beschrieben, dessen Radius gleich ist dem Radius des gemeinsamen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_\lambda(t - t';\ x'_1, \dots x'_n),$$

und bezeichne mit $\mathfrak{T}$ die Gesammtheit derjenigen Punkte t, die im Inneren irgend eines solchen Kreises liegen. Dann ist $\mathfrak{T}$ eine Fläche, welche von zwei symmetrischen Linien begrenzt wird, die an verschiedener Seite der Linie der reellen t liegen, und zwar so, dass sie von dieser überall einen Abstand, der $> r$ ist, haben.

Jetzt setze man, wenn t irgend ein dem Inneren von $\mathfrak{T}$ angehöriger Werth ist, und t' der Mittelpunkt eines der Kreise, in dem t liegt,

$$\varphi_\lambda(t) = \mathfrak{P}_\lambda(t - t';\ x'_1, \ldots x'_n),$$

so ist leicht zu zeigen, dass der Werth von $\varphi_\lambda(t)$ unabhängig ist von der Lage des Punktes t' und dass deshalb auf diese Weise für die dem Bereiche $\mathfrak{T}$ angehörigen Werthe t ein System continuirlicher analytischer Functionen

$$\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)$$

definirt wird, welche für $x_1, \ldots x_n$ gesetzt, den vorgelegten Differentialgleichungen genügen, für $t = t_0$ die Werthe $a_1, \ldots a_n$ annehmen und für alle reellen Werthe von t ebenfalls reelle Werthe haben.

Das System der Differentialgleichungen, von welchem die Bestimmung der Bewegungen von $(n + 1)$ nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehenden materiellen Punkte abhängt, lässt sich leicht auf ein anderes von der im Vorstehenden vorausgesetzten Form zurückführen.

Es seien $m_0, m_1, \ldots m_n$ die Massen der sich bewegenden Punkte, $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ die Coordinaten des Punkts m_α zur Zeit t, $s_{\alpha\beta}$ der reciproke Werth des Abstands von m_α und m_β, und

$$\xi_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(x_\beta - x_\alpha),\ \eta_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(y_\beta - y_\alpha),\ \zeta_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(z_\beta - z_\alpha).$$

Dann hat man, wenn

$$x'_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt},\ y'_\alpha = \frac{dy_\alpha}{dt},\ z'_\alpha = \frac{dz_\alpha}{dt} \qquad (\alpha = 0, \ldots n)$$

gesetzt wird,

$$m_\alpha \frac{dx'_\alpha}{dt} = \sum_\beta{}' m_\alpha m_\beta s^2_{\alpha\beta} \xi_{\alpha\beta}$$

$$m_\alpha \frac{dy'_\alpha}{dt} = \sum_\beta{}' m_\alpha m_\beta s^2_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}$$

$$m_\alpha \frac{dz'_\alpha}{dt} = \sum_\beta{}' m_\alpha m_\beta s^2_{\alpha\beta} \zeta_{\alpha\beta}$$

Ferner

$$\frac{ds_{\alpha\beta}}{dt} = - s^2_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) + \eta_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) + \zeta_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha))$$

$$\frac{d\xi_{\alpha\beta}}{dt} = s_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) - s_{\alpha\beta}\xi_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) + \eta_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) + \zeta_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha))$$

$$\frac{d\eta_{\alpha\beta}}{dt} = s_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) - s_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) + \eta_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) + \zeta_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha))$$

$$\frac{d\zeta_{\alpha\beta}}{dt} = s_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha) - s_{\alpha\beta}\zeta_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}(x'_\beta - x'_\alpha) + \eta_{\alpha\beta}(y'_\beta - y'_\alpha) + \zeta_{\alpha\beta}(z'_\beta - z'_\alpha)).$$

Wenn man also die Grössen

$$x'_\alpha,\ y'_\alpha,\ z'_\alpha,\ s_{\alpha\beta},\ \xi_{\alpha\beta},\ \eta_{\alpha\beta},\ \zeta_{\alpha\beta}$$

als die zu bestimmenden Functionen von t ansieht, so hat man für dieselben ein System von Differentialgleichungen, welche die Form der obigen haben.

Es ist aber, wenn man

$$\begin{aligned} S = m_0 m_1 s_{01} + m_0 m_2 s_{02} + \cdots + m_0 m_n s_{0n} \\ + m_1 m_2 s_{12} + \cdots + m_1 m_n s_{1n} \\ + \cdots + m_{n-1} m_n s_{n-1,n} \end{aligned}$$

setzt,

$$\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha) = S + \text{Const.}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass von den Grössen x'_α, y'_α, z'_α keine unendlich gross werden kann (bei reellen Werthen von t), so lange alle Grössen $s_{\alpha\beta}$ endliche Werthe haben, d. h. so lange nicht zwei Punkte des Systems einander unendlich nahe kommen. Da unter den Grössen $\xi_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$, $\zeta_{\alpha\beta}$ die Gl.

$$\xi^2_{\alpha\beta} + \eta^2_{\alpha\beta} + \zeta^2_{\alpha\beta} = 1$$

besteht, so kann von diesen bei reellen Werthen von t keine unendlich gross werden. Es ergiebt sich also aus dem vorher Bewiesenen:

Wenn die Bewegung des Systems in der Art vor sich geht, dass es für den Abstand je zweier seiner Punkte eine von Null verschiedene untere Grenze giebt, so sind die Grössen

$$\frac{dx_\alpha}{dt},\ \frac{dy_\alpha}{dt},\ \frac{dz_\alpha}{dt}$$

und somit auch die Coordinaten x_a, y_a, z_a, nicht nur für alle reellen Werthe von t, sondern auch für alle, die einen Bereich $\mathfrak{T}$ von der vorhin angegebenen Beschaffenheit angehören, eindeutige analytische Functionen.

Es ist hierbei nicht ausgeschlossen, dass die Coordinaten mit t ohne Ende wachsen; im Gegentheil, das ist ja stets der Fall, wenn der Schwerpunkt des Systems nicht ruht. Aber auch die Differenzen

$$x_\beta - x_a, \ y_\beta - y_a, \ z_\beta - z_a$$

können für einzelne oder auch alle Punktepaare mit t ohne Ende wachsen — das trifft sicher ein bei vielen der kleinen Massen, die das Weltall durchschwärmen — aber es bleibt der ausgesprochene Satz bestehen — die oben mit τ bezeichnete Grösse hat einen von Null verschiedenen Werth, die Linien, welche den Bereich $\mathfrak{T}$ begrenzen, behalten auch im Unendlichen einen endlichen Abstand von der Linie der reellen t.

Damit glaube ich Ihre erste Frage beantwortet zu haben, viel breiter, als es nöthig gewesen wäre — Sie wollen dies aber freundlichst entschuldigen — denn es ist mir leichter geworden, mich so gehen zu lassen wie vor meinen Zuhörern im Seminar, als den Versuch zu machen, in ganz knapper Zusammenfassung, wie es für Sie genügt haben würde, das Wesentliche der Sache darzustellen.

Giebt man der Grösse t nur solche Werthe, deren zweite Coordinate zwischen zwei Grenzen ($-\tau$ und τ) liegt, so kann man die letzteren so klein annehmen, dass eine Entwicklung der Grössen x'_a, y'_a, z'_a nach Potenzen der von Poincaré eingeführten Grösse

$$\frac{e^{\frac{t}{k}} - 1}{e^{\frac{t}{k}} + 1},$$

wo k mit τ zusammenhängt, möglich wird, indem man diese Grösse statt t in die Differentialgleichungen einführt.

