SUR UNE QUESTION FONDAMENTALE DU CALCUL INTEGRAL

PAR

CH. RIQUIER

À CAEN.

Introduction.

Dans des recherches publiées en 1893 par les Annales de l'Ecole Normale, et reproduites deux ans plus tard par le Recueil des Savants étrangers (tome 32, n° 3), j'ai pu établir (en me bornant à l'examen des circonstances générales) l'existence des intégrales d'un système différentiel quelconque. Les réflexions que j'ai faites sur la question depuis cette époque m'ayant conduit à des résultats nouveaux, et aussi à une simplification considérable des raisonnements à l'aide desquels j'avais établi mes résultats antérieurs, il m'a semblé qu'une refonte totale de ces travaux, relatifs à un ordre de questions encore peu étudiées, présenterait quelque utilité: c'est ce qui m'a décidé à publier le présent Mémoire.

Je reprendrai tout d'abord, en le complétant, l'exposé de la partie historique.

CAUCHY, le premier, parvint, sur la question de l'existence des intégrales, à des résultats importants, dont il donna des démonstrations rigoureuses. Dans les tomes 14, 15 et 16 des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1842 et 1843), il prouve l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, en précisant ce que l'on doit entendre par *intégrales générales* d'un pareil système; puis il étudie au même point de vue un système linéaire de m équations aux dérivées partielles du premier ordre, impliquant un nombre égal de fonctions inconnues

$$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m,$$

et tel qu'on puisse le résoudre par rapport aux m dérivées

$$\frac{\partial \varpi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varpi_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial \varpi_m}{\partial t},$$

toutes relatives à une même variable t. La méthode à l'aide de laquelle il démontre la convergence des développements des intégrales n'est autre que celle des fonctions *majorantes*, adoptée, après lui, par presque tous les auteurs qui se sont occupés de ce genre de questions. Quant aux systèmes quelconques, on peut toujours, en introduisant de nouvelles fonctions inconnues, les réduire à des systèmes linéaires du premier ordre, et CAUCHY semble admettre que les seuls dont il y ait lieu de s'occuper sont ceux qui, après réduction, ont la forme ci-dessus définie.

En 1856, MM. BRIOT et BOUQUET, dans un Mémoire sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires,[1] donnèrent une démonstration nouvelle de l'existence de leurs intégrales.

En 1872, le même point fut établi pour les systèmes, dits *complètement intégrables*, d'équations différentielles totales, et trois géomètres, MM. MÉRAY, BOUQUET et MAYER, en publièrent presque simultanément la solution.[2]

---

[1] BRIOT et BOUQUET, *Mémoire sur les fonctions définies par les équations différentielles* (Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 36).

[2] MÉRAY, Revue des Sociétés Savantes (Sciences mathématiques, physiques et naturelles, t. 3, 1868).

MÉRAY, *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, p. 143, 1872.

BOUQUET, Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, t. 3, p. 265, 1872.

MAYER, Mathematische Annalen, t. 5, p. 448, 1872, et Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 1ère série, t. 11, 1876.

Une nouvelle démonstration du même point, pour laquelle j'ai prêté ma collaboration à M. MÉRAY, a été publiée en 1889 dans les Annales de l'Ecole Normale (MÉRAY et RIQUIER, *Sur la convergence des développements des intégrales d'un système d'équations différentielles totales*); elle se trouve reproduite dans un ouvrage récent de M. MÉRAY, (MÉRAY, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, 1ère partie, p. 256 et suiv.).

En 1875, les résultats, encore peu connus, de CAUCHY sur les systèmes partiels furent démontrés de nouveau par M. DARBOUX et Mme de KOWALEVSKY. Cette dernière y avait été conduite par la considération du système partiel qui porte son nom, système composé d'équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues, et tel, qu'en désignant par

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_g$$

les fonctions dont il s'agit, et par

$$k_1, k_2, \ldots, k_g$$

les ordres respectifs du système par rapport à elles, ce dernier fût résoluble par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{k_1}\varphi_1}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2}\varphi_2}{\partial x^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_g}\varphi_g}{\partial x^{k_g}},$$

toutes relatives à une même variable x. Les recherches de Mme de KOWALEVSKY font l'objet d'un Mémoire publié dans le Journal de Crelle;[1] M. DARBOUX, qui avait entrepris de son côté une recherche analogue, s'est borné à indiquer sa démonstration dans deux Notes communiquées à l'Académie des Sciences.[2]

En 1880, M. MÉRAY publia un Mémoire où il se proposait de démontrer d'une manière générale l'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles.[3] Comme la lecture approfondie de ce Mémoire a été le point de départ de mes propres travaux, comme j'ai pu me convaincre d'ailleurs que son contenu est ignoré du public et des auteurs, je crois devoir entrer à ce sujet dans quelques détails.

M. MÉRAY considère d'abord un système *du premier ordre*, résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, et il distingue essentiellement, *pour chaque fonction inconnue*, les variables indépendantes par rapport auxquelles sont prises les dérivées qui figurent dans les premiers membres du système, de celles qui sont étrangères à la formation des dérivées dont il s'agit; les premières sont, pour lui, les variables *principales* de la

---

[1] Tome 80, p. 1.

[2] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 80, p. 101 et 317.

[3] *Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3ième série, t. 6, 1880).

fonction considérée, les dernières ses variables *paramétriques*, et il va de soi qu'une même variable peut être à la fois principale pour quelque fonction et paramétrique pour quelque autre.[1] M. MÉRAY partage ensuite les dérivées de tous ordres d'une même fonction inconnue en *paramétriques* et en *principales*, selon que les différentiations d'où elles proviennent intéressent ses *seules variables paramétriques*, ou bien, soit avec elles, soit sans elles, *quelque variable principale.*[2] Considérant enfin, dans un système de cette espèce, un groupe quelconque d'intégrales ordinaires, et les supposant développées par la formule de TAYLOR à partir de *valeurs initiales* choisies pour les variables, M. MÉRAY nomme *détermination initiale* de chaque intégrale la fonction de ses seules variables paramétriques à laquelle elle se réduit quand ses variables principales prennent leurs valeurs initiales;[3] puis il fait observer que les valeurs initiales de ces déterminations et de leurs dérivées de tous ordres sont respectivement égales à celles des intégrales mêmes et de leurs dérivées paramétriques.[4]

Pour disposer nettement les équations d'un pareil système, il convient, ajoute M. MÉRAY, de les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en plaçant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x): le tableau ainsi formé peut contenir des cases vides réparties d'une manière quelconque, et ces dernières sont, pour une colonne donnée, en nombre égal à celui des variables paramétriques de l'inconnue correspondante.[5] Si, pour fixer les idées, on désigne par u, v, w trois fonctions inconnues des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et que l'on considère un système du premier ordre résolu par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial z},$$

[1] Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3ième série, t. 6, 1880, p. 237.

[2] Ibid., p. 237.

[3] Ibid., p. 242.

[4] Ibid., p. 242.

[5] Ibid., p. 237 et 238.

la seule inspection du tableau

(1)

	(u)	(v)	(w)
(x)	$\frac{\partial u}{\partial x} = \ldots$		
(y)	$\frac{\partial u}{\partial y} = \ldots$	$\frac{\partial v}{\partial y} = \ldots$	
(z)	$\frac{\partial u}{\partial z} = \ldots$		$\frac{\partial w}{\partial z} = \ldots$
(s)		$\frac{\partial v}{\partial s} = \ldots$	

construit conformément aux indications précédentes, suffit à faire voir: 1° que la fonction u a pour variables principales x, y, z, pour variable paramétrique s, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent la variable s à l'exclusion de x, y, z; 2° que la fonction v a pour variables principales y et s, pour variables paramétriques x et z, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent x et z à l'exclusion de y et s; 3° enfin, que la fonction w a pour variable principale z, pour variables paramétriques x, y, s, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent x, y, s à l'exclusion de z. Si l'on considère maintenant un groupe d'intégrales u, v, w de notre système, et que l'on désigne par x_0, y_0, z_0, s_0 les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes, les déterminations initiales de ces intégrales seront respectivement: la fonction de s à laquelle u se réduit pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, la fonction de x et z à laquelle v se réduit pour $y - y_0 = s - s_0 = 0$, et la fonction de x, y, s à laquelle w se réduit pour $z - z_0 = 0$.

Cela étant, M. Méray assujettit les seconds membres des systèmes qu'il considère à une certaine restriction, dont l'énoncé importe peu,[1]

---

[1] Voici quelle est cette restriction: *En désignant par u et v deux fonctions inconnues quelconques, aucune dérivée de v ne figure dans les seconds membres des équations de la colonne* (u), *si quelque variable principale de v est paramétrique pour u* (Ibid., p. 238).

mais qui entraîne la conséquence capitale suivante:[1] *Si aux équations du système donné on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, ces relations, dites primitives, peuvent être rangées dans un ordre de succession tel, que chacune ne contienne dans son second membre (outre les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques) que des dérivées principales figurant dans les premiers membres des relations antérieures.* M. Méray conclut de là que pour reconstruire en entier les développements par la série de Taylor d'intégrales que l'on sait d'avance exister, il suffit de connaître seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres, ou, ce qui revient au même, les déterminations initiales de ces intégrales;[2] car, ces déterminations étant supposées connues, les relations primitives permettent de calculer successivement les valeurs initiales de toutes les dérivées principales. Puis, il aborde le problème inverse, et il cherche si, réciproquement, le système donné admet des intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales respectives des fonctions, choisies au hasard, de leurs divers groupes de variables paramétriques.[3]

Or, pour que les intégrales dont il s'agit existent effectivement, il faut et il suffit, comme M. Méray le fait observer:[4] 1° que, dans le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, il y ait concordance numérique entre les diverses expressions fournies pour chacune d'elles par les relations primitives; 2° que les développements des intégrales, construits *a priori* comme nous l'avons indiqué, soient convergents. — Se préoccupant d'abord de la première de ces conditions, M. Méray partage en deux classes bien distinctes les systèmes du premier ordre, dits *immédiats,* qui font l'objet principal de son Mémoire, et il les nomme *passifs* ou *non passifs,* suivant que la concordance numérique des relations primitives y a lieu pour des données initiales quelconques ou seulement pour un choix convenable de ces dernières. Après avoir formulé les conditions de passivité d'un système immédiat,[5] il s'occupe en dernier lieu de la

---

[1] Ibid., p. 239 et 240.
[2] Ibid., p. 242.
[3] Ibid., p. 243.
[4] Ibid., p. 245 et 250.
[5] Ibid., p. 245 et suiv.

convergence des développements des intégrales, et il est ainsi conduit à l'énoncé suivant:[1] *Tout système du premier ordre, immédiat et passif, est complètement intégrable, c'est à dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales des fonctions arbitrairement choisies de leurs variables paramétriques.* Par exemple, le système (1), s'il est immédiat et passif, admettra, d'après cet énoncé, un groupe (unique) d'intégrales ordinaires u, v, w, se réduisant respectivement:

u à une fonction donnée de s pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$;

v à une fonction donnée de x et z pour $y - y_0 = s - s_0 = 0$;

w à une fonction donnée de x, y et s pour $z - z_0 = 0$.

On voit ainsi qu'en supposant rigoureusement établie la convergence des développements des intégrales, la solution générale d'un système (du premier ordre) immédiat et passif dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre précisément égal à celui des inconnues qui s'y trouvent engagées.

Finalement, et en ce qui concerne les systèmes différentiels quelconques, M. Méray admet que de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations et des réductions au premier ordre, permettent de les ramener à la forme immédiate passive.[2]

Comme je l'ai dit plus haut, la lecture approfondie de ce Mémoire a été le point de départ de tous mes travaux sur les systèmes différentiels partiels, et il va sans dire que, dans cette étude, j'ai examiné de très-près la démonstration de la convergence. Cette dernière m'ayant paru inexacte, je fis part de mes doutes à M. Méray, qui les trouva justifiés; les efforts qu'il fit pour modifier la démonstration le conduisirent même à la découverte de certains cas de divergence qu'il ne soupçonnait pas d'abord,[3] et il publia en 1890, avec ma collaboration, un nouveau Mémoire[4] où la convergence des développements des intégrales se trouvait établie, cette fois, d'une façon rigoureuse, mais, bien entendu, pour une partie seulement des systèmes immédiats primitivement étudiés. Ce Mémoire est reproduit presque en entier dans un ouvrage récent de

[1] Ibid., p. 249 et suiv.

[2] Ibid., p. 236, 265, 266.

[3] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1888, t. 106, p. 648.

[4] *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (Annales de l'Ecole Normale, 1890).

M. Méray,[1] et il y est accompagné de quelques indications sommaires sur la marche générale à suivre pour traiter un système quelconque;[2] la conclusion du Mémoire de 1880 s'y trouve, naturellement, modifiée, et M. Méray, au lieu de considérer les systèmes *immédiats* passifs comme le type fondamental auquel peut se ramener un système quelconque, assigne maintenant le même rôle aux systèmes *immédiats et réguliers* passifs, qui font l'objet du Mémoire de 1890: malheureusement, cette nouvelle conclusion n'est pas mieux établie que l'ancienne, et, à moins de recourir au changement des variables, qu'on doit, à mon avis, s'efforcer d'éviter, il me paraît peu probable qu'elle soit exacte. Quoi qu'il en soit, la connaissance des méthodes de M. Méray et la collaboration que je lui ai prêtée m'ont été, pour mes recherches personnelles, extrêmement profitables; nonobstant une erreur dans la démonstration de la convergence, ses travaux ont, dès 1880, mis en pleine lumière le fait suivant, qui se trouvait désormais acquis:

Si un système du premier ordre, quelle que soit d'ailleurs sa nature, satisfait à la double condition

1° *de la passivité,*

2° *de la convergence des développements des intégrales,*

sa solution générale dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre précisément égal à celui des inconnues qui s'y trouvent engagées.

Dans l'intervalle qui sépare la publication des deux Mémoires dont je viens de parler, M. König[3] avait établi les conditions d'intégrabilité absolue d'un système du premier ordre de forme telle, qu'en désignant par

$$z_1\,,\ z_2\,,\ \ldots,\ z_m$$

les fonctions inconnues, et par

$$x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_r\,,\ x_{r+1}\,,\ \ldots,\ x_n$$

---

[1] *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, 1ère partie, p. 310 et suiv.

[2] *Leçons nouvelles etc.*, p. 353 et suiv.

[3] J. König, *Über die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen* (Mathematische Annalen, t. 23, 1884).

les variables indépendantes, le système fût résoluble par rapport aux mr dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_m$ relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Ce type, dans lequel rentrent évidemment les systèmes partiels étudiés par CAUCHY et les systèmes d'équations différentielles totales, n'est lui-même qu'un simple cas particulier des systèmes étudiés par M. MÉRAY et moi en 1890.

Dans une thèse de doctorat publiée en 1891,[1] M. BOURLET parvint à établir qu'un système differentiel quelconque est réductible à une forme du premier ordre, dans laquelle la convergence des développements des intégrales est assurée; mais, sauf des cas fortuits, la forme dont il s'agit n'était point passive, et, par suite, ne faisait nullement connaître le nombre et la nature des éléments arbitraires dont dépendent les intégrales générales.

Ainsi, la question de l'existence des intégrales dans un système quelconque était encore loin de se trouver résolue. Depuis l'époque de ma collaboration avec M. MÉRAY, j'y avais sans cesse réfléchi, et, poursuivant le courant d'idées où cette collaboration m'avait engagé, je m'efforçais de la résoudre en la ramenant au problème suivant: *Etant donné un système différentiel quelconque* (que je supposais ne comprendre qu'un nombre limité d'équations), *le réduire, sauf constatation éventuelle d'incompatibilité, à un système du premier ordre où se trouve réalisée la double condition*: 1° *de la passivité;* 2° *de la convergence des développements des intégrales.* Toutefois, pour diverses raisons qu'il serait trop long d'indiquer ici, j'avais été induit à penser qu'en se bornant dès le début de la théorie, comme on avait coutume de le faire, à la considération exclusive des systèmes du premier ordre, on n'y introduisait qu'une simplification apparente, et même, à certains égards, une nouvelle complication. J'avais donc résolu de ne m'attacher en premier lieu qu'à la découverte d'une forme canonique complètement intégrable, sans m'inquiéter aucunement de l'ordre des équations; cette forme une fois obtenue, j'espérais pouvoir la ramener à une semblable d'ordre inférieur, et par suite au premier ordre. C'est ce qui arriva en effet. En 1892, je réussis à opérer la réduction d'un système quelconque à une forme complètement intégrable, et l'année suivante (1893) je substituai à celle-ci une forme de même nature, mais du pre-

[1] BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (thèse, avril 1891; Annales de l'Ecole Normale, 1891).

mier ordre, où se trouvaient engagées, avec les inconnues du système proposé, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes.[1] Il va sans dire que *l'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système* en vertu des explications données plus haut, *se trouvait par là même immédiatement connue dans le proposé*, et que, *dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépendait de fonctions* (*ou constantes*) *arbitraires en nombre fini.*[2]

Trois ans après, en 1896, M. DELASSUS,[3] à l'aide d'une méthode toute différente, essentiellement basée sur le changement des variables, donna une deuxième solution du problème dont je m'étais occupé: il réduisit tout système différentiel à une forme complètement intégrable,

---

[1] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 28 mars 1892, 27 février 1893, 24 avril 1893. — Annales de l'Ecole Normale, 1893. — Recueil des savants étrangers, t. 32, n° 3.

[2] J'insiste sur ce point, qui semble n'avoir pas été très-bien compris de quelques lecteurs: par le seul fait de la réduction à une forme passive *du premier ordre* où la convergence des développements des intégrales était assurée, la solution générale d'un système donné devait, comme je viens de l'expliquer, dépendre finalement de fonctions arbitraires en nombre fini, et ces fonctions se dégager d'elles-mêmes, sans que j'eusse besoin de m'en inquiéter autrement; mais il n'en eût pas été de même, si la forme à laquelle j'aboutissais en dernier lieu eût été d'ordre supérieur au premier. Ainsi, au début d'un Mémoire publié en 1894, M. TRESSE a formulé l'énoncé suivant: *Etant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, on peut, après un nombre limité de différentiations et d'éliminations, ou bien montrer qu'il est incompatible, ou bien le mettre sous forme d'un système en involution* (système passif) *dont la solution générale dépend alors, suivant les cas, de fonctions ou de constantes arbitraires* (Acta mathematica, 1894, p. 9). Or, en supposant établie la convergence des développements des intégrales (partie de la question que M. TRESSE ne se proposait pas d'examiner), il ressort uniquement de sa démonstration que, pour déterminer un groupe d'intégrales ordinaires de ce système en involution, *dont l'ordre est quelconque*, on peut se donner arbitrairement certaines portions de leurs développements respectifs, c'est-à-dire certaines constantes, en nombre le plus souvent infini, et qui, dans le cas général, ne se grouperont pas *d'elles-mêmes* en un nombre fini de fonctions. J'ajoute que M. TRESSE me semble avoir laissé dans l'ombre certains points importants, et n'avoir pas montré, par exemple, comment on peut, *à l'aide d'un nombre limité d'opérations*, s'assurer si les conditions d'intégrabilité d'un système donné se trouvent ou non satisfaites.

[3] *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (Annales de l'Ecole normale, 1896).

et, dans un énoncé trop long pour être rapporté ici,[1] il indiqua en détail les fonctions et constantes arbitraires dont se trouvait dépendre, après cette réduction, la solution générale.

De tous les auteurs dont je viens d'énumérer les travaux, deux seulement, M. Delassus et moi, ont traité d'une manière générale la question de l'existence des intégrales, et encore convient il d'observer que la méthode de M. Delassus, la dernière en date, tombe en défaut dans le cas où le changement des variables est à éviter; si l'on a affaire, notamment, à un système complètement intégrable,[2] dont on soit tenu, pour telle ou telle raison, de ne pas modifier la structure, il sera presque toujours impossible de le considérer comme appartenant au type canonique, de forme très-particulière, définie par ce géomètre, et d'appliquer les conclusions de l'énoncé auquel j'ai fait allusion plus haut. Bien que ma méthode me semblàt, en grande partie, échapper à ces inconvénients, je me suis efforcé, comme je l'ai dit, de l'améliorer au double point de vue du fond et de la forme. Par exemple, au lieu d'avoir recours, comme je l'avais fait jusqu'ici, à la réduction au premier ordre, pour fixer l'économie des conditions initiales qui déterminent entièrement une solution ordinaire de ma forme canonique, je substitue à ce procédé une méthode directe, dont l'emploi permet d'abréger, dans une mesure considérable, et les raisonnements de la théorie, et les calculs de la pratique. Je modifie également, pour aboutir à des conclusions plus larges, ma démonstration de la convergence des développements des intégrales. Enfin, la considération des *cotes*, qui peut, au premier abord, sembler bizarre et artificielle, mais à laquelle je suis redevable de tous mes résultats antérieurs, me fournit aujourd'hui le moyen, non seulement d'étendre ces résultats d'une manière notable, grâce à une généralisation de ma forme canonique,[3] mais encore d'en formuler quelques autres sur des systèmes non canoniques, et en particulier de généraliser un théorème de M. Goursat.[4]

---

[1] Annales de l'Ecole Normale, 1896, p. 461 et 462.

[2] C'est à dire remplissant la double condition: 1° de la passivité; 2° de la convergence des développements des intégrales.

[3] Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 27 décembre 1897.

[4] Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 6 décembre 1897 et 17 janvier 1898.

L'exposition détaillée de ces théories constitue l'objet du présent Mémoire.

La première partie est consacrée à la méthode nouvelle qui me sert à fixer, dans un système différentiel passif, l'économie des conditions initiales, c'est à dire des fonctions ou constantes, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques du système.[1]

Dans la deuxième partie, je définis une forme de système différentiel que je nomme *orthoïque*, j'établis les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit passive, et je montre, par divers exemples,[2] que les développements des intégrales hypothétiques n'y sont pas nécessairement convergents.

Dans la troisième partie, j'étudie un cas remarquable et très-étendu où cette convergence ne peut manquer d'avoir lieu: c'est celui des systèmes que je qualifie d'*orthonomes.*[3]

Dans la quatrième, je prouve qu'un système différentiel quelconque peut se ramener à la forme orthonome passive.

Dans la cinquième, j'établis diverses propositions relatives à des systèmes non orthonomes.

Enfin, dans l'Appendice qui fait suite au Mémoire, je montre, d'abord, que toutes les formes complètement intégrables étudiées jusqu'à ce jour sont de simples cas particuliers de la forme orthonome passive, et ensuite, que les résultats exposés par M. GOURSAT dans les Comptes Rendus du 2 novembre 1897 se trouvent contenus dans ceux que j'expose à la fin de la cinquième partie.

---

[1] Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 31 mai 1898.

[2] Voir les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 13 décembre 1897.

[3] Je tiens à faire observer dès maintenant que le mot *orthonome*, tel qu'il se trouve défini dans le présent Mémoire, possède une signification plus large que dans mes travaux antérieurs. Consulter à ce sujet l'Appendice qui fait suite au Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

Problème préliminaire.

1. En désignant par $x, y, z, \ldots$ des variables indépendantes en nombre quelconque, par $x_0, y_0, z_0, \ldots$ des valeurs particulières attribuées à ces variables, et par $R_x, R_y, R_z, \ldots$ des constantes positives, nous dirons qu'une fonction de $x, y, z, \ldots$ est *développable dans le domaine* $(R_x, R_y, R_z, \ldots)$ *des valeurs particulières* $x_0, y_0, z_0, \ldots$, si, pour toutes valeurs de $x, y, z, \ldots$ satisfaisant aux relations $\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x$, $\operatorname{mod}(y - y_0) < R_y$, $\operatorname{mod}(z - z_0) < R_z, \ldots$, elle est représentable par la somme d'une certaine série entière en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$. Les quantités $R_x, R_y, R_z, \ldots$ se nomment les *rayons* du domaine.

D'après cela, l'expression la plus générale d'une fonction de $x, y, z, \ldots$ développable dans quelque domaine des valeurs initiales $x_0, y_0, z_0, \ldots$, s'obtiendra par la considération d'une série entière en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$ dont tous les coefficients sont arbitraires, et soumis, dans leur ensemble, à la seule restriction de la convergence. Un pareil développement, à coefficients *tous* indéterminés, constitue ce que nous appellerons une *fonction schématique* de $x, y, z, \ldots$; si le nombre des variables indépendantes se réduit à zéro, la fonction schématique dégénère en une *constante schématique*.

On dit qu'un monome

$$A(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta (z - z_0)^\gamma \ldots,$$

entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$, est *divisible* par un monome de même espèce

$$A'(x - x_0)^{\alpha'} (y - y_0)^{\beta'} (z - z_0)^{\gamma'} \ldots,$$

si aucune des différences

$$\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', \ldots$$

n'est négative. Il est clair que si un premier monome est divisible par un second, et celui-ci divisible par un troisième, le premier l'est forcément par le troisième: car les relations évidentes

$$\begin{aligned} \alpha-\alpha'' &= (\alpha-\alpha')+(\alpha'-\alpha''), \\ \beta-\beta'' &= (\beta-\beta')+(\beta'-\beta''), \\ \gamma-\gamma'' &= (\gamma-\gamma')+(\gamma'-\gamma''), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ne peuvent contenir dans leurs premiers membres quelque différence négative, que si elles en contiennent quelqu'une dans leurs seconds membres.

Cela posé, considérons un ensemble *limité* E, formé avec des monomes, de coefficient 1, entiers par rapport aux différences $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, ...; si, dans le développement de notre fonction schématique, on supprime tous les termes qui admettent pour diviseur quelqu'un des monomes de cet ensemble, nous dirons que la portion restante du développement est le *résidu* de la *coupure* E, pratiquée dans le développement total. On peut d'ailleurs, sans changer le résidu, négliger dans l'ensemble E les termes que nous nommerons *superflus*, c'est à dire ceux qui admettent pour diviseur quelque autre terme du même ensemble.

2. *Le résidu d'une coupure E, pratiquée dans le développement d'une fonction schématique de x, y, z, ..., peut être mis sous la forme*

$$\sum_{n=1}^{n=g}(x-x_0)^{a_n}(y-y_0)^{b_n}(z-z_0)^{c_n}\ldots F_{\theta_n}, \tag{2}$$

où a_n, b_n, c_n, ... désignent des entiers positifs ou nuls, θ_n un groupe de variables indépendantes extrait du groupe total x, y, z, ..., et F_{θ_n} une fonction schématique des seules variables θ_n; les termes élémentaires provenant du développement de l'expression (2) quand on y remplace les fonctions schématiques

$$F_{\theta_1}, F_{\theta_2}, \ldots, F_{\theta_g} \tag{3}$$

par leurs développements respectifs, sont tous dissemblables en $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, ...

I. *Notre proposition est exacte, si dans l'ensemble E ne figure effectivement qu'une seule des différences $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, ...*

Car, après la suppression des termes superflus, l'ensemble E se compose d'un monome unique tel que $(x - x_0)^\alpha$, et le résidu de la coupure est alors évidemment

$$(4) \qquad F_0(y, z, \ldots) + (x - x_0)F_1(y, z, \ldots) + (x - x_0)^2 F_2(y, z, \ldots) + \cdots + (x - x_0)^{\alpha-1} F_{\alpha-1}(y, z, \ldots),$$

où $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{\alpha-1}$ désignent α fonctions schématiques des seules variables $y, z, \ldots$; on a ainsi une expression satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

II. *Si notre proposition est exacte dans le cas où l'ensemble E contient effectivement moins de $k + 1$ différences, elle l'est encore dans le cas où il en contient $k + 1$.*

Le point à établir est évident si, après la suppression des termes superflus, le nombre des différences figurant effectivement dans l'ensemble donné tombe au dessous de $k + 1$.

Si ce nombre reste égal à $k + 1$, supposons, pour fixer les idées, que $x - x_0$ soit une des $k + 1$ différences dont il s'agit, désignons par α l'exposant maximum dont elle se trouve affectée dans l'ensemble, et partageons ce dernier en plusieurs autres

$$E^0, E^1, \ldots, E^{\alpha-1}, E^\alpha,$$

suivant que, dans les divers termes de E, la différence $x - x_0$ figure avec l'un ou l'autre des exposants

$$0, 1, \ldots, \alpha - 1, \alpha.$$

En supposant, comme nous le faisons, que l'ensemble E ait été débarrassé de ses termes superflus, les monomes

$$x - x_0, (x - x_0)^2, \ldots, (x - x_0)^{\alpha-1}$$

sont absents des ensembles respectifs

$$(5) \qquad E^1, E^2, \ldots, E^{\alpha-1},$$

sans quoi les termes de E^α admettraient pour diviseur quelque terme des ensembles (5); quant à l'ensemble E^a, il peut, suivant les cas, contenir ou non le monome $(x - x_0)^a$. Cela étant, nous désignerons par

$$e^1, e^2, \ldots, e^{a-1}$$

les ensembles respectivement déduits de (5) en remplaçant par zéro, dans chacun de leurs termes, l'exposant de $x - x_0$, sans changer les exposants des autres différences; et, dans l'hypothèse où E^a ne contiendrait pas le monome $(x - x_0)^a$, nous nommerons e^a l'ensemble déduit de E^a par la même opération. En posant, pour raison de symétrie, $e^0 = E^0$, il est clair que dans la totalité des ensembles

$$e^0, e^1, \ldots, e^{a-1}, e^a$$

figurent au plus k différences.

Enfin, décomposons par la pensée le résidu de la coupure E en divers tronçons, comprenant respectivement: le premier, les termes indépendants de $x - x_0$; le second, les termes du premier degré en $x - x_0$; etc.; l'avant-dernier, les termes de degré $a - 1$ en $x - x_0$; et le dernier, tous les termes restants, c'est-à-dire ceux qui sont d'un degré *au moins égal à* a par rapport à cette différence. Le résidu de la coupure peut alors s'écrire

$$(6) \qquad \begin{aligned} &T_0(y, z, \ldots) + (x - x_0) T_1(y, z, \ldots) + \cdots \\ &+ (x - x_0)^{a-1} T_{a-1}(y, z, \ldots) + (x - x_0)^a T(x, y, z, \ldots), \end{aligned}$$

et il s'agit de déterminer les formes respectives des expressions

$$(7) \qquad T_0(y, z, \ldots), \; T_1(y, z, \ldots), \; \ldots, \; T_{a-1}(y, z, \ldots), \; T(x, y, z, \ldots).$$

Considérons à cet effet les deux monomes

$$(8) \qquad (x - x_0)^a (y - y_0)^b (z - z_0)^c \cdots,$$

$$(9) \qquad (y - y_0)^b (z - z_0)^c \cdots,$$

dont le second se déduit du premier en y remplaçant l'exposant a par zéro. Pour que le monome (8) n'admette comme diviseur aucun des termes de l'ensemble E, il faut et il suffit:

si $a = 0$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de e^0;

si $a = 1$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1]$;

si $a = 2$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1, e^2]$;

etc.;

si $a = \alpha - 1$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun terme de $[e^0, e^1, e^2, \ldots, e^{\alpha-1}]$.