Die so sich ergebenden, für jeden der jetzt betrachteten Werthe von t convergirenden Reihen sind zwar praktisch unbrauchbar, da sie für einigermassen grosse Werthe von t äusserst schwach convergiren. Aber sie beweisen doch, dass es überhaupt — unter der gemachten Voraussetzung —, Entwicklungen von x_a, y_a, z_a giebt, welche, — ebenso wie die Bestandtheile, aus denen sie zusammengesetzt sind — eindeutige analytische Functionen von t sind und gleichmässig convergiren — wenigstens wenn man t auf ein endliches, aber beliebig gross anzunehmendes Intervall beschränkt. Was also in der Preisfrage verlangt wird, ist keine an sich nicht zu erfüllende Forderung. Den Astronomen sind successive

Annäherungen ein geläufigerer Begriff als die Entwickelung in gleichmässig convergirende Reihen — jedes *richtige* Annäherungs-Verfahren liefert aber eine solche Entwickelung. Mit Vorbedacht ist darum in der Preisfrage in Betreff der Functionen, aus denen die verlangten Reihen zusammengesetzt sein sollen, keinerlei Vorschrift gegeben.

Was nun Ihre ferneren Fragen angeht, so kann ich mich kurz fassen.

Ich bin der Meinung, dass es vergeblich sein würde, eine Lösung des Problems der n Körper zu erstreben, wenn etwa, wie auch der Anfangszustand des Systems angenommen werde, *immer* mit der Zeit zwei Körper einander unendlich nahe kommen würden — oder dass dieses doch nur vermieden werden könnte durch die Annahme bestimmter Relationen unter den Anfangswerthen von x_a, y_a, z_a und x'_a, y'_a, z'_a, die ja jede kleinste Störung wieder vernichten würde. *Ich setze also voraus*, ohne es bis jetzt mit *völliger* Strenge beweisen zu können — die Möglichkeit, dass es unter gewissen Bedingungen so sei — dass im Allgemeinen je zwei Körper beständig in einem Abstande verbleiben, der eine von Null verschiedene untere Grenze hat; d. h. ich denke mir, dass man versuchen möge zu ermitteln, wie sich unter der in Rede stehenden Voraussetzung die zu bestimmenden Functionen in Reihen von der verlangten Beschaffenheit entwickeln lassen — wobei ich, wie gesagt, den Begriff der Entwicklung einer Function in eine Reihe im weitesten Sinne fasse. Kommt man auf diesem Wege zu einem Resultat, so wird ohne Zweifel die Feststellung der Bedingungen, unter denen die gemachten Voraussetzungen zulässig sind, gleichzeitig sich ergeben. Ob es dabei nöthig oder zweckmässig sei, den Fall, wo ein Körper sich mit der Zeit in's Unendliche entfernt — in jedem gegebenen Augenblick aber in einer endlichen Entfernung von den übrigen sich befindet — zu trennen von dem der Stabilität im engeren Sinne, wo es für den Abstand je zweier Körper eine endliche untere und obere Grenze giebt — das lasse ich unentschieden.

Dass ich an die *bestimmte* Äusserung Dirichlet's, er könne durch seine Methode beweisen, dass für unser Planeten-System die Bedingungen der Stabilität (wohl im engeren Sinne genommen) erfüllt seien, erinnert habe, das ist, wie Sie richtig vermuthen, geschehen, um die bei der Stellung der Frage gemachte Voraussetzung zu rechtfertigen aber auch, um zur Inangriffnahme des in den Augen Vieler unlösbaren Problems, zu ermuthigen. Wird dasselbe durch die Stellung unserer Preisfrage auch nur um einen wesentlichen Schritt weiter geführt, so werden wir sicher zufrieden sein.

. . . . .

Berlin, 23 V 1888. W. Friedr. Wilhelmstr. 14.

. . . . .

Sie werden mich entschuldigen, wenn ich heute nur auf *einen* Punkt Ihres Schreibens, welcher der Erledigung am dringensten bedarf, eingehe.

Herrn KRONECKER'S Auslassungen in der am 12:ten v. M. der Akademie vorgetragenen Notiz, *dürfen nicht unbeantwortet bleiben*, und es muss die Antwort, wenn auch ruhig gehalten, doch an Bestimmtheit und Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen. Jedoch halte ich es für durchaus gerathen, damit zu warten, bis die Einlieferungsfrist für die Einsendung der Concurrenzschriften verstrichen sein wird.

Ich bin bereit, in dem Sitzungsbericht der Akademie einen Artikel erscheinen zu lassen, der nachweisen soll, das KR.'s Ausstellungen mit Ausnahme *eines* ganz unwesentlichen Punktes, durchaus unbegründet sind. Da KR. hartnäckig darauf besteht, er wisse nicht, dass *ich* die betr. Preisfrage redigirt habe (was mir allerdings kindisch erscheint), so möchte es am besten sein, wenn ich ihm im Namen der Commission antworte, die ja in der That für alle Fragen solidarisch verantwortlich ist. Ich gebe Ihnen daher in der Kürze die wesentlichsten Momente meiner beabsichtigten Entgegnung mit der Bitte an, mich benachrichtigen zu wollen, ob Sie damit einverstanden sind. Sie würden mich verpflichten, wenn Sie die Güte hätten, auch HERMITE von dem Inhalt dieses Schreibens in Kenntniss zu setzen. Ich würde das selbst thun, wenn es mir gegenwärtig nicht noch so schwer wäre. Uebrigens werde ich Herrn HERMITE eine französische Uebersetzung meines Artikels seiner Zeit zukommen lassen.

Nach einigen einleitenden Worten über den Inhalt und Ursprung des von KR. mit nicht zu verkennender Absichtlichkeit stets nur als »Publication der Acta math.» bezeichneten Schriftstücks beabsichtige ich, folgendes auszuführen.

1. Dass es möglich sei, die Coordinaten beliebig vieler, dem NEWTON'schen Gesetze gemäss sich bewegender materieller Punkte als Functionen der Zeit unter der gemachten Voraussetzung in Reihen von der in der Preisfrage geforderten Form und Beschaffenheit zu entwickeln *lässt sich strenge beweisen.* Ich habe dies bereits vor 10 Jahren in einem Seminarvortrage gethan, und zu demselben Resultat ist noch Hr. POINCARÉ gekommen.

2. Wenn DIRICHLET'S Untersuchungen, auf das Problem der n Körper angewandt, ihn in der That auf ein Annäherungsverfahren geführt haben, das zu leisten vermochte, was KUMMER in der Gedächtnissrede darüber sagt — woran ich meinerseits nicht zweifele — so würden sich aus dem Resultate dieses Ver-

fahrens *unmittelbar* Reihen[1] von der geforderten Form ergeben, so dass man durchaus berechtigt ist, die Ergebnisse der DIRICHLET'schen Untersuchungen als thatsächlichen Beweis dafür anzuführen, dass die Herstellung jener Reihen nicht nur möglich, sondern auch mit den jetzigen Hülfsmitteln *ausführbar* sei.

3. Ich halte fest daran, aus innern und äussern Gründen, dass zwischen der von DIRICHLET zur Integration der dynamischen Differenzialgleichungen angewandten allgemeinen Methode und dem von ihm gelieferten Beweis für die Stabilität des Planetensystems ein Zusammenhang stattgefunden habe. Dagegen spricht weder der Umstand, dass DIRICHLET Herrn KRONECKER zuerst von dem genannten Beweise und dann erst »zu einem ganz anderen Zeitpunkte», d. h. in Wirklichkeit einen oder zwei Tage später von seinen allgemeineren, auf die Probleme der Mechanik sich beziehenden Untersuchungen Mittheilungen gemacht hat, noch auch die Versicherung KR.'s, dass die erste Mittheilung »anspruchlos gehalten», die andere »fast in der Form einer feierlichen Eröffnung» erfolgt sei. Nur das Eine ergibt sich aus KR.'s *jetzigen* Angaben, dass DIRICHLET den Stabilitätsbeweis bereits im Wesentlichen fertig gehabt hat, während die andere Untersuchung noch nicht zu Ende geführt war. Aus der KUMMER'schen Gedächtnissräde war dies nicht zu entnehmen; es steht darin kein Wort darüber, ob die eine oder die andere DIRICHLET'sche Entdeckung die früher gemachte sei, ja es blieb zweifelhaft, ob D. von seinem Stablitätsbeweise überhaupt mit KR. gesprochen habe. Diese Unklarheit in der KUMMER'schen Darstellung der Sache ist aber, wie Herr K. uns jetzt mit grosser Naivität sagt, *absichtlich* von ihm herbeigeführt worden, da er, statt sich auf die Rolle eines treuen Berichterstatters zu beschränken, aus mir nicht erklärbaren Gründen von vorn herein beflissen gewesen ist, jene beiden Entdeckungen aus einander zu halten und nicht zuzugeben, dass die *Prinzipien,* welche DIRICHLET zur Lösung der Probleme der Mechanik im allgemeinen geführt haben, von ihm auch zur Beantwortung aller damit in Verbindung stehenden Fragen hätten angewandt werden können.