Il suffira donc, pour connaître successivement

$$T_0(y, z, \ldots), \quad T_1(y, z, \ldots), \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}(y, z, \ldots),$$

de pratiquer, dans le développement d'une fonction schématique des seules variables $y, z, \ldots$, les coupures respectives

$$[e^0], [e^0, e^1], \ldots, [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}].$$

Reste à calculer $T(x, y, z, \ldots)$. Si l'ensemble E^α contient le monome $(x - x_0)^\alpha$, $T(x, y, z, \ldots)$ est identiquement nul. Dans le cas contraire, on observera qu'en supposant $a \geqq \alpha$, la condition nécessaire et suffisante pour que le monome (8) ne soit divisible par aucun terme de E, est que le monome

$$(x - x_0)^{a-\alpha}(y - y_0)^b(z - z_0)^c \ldots$$

ne soit divisible par aucun terme de

$$(10) \qquad [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}, e^\alpha];$$

en conséquence, il suffira, pour connaître $T(x, y, z, \ldots)$, de pratiquer la coupure (10) dans le développement d'une fonction schématique de *toutes* les variables $x, y, z, \ldots$.

Ainsi, le calcul des expressions (7) peut s'effectuer par des coupures opérées à l'aide d'ensembles où les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0, \ldots$ figurent en nombre au plus égal à k. Un simple coup d'oeil jeté sur la formule (6) nous montre alors que notre théorème, supposé exact dans ce dernier cas, ne cesse pas de l'être quand ces différences figurent en nombre $k + 1$ dans l'ensemble donné.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

3. Supposons que le résidu d'une coupure E, pratiquée dans le développement d'une fonction schématique de $x, y, z, \ldots$, ait été mis sous la forme (2), définie au numéro précédent; et désignons par ω_n le groupe de variables complémentaire du groupe θ_n, c'est à dire tel, que l'ensemble des deux groupes θ_n, ω_n reproduise une fois et une seule chacune des variables indépendantes $x, y, z, \ldots$. Si, considérant le développement (sans coupure) de notre fonction schématique, on en prend la dérivée d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n, \ldots$, et qu'on attribue ensuite aux variables ω_n leurs valeurs initiales, on tombe sur un développement, Φ_{θ_n}, ne dépendant évidemment, comme F_{θ_n}, que des variables θ_n.

Cela étant, *les deux développements $F_{\theta_n}, \Phi_{\theta_n}$ convergent dans les mêmes limites, et la connaissance de l'un équivaut à celle de l'autre.*

I. *Si, sur un développement entier en $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \ldots$, contenant comme facteur commun dans tous ses termes le monome*

$$(x - x_0)^{a_n}(y - y_0)^{b_n}(z - z_0)^{c_n} \ldots, \tag{11}$$

on effectue la dérivation d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n, \ldots$, il suffit, pour remonter du développement ainsi obtenu au premier, d'effectuer sur lui a_n quadratures relatives à x, b_n relatives à y, c_n relatives à z, etc., en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse.

Cette remarque, que l'on vérifie sans peine pour un terme quelconque du développement donné, s'applique par là même au développement tout entier.

II. Si un terme du développement schématique de notre fonction ne contient pas en facteur le monome (11), la dérivation d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n \ldots$, exécutée sur le terme dont il s'agit, donnera pour résultat zéro. Si un terme du même développement contient en facteur le monome (11), et si, abstraction faite de ce facteur, il dépend de quelqu'une des variables du groupe ω_n, la dérivation d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n, \ldots$, puis l'attribution dans le résultat aux variables ω_n de leurs valeurs initiales, donneront encore un résultat nul. Il suffit donc, pour effectuer l'opération indiquée par l'énoncé, de considérer, dans le développement schématique de notre fonction, l'ensemble des termes qui contiennent en facteur le monome (11), et qui, abstraction faite de ce facteur, dépendent des seules variables θ_n.

Or, les termes dont il s'agit sont précisément ceux que contient l'expression

$$(x-x_0)^{a_n}(y-y_0)^{b_n}(z-z_0)^{c_n}\dots F_{\theta_n};$$

car, s'il en existait d'autres dans la portion (2) du développement, cette dernière contiendrait, contrairement à ce qui a lieu, plusieurs termes schématiques semblables; et, s'il en existait d'autres dans la portion restante, les deux portions contiendraient des termes schématiques respectivement semblables, ce qui est absurde. Il suffit donc, pour passer de F_{θ_n} à Φ_{θ_n}, de multiplier F_{θ_n} par le monome (11), et d'exécuter sur le résultat la dérivation d'ordres partiels $a_n, b_n, c_n, \dots$. Inversement, pour passer de Φ_{θ_n} à F_{θ_n}, on exécutera, sur Φ_{θ_n}, a_n quadratures relatives à x, b_n relatives à y, c_n relatives à z, etc., en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse (I), puis on supprimera, dans le développement ainsi obtenu, le facteur commun (11).

Dans le cas où le monome (11) ne contient *effectivement* aucune des variables θ_n, il est clair que les deux fonctions F_{θ_n}, Φ_{θ_n} ne diffèrent que par un facteur numérique, et que l'on a

$$\Phi_{\theta_n} = 1.2\dots a_n \times 1.2\dots b_n \times 1.2\dots c_n \times \dots \times F_{\theta_n}.$$

4. Supposons que, dans une question quelconque, on ait à considérer une fonction inconnue u des variables $x, y, z, \dots$, et le développement de cette fonction à partir des valeurs particulières $x_0, y_0, z_0, \dots$; supposons en outre que, parmi les données de la question, doive figurer le résidu d'une certaine coupure, pratiquée dans le développement dont il s'agit. Pour formuler une pareille donnée, on commencera par mettre ce résidu sous la forme (2), en y laissant provisoirement tous les coefficients indéterminés; cela fait:

Ou bien on se donnera les g fonctions (3) qui figurent dans l'expression (2);

Ou bien, faisant successivement $n = 1, 2, \dots, g$, on se donnera **la** fonction des variables θ_n à laquelle se réduit $\frac{\partial^{a_n+b_n+c_n+\cdots} u}{\partial x^{a_n}\partial y^{b_n}\partial z^{c_n}\cdots}$ par l'attribution aux variables ω_n de leurs valeurs initiales.

Moyennant le recours éventuel à des quadratures, cette seconde donnée est, comme nous l'avons vu (3), entièrement équivalente à la première.

Par exemple, si l'ensemble E se réduit au terme unique $(x-x_0)^\alpha$, la donnée, dans une question quelconque, du résidu de la coupure E, pratiquée dans le développement de u, pourra se formuler: soit par celle des α fonctions

$$F_0(y,z,\ldots)\,,\ F_1(y,z,\ldots)\,,\ \ldots\,,\ F_{\alpha-1}(y,z,\ldots),$$

qui figurent dans l'expression (4); soit par celle des α fonctions de $y,z,\ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$u\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}\,,\ \ldots\,,\ \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x=x_0$.

5. Eclaircissons ce qui précède par d'autres exemples.

I. Considérons une fonction schématique u des variables $x,y,z,\ldots$, et supposons que l'ensemble E, à l'aide duquel on veut pratiquer une coupure dans le développement de cette fonction, se compose du terme unique $(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta$, où α et β sont l'un et l'autre supérieurs à zéro. En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinea II du n° 2, on voit que les ensembles $E^0, E^1, \ldots, E^{\alpha-1}$ n'existent pas, et que l'ensemble E^α se réduit à $(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta$; que, par suite, les ensembles $e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}$ n'existent pas, et que l'ensemble e^α se réduit à $(y-y_0)^\beta$. Les expressions

$$T_0(y,z,\ldots)\,,\ T_1(y,z,\ldots)\,,\ \ldots\,,\ T_{\alpha-1}(y,z,\ldots)$$

se réduisent donc à de simples fonctions schématiques des seules variables $y,z,\ldots$. Quant à l'expression $T(x,y,z,\ldots)$, elle s'obtiendra en pratiquant la coupure $(y-y_0)^\beta$ dans le développement d'une fonction schématique de toutes les variables $x,y,z,\ldots$. Il vient ainsi (2, I) pour l'expression (6):

$$(15)\quad F_0(y,z,\ldots)+(x-x_0)F_1(y,z,\ldots)+\ldots+(x-x_0)^{\alpha-1}F_{\alpha-1}(y,z,\ldots)$$
$$+(x-x_0)^{\alpha}[H_0(x,z,\ldots)+(y-y_0)H_1(x,z,\ldots)+\ldots$$
$$+(y-y_0)^{\beta-1}H_{\beta-1}(x,z,\ldots)],$$

où $F_0, F_1, \ldots, F_{\alpha-1}$ désignent des fonctions schématiques de $y, z, \ldots$, et $H_0, H_1, \ldots, H_{\beta-1}$ des fonctions schématiques de $x, z, \ldots$.

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E, pourra se formuler:

soit par celle des $\alpha+\beta$ fonctions

$$F_0(y,z,\ldots),\ F_1(y,z,\ldots),\ \ldots,\ F_{\alpha-1}(y,z,\ldots),$$
$$H_0(x,z,\ldots),\ H_1(x,z,\ldots),\ \ldots,\ H_{\beta-1}(x,z,\ldots)$$

qui figurent dans l'expression (15);

soit par celle: 1° des α fonctions de $y, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha-1}u}{\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x=x_0$; 2° des β fonctions de $x, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial x^{\alpha}},\ \frac{\partial^{\alpha+1}u}{\partial x^{\alpha}\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha+\beta-1}u}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta-1}}$$

pour $y=y_0$.

Il est clair qu'en permutant, dans l'opération précédente, les rôles respectifs des variables x et y, on arrivera, pour la portion considérée du développement de u, à la forme

$$(16)\quad P_0(x,z,\ldots)+(y-y_0)P_1(x,z,\ldots)+\ldots+(y-y_0)^{\beta-1}P_{\beta-1}(x,z,\ldots)$$
$$+(y-y_0)^{\beta}[Q_0(y,z,\ldots)+(x-x_0)Q_1(y,z,\ldots)+\ldots$$
$$+(x-x_0)^{\alpha-1}Q_{\alpha-1}(y,z,\ldots)].$$

Dans une question quelconque, la donnée de cette portion de développement pourra donc encore se formuler:

soit par celle des $\alpha+\beta$ fonctions

$$P_0(x,z,\ldots)\,,\ P_1(x,z,\ldots)\,,\ \ldots\,,\ P_{\beta-1}(x,z,\ldots),$$
$$Q_0(y,z,\ldots)\,,\ Q_1(y,z,\ldots)\,,\ \ldots\,,\ Q_{\alpha-1}(y,z,\ldots)$$

qui figurent dans l'expression (16);

soit par celle: 1° des β fonctions de $x, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$u\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}\,,\ \ldots\,,\ \frac{\partial^{\beta-1} u}{\partial y^{\beta-1}}$$

pour $y=y_0$; 2° des α fonctions de $y, z, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta}\,,\ \frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial y^\beta \partial x}\,,\ \ldots\,,\ \frac{\partial^{\beta+\alpha-1} u}{\partial y^\beta \partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x=x_0$.

II. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z, et un ensemble E composé du terme unique $(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)$. En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinea II du n° 2, on voit que $\alpha=1$, que l'ensemble E^0 n'existe pas, et que l'ensemble E^α ou E^1 se réduit à $(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0)$; que, par suite, l'ensemble e^α ou e^1 se réduit à $(y-y_0)(z-z_0)$. Dans la formule

$$T_0(y,z)+(x-x_0)\,T(x,y,z), \tag{17}$$

l'expression $T_0(y,z)$ se réduit donc à une fonction schématique des seules variables y, z, et l'expression $T(x,y,z)$ s'obtiendra en pratiquant la coupure $(y-y_0)(z-z_0)$ dans le développement d'une fonction schématique des trois variables x, y, z. On a ainsi, conformément à l'exemple I,

$$T(x,y,z)=H(x,z)+(y-y_0)\,P(x,y),$$

et la formule (17) devient alors

$$F(y,z)+(x-x_0)\,H(x,z)+(x-x_0)(y-y_0)\,P(x,y), \tag{18}$$

où $F(y,z)$, $H(x,z)$, $P(x,y)$ désignent trois fonctions schématiques.

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u obtenue comme résidu de la coupure E, pourra se formuler:

soit par celle des trois fonctions $F(y, z)$, $H(x, z)$, $P(x, y)$, qui figurent dans l'expression (18);

soit par celle: 1° de la fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x = x_0$; 2° de la fonction de x et z à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $y = y_0$; 3° de la fonction de x et y à laquelle se réduit $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $z = z_0$.

En permutant d'une façon quelconque, dans l'opération précédente, les rôles respectifs des trois variables x, y, z, on arrivera, pour la portion considérée du développement schématique, à une forme se déduisant de (18) par la permutation dont il s'agit. Comme il existe six permutations de trois objets, on obtiendra en tout six formes, de chacune desquelles on déduira, comme ci-dessus, deux manières de formuler la donnée de cette portion de développement.

III. Si l'ensemble E se compose uniquement de monomes du premier degré, par exemple de $x - x_0$ et $y - y_0$, il est clair que le résidu de la coupure E est une fonction schématique de toutes les variables autres que x et y, et que la donnée, dans une question quelconque, de cette portion du développement de u se formulera par celle de la fonction à laquelle doit se réduire u pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$.

IV. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z, et supposons que l'ensemble E se compose des deux termes

$$(x - x_0)(y - y_0)\ ,\ (x - x_0)(z - z_0).$$

En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinea II du n° 2, on voit que l'ensemble E^0 n'existe pas, et que l'ensemble E^a ou E^1 se compose des deux termes ci-dessus; que, par suite, l'ensemble e^a ou e^1 se compose des deux termes

$$y - y_0\ ,\ z - z_0. \tag{19}$$

Dans la formule (17), l'expression $T_0(y, z)$ se réduit donc à une fonction schématique des seules variables y et z, et l'expression $T(x, y, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure (19) dans le développement d'une fonction schématique de x, y, z; conformément à l'exemple précédent, $T(x, y, z)$ est alors une fonction schématique de la variable x, et l'expression (17) prend la forme

$$F(y,z)+(x-x_0)H(x) \tag{20}$$

où $F(y,z)$, $H(x)$ désignent deux fonctions schématiques.

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E, pourra se formuler:

soit par celle des deux fonctions $F(y,z)$, $H(x)$ qui figurent dans l'expression (20);

soit par celle: 1° de la fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x-x_0=0$; 2° de la fonction de x à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $y-y_0=z-z_0=0$.

V. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z, et supposons que l'ensemble E se compose des trois termes

$$x-x_0\,,\ (y-y_0)(z-z_0)\,,\ (y-y_0)^3.$$

L'entier α est ici égal à 1, l'ensemble E^0 se compose des deux termes

$$(y-y_0)(z-z_0)\,,\ (y-y_0)^3, \tag{21}$$

et l'ensemble E^1 du terme unique $x-x_0$; l'expression $T(x,y,z)$, qui figure dans la formule (17), est donc identiquement nulle, et l'expression $T_0(y,z)$ s'obtient en pratiquant la coupure (21) dans le développement d'une fonction schématique des seules variables y et z. En ordonnant l'ensemble (21) par rapport aux puissances croissantes de $y-y_0$, et appliquant la méthode exposée au n° 2, on voit immédiatement: 1° que l'expression $T_0(y,z)$ est de la forme

$$S_0(z)+(y-y_0)S_1(z)+(y-y_0)^2S_2(z)+(y-y_0)^3S(y,z);$$

2° que $S(y,z)$ est identiquement nul; 3° que $S_0(z)$ est une fonction schématique de z; 4° que $S_1(z)$ et $S_2(z)$ s'obtiennent en pratiquant la coupure $z-z_0$ dans le développement d'une fonction schématique de z, et se réduisent par conséquent à des constantes schématiques.

En définitive, on obtient, pour la portion du développement schématique résultant de la coupure E, l'expression

$$F(z)+A(y-y_0)+B(y-y_0)^2, \tag{22}$$

où A, B désignent deux constantes schématiques, et $F(z)$ une fonction schématique.

Cela étant, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure dont il s'agit, pourra se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et de la fonction $F(z)$, qui figurent dans l'expression (22);

soit par celle: 1° de la fonction de z à laquelle se réduit u pour $x-x_0=y-y_0=0$; 2° des valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ pour $x-x_0=y-y_0=z-z_0=0$.