4. Die einzige nach KR.'s jetziger Darstellung der Sache unzweifelhaft irrige Angabe in der von mir der Preisfrage beigefügten Erläuterungen besteht also darin, dass DIRICHLET Herrn KRONECKER *mitgetheilt* habe, er sei durch seine Integrations-Methode zu dem Stabilitätsbeweise gelangt. Würden aus dem betr. Passus die Worte »durch diese Methode» weggelassen, so würde alles durchaus correct sein.

Uebrigens ist für die Absicht, in welcher in den genannten Erläuterungen auf DIRICHLET's Untersuchungen hingewiesen worden, der von mir begangene

[1] Nichts deutet darauf hin, dass unter den in der Preisfrage geforderten Reihen die von D. mit Recht als unzweckmässig betrachteten Entwickelungsformen zu verstehen seien.

Irrthum ganz *bedeutungslos*. Die Thatsache, dass in einem Systeme beliebig vieler Körper, die nach dem NEWTON'schen Gesetze einander anziehen, eine Stabilität der Bewegung möglich ist, so dass der Abstand je zweier Körper weder jemals unendlich klein noch jemals unendlich gross werden kann, musste angeführt werden, da die Kenntniss dieser Thatsache einem Bearbeiter der gestellten Preisfrage möglicherweise von grossem Nutzen sein konnte; auf welche Weise oder zu welcher Zeit aber DIRICHLET dieselbe erkannt habe, war dabei sehr gleichgültig. Daran würde sich selbst dann nichts ändern, wenn das von mir in Nr. 3 als meine persönliche Ueberzeugung ausgesprochene widerlegt werden könnte.

Dies ist im Wesentlichen, was ich zu sagen beabsichtige. Die Form, in der es zu geschehen hat, werde ich sorgfaltig überlegen. Herr KR. hat seine Äusserungen sehr vorsichtig gehalten — nur wer die Briefe gelesen, welche er in der Preisfrageangelegenheit an Sie gerichtet hat, kann den wahren Zweck seines Angriffs erkennen, während er anscheinend nur einer nach seiner Ansicht falschen Auffassungsweise seiner frühern Mittheilungen über DIRICHLET's letzte Arbeiten hat vorbeugen wollen.

. . . . .

Berlin, 27 Juni 88.

. . . . .

In Betreff der beabsichtigten Abwehr von KRONECKER's Angriff muss ich bemerken, dass ich *zur Zeit* die Sache müsste ruhen lassen, wenn HERMITE nicht *gern* seine Zustimmung dazu giebt, dass ich im Namen und Auftrag der Commission vorgehe. K. steift sich hartnäckig darauf, dass er absolut nicht wisse, von wem die beanstandete Preisfrage gestellt und motivirt worden sei; von einem gegen mich gerichteten Angriff könne also nicht die Rede sein. Dagegen lässt sich öffentlich nichts sagen, obwohl es natürlich eine leere Ausrede ist. Uebrigens ist es in diesem Augenblicke überhaupt peinlich für mich, gegen K. auftreten zu sollen, aus dem Grunde, weil neuerdings der Bruch zwischen uns beiden vollständig geworden ist.

. . . . .

Berlin, 29 Juni 88.

. . . . .

Es ist bereits von mir angedeutet worden, warum ich unter den inzwischen eingetretenen Umständen nicht gern *für meine Person allein* KRONECKER's Auslassungen über die Preisfrage zurückweisen möchte. Nun ersehe ich zudem aus einem eben eingegangenen Schreiben von Frau KOWALEVSKY, dass HERMITE gar keine Lust hat — aus nationalen Rücksichten wie er sagt — sich in eine »question toute allemande» einzumischen. Unterlassen Sie es darum, ihm zuzureden. Ich werde dann, *nachdem über die Preisertheilung entschieden ist*, Veranlassung nehmen, mich über die erste Preisfrage mit einiger Ausführlichkeit auszusprechen, und dabei dann auch KRONECKER's Einwendungen gehörig betrachten. Denn dann kann ich mich nennen als den, der die Frage vorgeschlagen hat, was jetzt unschicklich ist, wie es überhaupt mit dem literarischen Anstand (unvereinbar)[1] ist, eine noch schwebende Preisfrage zum Gegenstand öffentlicher Erörterung zu machen. . . . . .

Berlin, 15 Nov. 88.

. . . . .

5. Die Abhandlung: »Sur le probleme des trois Corps et les équations de la Dynamique»[2] (mit dem Motto: Nunquam praescriptos transibunt sidera fines.) ist unbedingt eine Arbeit von grosser Bedeutung, wenn sie auch nicht eine Lösung des allgemeinen Problems enthält, auf das sich die erste der gestellten Preisfragen bezieht, sondern nur einen speciellen Fall desselben behandelt. Es war aber ausdrücklich freigestellt, falls die gestellte Aufgabe Schwierigkeiten darbieten sollte, die zur Zeit nicht zu überwinden wären, derselben ein anderes bedeutendes Problem der Dynamik zu substituiren, und es würde deshalb, wenn auch die Arbeit nur für den behandelten besonderen Fall die Lösung der — bisher noch in keinem Falle des Dreikörperproblems erledigte — Stabilitätsfrage brachte, zu erwägen sein, ob dies nicht eine so erhebliche Leistung sei, dass die Arbeit gekrönt werden könne. Dieselbe leistet aber viel mehr. Die Astronomen zwar werden von ihr nicht sehr erbaut sein, nicht bloss, weil für die Bedürfnisse der praktischen Astronomie unmittelbar kein Gewinn aus ihr zu ziehen ist, sondern auch, weil sie Illusionen zerstört, denen man sich lange hingegeben hat, und manches, anscheinend sicher begründetes Ergebniss der bisherigen Untersuchungen als unhaltbar nachweist. So z. B. ist die Behauptung LAPLACE's — die man in jedem Lehrbuche der Astronomie wiederholt findet, auch noch im Kosmos, wo sie als Resultat tiefer analytischer Forschung hingestellt wird — dass das Planetensystem dem Zerfalle preisgegeben sein würde, wenn die mittleren Bewegungen zweier Planeten commensurabel wären, so wenig aufrecht zu halten, dass vielmehr die Möglichkeit besteht, dass die Bewegung des ganzen Systems *periodisch* sei im

[1] Das Wort fehlt im Manuskript. (M. L.)

[2] Diejenige Arbeit von POINCARÉ, die später den Preis erhalten hat. (M. L.)