VI. Considérons une fonction schématique des trois variables x, y, z, et supposons que l'ensemble E se compose des quatre termes

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2\,,\ (x-x_0)^2(y-y_0)\,,\ (y-y_0)(z-z_0)\,,\ (y-y_0)^2.$$

En ordonnant l'ensemble E par rapport aux puissances croissantes de $y-y_0$, on obtient les trois ensembles

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2\ ;\ [(x-x_0)^2(y-y_0)\,,(y-y_0)(z-z_0)]\ ;\ (y-y_0)^2.$$

La portion du développement schématique provenant de la coupure E est donc de la forme

$$T_0(x, z)+(y-y_0)\,T_1(x, z)+(y-y_0)^2\,T(x, y, z),$$

et l'on voit, par l'application de notre méthode: 1° que $T(x, y, z)$ est identiquement nul; 2° que $T_0(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(x-x_0)^2(z-z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique des seules variables x et z; 3° que $T_1(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2\,,\ (x-x_0)^2\,,\ z-z_0,$$

ou, ce qui revient au même, la coupure

$$(x-x_0)^2\,,\ z-z_0$$

dans le développement d'une fonction schématique des seules variables x et z.

En calculant, d'aprés cela, les expressions $T_0(x, z)$, $T_1(x, z)$, on trouvera: 1° qu'elles ont respectivement les formes

$$T_0(x, z) = S_0(z) + (x - x_0) S_1(z) + (x - x_0)^2 S(x, z),$$
$$T_1(x, z) = U_0(x) + (z - z_0) U(x, z);$$

2° que $U(x, z)$ est identiquement nul, que $S(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(z - z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x et z, que $S_0(z)$ et $S_1(z)$ sont des fonctions schématiques de z, et que $U_0(x)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(x - x_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x. Il vient ainsi:

$$(23) \quad T_0(x, z) = F_0(z) + (x - x_0) F_1(z) + (x - x_0)^2 [H_0(x) + (z - z_0) H_1(x)],$$
$$T_1(x, z) = A + B(x - x_0),$$

où A, B désignent des constantes schématiques, et $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$ des fonctions schématiques; on en déduit, pour la portion de développement cherchée,

$$(24) \quad F_0(z) + (x - x_0) F_1(z) + (x - x_0)^2 H_0(x) + (x - x_0)^2 (z - z_0) H_1(x)$$
$$+ A(y - y_0) + B(x - x_0)(y - y_0).$$

En conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure E, pourra se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et des quatre fonctions $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$, qui figurent dans l'expression (24);

soit par celle: 1° des deux fonctions de z auxquelles se réduisent respectivement u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$; 2° des deux fonctions de x auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$ pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$; 3° des deux valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$.

Le calcul de l'expression $T_0(x, z)$ s'effectue, comme nous venons de le voir, en pratiquant la coupure $(x - x_0)^2 (z - z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x et z, et l'on tombe ainsi sur l'expression (23). Or, il est clair qu'en permutant, dans cette opération, les rôles respectifs des variables x et z, on obtiendra

$$T_0(x, z) = P_0(x) + (z - z_0)P_1(x) + (z - z_0)^2[Q_0(z) + (x - x_0)\,Q_1(z)].$$

La portion de développement schématique provenant de la coupure E peut donc aussi se mettre sous la forme

$$(25)\quad \begin{aligned} P_0(x) + (z - z_0)P_1(x) + (z - z_0)^2 Q_0(z) + (z - z_0)^2(x - x_0)\,Q_1(z) \\ + A(y - y_0) + B(x - x_0)(y - y_0), \end{aligned}$$

où A, B désignent deux constantes schématiques et $P_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_0(z)$, $Q_1(z)$ quatre fonctions schématiques; et, en conséquence, la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u provenant de la coupure dont il s'agit, pourra encore se formuler:

soit par celle des deux constantes A, B et des quatre fonctions $P_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_0(z)$, $Q_1(z)$, qui figurent dans l'expression (25);

soit par celle: 1° des deux fonctions de x auxquelles se réduisent respectivement u et $\frac{\partial u}{\partial z}$ pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$; 2° des deux fonctions de z auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$; 3° des deux valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$.

5'. Soient $u, v, \ldots$ diverses fonctions schématiques (en nombre limité) des variables $x, y, z, \ldots$. Considérant un ensemble *limité* formé avec des dérivées de $u, v, \ldots$, convenons de dire qu'une dérivée quelconque de l'une des fonctions $u, v, \ldots$ est *principale* relativement à cet ensemble, si elle coïncide avec quelqu'un des termes de l'ensemble ou quelqu'une de leurs dérivées; convenons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique* par rapport à l'ensemble.

Cela posé, si, dans les développements respectifs de $u, v, \ldots$, on considère exclusivement les termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales de ces fonctions et de leurs dérivées paramétriques de tous ordres, il est facile de voir que ces portions de développements peuvent s'obtenir à l'aide de coupures. Par exemple, si les dérivées de u figurant dans l'ensemble donné ont pour ordres partiels respectifs, relativement à $x, y, z, \ldots,$

$$\begin{array}{l} \alpha', \beta', \gamma', \ldots, \\ \alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots, \\ \alpha''', \beta''', \gamma''', \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

il suffira, pour obtenir la portion considérée du développement de u, de pratiquer dans son développement total la coupure

$$\begin{cases} (x-x_0)^{\alpha'}(y-y_0)^{\beta'}(z-z_0)^{\gamma'}\ldots, \\ (x-x_0)^{\alpha''}(y-y_0)^{\beta''}(z-z_0)^{\gamma''}\ldots, \\ (x-x_0)^{\alpha'''}(y-y_0)^{\beta'''}(z-z_0)^{\gamma'''}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On résout ainsi, de la manière la plus simple, un problème qui se présente sans cesse dans l'étude des systèmes différentiels.

DEUXIÈME PARTIE.

Systèmes orthoïques; conditions de passivité; divergence éventuelle des développements des intégrales hypothétiques.

6. Soient

$$x\,,\,y\,,\,\ldots\,,$$

$$u\,,\,v\,,\,\ldots\,,$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les autres diverses fonctions de ces variables. A chacune des quantités

$$x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,u\,,\,v\,,\,\ldots$$

faisons correspondre p entiers, positifs, nuls ou négatifs, que nous nommerons respectivement *cote première, cote seconde, ..., cote* $p^{\text{ième}}$ de cette quantité, les entiers dont il s'agit étant assujettis à la seule restriction, que *la cote première de toute variable indépendante* soit *positive et au moins égale à* 1. Considérons ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions $u, v, \ldots$, et nommons *cote* $q^{\text{ième}}$ $(q = 1\,,\,2\,,\ldots,p)$ de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction les cotes $q^{\text{ièmes}}$ de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non. Désignons enfin par $\delta\,,\,\delta'$ deux quantités appartenant à l'ensemble que forment les fonctions $u\,,\,v\,,\,\ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, par

$$c_1\,,\,c_2\,,\,\ldots\,,\,c_p,$$

$$c'_1\,,\,c'_2\,,\,\ldots\,,\,c'_p$$

les cotes respectives de ces deux quantités, et convenons de dire que δ' est *normale* ou *anormale* par rapport à δ, suivant que les différences

$$c_1 - c'_1\,,\,c_2 - c'_2\,,\,\ldots\,,\,c_p - c'_p \tag{26}$$

satisfont ou non à la double condition: 1° que ces différences ne soient pas toutes nulles; 2° que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive.

Cela étant:

1° *Suivant que la quantité δ' est normale ou anormale vis à vis de la quantité δ, la dérivée $\frac{\partial^{a+b+\cdots}\delta'}{\partial x^a \partial y^b \ldots}$ possède l'une ou l'autre propriété vis à vis de la dérivée $\frac{\partial^{a+b+\cdots}\delta}{\partial x^a \partial y^b \ldots}$.*

Car, en désignant par

$$g_1, g_2, \ldots, g_p,$$
$$h_1, h_2, \ldots, h_p,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

les cotes respectives de $x, y, \ldots$, les différences (26) sont respectivement égales aux différences

$$(c_1 + ag_1 + bh_1 + \ldots) - (c'_1 + ag_1 + bh_1 + \ldots),$$
$$(c_2 + ag_2 + bh_2 + \ldots) - (c'_2 + ag_2 + bh_2 + \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(c_p + ag_p + bh_p + \ldots) - (c'_p + ag_p + bh_p + \ldots).$$

2° *Si la quantité δ'' est normale vis à vis de la quantité δ', et celle-ci normale vis à vis de la quantité δ, la première, δ'', jouit de la même propriété vis à vis de la dernière, δ.*

Si l'on désigne en effet par $c''_1, c''_2, \ldots, c''_p$ les cotes de δ'', et si l'on considère les différences

$$c_1 - c'_1, \; c_2 - c'_2, \; \ldots, \; c_p - c'_p,$$
$$c'_1 - c''_1, \; c'_2 - c''_2, \; \ldots, \; c'_p - c''_p,$$
$$c_1 - c''_1, \; c_2 - c''_2, \; \ldots, \; c_p - c''_p,$$

rangées, comme nous venons de les écrire, en un tableau rectangulaire, il résulte de nos hypothèses que, dans chacune des deux premières lignes horizontales du tableau, les différences ne sont pas toutes nulles, et que la première non égale à zéro y est positive; comme d'ailleurs le dernier terme de chaque colonne verticale est égal à la somme des deux termes placés au dessus de lui, la dernière ligne horizontale jouit évidemment de la même propriété que les deux premières.

7. *Les quantités* $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ *étant affectées chacune de* p *cotes, conformément aux indications du n°* 6, *tout ensemble illimité formé avec des dérivées de* $u, v, \ldots$ *se partage, suivant une loi déterminée, en ensembles limités successifs satisfaisant à la condition suivante:*

Si l'on considère deux dérivées appartenant à l'ensemble illimité donné, l'une d'elles est normale ou anormale relativement à l'autre, suivant que l'ensemble partiel où elle figure précède ou non celui de cette autre.

Observons tout d'abord qu'en désignant par φ la cote première minima des diverses fonctions $u, v, \ldots$, toute dérivée d'ordre n de ces dernières aura une cote première au moins égale à $n + \varphi$, puisque la cote première de toute variable indépendante est au moins égale à 1. Il résulte de là: 1° que la cote première d'une dérivée d'ordre quelconque ne tombe jamais au dessous de $1 + \varphi$; 2° qu'en désignant par c un entier déterminé quelconque, au moins égal à $1 + \varphi$, le nombre des dérivées possédant une cote première égale à c est essentiellement limité.

Cela posé, on partagera d'abord les dérivées de l'ensemble illimité en ensembles successifs d'après leurs cotes premières croissantes; chaque ensemble ainsi obtenu sera, toutes les fois qu'il y aura lieu, partagé en ensembles partiels successifs d'après les cotes secondes croissantes des dérivées qui le composent; puis, chacun des ensembles résultants en ensembles partiels successifs d'après les cotes troisièmes croissantes de ses termes; et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. L'ensemble illimité se trouvera finalement partagé en ensembles limités se succédant suivant une certaine loi, et l'on voit immédiatement que, par rapport à une dérivée quelconque figurant dans l'ensemble partiel de rang N, les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $1, 2, \ldots, N - 1$ sont toutes normales, tandis que les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $N, N + 1, \ldots$ sont toutes anormales.

8. Supposons actuellement que l'on se donne un ensemble *limité* formé avec des dérivées de $u, v, \ldots$; puis, considérant, parmi les dérivées de $u, v, \ldots$, celles qui sont principales relativement à cet ensemble (5′), partageons-les,

conformément aux indications du n° 7, en ensembles limités successifs, et convenons de dire qu'une dérivée principale est de *classe* $1, 2, 3, \ldots$, suivant qu'elle appartient au premier, au second, au troisième, ... des ensembles successifs dont il s'agit.

Cela posé, et en vertu du théorème précédent (7), *toute dérivée principale est normale ou anormale relativement à une autre, suivant qu'elle est ou non de classe inférieure à cette autre.*

On observera que *toute dérivée de quelque dérivée principale est de classe supérieure à cette dernière:* car, la cote première de toute variable indépendante étant au moins égale à 1, toute différentiation exécutée sur quelqu'une des fonctions $u, v, \ldots$ ou de leurs dérivées a pour effet d'augmenter la cote première.

9. Considérons maintenant un système différentiel où se trouvent engagées les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes x, $y, \ldots$, et, conformément aux indications du n° 6, attribuons p cotes à chacune de ces diverses quantités. Le système différentiel proposé sera dit *orthoïque*, si, moyennant un choix convenable du nombre p et des cotes attribuées à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, il remplit à la fois les deux conditions suivantes:

1° Le système en question se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres, et ces derniers, si l'on y considère pour un instant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, et les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ qui y figurent, comme autant de variables indépendantes distinctes, sont tous développables dans un même domaine.

2° Chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) qui soient normales par rapport au premier membre correspondant.

10. Etant donné un système orthoïque, nous dirons que les fonctions

$$U(x, y, \ldots),\ V(x, y, \ldots), \ldots$$

constituent pour lui un groupe d'*intégrales ordinaires*, si elles remplissent à la fois les deux conditions suivantes: 1° les fonctions $U(x, y, \ldots)$, $V(x, y, \ldots), \ldots$ sont développables dans quelque domaine, et les valeurs qu'elles y acquièrent, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à un domaine où les divers seconds membres soient à la fois développables; 2° la substitution de $U(x, y, \dots)$, $V(x, y, \dots)$, ... à $u, v, \dots$, opérée entre les mêmes limites, transforme en identités les diverses équations du système.

La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations du système en transforme tous les seconds membres en des fonctions composées des variables, des intégrales et de certaines de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires, et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables aux seconds membres dont il s'agit; d'ailleurs, les deux membres de chaque équation étant identiquement égaux après cette substitution, leurs dérivées semblables le sont aussi, et l'on peut, en conséquence, différentier indéfiniment les relations du système. Les relations ainsi obtenues peuvent ensuite être combinées de mille manières entre elles et avec les proposées, puis les résultats de ces combinaisons être différentiés à leur tour, et fournir les éléments de nouvelles combinaisons, qui seront elles-mêmes différentiées; et ainsi de suite indéfiniment. On peut, en un mot, déduire du système donné une foule de relations dont chacune est identiquement satisfaite par la substitution à $u, v, \dots$ d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires.

Parmi les relations auxquelles peuvent conduire des calculs de cette nature, nous distinguerons spécialement celles qui, ayant pour premier membre une dérivée de quelque fonction inconnue, ne contiennent dans leur second membre aucune quantité anormale relativement au premier; et nous dirons, pour abréger, qu'une semblable relation est *normale*, comme aussi l'expression fournie par elle pour la dérivée qui figure dans son premier membre.

Cette définition des relations et des expressions *normales* est d'ailleurs applicable dans tout système différentiel où chacune des variables et des inconnues a été affectée de cotes, conformément aux indications du n° 6.

11. *Si sur une relation normale on exécute des différentiations quelconques, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions normales des dérivées en question, on tombe encore sur une relation normale.*

I. *Si sur une relation normale on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.*

Soit en effet

$$(27) \qquad \delta = f(x, y, \ldots, \delta', \ldots)$$

une relation normale, dans laquelle $\delta', \ldots$ désignent, conformément à nos définitions, des quantités toutes normales par rapport à δ. La relation déduite de (27) par une différentiation relative à x a pour premier membre $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, et son second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que les quantités $\delta', \ldots$ et leurs dérivées premières par rapport à x. Or, les quantités $\delta', \ldots$ étant normales vis à vis de δ, les quantités $\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots$ jouissent de la même propriété vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ (6); d'un autre côté, si l'on désigne par $c_1, c'_1, \ldots, g_1$ les cotes premières respectives de $\delta, \delta', \ldots, x$, cette même hypothèse entraîne les relations

$$c_1 - c'_1 \geqq 0, \ldots,$$

d'où l'on déduit, à cause de $g_1 > 0$,

$$(c_1 + g_1) - c'_1 > 0, \ldots,$$

et dès lors les quantités $\delta', \ldots$ sont toutes normales vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$.