strengen Sinne des Worts. Noch mehr Aufsehen — wohl auch Bedauern — wird der Nachweis erregen, dass es unmöglich sei — was von NEWCOMB, LINDSTEDT u. A., mit anscheinendem Erfolge versucht worden ist — die Coordinaten der Planeten in convergirende Reihen von der Form

$$\sum_{\nu_1\nu_2\ldots} A_{\nu_1\nu_2\ldots} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \cdots) t$$

zu entwickeln, wo t die Zeit und $c_1, c_2, \ldots, A_{\nu_1\nu_2\ldots}$ Constanten bedeuten. Aber gerade auf diesen »résultats négatifs» scheint mir der Hauptwerth der Untersuchung zu beruhen, indem daraus unwiderleglich hervorgeht, dass zur Lösung des Problems der n Körper ein ganz anderer Weg als der bisher betretene eingeschlagen werden muss, wenn es sich darum handelt, dass dadurch unsere Einsicht in den Bau des Weltsystems wirklich gefördert werde. Freilich ist meine Hoffnung, dass dies Ziel schon jetzt als ein erreichbares sich erweisen werde — eine Hoffnung, die sich hauptsächlich auf die bekannten Mittheilungen über die letzten, auf die Probleme der Dynamik bezüglichen Arbeiten DIRICHLET's sich stützte — durch die Schrift bedeutend herabgestimmt worden. Aber immerhin ist es ein nicht gering anzuschlagender Gewinn, dass die eigentlichen Schwierigkeiten des Problems jetzt klarer als bisher dargelegt worden sind. Indessen enthält die Schrift auch positive Resultate von sehr bedeutender Wichtigkeit. Dahin rechne ich — ausser der schon erwähnten Lösung der Stabilitätsfrage in einem besonderen Falle — u. a. die im ersten Capitel entwickelte »Théorie des invariants intégraux» sowie die im 2:ten Capitel behandelte »Théorie des solutions périodiques» — es sind dies Untersuchungen, welche überhaupt für die Erkenntniss des analytischen Charakters der durch algebraische Differentialgleichungen definirten Functionen einer Variablen von Bedeutung sind. Ganz besonders möchte ich aber hervorheben, was im zweiten Theile der Schrift in Betreff der »asymptotischen Bewegungen» ermittelt worden ist. Abgesehen von dem Gebrauch, der von den Resultaten dieser Untersuchung in dem im folgenden Capitel behandelten, schon erwähnten speciellen Falle gemacht wird, lehren sie, dass selbst in dem Falle, wo mehr als zwei nach dem NEWTON'schen oder auch nach einem anderen Gesetze sich anziehende Körper sich so bewegen, dass der Abstand je zweier derselben beständig zwischen zwei endlichen Grenzen bleibt, Bewegungsformen existiren, von denen wir bisher kaum eine Ahnung hatten und für welche wir auch die entsprechende (von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ gültig bleibende) analytische Darstellungsform noch nicht kennen, in Betreff welcher nur feststeht, dass sie nicht die Gestalt trigonometrischer Reihen haben kann.

Hiernach trage ich kein Bedenken, die in Rede stehende Bewerbungsschrift für preiswürdig zu erklären. Da es Ihrem Könige daran liegen könnte, dies schon jetzt zu erfahren, so bitte ich, es ihm mittheilen zu wollen, falls Sie dies für angemessen erachten. Das für die Veröffentlichung bestimmte Referat, das von dem Vorstehenden — welchem Sie und HERMITE hoffentlich zustimmen werden — dem Inhalte nach nicht abweichen wird — aber sehr sorgfältig abgefasst werden muss, werde ich gegen Ende d. M. einschicken.

Sie können dem Könige sagen, dass die in Rede stehende Schrift zwar nicht als Lösung der gestellten Preisfrage zu betrachten, aber doch von einer solchen Bedeutung sei, dass von ihrem Erscheinen nach meiner Ueberzeugung eine neue Epoche in der Geschichte der »Mécanique céleste» sich datiren werde. Der Zweck, den Se. Majestät bei der Preisausschreibung im Auge hatten, sei also im Wesentlichen erreicht.

Die in Rede stehende Arbeit lässt allerdings, was ich nicht verschweigen darf, in Beziehung auf Darstellung Vieles zu wünschen übrig, so dass sie sehr schwer zu lesen ist. Auch gegen die vollkommene Strenge einiger Beweise möchten sich Einwendungen erheben lassen. Es wäre sehr zu wünschen, dass der Verfasser sich entschlösse, seine Schrift vor dem Erscheinen noch einer sorgfältigen Revision zu unterwerfen, um die vorhandenen Mängel nach Möglichkeit zu entfernen.

. . . . .

Berlin, 19 Nov. 88.

Mein lieber Freund.

Ihren soeben mir zugegangenen Brief von 16:ten d. beantworte ich sofort.

Es würde mir lieb sein, wenn Sie eine französische Übersetzung meines Gutachtens Herrn HERMITE zuschickten. Im Resultat wird er ohne Zweifel mit mir übereinstimmen, im Übrigen aber wolle er bedenken, dass wir Deutschen uns in Schriftstücken dieser Art weniger lebhaft und enthusiastisch auszudrücken pflegen als es bei den Franzosen Sitte ist. Eine Phrase, wie er sie in Betreff der astron. Arbeit dem Berichte hinzugefügt zu sehen wünscht, findet sich, wenn ich mich recht erinnere, am Schlusse meines Briefes an Sie; theilen Sie ihm dieselbe gefälligst mit, ich bin gern bereit, sie in meinen Bericht aufzunehmen. Wesentliche Änderungen werde ich in diesem Berichte nicht vornehmen, nur auf die Fassung die möglichste Sorgfalt verwenden. Sie können sich übrigens gefasst darauf machen, dass unsere Entscheidung von mehr als einer Seite einer sehr scharfen Kritik wird unterworfen werden. Herr KR., der mit mir bis jetzt kein Wort über die Preisfrage gesprochen hat und so thut, als ob zwischen uns absolut nichts vorgefallen sei, hat doch unter der Hand bei Bekannten von mir

Erkundigungen eingezogen, ob sie nicht erfahren hätten, dass eine der eingegangenen Arbeiten den Preis erhalten werde. Sehr leid thut es mir, dass GYLDÉN sich über ungerechte Behandlung beklagt. Obwohl für mich keine Veranlassung vorliegt, seiner Arbeiten zu erwähnen, da er sich nicht um den Preis beworben hat, so würde ich doch gern ihm volle Anerkennung ausgesprochen haben, wenn ich es mit gutem Gewissen könnte. Aber, so sehr ich mich daran bemüht habe, ich verstehe G.'s Arbeiten nicht, oder vielmehr, ich bleibe im Ungewissen darüber, ob die Resultate richtig sind oder nicht. Das mag an meiner mangelhafter Kenntniss des Gegenstandes liegen, aber tüchtigen theoretischen Astronomen geht es ebenso. Ich habe drei mit Störungstheorie vollkommen vertraute Astronomen zu Rathe gezogen, sie stimmen alle darin überein, dass G.'s Untersuchungen bis jetzt durchaus kein befriedigendes Resultat geliefert haben — weder für die Praxis noch für die Theorie.

. . . .

Mit freundlichsten Grüssen von Haus zu Haus
Ihr aufrichtig ergebener
WEIERSTRASS.

Berlin, 8. I. 89.

Lieber Freund!

Erst heute bin ich im Stande, den angefangenen Bericht wieder aufzunehmen. Nach einem früheren Briefe von Ihnen glaube ich annehmen zu können, dass mein vorläufig erstatteter Bericht genügen werde, bei dem Könige die Ertheilung des Preises an den Verfasser der mit dem Motto: »Nunquam transibunt etc.» versehenen Abhandlung zu beantragen. Ich hatte deshalb die Entwerfung des für die Öffentlichkeit bestimmten Berichts, der so, wie ich ihn zu fassen gedachte, keine leichte Arbeit war, aufgeschoben, ohne zu bedenken, dass mir nicht mehr die Kräfte so wie früher zu Gebote stehen und ich auf Unterbrechungen durch Unwohlsein gefasst sein musste. Uebrigens habe ich bis zu Weihnachten hin fast meine ganze Zeit auf das Studium der in Rede stehenden Abhandlung verwandt. Sie ist sehr schwer zu lesen, HERMITE . . . . hat sie schwerlich in ihren Einzelheiten studirt. Ich bin noch auf manche Bedenken gestossen und in Betreff mehrerer Punkte auch jetzt noch nicht völlig im Klaren.

Was nun HERMITE's Bericht über die Arbeit angeht, so kann ich mich mit demselben einverstanden erklären, *falls er* — wie Sie sagen — *nur für den König bestimmt sein soll.* Vor der Öffentlichkeit könnte ich Vieles, das er enthält, nicht verantworten. Jemand, der nur H.'s Bericht vor Augen hätte, müsste glauben, dass die wichtigsten und schwierigsten Fragen des Problems der n Körper, z. B. die Stabilitäts-Frage, in der Preisschrift *erledigt* seien, während man doch nur sagen kann, dass dies in einem sehr speciellen Falle, und auch in diesem nur unter einschränkenden Bedingungen geschehen sei. Sagt doch der Verfasser selbst am Schlusse seiner Arbeit, dass er sich geirrt habe in der Annahme, es werde sich die Stabilitäts-Frage im allgemeinen Falle in analoger Weise wie in dem speciellen behandeln lasse, und giebt auch die Gründe dafür an, warum dies nicht angeht. Allerdings sagt HERMITE eigentlich nur, dass die wichtigsten Fragen der Mécanique céleste von dem Verfasser nach neuen und genialen Methoden *behandelt worden seien* — dies ist ja vollkommen richtig, aber ich glaube doch, dass eine klare Darlegung des wirklichen Inhalts der Schrift für den Leser lehrreicher und für den Verfasser mindestens ebenso ehrenvoll gewesen sein würde als HERMITE's enthusiastische Lobrede. Was ich in meinem vorläufigen Bericht gesagt habe, halte ich in allen Stücken aufrecht. Der Nachweis, dass die Bewegung eines Systems materieller Punkte bei gegebener Kräftefunction unter bestimmten Bedingungen eine periodische sein kann, und noch mehr die Entdeckung der asymtotischen Bewegungen, sind Leistungen von der höchsten Bedeutung und können ohne Uebertreibung als epochemachend bezeichnet werden. Dasselbe gilt von den am Schlusse der Arbeit angegebenen »Résultats négatifs», die ich für wahr halte, wenn mir auch die Beweiskraft der dafür angegebenen Gründe nicht überall einleuchtet. Was dagegen die Behandlung der Stabilitätsfrage anlangt, so habe ich ausser dem bereits angeführten noch allerlei zu erinnern. Nach des Verfassers — am Schlusse der Einleitung und im Anfang des ersten Kapitels gegebenen — Definition würde die Bewegung eines Systems materieller Punkte als eine stabile zu bezeichnen sein, wenn die Entfernung je zweier Punkte ständig (d. h. von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$) unter einer angebbaren Grenze bleibt. Im mathematischen Sinne ist dagegen nichts zu sagen, im physikalischen aber muss auch gefordert werden, dass sie nicht unendlich klein werden dürfe. Nun kann ich zwar beweisen, dass bei gewissen Anziehungsgesetzen, zu denen das NEWTON'sche gehört, ein Zusammentreffen zweier Punkte im Verlaufe einer *endlicher* Zeit nur unter ganz besondern Umständen, deren Eintreten unendlich wenig wahrscheinlich ist, stattfinden kann, so dass man diesen allerdings möglichen Fall füglich bei Seite lassen kann, dann aber sind die Coordinaten der einzelnen Punkte und die Entfernungen je zweier eindeutige und stetige analytische Functionen der Zeit t, welche in einem *endlichen* Zeitintervall weder unendlich gross noch unendlich klein werden können. Wenn aber die Zeit ohne Ende wächst, so wird jede der genannten Entfernungen entweder einer bestimmten Grenze (die auch unendlich gross oder gleich Null sein kann) sich nähern oder in der Art schwanken, dass sie jeden zwischen zwei bestimmten Grenzen (von denen die obere auch unendlich gross und die untere auch gleich Null sein kann) [gelegenen Werth][1] unendlich oft annimmt. Ein gleiches gilt, wenn t der Grenze $-\infty$ sich nähert. Man sieht also, dass schon in einem System von nur wenigen Punkten eine grosse Zahl von einander wesentlich verschiedenen Bewegungsformen möglich sind, und untersucht werden muss, welche Formen wirklich statt finden können. In dem speciellen in der Preisschrift behandelten Falle des Dreikörper-Problems muss also, nach Feststellung der Bedingungen, unter denen die Abstände des massenlosen Punktes von den beiden andern beständig unter einer angebbaren Grenze bleibt, untersucht werden, ob nicht auch der Fall möglich sei, dass jener Punkt einem der anderen im Verlaufe der Zeit unendlich nahe komme oder in der Vergangenheit unendlich nahe gewesen sei. Es scheint mir, dass dies wirklich so sein könne. Ob man nun in einem solchen Falle die Bewegung eine stabile nennen wolle oder nicht, ist ziemlich gleichgültig; jedenfalls aber wäre dann die Bewegungform wesentlich eine andere als in dem Falle, wo jeder der genannten Abstände beständig zwischen zwei endlichen Grenzen bleibt. In der Preisschrift finde ich keinen Aufschluss über die angeregte Frage.

. . . . .

Ich muss für heute hiermit schliessen, hoffe aber nunmehr baldigst mit meinem Berichte fertig zu werden; den Hermite'schen habe ich von ihm noch nicht erhalten. Um jedem Missverständnisse zuvorzukommen, wiederhole ich aber

Ich schliesse mich dem Hermite'schen Bericht, wenn er nur für den König bestimmt ist, bedingungslos an. Dagegen muss ich aber die Bedingung stellen, dass, wenn wir uns nicht über einen gemeinschaftlichen Bericht für die Acta vereinigen können, der meinige unverändert abgedruckt werde, neben oder ohne den Hermite'schen. Beide Berichte widersprechen einander nicht, sind aber von verschiedener Färbung. Bei meinem Berichte habe ich übrigens noch einen anderen Zweck im Auge gehabt, worüber ich Ihnen in den nächsten Tagen schreibe.

. . . . .

Berlin, 2. 2. 89.

. . . . .

Im Anschluss an meinen vorhergehenden Brief möchte ich Folgendes bemerken. Bei meinem Einwande, dass mir aus Poincaré's Darstellung nicht hervorzugehen scheine, dass der gestörte Planet einem der beiden anderen nicht

---

[1] Das Wort fehlt im Manuskript. (M. L.)

unendlich nahe kommen könne, hatte ich einen wesentlichen Punkt übersehen. In der Gleichung

$$\frac{1}{2a} + G + \mu F_1 = C$$

nimmt P. von vorn herein die Constante C positiv und erheblich grösser als $\frac{3}{2}$ an. Warum, ist nicht gehörig motivirt, sondern wird erst bei genauerem Studium klar — nämlich es lässt sich nur unter dieser Annahme der Stabilitätsbeweis auf dem von POINCARÉ eingeschlagenen Wege führen. Mir ist übrigens die Auseinandersetzung, die P. in der Note B giebt viel klarer erschienen als die des Textes. . . . . .

Soeben erhalte ich auch die Noten F, G zu der POINCARÉ'schen Abhandlung. Durch die Note G wird mir bestätigt, was ich angenommen hatte, dass P. wenn er von einer *eindeutigen analytischen* Function der bei einem dynamischen Problem vorkommenden Grössen spricht, darunter etwas Anderes versteht wie wir — die Function ist ihm eindeutig, wenn sie stets dieselbe Änderung erfährt, sowie man auch von einem System reeller Argumente derselben zu einem anderen reellen Systeme übergehen möge. Ich würde, um diesen Charakter der Function zu bezeichnen, mich anders ausdrücken, indess kommt wenig darauf an, nur möchte es gut sein, an der Stelle (in den résultats négatifs) wo zuerst von einer solchen Function die Rede ist, auf die Note G zu verweisen.

Nun hätte ich noch ein Desiderium, worüber ich selbst an P. schreiben werde.

P. behauptet, dass aus der Nichtexistenz mehrerer eindeutigen (analytischen) Integrale bei einem dynamischen Probleme nothwendig die Unmöglichkeit folge, das Problem durch Reihen von der Form

$$\sum C_{\nu\nu'\ldots} \frac{\cos}{\sin} (\nu a t + \nu' a' t + \cdots)$$

zu lösen. Diese Behauptung, die von fundamentaler Bedeutung ist, wird ohne Beweis ausgesprochen. Nun glaube ich zwar der Sache einigermassen auf den Grund zu sehen, bin aber doch nicht ganz sicher darin, und fürchte, dass es den meisten Lesern eben so gehen möge. Ich möchte daher sehr wünschen, dass P. seinen Gedankengang auch noch in einer Note darlege.