Ainsi, la condition formulée dans la définition d'une relation normale ne cesse pas d'être satisfaite après une première différentiation exécutée sur la relation donnée. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elle ne cesse pas de l'être après une deuxième, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des différentiations.

II. *Si dans le second membre d'une relation normale on remplace telles ou telles dérivées par certaines de leurs expressions normales, on tombe encore sur une relation normale.*

Désignons par δ le premier membre de la relation donnée, et par δ' l'une des dérivées figurant au second membre; puis, considérant une expression normale de δ', nommons δ'' l'une des inconnues ou dérivées qui y figurent. La quantité δ'' étant normale vis à vis de δ', et δ' normale vis à vis de δ, la quantité δ'' jouit de la même propriété vis à vis de δ (6): en conséquence, les substitutions opérées dans le second membre de la relation donnée ne peuvent altérer la nature normale de cette dernière.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II prouve dans toute sa généralité l'exactitude de notre énoncé.

12. Relativement à un système différentiel ayant pour premiers membres certaines dérivées des fonctions inconnues, nous distinguerons les dérivées de tous ordres de ces inconnues en *principales* et *paramétriques*, suivant qu'elles seront principales ou paramétriques par rapport à l'ensemble que forment les premiers membres (5'). Nous nommerons en outre *relations primitives* toutes celles qui font partie du système ou qui s'en déduisent par de simples différentiations. D'après cela toute dérivée principale figure au moins une fois (souvent même plusieurs) dans les premiers membres des relations primitives, tandis que les dérivées paramétriques n'y figurent jamais: les expressions fournies par les relations primitives pour les dérivées principales seront, elles aussi, qualifiées de *primitives*.

Enfin, si nous considérons un groupe d'intégrales du système, et que nous supposions ces fonctions développables dans quelque domaine des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots,$ choisies pour $x, y, \ldots,$ nous nommerons, pour abréger, *détermination initiale* de l'une d'entre elles, la portion de son développement formée par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées paramétriques de tous ordres: conformément aux explications du n° 5', cette portion provient donc d'une certaine *coupure*, pratiquée dans le développement total de la fonction.

13. Etant donné un système orthoïque, chacune des relations qui le composent est, par hypothèse, normale, et, en vertu du n° 11, toute autre relation primitive jouit de la même propriété.

De cette remarque découle immédiatement la proposition suivante:

Quand un système orthoïque possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, les développements de ces intégrales par la formule de Taylor à partir des *valeurs particulières x_0, y_0, ... peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres.* [On suppose, bien entendu, que les valeurs $x_0, y_0, \ldots$ n'excèdent pas les limites indiquées par la définition même des intégrales ordinaires (10)].

Effectivement, si l'on donne aux variables $x, y, \ldots$ leurs valeurs initiales x_0, y_0, ..., les intégrales dont il s'agit et leurs dérivées de tous ordres prennent, elles aussi, leurs valeurs initiales, et, comme celles des intégrales et de leurs dérivées paramétriques sont supposées connues, chaque relation primitive ne contient plus dans son second membre d'autres quantités inconnues que les valeurs initiales des dérivées principales de classes inférieures à son premier membre. Cela étant, et les relations primitives étant partagées en groupes successifs d'après les classes croissantes de leurs premiers membres, les relations du premier groupe fourniront tout d'abord les valeurs initiales des dérivées principales de première classe; ces dernières une fois connues, les relations primitives du deuxième groupe feront connaître les valeurs initiales des dérivées principales de deuxième classe; et ainsi de suite indéfiniment.

On connaîtra donc ainsi les valeurs initiales des intégrales, et de leurs dérivées, paramétriques et principales, de tous ordres; or, ces valeurs initiales ne sont autres, aux facteurs numériques connus près, que les coefficients des développements cherchés.

En vertu d'une définition donnée au n° 12, le théorème ci-dessus peut encore s'exprimer comme il suit:

Quand un système orthoïque possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, leurs développements par la formule de Taylor peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs déterminations initiales.

Nous savons d'ailleurs (12), (4) que la connaissance de ces déterminations initiales revient à celle de certaines fonctions ou constantes, en nombre essentiellement fini.

14. *Inversement, cherchons si, dans un système orthoïque, il existe quelque groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.* (On suppose, bien entendu, que les valeurs initiales des variables, prises conjointement avec celles des intégrales hypothétiques et des dé-

rivées paramétriques figurant dans les seconds membres du système donné, sont intérieures à un domaine où ces derniers soient développables.)

I. *Pour que de pareilles intégrales existent, il est tout d'abord nécessaire que les relations primitives s'accordent à fournir, pour chacune de leurs dérivées principales, une seule et même valeur initiale.*

Cette concordance a lieu d'elle-même pour les dérivées principales de première classe. Une pareille dérivée ne peut être en effet la dérivée d'aucun premier membre du système, car elle serait alors de classe supérieure à ce premier membre (8), par suite de classe supérieure à la classe minima, qui est 1: il en résulte que les expressions primitives des dérivées dont il s'agit sont toutes fournies par des équations du système donné, et, comme celui-ci a ses premiers membres tous distincts, chaque dérivée principale de première classe ne possède qu'une seule expression primitive. Mais, si l'on considère les dérivées principales des classes suivantes, elles *peuvent*, et c'est ce qui a lieu fréquemment, en posséder plusieurs distinctes.

Cela étant, supposons qu'il existe un groupe d'intégrales ordinaires répondant aux conditions initiales données, partageons les relations primitives en groupes successifs d'après les classes croissantes de leurs premiers membres, et pour effectuer, conformément aux indications du numéro 13, le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, remplaçons dans les seconds membres les variables, les intégrales et les dérivées paramétriques par leurs valeurs initiales connues. Cela fait, et les valeurs initiales des dérivées principales de première classe ayant été calculées sans incompatibilité à l'aide des relations primitives du premier groupe, il faudra qu'en portant les valeurs trouvées dans les seconds membres des relations primitives du deuxième groupe, celles d'entre ces dernières qui ont pour premier membre une même dérivée principale de deuxième classe, s'accordent à fournir pour elle une même valeur initiale: car, s'il y en avait seulement deux dont les seconds membres fussent numériquement différents, leur soustraction membre à membre conduirait à une absurdité. Ces concordances étant supposées avoir lieu, il faudra ensuite qu'en portant toutes les valeurs déjà calculées dans les seconds membres des relations primitives du troisième groupe, celles d'entre ces dernières qui ont pour premier membre une même dérivée principale de troisième classe, s'accordent à fournir pour elle une même valeur initiale. Et ainsi de suite indéfiniment.

II. *La concordance numérique des relations primitives étant supposée avoir lieu, la convergence des développements des intégrales hypothétiques correspondant aux données initiales choisies est encore une condition nécessaire à l'existence effective de ces intégrales.*

Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à la définition même des intégrales ordinaires (10).

III. *Si, pour un choix déterminé des conditions initiales, les relations primitives s'accordent numériquement, et qu'en outre les développements des intégrales hypothétiques soient convergents, leurs sommes constituent des intégrales ordinaires du système orthoïque donné.*

Soient en effet:

$x, y, \ldots$ les variables indépendantes;

$x_0, y_0, \ldots$ leurs valeurs initiales;

$u, v, \ldots$ les fonctions inconnues;

$U, V, \ldots$ les sommes des développements, supposés convergents, des intégrales hypothétiques.

Considérons un domaine $\mathfrak{D}$ des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, dont les rayons soient suffisamment petits pour que les fonctions de $x, y, \ldots$ en lesquelles se transforment, par la substitution de $U, V, \ldots$ à $u, v, \ldots$, les deux membres des diverses équations données, soient toutes développables dans le domaine dont il s'agit. En vertu même du calcul qui a fourni les coefficients des développements $U, V, \ldots$, les valeurs initiales des variables indépendantes, prises conjointement avec celles des développements eux mêmes et de leurs dérivées de tous ordres, vérifient les relations primitives. Donc, les fonctions de $x, y, \ldots$ qui, après la substitution, figurent dans les deux membres d'une équation différentielle quelconque, sont égales, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, pour $x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0$, et par suite sont identiquement égales entre elles dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{D}$.

IV. *Il ne peut y avoir enfin plus d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.*

Car chaque relation primitive, étant du premier degré par rapport à la dérivée principale qui figure dans son premier membre, ne fournit pour cette dernière qu'une seule valeur initiale.

15. Nous dirons qu'un système orthoïque est *complètement intégrable,* s'il admet un groupe (nécessairement unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies; *passif,* si la concordance numérique des relations primitives (14, I) a lieu pour toutes les données initiales possibles.

En vertu de ces définitions et des remarques faites au numéro précédent, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système orthoïque soit complètement intégrable, sont: 1° que le système en question soit passif; 2° que les développements, construits *a priori,* d'intégrales hypothétiques répondant à des données initiales quelconques, soient toujours convergents.

Nous nous occuperons tout d'abord de la passivité.

16. Un mécanisme très-simple, appliqué aux relations primitives d'un système orthoïque, permet, comme nous allons le voir, d'en déduire, pour les dérivées principales des classes successives, certaines expressions dépendant exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.

Les relations primitives étant partagées en groupes successifs d'après les classes croissantes $1, 2, 3, \ldots$ de leurs premiers membres, désignons par $\mathfrak{P}_1$ ou par $\mathfrak{A}_1$ indifféremment le premier de ces groupes, par $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ les groupes suivants, et souvenons-nous que le groupe $\mathfrak{P}_1$ (ou $\mathfrak{A}_1$) a ses premiers membres nécessairement tous distincts, tandis que le contraire *peut* avoir lieu pour chacun des suivants $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ (14, I). Remplaçons maintenant dans les relations $\mathfrak{P}_2$ chacune des dérivées principales de première classe par son expression (unique) tirée de $\mathfrak{A}_1$: comme une semblable expression dépend exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques, le groupe des relations résultantes, $\mathfrak{A}_2$, fournira, pour les dérivées principales de seconde classe, des expressions jouissant de la même propriété. Considérons ensuite les relations $\mathfrak{P}_3$, et éliminons-en de toutes les manières possibles, à l'aide de $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, les dérivées principales des deux premières classes; autrement dit, extrayons du groupe $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2]$ un groupe partiel fournissant une expression et une seule pour chacune des dérivées principales des deux premières classes, éliminons ces dernières entre $\mathfrak{P}_3$ et les relations ainsi obtenues, et répétons l'opération en remplaçant successivement le groupe partiel considéré par tous les groupes analogues semblablement extraits de $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2]$. Il est clair que le groupe des relations résultantes, $\mathfrak{U}_3$, fournira, pour les dérivées principales de troisième classe, des expressions ne dépendant, comme les seconds membres de $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$, que des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques. L'élimination des dérivées principales des trois premières classes, effectuée dans $\mathfrak{P}_4$ de toutes les manières possibles à l'aide de $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3]$, conduira de même à un groupe $\mathfrak{U}_4$ fournissant, pour les dérivées principales de quatrième classe, des expressions exclusivement composées avec les quantités dont il s'agit. Et ainsi de suite indéfiniment.

Nous nommerons *ultimes* les relations

$$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots$$

obtenues à l'aide du mécanisme que nous venons de décrire, et aussi les expressions qu'elles fournissent pour les dérivées principales des classes $1, 2, 3, \ldots$.

D'après ce qui précède, et en considérant comme autant de variables indépendantes distinctes $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et les dérivées de tous ordres de $u, v, \ldots$, *les relations primitives entraînent* comme conséquences nécessaires *les relations ultimes. Réciproquement* d'ailleurs, il est facile de voir que *ces dernières entraînent les premières.*

Enfin, notre proposition du n° 11, d'où nous avons déjà déduit la nature normale des relations primitives, entraîne aussi de proche en proche celle des relations ultimes appartenant aux groupes successifs $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \ldots$

17. Si l'on considère deux dérivées (distinctes) d'une fonction quelconque $F(x, y, \ldots)$, et que l'on adjoigne mentalement à chacune d'elles la suite indéfinie de ses propres dérivées, tout terme commun aux deux ensembles illimités ainsi obtenus se nommera une *résultante* des deux dé-

rivées en question. Pour passer de la fonction F à l'une ou à l'autre de ces dernières, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre: en désignant par le symbole $D.$ l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles $D'.$, $D''.$ l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement, les deux dérivées considérées peuvent évidemment s'écrire

$$D.D'.F\,,\ D.D''.F,$$

et l'on voit sans peine: 1° qu'elles admettent $D.D'.D''.F$ comme *résultante unique d'ordre minimum;* 2° que l'ensemble complet de leurs résultantes s'obtient en adjoignant à celle d'ordre minimum la suite indéfinie de ses propres dérivées.

Considérons maintenant un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, et, dans ce système, deux équations ayant pour premiers membres respectifs deux dérivées d'une même inconnue; puis, prenons la résultante d'ordre minimum de ces dérivées, et répétons l'opération en faisant varier de toutes les manières possibles le choix de la fonction inconnue, et celui des deux équations sur les premiers membres desquelles on doit opérer: les résultantes, en nombre essentiellement limité, que nous obtiendrons ainsi, se nommeront, par rapport au système donné, les dérivées *cardinales* de ses diverses fonctions inconnues.

18. Cela posé, *pour qu'un système orthoïque soit passif, il faut et il suffit que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque soient égales identiquement, c'est à dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, aux fonctions inconnues et à celles d'entre leurs dérivées paramétriques qui y figurent, ces trois sortes de quantités étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes.* [1]

I. Comme nous l'avons dit plus haut (16), les relations primitives entraînent les relations ultimes, et réciproquement ces dernières entraînent les premières. Pour qu'un système orthoïque soit passif, il est donc nécessaire et suffisant que la concordance numérique des relations ultimes

---

[1] J'ai établi cette proposition en 1893 pour des systèmes différentiels de forme un peu moins générale. Voir les Annales de l'Ecole Normale, 1893, p. 76 à 86.

ait lieu pour toutes les données initiales possibles, ou, en d'autres termes, que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale soient identiquement égales.

Toute dérivée cardinale étant principale, *les conditions posées sont donc évidemment nécessaires,* et il nous reste à prouver qu'elles sont suffisantes, c'est à dire que leur réalisation entraîne l'égalité identique des diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale.

II. Des relations ultimes on peut, par un procédé analogue à celui qui nous les a fournies, en déduire de nouvelles.

Différentions un nombre quelconque de fois une relation ultime; puis, après la dernière différentiation, remplaçons les diverses dérivées principales contenues dans le second membre par telles ou telles de leurs expressions ultimes. Dans le premier membre de la relation résultante figure évidemment une dérivée principale, qui se trouve alors exprimée *directement* (c'est à dire sans l'intermédiaire d'aucune autre dérivée principale) à l'aide des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques. Pour abréger, et bien qu'une foule d'autres relations déduites du système jouissent aussi de cette propriété, nous qualifierons spécialement de *directes* les relations auxquelles conduit l'application du mécanisme précédent (en y comprenant les relations ultimes elles-mêmes), et nous affecterons de la même qualification les expressions qui en résultent pour les diverses dérivées principales des fonctions inconnues.

Cela posé, *si l'on forme, à l'aide du mécanisme décrit ci-dessus, une relation directe quelconque,* il résulte immédiatement du n° 11 et de la nature normale des relations ultimes, que *les relations successivement rencontrées dans le cours d'un semblable calcul sont toutes normales.*

III. *Dans un système orthoïque, chaque dérivée principale de première classe n'a qu'une expression directe.*

Effectivement, nous avons déjà observé (14, I) qu'une dérivée principale de première classe ne peut être la dérivée d'aucun premier membre du système: il en résulte que les expressions directes des dérivées principales de première classe sont toutes fournies par des équations du système donné, et, comme les premiers membres y sont tous distincts, chacune des dérivées dont il s'agit n'a qu'une seule expression directe.