Die Nachricht von der Preisertheilung stand schon am 23:sten in einer hiesigen Zeitung. Wie sie in gewissen Kreisen aufgenommen worden ist, können Sie sich vorstellen. Erfährt nunmehr doch auch das grosse Publicum, welche Mathematiker der König in die Commission berufen hat — und welche nicht. Ich verschone Sie aber mit dem Klatsch, der bei dieser Gelegenheit aufgerührt wird.

Meinen Bericht werde ich bis Ende nächster Woche festgestellt haben. Was ihn mir schwer gemacht hat ist der Umstand, dass ich es für notwendig gefunden, die Stellung der Preisfrage, welche von verschiedenen Seiten her angefochten worden ist, zu rechtfertigen, ohne dass es aussieht als eine Abwehr von Angriffen. Sie werden den wenigen Zeilen, in denen ich dies versucht habe, schwerlich ansehen, welche Mühe sie mir gekostet — eine längere Abhandlung darüber zu schreiben wäre mir viel leichter gewesen. Ein Punkt namentlich hat mich gequält. Während einige Kritiker die Aufgabe überhaupt für unlösbar erklären, haben andere es getadelt, dass die Beschränkung — »unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfinde» hinzugefügt ist — denn dadurch sei ein wesentlicher Theil der Untersuchung bei Seite geschoben und die Stabilitätsfrage stillschweigend zur Hälfte als erledigt angenommen worden. Nun hatte ich jene Beschränkung mit Vorbedacht und aus guten Gründen gemacht. Ich hatte mir nämlich, was ich natürlich nicht ausdrücklich sagen durfte, einen Beweis dafür zurecht gelegt, dass *unter der Voraussetzung des* NEWTON'schen Gesetzes ein Zusammentreffen zweier Punkte in einem bestimmten Augenblicke nur unter ganz besonderen Umständen, deren Eintreffen unendlich wenig wahrscheinlich ist, erfolgen kann. Man kann also von diesem Falle füglich absehen. Dann aber werden die Coordinaten der sich bewegenden Punkte in der That eindeutige analytische [Functionen][1] der Zeit und es ist eine Entwicklung derselben in Reihen von der verlangten Form möglich.

Nun, diesen Beweis, der ziemlich complicirt ist, hatte ich vergessen, und beim Versuche, ihn wieder herzustellen, kam ich, wie es zu gehen pflegt, auf allerlei Bedenklichkeiten. Kurz, nur nach grosser Anstrengung ist es mir gelungen, wenigstens für ein System von drei Punkten das Behauptete strenge zu beweisen.

Der Beweis beruht auf Folgendem. Angenommen, in einem Systeme von n materiellen Punkten, die nach dem NEWTON'schen [Gesetze][1] einander anziehen, finde zur Zeit t_0 ein Zusammentreffen irgend zweier Punkte (nicht mehrerer) statt, so lassen sich, wenn t hinlänglich nahe bei t_0 angenommen wird, die Coordinaten sämmtlicher Punkte nach ganzen positiven Potenzen von

$$(t_0 - t)^{\frac{1}{3}}$$

entwickeln, die allgemeinsten Ausdrücke derselben enthalten dann nicht $6n$ sondern nur $6n-2$ willkürliche Constanten. Daraus folgt, dass wenn zur Zeit

[1] Das Wort fehlt im Manuskript. (M. L.)

t_0 die Anfangswerthe der Coordinaten und ihrer ersten Ableitung nach Willkür angenommen werden, die Wahrscheinlichkeit eines Zusammentreffen zweier Punkte unendlich klein ist. Für $n = 3$ lässt sich ferner leicht zeigen, dass alle drei Punkte nur in dem Falle zusammentreffen können, wenn drei bei den Flächensätzen vorkommenden Integrationsconstanten verschwinden. Es scheint mir daher unbedenklich den in Rede stehenden Satz als allgemein gültig hinzustellen.

Es ist aber wohl zu bemerken, dass durch diesen Satz nicht die Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit zwei Punkte — ohne zusammenzutreffen — einander unendlich nahe kommen. Wie die Sache sich aber wirklich verhält, habe ich nicht ermitteln können.

. . . . .

Berlin, 6. März 89.

. . . . .

Endlich bin ich, nach abermaliger, nicht zu vermeidender Unterbrechung, mit dem versprochenen Brief fertig geworden. Ich kann ihn aber erst morgen früh absenden, da ich ihn doch muss einschreiben lassen, wozu es mir heute zu spät geworden ist. Zu meinem Schrecken sah ich erst heute Morgen, dass ich mich im Datum geirrt und den *neunten* auf Montag verlegt hatte. Sie erhalten den Bericht druckfertig, aber in der definitiven Abfassung sehr abgekürzt gegen meinen ersten Entwurf. Ich habe mich hauptsächlich über Bedeutung und Zweck der Preisfrage ausgesprochen. Was ich über die gekrönte Preisschrift gesagt, stimmt im Wesentlichen überein mit dem in meinem vorläufigen Bericht enthaltenen.

. . . . .

Berlin, 6. 3. 89 Abends.

. . . . .

Ich habe mich nun doch entschlossen, das Beiliegende noch spät Abends uneingeschrieben abgehen zu lassen, damit es Freitag Mittag in Ihre Hände gelange. Noch ist ja keiner meiner Briefe an Sie verloren gegangen. Was noch fehlt, schicke ich morgen nach; Sie können sich aber jedenfalls mit meinem früheren Bericht helfen, der sich dem Inhalte nach nicht wesentlich von dem, was auf den folgenden Seiten gesagt wird, unterscheidet.

. . . . .

Berlin, 3. 4. 89.

. . . . .

Ein rechter Unstern hat über der Abfassung des versprochenen Berichts gewaltet, und ich kann mir lebhaft vorstellen, wie ungehalten Sie darüber sind, dass die Sache so lange sich hingezögert hat. Indessen hören Sie, wie es mir ergangen ist. Schon wenige Tage nach der Abreise der Frau KOWALEVSKY von hier stellte sich wieder, wie im vergangenen Jahr, ein heftiger Bronchialkatarrh bei mir ein, an dem ich bis nach Weihnachten gelitten habe. Dann befand ich mich eine Zeitlang besser, so dass ich in den ersten Tagen des Januars eine kleine Vorlesung beginnen konnte, ich hatte dringende Gründe, nicht das ganze Semester hindurch unthätig zu sein. Aber noch an demselben Abend, als ich die erste Hälfte meines Berichts — der im Concept fertig war — an Sie abschickte, überfiel mich ein ernstliches Unwohlsein, an dessen Folgen ich noch immer leide. Indessen hätte ich die Abschrift doch wohl schon in der vergangenen Woche fertig stellen können, wäre nicht ein Umstand eingetreten, der mir die Nothwendigkeit auferlegte, dem Berichte insofern eine andere Fassung zu geben, dass ich den Inhalt der Preisschrift eingehender, als es ursprünglich geschehen, und ohne den Gebrauch analytischer Formeln zu vermeiden, darstellen und so dem kundigen Leser eine Vorstellung von der Bedeutung der POINCARÉ'schen Arbeit beizubringen versuchen muss.

Um ihnen dies zu erklären, muss ich Ihnen zunächst sagen, dass Ihr an den Secretär der Pariser-Akademie gerichteter Brief vom 18 Febr. hier viel böses Blut gemacht hat und dass man für alles, was man daran auszusetzen hat, merkwürdigerweise nicht etwa Sie, sondern *mich* verantwortlich macht. Sie sagen zwar ausdrücklich, dass Sie den Brief im Auftrage des Königs geschrieben haben und dieser Umstand ist für jeden nicht Böswilligen ein hinlänglicher Beweis dafür, dass ich in keinerlei Weise an dem Brief direct betheiligt gewesen sei — aber man besteht darauf, dass dem Inhalte desselben doch meine Beurtheilung der g. Preisschrift zu Grunde liegen müsse. Nun sind es besonders zwei Stellen, gegen die sich namentlich unser kleiner Freund heftig ausgelassen hat — hinter meinem Rücken natürlich. Zuerst die Phrase: »comptera parmi les plus importantes productions mathématiques du siècle». Das sei unbedingt zu viel gesagt. Aber wer vermag dies zu beurtheilen, ohne die Schrift gelesen zu haben? Es kommt alles darauf an, wie weit man die Grenzen der wichtigsten Productionen des Jahrhunderts zieht. In meinem Berichte kommt indessen nichts dergleichen vor — ich begnüge mich, die P.'sche Abhandlung als eine Arbeit von ungewöhnlicher Bedeutung zu bezeichnen und diese meine Ansicht gedenke ich in jeder Beziehung aufrecht zu halten. Sodann findet man es in hohen Grade unpassend, dass Sie den Secretar deswegen beglückwünschen, dass die beiden Preisgekrönten Franzosen seien. Gewiss würde es unpassend gewesen sein, wenn *ich* in einem officiellen oder privaten Schreiben dies gesagt hätte, oder wenn Sie es mit meiner Billigung geschrieben — aber, wie die Sachen liegen, kann ich doch in keiner Weise verantwortlich gemacht werden für ein Kompliment, das Sie — vielleicht im Auftrage des Königs — dem Secretar machen, der bei der von Ihnen angeführten Gelegenheit die Ausschreibung der Preisfragen so sympatisch begrüsst hat, während Andere sich von vorn herein abfällig darüber ausgesprochen haben.