IV. Les relations directes, d'après la définition même que nous en avons donnée, appartiennent toutes à l'un ou à l'autre des trois groupes suivants:

les relations du système donné;

les relations obtenues en différentiant un nombre quelconque de fois une relation du système donné, et remplaçant, dans le second membre de la relation résultante, les diverses dérivées principales par telles ou telles de leurs expressions ultimes;

les relations obtenues en effectuant sur une relation du système donné l'opération précédente, puis sur la relation résultante une opération de même espèce.

Dans tous les cas, on part, pour former une relation directe quelconque, d'une certaine équation du système donné.

Cela posé, *si, dans un système orthoïque, l'égalité identique a lieu entre les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes* $1, 2, \ldots, j$, *toutes les expressions directes d'une dérivée déterminée de classe* $j+1$ *obtenues en partant d'une même équation du système proposé, sont nécessairement identiques.*

La dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide nécessairement, soit avec le premier membre de l'équation d'où l'on doit partir, soit avec quelque dérivée de ce premier membre.

Dans le premier cas, l'équation considérée ne peut fournir, pour la dérivée de classe $j+1$ qui figure dans son premier membre, qu'une seule expression directe, son second membre.

Dans le second cas, que nous allons maintenant examiner, la formation des expressions directes visées par l'énoncé nécessite, sur l'équation d'où l'on part, certaines différentiations qui ont toujours lieu, dans divers ordres, par rapport aux mêmes variables respectives; tantôt on n'effectue de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, tantôt on en effectue en outre après *une* des différentiations précédentes. Il s'agit d'établir que, de quelque façon qu'on procède, on arrivera toujours, pour la dérivée considérée de classe $j+1$, à la même expression directe.

1° En premier lieu, si l'on n'opère de substitutions qu'après la dernière différentiation, les expressions directes auxquelles on est conduit pour la dérivée en question sont identiquement égales: car l'expression primitive résultant des seules différentiations est indépendante de l'ordre dans lequel on les exécute, et, pour chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j+1$, qui y figurent, les diverses expressions directes, à plus forte raison les diverses expressions ultimes, sont par hypothèse identiques.

2° Si l'on ne change pas l'ordre relatif des différentiations, les expressions directes auxquelles on est conduit sont encore identiquement égales.

Désignons par $(\mathfrak{a})$ l'équation du système donné d'où l'on doit partir, par k le nombre des différentiations successives, exécutées sur $(\mathfrak{a})$ dans un ordre invariable, par δ la dérivée principale que l'exécution des $k-1$ premières amènerait dans le premier membre, et par x la variable indépendante par rapport à laquelle la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit avoir lieu: cette dernière, et *éventuellement une des précédentes,* doit être suivie de substitutions, et c'est l'exécution ou la non-exécution de cette partie éventuelle du calcul, comme aussi le moment où elle est effectuée, qui constituent les circonstantes variables de l'opération actuellement considérée. Or, je vais établir que le résultat final auquel on est conduit est, quelles que soient ces circonstances variables, identique au résultat fourni par une opération bien déterminée que je vais d'abord décrire.

Observons à cet effet que, $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ étant de classe $j+1$, δ est au plus de classe j (8). Cela étant, l'opération dont je veux parler consiste à prendre la relation directe (unique) dont le premier membre est δ, à la différentier par rapport à x, et à remplacer ensuite, dans le second membre de la relation résultante, chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j+1$, qui y figurent, par son expression ultime (unique).

En effet, une semblable opération donne un résultat évidemment identique au résultat fourni par celle dont nous avons parlé antérieurement, si, dans cette dernière, la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit être exécutée sur une relation ultime, et il reste alors à examiner le cas où la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit être exécutée, non plus sur une relation ultime, mais sur une relation ultime *déjà différentiée.* Soit donc

$$\delta = f(x, y, \ldots, \sigma, \ldots, \tau, \ldots) \tag{28}$$

la relation dont il s'agit, où $\sigma, \ldots$ désignent les diverses dérivées principales figurant *effectivement* dans le second membre, et $\tau, \ldots$ les diverses inconnues ou dérivées paramétriques y figurant aussi *effectivement.* La relation (28) étant normale (II), les quantités $\sigma, \ldots, \tau, \ldots$ ont une cote première au plus égale à celle de δ, et par suite inférieure à celle de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$; elles sont donc toutes normales vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$. D'autre part, les quantités $\sigma, \ldots$ et $\tau, \ldots$ étant normales vis à vis de δ, les quantités $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots$ et $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \ldots$ le sont vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ (6). Enfin, puisque $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ est de classe $j+1$, les dérivées $\sigma, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots$, et celles d'entre les dérivées $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \ldots$ qui sont principales, sont au plus de la classe j, et par suite chacune d'elles a une expression directe unique, qui se trouve être, à plus forte raison, son expression ultime unique. Désignons alors par

$$\Sigma, \ldots, \Sigma_x, \ldots$$

les expressions directes de

$$\sigma, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots;$$

par $\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right], \ldots$ les résultats que donne la règle des fonctions composées quand on effectue sur $\Sigma, \ldots$ une différentiation relative à x; enfin par $\left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]\right], \ldots$ les résultats respectivement déduits de $\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right], \ldots$ en éliminant de ces dernières expressions les dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à j, qui peuvent y figurer: il est clair, puisque les dérivées $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots$ sont au plus de la classe j, que les expressions directes $\left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]\right], \ldots$ sont respectivement identiques aux expressions directes $\Sigma_x, \ldots$.

Cela posé, exécutons sur la relation (28) les opérations qui restent à exécuter, c'est à dire la différentiation relative à x, et ensuite l'élimination des dérivées principales du second membre. Il suffit pour cela de considérer la relation

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \ldots,$$

et de remplacer dans le second membre, d'une part les dérivées principales

$$\sigma, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots$$

par leurs expressions ultimes

$$\Sigma, \ldots, \Sigma_x, \ldots,$$

d'autre part celles d'entre les dérivées $\frac{\partial\tau}{\partial x}, \ldots$ qui sont principales par les expressions ultimes correspondantes. Or, en vertu des identités

$$\Sigma_x = \left[\left[\frac{\partial\Sigma}{\partial x}\right]\right], \ldots,$$

il revient évidemment au même de différentier par rapport à x la relation

$$\delta = f(x, y, \ldots, \Sigma, \ldots, \tau, \ldots)$$

(relation directe unique ayant pour premier membre δ), ce qui donne

$$\frac{\partial\delta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\Sigma}\left[\frac{\partial\Sigma}{\partial x}\right] + \ldots + \frac{\partial f}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x} + \ldots,$$

puis de remplacer par leurs expressions ultimes les dérivées principales qui peuvent alors figurer dans le second membre.

3° Considérons deux quelconques des expressions directes dont le présent alinéa IV a pour but de démontrer l'identité, et qui se déduisent, comme nous l'avons expliqué, par différentiations et substitutions, d'une même équation du système. Si, sans changer de part ni d'autre l'ordre relatif des différentiations, on n'opère de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, on tombe sur deux expressions directes respectivement identiques aux deux précédentes (2°), et l'on sait d'ailleurs (1°) qu'en procédant ainsi, le résultat est indépendant de l'ordre des différentiations.

V. *Si, dans un système orthoïque, l'égalité identique a lieu, d'une part entre les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes* $1, 2, \ldots, j$, *d'autre part entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée cardinale de la classe* $j+1$, *les deux expressions directes d'une même dérivée principale de classe* $j+1$ *obtenues en partant de deux équations différentes du système proposé sont nécessairement identiques.*

Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la fonction u dont certaines dérivées figurent dans les premiers membres des deux équations considérées. Pour passer de la fonction u à l'une ou à l'autre de ces deux dérivées, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre. Nous désignerons par le symbole $D.$ l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles $D'.$, $D''.$ l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement. Les deux équations peuvent donc s'écrire:

$$D.D'.u = \ldots, \tag{29}$$

$$D.D''.u = \ldots. \tag{30}$$

Cela posé, la dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide soit avec $D.D'.D''.u$, soit avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$, puisqu'elle est une résultante (17) des premiers membres de (29) et (30). — Dans le premier cas, en vertu de l'alinéa précédent IV, les opérations à effectuer soit sur l'équation (29), soit sur l'équation (30), pour en déduire une expression directe de $D.D'.D''.u$, pourront l'être comme il suit: on exécutera d'abord la différentiation $D''.$ s'il s'agit de l'équation (29), la différentiation $D'.$ s'il s'agit de l'équation (30), et l'on remplacera ensuite, dans les seconds membres des formules résultantes, les dérivées principales des classes $1, 2, \ldots, j$ par leurs expressions ultimes. Or, ce mécanisme engendre précisément deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $D.D'.D''.u$, de classe $j+1$, c'est à dire deux expressions qui, par hypothèse, sont identiquement égales l'une à l'autre. — Si la dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$, les opérations à effectuer soit sur l'équation (29), soit sur l'équation (30), pour en déduire une expression directe de la dérivée en question, pourront l'être comme il suit: 1° on effectuera d'abord la différentiation $D''.$ s'il s'agit de la première, la différentiation $D'.$ s'il s'agit de la seconde, et l'on remplacera les dérivées principales figurant dans les seconds membres par leurs expressions ultimes; 2° on exécutera ensuite les différentiations restantes, qui sont les mêmes de part et d'autre, et l'on éliminera finalement des seconds membres les dérivées principales. Or $D.D'.D''.u$ étant, dans le cas actuel, de classe inférieure à $j+1$ (8), il résulte encore de nos hypothèses que les résultats sont identiques après la première partie de l'opération, par suite aussi après la sèconde.

VI. Comme nous l'avons déjà remarqué (III), chaque dérivée principale de première classe ne possède, dans un système orthoïque quelconque, qu'une seule expression directe. Si donc on suppose que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée cardinale sont identiquement égales, l'application répétée des propositions ci-dessus (IV), (V) prouve que l'égalité identique entre les diverses expressions directes d'une même dérivée principale a encore lieu dans la deuxième classe, puis dans la troisième, et ainsi de suite indéfiniment. *Il n'y a*, dès lors, *pour une même dérivée principale quelconque, qu'une seule expression directe, et à plus forte raison qu'une seule expression ultime*, ce que nous voulions établir (I).

19. Si l'on partage en groupes les équations d'un système orthoïque, suivant celles d'entre les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ dont quelque dérivée figure dans leurs premiers membres, à un groupe formé d'une seule équation ne correspondra aucune condition de passivité. En particulier, *si chaque groupe ne contient qu'une seule équation, le système sera nécessairement passif.*

Enfin, *si, dans un système orthoïque passif, on supprime les diverses équations dont les premiers membres, comparés à ceux de telles ou telles autres, en peuvent être considérés comme des dérivées, le système résultant admet les mêmes intégrales que le premier, et possède, comme lui, la forme orthoïque passive.* Effectivement, les dérivées respectivement principales et paramétriques seront les mêmes de part et d'autre; les relations primitives du second système concorderont numériquement, comme celles du premier, par rapport à des données initiales arbitraires, et fourniront, pour chaque dérivée principale, la même valeur initiale; enfin, les développements des intégrales hypothétiques étant de part et d'autre identiques, leur convergence ne pourra avoir lieu d'un côté sans avoir lieu en même temps de l'autre.

20. Dans un système orthoïque, supposé passif, la concordance numérique des relations primitives a lieu pour des données initiales quelconques, et, d'après ce que nous avons dit plus haut (14), la question de savoir si les intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données existent effectivement, se résout par l'affirmative dans le cas où leurs développements construits *a priori* sont tous convergents, par la

négative dans le cas contraire. Comme nous allons le prouver par divers exemples, cette convergence n'a pas nécessairement lieu, d'où résulte que, *dans les systèmes orthoïques passifs, il est impossible d'affirmer d'une manière générale l'existence d'intégrales répondant à des données initiales arbitraires.*

I. Considérons d'abord l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{31}$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y.[1] Cette équation constitue un système orthoïque, comme on le voit en attribuant à u la cote zéro, à x la cote 3 et à y la cote 1; d'ailleurs, un pareil système est nécessairement passif, puisqu'il est composé d'une seule équation (19); enfin, les dérivées paramétriques de u sont celles qui se rapportent à la seule variable y, en sorte qu'une intégrale hypothétique se trouve entièrement déterminée par la condition de se réduire à une fonction donnée de y pour $x = x_0$.

Pour construire *a priori* le développement de l'intégrale hypothétique se réduisant à $\varphi(y)$ pour $x = 0$, on remarquera que l'équation (31) entraîne comme conséquence nécessaire

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial^{2\alpha+\beta} u}{\partial y^{2\alpha+\beta}}. \tag{32}$$

Effectivement, si $\alpha = 0$, l'équation (32) se réduit à une identité. En différentiant (31) β fois par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial^{1+\beta} u}{\partial x \partial y^\beta} = \frac{\partial^{2+\beta} u}{\partial y^{2+\beta}}, \tag{33}$$

et la relation (32) se trouve vérifiée pour $\alpha = 1$. Si l'on suppose main-

---

[1] M$^{\text{me}}$ de Kowalevsky, dans l'exemple de divergence qu'elle a donné (Journal de Crelle, tome 80), considère cette même équation $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, en assujettissant l'intégrale hypothétique à se réduire, pour $x = 0$, à la fonction méromorphe $\frac{1}{1-y}$; comme on le verra plus bas, la détermination initiale dont nous avons fait choix est exprimable par une série entière indéfiniment convergente.

tenant cette relation établie pour une valeur quelconque de α, et qu'on la différentie une fois par rapport à x, elle donne

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta} u}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^{\beta}} = \frac{\partial^{1+(2\alpha+\beta)} u}{\partial x \partial y^{2\alpha+\beta}};$$

on a d'ailleurs, en vertu de (33),

$$\frac{\partial^{1+(2\alpha+\beta)} u}{\partial x \partial y^{2\alpha+\beta}} = \frac{\partial^{2+2\alpha+\beta} u}{\partial y^{2+2\alpha+\beta}} = \frac{\partial^{2(\alpha+1)+\beta} u}{\partial y^{2(\alpha+1)+\beta}},$$

et il vient en conséquence

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta} u}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^{\beta}} = \frac{\partial^{2(\alpha+1)+\beta} u}{\partial y^{2(\alpha+1)+\beta}},$$

relation qui se déduit de (32) par le changement de α en $\alpha + 1$.

Cela étant, le développement que nous cherchons à construire a pour terme général

$$\frac{\varphi^{(2\alpha+\beta)}(0)}{1 . 2 \ldots \alpha . 1 . 2 \ldots \beta} x^{\alpha} y^{\beta}. \tag{34}$$

Or, je vais faire voir qu'en choisissant convenablement $\varphi(y)$, on tombe sur un développement divergent.

A. Si l'on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, la quantité $\frac{S_n}{n}$ tend vers zéro pour n infini.

D'abord, cette variante diminue toujours lorsque n augmente, car l'inégalité

$$\frac{S_n}{n} > \frac{S_{n+1}}{n+1}$$

revient à

$$(n+1) S_n > n S_{n+1},$$

ou

$$(n+1) S_n > n\left(S_n + \frac{1}{n+1}\right),$$

ou

$$S_n > \frac{n}{n+1},$$

ce qui est évident.

Observons en second lieu que si, dans la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, on désigne par σ_1 le *premier* terme, par σ_2 la somme des *deux* termes suivants, par σ_3 la somme des *trois* termes qui viennent à la suite de ceux-ci, etc., chaque terme élémentaire de σ_k est inférieur à $\frac{1}{k}$, et que par suite σ_k est inférieur à 1. On a donc

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k<k,$$

ou

$$S_{\frac{k(k+1)}{2}}<k.$$

On déduit de là

$$\frac{S_{\frac{k(k+1)}{2}}}{\frac{k(k+1)}{2}}<\frac{2}{k+1},$$

inégalité dont le second membre, et à plus forte raison le premier, tendent vers zéro pour k infini.