Ich habe mich übrigens darauf beschränkt, Freund und Feind auf meine demnächst zu veröffentlichende Beurtheilung der Preisschrift zu verweisen, mit dem Bemerken, dass ich für jedes darin stehende Wort, aber auch für nichts anderes, die volle Verantwortlichkeit übernehme. Das Vorstehende bitte ich als eine nur für Sie bestimmte Mittheilung zu betrachten. Sie werden aber daraus entnehmen, dass mein Bericht ein durchaus sachlicher sein muss und so weit dies überhaupt möglich ist — den wesentlichen Inhalt der Preisschrift wieder zu geben hat. Ich habe zu dem Ende die Abhandlung selbst und sämmtlich dazu gehörigen Noten — für deren Zusendung ich Ihnen sehr dankbar bin — noch einmal durchstudirt und bin heute damit fertig geworden. Die geometrische Form, unter der P. viele seiner wichtigsten Resultate darstellt, gestattet keine kurze Relation; aber es ist mir jetzt leicht, alles analytisch in leicht verständlicher Weise auszudrücken, so dass es mir nun nicht schwer fallen wird, meinen Zweck in einer Weise, gegen die auch P. nichts einzuwenden haben wird, zu erreichen. Bleibe ich nur 2—3 Tage leidlich wohl, so dass mir das Schreiben nicht zu grosse Mühe macht, so hoffe ich in dieser Zeit fertig zu werden — auch zu meiner eigenen Befriedigung.[1] . . . . .

Manuskript von Weierstrass.

Es seien gegeben die folgenden n Differentialgleichungen, in denen t eine reelle Veränderliche, $x_1, \dots x_n$ zu bestimmende Functionen derselben und $G_1(x_1, \dots x_n)$, $\dots G_n(x_1, \dots x_n)$, ganze rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ bedeuten:

$$\text{I)} \qquad \frac{dx_1}{dt} = G_1(x_1, \dots x_n), \dots \frac{dx_n}{dt} = G_n(x_1, \dots x_n).$$

Die Coefficienten von $G_1, \dots G_n$ sollen reelle Grössen sein: wenn dann festgestellt wird, dass für einen bestimmten reellen Werth t_0 von t die Grössen

[1] Weierstrass' Krankheit hat ihm nie erlaubt den Bericht fertig zu stellen (M. L.).

$x_1, \ldots x_n$ *vorgeschriebene* reelle Werthe $x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}$ erhalten sollen, so existirt für alle Werthe von t innerhalb eines bestimmten, die Grösse t_0 enthaltenden Intervalls

$$T_1 \ldots T_2$$

ein System von n reellen und *regulären* Functionen

$$\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)$$

welche für $x_1, \ldots x_n$ gesetzt die vorstehenden Differentialgleichungen befriedigen und zugleich für $t = t_0$ die angegebenen Werthe annehmen.

Die Grenzen des genannten Intervalls (von denen T_1 auch gleich $-\infty$, $T_2 = +\infty$ sein kann) sind dadurch bestimmt, dass, wenn die Veränderliche stetig wachsend oder stetig abnehmend sich einer von ihnen unendlich nähert, wenigstens eine der Grössen $x_1, \ldots x_n$ unendlich gross wird.

Dies vorausgeschickt, führe man an Stelle der n Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ $n + 1$ andere $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ ein mittels der Gleichungen

$$2) \qquad \xi_\lambda = \frac{2x_\lambda}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad (\lambda = 1, \ldots n)$$

$$3) \qquad \xi_0 = \frac{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Dann hat man

$$4) \qquad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1,$$

$$5) \qquad \xi_\lambda = (1 + \xi_0) x_\lambda.$$

Ferner

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -\frac{4\left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + \ldots\right)}{(1 + x_1^2 + \ldots)^2} = -(1 + \xi_0)^2 \left(x_1 \frac{dx_1}{dt} + \ldots\right) = -(1 + \xi_0)\left(\xi_1 \frac{dx_1}{dt} + \ldots\right)$$

also

$$6) \qquad \frac{d\xi_0}{dt} = -(1 + \xi_0) \sum_1^n{}_\lambda\, \xi_\lambda G_\lambda(x_1, \ldots x_n) = -(1 + \xi_0) \sum_1^n{}_\lambda\, \xi_\lambda G_\lambda\left(\frac{\xi_1}{1 + \xi_0}, \ldots \frac{\xi_n}{1 + \xi_0}\right),$$

$$7) \qquad \frac{d\xi_\mu}{dt} = (1 + \xi_0) G_\mu\left(\frac{\xi_1}{1 + \xi_0}, \ldots \frac{\xi_n}{1 + \xi_0}\right) - \xi_\mu \sum{}_\lambda\, G_\lambda\left(\frac{\xi_1}{1 + \xi_0}, \ldots \frac{\xi_n}{1 + \xi_0}\right) \xi_\lambda \, (\mu = 1, \ldots n).$$

Die Gleichungen (6, 7) kann man nun auf die Form bringen:

8) $$\frac{d\xi_\lambda}{dt} = (1+\xi_0)^{-m} G_\lambda(\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n), \quad (\lambda = 0, 1, \dots n)$$

wo m eine ganze positive Zahl und $G_0, G_1, \dots G_n$ ganze rationale Functionen von $\xi_0, \dots \xi_n$, die nicht sämmtlich durch $1 + \xi_0$ theilbar sind, bedeuten.

Führt man nun noch eine neue Veränderliche u ein mittels der Gleichung

9) $$dt = (1+\xi_0)^m du$$

so genügen die Functionen von u, in welche $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n$ dadurch übergehen, den Differentialgleichungen

10) $$\frac{d\xi_\lambda}{du} = G_\lambda(\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n) \quad (\lambda = 0, 1, \dots n).$$

Setzt man fest, dass $u = 0$ sein solle für $t = t_0$, so folgt aus (9)

11) $$t - t_0 = \int_0 (1+\xi_0)^m du.$$

Geht man umgekehrt aus von den Gleichungen (10, 11), so hat man, wenn zunächst keine Relation unter den Veränderlichen $\xi_0, \dots \xi_n$ angenommen und $G_\lambda\left(\frac{\xi_1}{1+\xi_0}, \dots \frac{\xi_n}{1+\xi_0}\right)$ mit $\bar{G}_\lambda$ bezeichnet wird

10, a) $$\frac{d\xi_0}{dt} = -(1+\xi_0)\sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda \bar{G}_\lambda$$
$$\frac{d\xi_\mu}{dt} = (1+\xi_0)\bar{G}_\mu - \xi_\mu \sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda \bar{G}_\lambda \quad (\mu = 1, \dots n).$$

Daraus folgt, wenn $s = \sum_{\lambda=0}^{n} \xi_\lambda^2$, $\sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda \bar{G}_\lambda = S$ gesetzt wird

$$\frac{ds}{dt} = -2(1+\xi_0)\xi_0 S + 2(1+\xi_0)S - 2(s - \xi_0^2)S$$
$$= 2(1-s)S$$