Ainsi, on peut trouver pour n des valeurs telles, que la quantité positive $\frac{S_n}{n}$ tombe au dessous de toute quantité donnée; comme d'un autre côté elle diminue toujours lorsque n augmente, elle tend nécessairement vers zéro.

B. La série entière

$$(35)\qquad 1+\frac{S_1}{2}x^2+\frac{S_1S_2}{3\cdot 4}x^4+\ldots+\frac{S_1S_2\ldots S_n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}x^{2n}+\ldots,$$

où S_n garde la même signification que ci-dessus ***A***, est indéfiniment convergente.

Car dans la série formée par les modules de ses termes, le rapport d'un terme au précédent a pour valeur

$$\frac{S_{n+1}}{2(2n+1)}(\operatorname{mod} x)^2$$

ou

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2(2n+1)}\cdot(\operatorname{mod} x)^2,$$

produit de trois facteurs dont le premier tend vers zéro et le second vers $\frac{1}{4}$, tandis que le troisième reste invariable; le rapport considéré tend donc lui-même vers zéro.

C. En désignant par $\psi(x)$ la fonction définie par la somme de la série (35), et prenant $\varphi(y) = \psi(y)$, la série entière en x et y qui a pour terme général (34) n'admet aucun système de rayons de convergence.

Car, dans cette dernière série, la partie indépendante de y a pour terme général

$$\frac{\psi^{(2\alpha)}(0)}{1 \cdot 2 \ldots \alpha} x^\alpha = S_1 S_2 \ldots S_\alpha x^\alpha,$$

et le rapport

$$\frac{S_1 S_2 \ldots S_\alpha S_{\alpha+1} x^{\alpha+1}}{S_1 S_2 \ldots S_\alpha x^\alpha} = x S_{\alpha+1}$$

a un module infini avec α, quelque valeur particulière (non nulle) que l'on attribue à x.

II. *En désignant par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, par μ une constante positive quelconque, et par q un entier au moins égal à 2, l'équation différentielle partielle*

$$(36) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + y + y^2 + \ldots + y^q + (1 + y + y^2 + \ldots + y^q + y^{q+1})\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right]$$

n'admet pas d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

L'équation (36) constitue un système orthoïque, comme on le voit en attribuant à u la cote zéro, à x la cote $q+1$, et à y la cote 1; un pareil système, composé d'une seule équation, est d'ailleurs nécessairement passif; enfin, une intégrale hypothétique se trouve, comme dans l'exemple précédent (I), entièrement déterminée par la condition de se réduire à une fonction donnée de y pour $x = x_0$. Je me propose de démontrer qu'il n'existe pas d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

A. Pour effectuer cette démonstration, *on peut à l'équation* (36) *substituer l'équation*

$$(37) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[(1 + y)^q + (1 + y)^{q+1}\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right].$$

Effectivement, si l'on donne à la constante μ, dans l'équation (36), une valeur positive déterminée, et que l'on considère l'équation

$$(38) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu' \left[(1 + y)^q + (1 + y)^{q+1} \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right],$$

il est clair qu'en donnant à μ', dans cette dernière, une valeur positive suffisamment petite, les deux polynomes

$$(39) \qquad \mu(1 + y + y^2 + \ldots + y^q) \, , \; \mu(1 + y + y^2 + \ldots + y^q + y^{q+1}),$$

qui figurent dans l'équation (36), ont leurs coefficients respectivement supérieurs aux coefficients (positifs) semblables des deux polynomes

$$(40) \qquad \mu'(1 + y)^q \, , \; \mu'(1 + y)^{q+1},$$

qui figurent dans l'équation (38). Or, si l'on considère cette dernière, les expressions primitives des dérivées principales sont des sommes de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir: certains entiers positifs; certains coefficients des polynomes (40); certaines puissances de y; enfin, certaines dérivées de u. Et, pour l'équation (36), les expressions primitives des mêmes dérivées sont composées exactement de la même façon, à cela près que les coefficients des polynomes (40) se trouvent respectivement remplacés par les coefficients correspondants des polynomes (39), c'est à dire par des quantités positives qui leur sont respectivement supérieures. Cela étant, si l'on choisit pour la fonction u et ses dérivées paramétriques des valeurs initiales toutes nulles, et que l'on calcule les valeurs initiales des dérivées principales, d'abord à l'aide des relations primitives provenant de (36), puis à l'aide des relations primitives provenant de (38), on voit, par un raisonnement trés-simple exécuté de proche en proche d'une classe à la suivante, que les valeurs positives ainsi calculées sont plus grandes dans le premier cas que dans le second.

En conséquence, si l'on parvient à établir pour l'équation (38) la divergence du développement de l'intégrale hypothétique qui répond aux données initiales choisies, cette divergence se trouvera, à plus forte raison, établie pour l'équation (36).

B. *L'équation* (37), *où* $q \geqq 2$, *n'admet pas d'intégrale s'annulant avec* x, *ce qui achève notre démonstration.*

Je désignerai par $P_1, P_2, P_3, \ldots$ des fonctions inconnues de la seule variable y, par $P_1^{(q)}, P_2^{(q)}, P_3^{(q)}, \ldots$ leurs dérivées respectives d'ordre q, et je poserai

$$u = P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots.$$

L'équation (37) deviendra alors

$$\begin{aligned} &1 . P_1 + 2 . P_2 x + 3 . P_3 x^2 + \ldots \\ &= \mu(1+y)^q + \mu(1+y)^{q+1}[P_1^{(q)} x + P_2^{(q)} x^2 + P_3^{(q)} x_3 + \ldots], \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par l'identification,

$$(41) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 1 . P_1 = \mu(1+y)^q, \\ 2 . P_2 = \mu(1+y)^{q+1} P_1^{(q)}, \\ 3 . P_3 = \mu(1+y)^{q+1} P_2^{(q)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

On voit de proche en proche que

$$P_1, P_1^{(q)}, P_2, P_2^{(q)}, P_3, P_3^{(q)}, \ldots$$

ont respectivement les formes

$$\mu_1(1+y)^q, \mu_1', \mu_2(1+y)^{q+1}, \mu_2'(1+y), \mu_3(1+y)^{q+2}, \mu_3'(1+y)^2, \ldots,$$

et d'une façon générale que P_n est de la forme

$$\mu_n(1+y)^{q+n-1},$$

où μ_n désigne une certaine constante positive. Il faut démontrer que, les polynomes $P_1, P_2, P_3, \ldots$ étant ainsi déterminés, la série entière en x et y fournie par le développement de $P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots$ n'admet aucun système de rayons de convergence.

Or, en désignant par P un polynome de la forme $\theta . (1+y)^h$, où $\theta > 0$ et $h \geqq q$, et par $\varpi, \varpi^{(q)}$ les valeurs numériques que prennent, pour $y = 0$, ce polynome et sa dérivée d'ordre q, on a

$$(42) \qquad \varpi^{(q)} > (h - q + 1)^q \varpi;$$

car des relations

$$\varpi = \theta, \qquad \varpi^{(q)} = h(h-1)\ldots(h-q+1)\theta$$

on tire

$$\varpi^{(q)} = h(h-1)\ldots(h-q+1)\varpi,$$

d'où l'on déduit immédiatement la relation (42).

Si l'on détermine maintenant des constantes $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ par les relations

$$(43) \qquad \begin{cases} 1 \cdot \rho_1 = \mu, \\ 2 \cdot \rho_2 = \mu \cdot 1^q \rho_1, \\ 3 \cdot \rho_3 = \mu \cdot 2^q \rho_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ n \cdot \rho_n = \mu \cdot (n-1)^q \rho_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

on a, en désignant par ϖ_n la valeur numérique que prend, pour $y = 0$, le polynome P_n,

$$(44) \qquad \varpi_n > \rho_n.$$

Effectivement, les relations (41) et (43) nous donnent d'abord

$$1 \cdot \varpi_1 = \mu = 1 \cdot \rho_1, \quad \text{d'où} \quad \varpi_1 = \rho_1;$$

puis

$$2 \cdot \varpi_2 = \mu^2 \cdot 1 \cdot 2 \ldots q, \qquad 2 \cdot \rho_2 = \mu^2, \quad \text{d'où} \quad \varpi_2 > \rho_2;$$

et il nous suffit alors de faire voir qu'en supposant la relation (44) vérifiée pour une valeur quelconque de n, elle l'est encore pour la valeur suivante $n+1$. Or, on a

$$(n+1)\rho_{n+1} = \mu n^q \rho_n;$$

on a d'autre part, en désignant par $\varpi_n^{(q)}$ la valeur numérique que prend, pour $y = 0$, la dérivée d'ordre q du polynome P_n,

$$(n+1)\varpi_{n+1} = \mu \varpi_n^{(q)},$$

puis, en vertu de (42),

$$\varpi_n^{(q)} > n^q \varpi_n,$$

puis, en vertu de l'hypothèse,

$$\varpi_n > \rho_n,$$

relations de la combinaison desquelles on déduit

$$(n+1)\varpi_{n+1} > \mu n^q \rho_n,$$

c'est à dire

$$(n+1)\varpi_{n+1} > (n+1)\rho_{n+1} \quad \text{ou} \quad \varpi_{n+1} > \rho_{n+1}.$$

On a donc bien, quel que soit n, $\varpi_n > \rho_n$.

Cela posé, la série $\Sigma \rho_n x^n$ est divergente pour toute valeur non nulle attribuée à x: car on a, en multipliant membre à membre les n premières relations (43),

$$1.2.3\ldots n\rho_n = \mu^n 1^q.2^q\ldots(n-1)^q,$$

d'où

$$\rho_n x^n = (\mu x)^n \frac{1^q.2^q\ldots(n-1)^q}{1.2\ldots(n-1)n},$$

et le rapport

$$\frac{\rho_{n+1}x^{n+1}}{\rho_n x^n} = \mu x \frac{n^q}{n+1}$$

a un module infini avec n, puisque q est, par hypothèse, au moins égal à 2. Il en résulte, à cause de (44), que la série $\Sigma\varpi_n x^n$, partie indépendante de y dans la série entière en x et y provenant de

$$P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \ldots,$$

est elle-même divergente.

III. La divergence éventuelle des intégrales hypothétiques des systèmes orthoïques pourrait encore s'établir à l'aide des exemples suivants, que nous nous bornerons à formuler.

En désignant par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, par μ une constante positive quelconque, et par q un entier au moins égal à 2, aucune des équations différentielles partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + (1 + y)u + (1 + y + y^2)\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + (1 + y + y^2)u + (1 + y)\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + (1 + y + y^2 + y^3)u + \frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right]$$

n'admet d'intégrale se réduisant, pour $x = 0$, à une fonction de y identiquement nulle.

En attribuant à u, x, y, μ la même signification que ci-dessus, et désignant par q un entier au moins égal à 3, l'équation différentielle partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\left[1 + (1 + y + y^2)u + \frac{\partial^q u}{\partial y^q}\right]$$

n'admet pas non plus d'intégrale qui satisfasse à cette condition initiale.

TROISIÈME PARTIE.

Systèmes orthonomes; convergence des développements des intégrales.

21. Un système orthoïque (9) sera dit *orthonome* dans le cas, particulièrement remarquable, où les cotes *premières* des diverses variables indépendantes se trouvent être toutes égales à un même entier (positif).

Exemple I. Dans son Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, M[me] de Kowalevsky considère un système composé d'équations en nombre égal à celui des inconnues, et tel, qu'en désignant par

$$u_1, u_2, \ldots, u_g$$

les inconnues dont il s'agit, et par

$$k_1, k_2, \ldots, k_g$$

les ordres respectifs du système par rapport à elles, ce dernier soit résoluble par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{k_1} u_1}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^{k_2} u_2}{\partial x^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^{k_g} u_g}{\partial x^{k_g}},$$

toutes relatives à une même variable x. Or, il est aisé de voir que, cette résolution une fois effectuée, le système résultant satisfait à notre définition de l'orthonomie.

En premier lieu, le système se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres.

Attribuons d'autre part:

1° *à toutes les variables indépendantes une cote première égale à* 1, et aux fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_g$ les cotes premières $-k_1, -k_2, \ldots, -k_g$;

2° à la variable x une cote seconde égale à 1, à toutes les autres variables une cote seconde nulle, et aux fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_g$ les cotes secondes $-k_1, -k_2, \ldots, -k_g$.

Si l'on désigne par i, j deux entiers, distincts ou non, pris dans la suite $1, 2, \ldots, g$, et que l'on considère l'équation du système qui a pour premier membre $\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial x^{k_i}}$, le second membre de l'équation dont il s'agit peut, d'après la définition des systèmes de M^me^ de Kowalevsky, contenir la fonction u_j et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k_j inclusivement, à l'exception de la dérivée $\frac{\partial^{k_j} u_j}{\partial x^{k_j}}$. Or, la cote première du premier membre est zéro, et les cotes premières de u_j et de ses dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, k_j$ sont respectivement égales aux quantités

$$-k_j, -k_j + 1, -k_j + 2, \ldots, -k_j + k_j,$$

lesquelles sont toutes inférieures à zéro, à l'exception de la dernière qui est nulle. D'un autre côté, la cote seconde du premier membre est encore zéro, et la cote seconde d'une dérivée d'ordre k_j de u_j figurant au second membre est au plus égale à

$$-k_j + (k_j - 1) = -1 < 0,$$

puisque, dans la formation de cette dérivée, il y a au plus $k_j - 1$ différentiations relatives à la variable x.

Si donc on désigne par c_1, c_2 les cotes première et seconde du premier membre, et par c'_1, c'_2 celles d'une inconnue ou dérivée figurant au second membre, on aura nécessairement, ou bien

$$c_1 - c'_1 > 0,$$

ou bien

$$c_1 - c'_1 = 0, \qquad c_2 - c'_2 > 0.$$

Nous avons d'ailleurs choisi pour les diverses variables indépendantes des cotes premières toutes égales entre elles.

Exemple II. Désignant par $u, v, \ldots, w$ certaines fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, \ldots, s, t$, nous adopterons pour celles-ci un ordre déterminé, par exemple

$$x, y, \ldots, s, t, \tag{45}$$

et de même pour les inconnues un ordre déterminé, par exemple

$$u, v, \ldots, w. \tag{46}$$

Puis, nous rangerons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres des diverses fonctions inconnues. Nous écrirons d'abord l'ensemble des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci l'ensemble des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier l'ensemble des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. Chaque ensemble sera ensuite divisé en ensembles partiels, dont le premier à gauche contiendra les dérivées appartenant à la fonction u, le suivant les dérivées appartenant à la fonction v, et ainsi jusqu'au dernier qui contiendra les dérivées appartenant à la fonction w. En désignant maintenant par $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ les ordres partiels d'une dérivée quelconque relatifs à $x, y, \ldots, s, t$ respectivement, chacun des ensembles résultants sera lui-même divisé en ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α; chaque sous-ensemble en sous-ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β; et ainsi jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des ensembles définitifs se compose alors d'une dérivée unique, et les dérivées de tous ordres de nos fonctions inconnues se trouvent rangées, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, dans un ordre bien déterminé. Nous qualifierons de *taxique* la suite ainsi obtenue, et nous dirons qu'une dérivée de fonction inconnue est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, selon que, dans la suite taxique, elle figure à gauche ou à droite de cette autre.

Cela étant, un système différentiel sera dit *taxique*, s'il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qu'il implique, et si l'on peut trouver, pour les variables et les inconnues, deux ordres respectifs, (45), (46), tels, que chaque second membre ne contienne, outre les variables et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures au premier membre correspondant.[1]

Or, un pareil système est nécessairement orthonome.