12) $$s - 1 = \text{Const.}\, e^{-2\int_0 S dt}.$$

Werden also die (reellen) Werthe, welche $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n$ für $u = 0$ annehmen sollen, so gewählt, dass für sie $s = 1$ ist, so ergiebt sich

$$\text{Const.} = 0$$

und man hat daher für jeden Werth von u

13) $$\sum_{\lambda=0}^{n} \xi_\lambda^2 = 1.$$

Da alsdann keine der Grössen $\xi_0, \ldots \xi_n$ ihrem absoluten Betrag nach grösser als 1 werden kann, so existirt *ein* die Differentialgleichungen (10) befriedigendes System regulärer und reeller Functionen

14) $$\xi_0 = \psi_0(u), \ldots \xi_n = \psi_n(u)$$

deren Argument jeden beliebigen reellen Werth annehmen kann. Setzt man dann

15) $$t - t_0 = \int_0^u (1 + \xi_0)^m du$$

so wird t eine reelle Function von u, welche beständig wächst, wenn u beständig wachsend das Interwall

$$-\infty \,.\,.\, +\infty$$

durchläuft. Dieselbe nähert sich daher, wenn u beziehlich den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ unendlich nahe kommt, zwei bestimmten Grenzen T_1, T_2, zwischen denen die Constante t_0 liegt, und es ist u eine Function von t, welche stetig wachsend von $-\infty$ zu $+\infty$ übergeht, wenn t stetig wachsend das Interwall $T_1 \ldots T_2$ durchläuft.

Setzt man dann

16) $$x_\lambda = \frac{\xi_\lambda}{1 + \xi_0}, \quad \lambda = 1, \ldots n$$

unter der Voraussetzung, es seien die Werthe, welche $\xi_0, \ldots \xi_n$ für $t = t_0$ annehmen, so gewählt, dass für diesen Werth von t die Gleichungen (16) bestehen, so sind $x_1, \ldots x_n$ die den Differentialgleichungen (1) unter den festgestellten Bedingungen genügenden Functionen von t.

Erster Teil des Berichts von Weierstrass über die Poincaré'sche Preisarbeit.

Von den ausgeschriebenen vier Preisfragen hat nur die erste Bearbeiter gefunden. Dieselbe war gestellt worden in der Hoffnung, dass sie sich mit den gegenwärtig uns zu Gebote stehenden Hülfsmitteln werde erledigen lassen. Diese Hoffnung gründete sich auf folgende Erwägungen.

In einem frei sich bewegenden Systeme materieller Punkte, welche einander nach dem NEWTON'schen Gesetze anziehen, kann sich kein Punkt im Verlaufe einer endlichen Zeit unendlich weit von dem Schwerpunkte entfernen. Dagegen ist es möglich, dass der Abstand zweier Punkte unendlich klein werde, wenn sich die Zeit einer bestimmten endlichen (positiven oder negativen) Grenze nähert. Es lässt sich jedoch zeigen, dass dies ein Ausnahmefall ist, der nur unter ganz besonderen Umständen eintreten und daher füglich unberücksichtigt bleiben kann. Unter dieser Voraussetzung sind aber die Coordinaten der einzelnen Punkte, wie sich aus bekannten functionentheoretischen Sätzen ergiebt, während eines Zeitraums von unbegrenzter Dauer eindeutige und stetige analytische Functionen der Zeit; und solche Functionen können stets, und zwar auf mannigfaltige Weise in Reihen von der in der Preisfrage geforderten Beschaffenheit dargestellt werden. Es stand also fest, dass die Lösung des vorgelegten Problems möglich sei. Dass sie aber auch ausführbar sein werde, liess sich freilich nicht a priori annehmen. Indessen konnte selbstverständlich nicht die vollständige Entwickelung der Reihen, um die es sich handelt, sondern nur die Auffindung und Beschreibung eines zur successiven Bildung ihrer Glieder dienenden Verfahrens verlangt werden, und dass dies keine die Kräfte der Analysis übersteigende Aufgabe sei, dafür sprach — wie in den der Preisfrage beigegebenen Erläuterungen hervorgehoben worden ist — was wir von den auf die Integration der dynamischen Differentialgleichungen sich beziehenden Untersuchungen DIRICHLET's wissen. Denn so unvollständig dies leider auch ist, soviel geht doch jedenfalls daraus hervor, dass sich mittels der von DIRICHLET erdachten Methode, wenn wir im Besitze derselben wären, für jede der zu entwickelnden Functionen ein angenäherter Ausdruck in der Art müsste herstellen lassen, dass der Unterschied zwischen ihm und der Function in einem festgesetzten, beliebig langen Zeitintervall eine vorgeschriebene, beliebig klein anzunehmende Grenze nicht überschritte.

Dann aber würde man auch im Stande sein, die Function durch eine unbedingte und gleichmässig konvergierende Reihe darzustellen, also das vorgelegte Problem in der vorgeschriebenen Form zu lösen.

Indessen machen sich, wenn aus der Lösung des Problems für unsere Einsicht in die wahre Natur der Bewegungen der Himmelskörper eine wesentliche Förderung erwachsen soll, noch andere, jedenfalls nicht leicht zu erfüllende Forderungen geltend. Unter der im Vorstehenden angegebenen Voraussetzung ist die Bewegung des betrachteten Systems von ewiger Dauer, und es kann der Abstand je zweier Punkte im Verlaufe einer *endlichen* Zeit weder unendlich gross noch unendlich klein werden.

Soll dies aber auch für einen unendlich langen Zeitraum gelten, so müssen

Bedingungen erfüllt sein, welche sich bisher noch nicht genügend haben feststellen lassen, deren Erforschung aber stets als eine der wichtigsten Aufgaben der Mechanik des Himmels betrachtet worden ist und darum auch von jedem Bearbeiter der Preisfrage als nächster Gegenstand der Untersuchung hätte in's Auge gefasst werden müssen. Wenn auch nicht zu erwarten, dass die schwierige Frage sich vollständig werde erledigen lassen, so durfte man doch hoffen, dass man wenigstens in Betreff der Stabilität unseres Planetensystems zu einem sichern Resultate gelangen werden. In Bezug auf den dabei einzuschlagenden Weg liess sich im voraus auch nicht einmal eine Vermuthung aussprechen. Möglicherweise könnte man zum Ziele kommen, wenn man, die Stabilität des Systems *voraussetzend,* die zu entwickelnden Functionen durch Reihen, in denen jedes Glied eine beständig endlich bleibende und stetige Function der Zeit sein müsste, darzustellen versuchte, und, wenn dies gelänge, die Convergenz der Reihen zu beweisen im Stande wäre. In der That haben namhafte Astronomen und Mathematiker in neuer Zeit diesen Gedanken verfolgt und sind zu dem Ergebnisse gekommen, dass die auf dem Schwerpunkt der Sonne bezogenen Coordinaten der Planeten oder auch die veränderlichen Bahnelemente derselben durch Reihen von der Form

$$\sum_{(\nu_1, \nu_2, \ldots)} \{C_{\nu_1 \nu_2} \ldots \sin (c_0 + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \cdots) t\} \qquad \nu_1, \nu_2, \ldots \text{ ganze (positive oder negative) Zahlen}$$

darstellbar seien, wo t die Zeit, und $c_1, c_2, \ldots, C_{\nu_1 \nu_2} \ldots$ von t unabhängige Grössen bedeuten.

Indessen konnte nur nachgewiesen werden, dass den Differentialgleichungen der Bewegung in dem betrachteten Falle unter gewissen Voraussetzungen durch Reihen von der angegebenen Form *formell* genügt werden kann; ob aber diese Reihen convergent und die wahren Ausdrücke der darzustellenden Grössen seien, war zur Zeit, als die Preisaufgabe ausgeschrieben wurde, eine unerledigte Frage, auf die notwendig eingegangen werden musste.

In dem Vorstehenden habe ich die Gesichtspunkte angedeutet, welche bei der Prüfung der eingegangenen, unter N:r 7, 9, 10 verzeichneten Concurrenzschriften für mich massgebend gewesen sind.