Effectivement, si une dérivée de fonction inconnue est antérieure à une autre, il arrive forcément de trois choses l'une:

ou bien elle est d'ordre supérieur à cette autre;

ou bien elle est de même ordre, mais la fonction inconnue à laquelle elle appartient précède, dans la suite (46), la fonction inconnue à laquelle appartient cette autre;

ou bien enfin, les deux dérivées considérées sont de même ordre et appartiennent à une même fonction inconnue, mais en désignant par

$$\begin{gathered} \alpha' , \beta' , \ldots , \lambda' , \mu' , \\ \alpha'' , \beta'' , \ldots , \lambda'' , \mu'' \end{gathered}$$

leurs ordres partiels relatifs à

$$x , y , \ldots , s , t,$$

les différences

$$\alpha' - \alpha'' , \beta' - \beta'' , \ldots , \lambda' - \lambda''$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

Cela étant, et en désignant par h le nombre des variables indé-

[1] Il va sans dire que les seconds membres sont supposés tous développables dans un même domaine.

pendantes, il suffit, pour se convaincre de la nature orthonome d'un système taxique, d'attribuer:

aux variables des cotes premières toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes premières toutes nulles;

aux variables des cotes secondes toutes nulles, et aux inconnues successives $u, v, \ldots, w$ des cotes secondes dont la valeur aille en décroissant;

aux variables et aux inconnues des cotes troisièmes toutes nulles, à l'exception de x qui aura pour cote troisième l'unité;

aux variables et aux inconnues des cotes quatrièmes toutes nulles, à l'exception de y qui aura pour cote quatrième l'unité;

etc.;

finalement, aux variables et aux inconnues des cotes $(h+1)^{\text{ièmes}}$ toutes nulles, à l'exception de l'avant dernière variable s, qui aura pour cote $(h+1)^{\text{ième}}$ l'unité.

Car toute dérivée postérieure à une autre est alors normale vis à vis de cette autre; les inconnues elles-mêmes le sont évidemment vis à vis d'une dérivée quelconque; enfin, les cotes premières des diverses variables indépendantes ont été choisies égales entre elles.

22. *Tout système orthonome passif est complètement intégrable, c'est à dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies.*

Tout revient, comme nous l'avons vu (15), à prouver la convergence des développements des intégrales hypothétiques.

I. Si les fonctions $f(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont toutes deux développables dans quelque domaine des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, si de plus les valeurs de $\varphi(x, y, \ldots)$ et de toutes ses dérivées en $x_0, y_0, \ldots$ sont réelles, positives, et supérieures aux modules des valeurs correspondantes de $f(x, y, \ldots)$ et de ses dérivées semblables, la fonction φ sera dite *majorante* de f par rapport aux valeurs $x_0, y_0, \ldots$.

II. *Soient*

$f(x, y, \ldots)$ *une fonction développable dans un domaine des valeurs* $x_0, y_0, \ldots$;

$r_x, r_y, \ldots$ des constantes positives respectivement inférieures aux rayons de ce domaine;

M une constante positive supérieure à celle qu'on obtient en remplaçant dans le développement de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir de $x_0, y_0, \ldots$, tous les coefficients par leurs modules, et les différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$ par les quantités respectives $r_x, r_y, \ldots$;

$\alpha_x, \alpha_y, \ldots$ des constantes positives supérieures ou égales à $\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}, \ldots$ respectivement;

enfin m un entier positif.

Cela étant, la fonction

$$\Psi(x, y, \ldots) = \frac{M}{[1 - \alpha_x(x - x_0) - \alpha_y(y - y_0) - \ldots]^m}$$

est majorante pour $f(x, y, \ldots)$ relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots$.

III. *Si l'on désigne par $u, v, \ldots, w$ des fonctions inconnues de la variable indépendante x, et par*

$$F_u(x, u, v, \ldots, w), F_v(x, u, v, \ldots, w), \ldots, F_w(x, u, v, \ldots, w)$$

des composantes[1] *données, développables dans un domaine des valeurs $x_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$, le système des équations différentielles*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = F_u(x, u, v, \ldots, w), \\ \frac{\partial v}{\partial x} = F_v(x, u, v, \ldots, w), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial w}{\partial x} = F_w(x, u, v, \ldots, w) \end{array}\right.$$

---

[1] Si aux variables $s, t, \ldots$ d'une fonction $f(s, t, \ldots)$ on substitue respectivement autant de fonctions $S(z, \ldots), T(z, \ldots), \ldots$ des variables $z, \ldots$, ces dernières fonctions $S(z, \ldots), T(z, \ldots), \ldots$ sont dites *simples*, la première $f(s, t, \ldots)$ s'appelle la fonction *composante*, et le résultat de leur combinaison

$$f[S(z, \ldots), T(z, \ldots), \ldots]$$

porte le nom de fonction *composée*.

admet un groupe d'intégrales $u, v, \ldots, w$, *développables dans un domaine de la valeur* x_0, *et se réduisant, pour* $x = x_0$, *aux valeurs respectives* u_0, $v_0, \ldots, w_0$.

IV. Considérons le système différentiel

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = H_u, \qquad \frac{\partial^\beta v}{\partial x^\beta} = H_v, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^\lambda w}{\partial x^\lambda} = H_w,$$

où $u, v, \ldots, w$ désignent des fonctions inconnues de la variable indépendante x; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ des entiers positifs quelconques; et $H_u, H_v, \ldots, H_w$ des fonctions données de toutes les quantités

$$(47) \qquad x, \quad \left\{\begin{array}{l} u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}, \\ v, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^{\lambda-1} w}{\partial x^{\lambda-1}}. \end{array}\right.$$

Si les fonctions $H_u, H_v, \ldots, H_w$ *sont développables dans un domaine des valeurs*

$$(48) \qquad x_0, \quad \left\{\begin{array}{l} u_0, \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0, \ldots, \left(\dfrac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_0, \\ v_0, \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_0, \ldots, \left(\dfrac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}}\right)_0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ w_0, \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_0, \ldots, \left(\dfrac{\partial^{\lambda-1} w}{\partial x^{\lambda-1}}\right)_0, \end{array}\right.$$

le système proposé admet un groupe d'intégrales $u, v, \ldots, w$, *développables dans un domaine de* x_0, *et telles, que, pour* $x = x_0$, *les fonctions* (47) *se réduisent respectivement aux quantités numériques* (48).

Effectivement, le système différentiel proposé équivaut au suivant au point de vue de l'intégration:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u', \qquad \frac{\partial u'}{\partial x} = u'', \quad \ldots, \quad \frac{\partial u^{(\alpha-1)}}{\partial x} = H_u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v', \qquad \frac{\partial v'}{\partial x} = v'', \quad \ldots, \quad \frac{\partial v^{(\beta-1)}}{\partial x} = H_v,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w', \qquad \frac{\partial w'}{\partial x} = w'', \quad \ldots, \quad \frac{\partial w^{(\lambda-1)}}{\partial x} = H_w:$$

il va sans dire que, dans les seconds membres $H_u, H_v, \ldots, H_w$, figurant à l'extrémité des lignes horizontales respectives du tableau ci-dessus, on a substitué aux dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{\lambda-1} w}{\partial x^{\lambda-1}}$$

les nouvelles inconnues respectives

$$u', u'', \ldots, u^{(\alpha-1)},$$

$$v', v'', \ldots, v^{(\beta-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$w', w'', \ldots, w^{(\lambda-1)}.$$

Cela étant, la proposition qui fait l'objet du présent alinéa IV se présente comme une conséquence immédiate du précédent.

V.[1] Revenant au système différentiel que vise notre énoncé général,

[1] Les alinéas V, VI, VII, VIII et IX du n° 31 (*infrà*) sont, comme je le répète plus loin (31), identiques aux alinéas correspondants du présent numéro **22**, à part quelques modifications que je vais indiquer au fur et à mesure.

partageons-y les fonctions inconnues en catégories suivant la valeur de leurs cotes premières, et supposons, pour fixer les idées, que le nombre des catégories ainsi obtenues soit égal à 3. Les dérivées de tous ordres des inconnues se partagent naturellement alors en trois catégories, suivant qu'elles appartiennent à telle ou telle inconnue.

Cela posé, désignons par γ la valeur commune (positive) des cotes premières attribuées aux diverses variables indépendantes; par $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ les cotes premières attribuées aux inconnues des trois catégories respectives; par N l'ordre maximum des premiers membres du système donné; par Γ un entier fixe choisi sous la seule condition d'être à la fois supérieur aux trois quantités

$$\gamma N + \gamma', \ \gamma N + \gamma'', \ \gamma N + \gamma''';$$

enfin, par K', K'', K''' les plus petits entiers qui, substitués à K, vérifient *respectivement* les relations

$$\gamma K + \gamma' \geqq \Gamma, \ \gamma K + \gamma'' \geqq \Gamma, \ \gamma K + \gamma''' \geqq \Gamma.$$

Nous établirons successivement les points suivants:

A. *Les entiers K', K'', K''' sont tous supérieurs à N.*

Effectivement, si l'on avait, par exemple, $K' \leqq N$, on aurait aussi $\gamma K' + \gamma' \leqq \gamma N + \gamma'$, et, comme $\gamma N + \gamma'$ est inférieur à Γ, il viendrait, contrairement à la définition de K',

$$\gamma K' + \gamma' < \Gamma.$$

B. *Les dérivées dont la cote première tombe au dessous de Γ sont: pour la première catégorie, celles d'ordre inférieur à K'; pour la deuxième, celles d'ordre inférieur à K''; pour la troisième, celles d'ordre inférieur à K'''.* (Quant aux inconnues elles-mêmes, leurs cotes premières tombent évidemment au dessous de Γ).

Effectivement, si une dérivée de première catégorie est d'ordre $K < K'$, sa cote première $\gamma K + \gamma'$ est au plus égale à $\gamma(K' - 1) + \gamma'$, par suite inférieure à Γ, en vertu de la définition de K'. Réciproquement, la relation $\gamma K + \gamma' < \Gamma$ entraîne comme conséquence nécessaire $K < K'$: car, si l'on avait $K \geqq K'$, on aurait aussi

$$\gamma K + \gamma' \geqq \gamma K' + \gamma',$$

et, comme $\gamma K' + \gamma'$ est supérieur ou égal à Γ, il viendrait, contrairement à l'hypothèse,

$$\gamma K + \gamma' \geqq \Gamma.$$

C. *Si l'on dresse, par classes croissantes, la liste des dérivées principales des inconnues, et qu'on y supprime toutes les dérivées de première catégorie dont l'ordre est inférieur à K', toutes celles de deuxième catégorie dont l'ordre est inférieur à K'', enfin toutes celles de troisième catégorie dont l'ordre est inférieur à K''', cette suppression équivaut à celle d'un certain nombre de classes en tête de la liste.*

Ce point est évident, si l'on observe d'une part que les dérivées principales supprimées sont celles dont la cote première tombe au dessous de Γ, et si l'on se reporte d'autre part à la classification des dérivées principales (7), (8).

D. *Si l'on considère une relation primitive dont le premier membre soit*
ou de première catégorie et d'ordre K',
ou de deuxième catégorie et d'ordre K'',
ou de troisième catégorie et d'ordre K''':

1° Toute dérivée de fonction inconnue figurant au second membre est d'ordre au plus égal à K', K'' ou K''', suivant que cette même dérivée est de première, seconde ou troisième catégorie.

2° Le second membre de la relation considérée est linéaire par rapport à l'ensemble de toutes les dérivées qui sont, soit de première catégorie et d'ordre K', soit de deuxième catégorie et d'ordre K'', soit de troisième catégorie et d'ordre K'''.

1° Supposons, par exemple, que le premier membre de la relation considérée soit de première catégorie et d'ordre K': sa cote première est alors $\gamma K' + \gamma'$. D'ailleurs une dérivée d'ordre K figurant dans le second membre a pour cote première l'une ou l'autre des trois quantités

$$\gamma K + \gamma' \,,\; \gamma K + \gamma'' \,,\; \gamma K + \gamma''',$$

suivant qu'elle est de première, seconde ou troisième catégorie. Enfin, toute dérivée figurant au second membre a une cote première au plus égale à celle du premier membre. Nous sommes donc ramenés, pour établir le premier point, à prouver que les relations

$$(49)\quad \gamma K + \gamma' \leqq \gamma K' + \gamma' \;,\; \gamma K + \gamma'' \leqq \gamma K' + \gamma' \;,\; \gamma K + \gamma''' \leqq \gamma K' + \gamma'$$

entraînent *respectivement*, comme conséquence nécessaire,

$$K \leqq K' \;,\; K \leqq K'' \;,\; K \leqq K'''.$$

Or, la première relation (49) entraîne évidemment $K \leqq K'$.

Si la deuxième relation (49) était vérifiée pour quelque valeur de K supérieure à K'', soit $K = K'' + r$, où $r > 0$, on aurait

$$\gamma(K'' + r) + \gamma'' \leqq \gamma K' + \gamma',$$

d'où

$$\gamma(K' - r) + \gamma' \geqq \gamma K'' + \gamma''.$$

et à plus forte raison

$$\gamma(K' - r) + \gamma' \geqq \Gamma,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de K'. Donc la deuxième relation (49) entraîne $K \leqq K''$.

On verrait, par un raisonnement semblable, que la troisième entraîne $K \leqq K'''$.

2° Les entiers K', K'', K''' étant tous supérieurs à l'ordre maximum des premiers membres du système donné, la relation primitive que l'on considère se déduit de quelque relation du système donné par une différentiation d'ordre *positif*. Elle a dès lors son second membre linéaire par rapport à l'ensemble des dérivées qu'indique la deuxième partie de l'énoncé **D.**

VI. Désignons désormais par S le système proposé, et par (S) le système que forment les diverses relations primitives dont les premiers membres sont, ou de première catégorie et d'ordre K', ou de deuxième catégorie et d'ordre K'', ou de troisième catégorie et d'ordre K'''. Il est clair que, dans ces deux systèmes, les dérivées principales et paramétriques des fonctions inconnues sont respectivement les mêmes, à cela près que *les dérivées principales du système S dont la cote première tombait au dessous de Γ, sont devenues paramétriques dans le système* (S); et si l'on dresse, d'après la classe croissante de leurs premiers membres, la liste des relations primitives des deux systèmes, les groupes illimités ainsi obtenus sont les mêmes de part et d'autre, à cela près que, pour le système (S), un certain nombre de relations ont disparu *en tête de la liste.* Si donc on impose, d'une part aux intégrales de S les conditions initiales choisies, d'autre part à celles de (S) des conditions initiales identiques, en ayant soin seulement de prendre, pour les anciennes dérivées principales devenues paramétriques, les valeurs initiales calculées à l'aide des relations primitives disparues, on pourra, dans le système (S) comme dans le proposé, connaître à l'aide des relations primitives, numériquement concordantes, les valeurs initiales de toutes les dérivées principales, et l'on obtiendra de part et d'autre, pour les développements ainsi construits *a priori* des intégrales hypothétiques, des résultats identiques. Tout revient donc à établir la convergence des développements des intégrales hypothétiques de (S) répondant aux conditions initiales que nous venons d'indiquer.

Or on peut, moyennant un simple changement de fonctions, remplacer le système (S) par un autre où les déterminations initiales des inconnues soient toutes identiquement nulles. Effectivement, soient $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues du système (S), et $I_u, I_v, \ldots$ les déterminations initiales de ces inconnues respectives. Nous observerons tout d'abord que, parmi les dérivées de $I_u, I_v, \ldots$, celles qui sont respectivement semblables aux dérivées principales de $u, v, \ldots$ ont toutes zéro pour valeur initiale, et qu'elles sont, par suite, identiquement nulles, puisque leurs propres dérivées, nécessairement semblables à des dérivées principales de $u, v, \ldots$, ont toutes aussi pour valeur initiale zéro; quant aux valeurs initiales de $I_u, I_v, \ldots$ et de leurs dérivées restantes, elles sont précisément égales aux valeurs initiales de $u, v, \ldots$ et de leurs dérivées (paramétriques) semblables. Cela posé, effectuons dans le système (S) la transformation

$$\begin{cases} u = I_u + \mathfrak{u}, \\ v = I_v + \mathfrak{v}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ désignent de nouvelles fonctions inconnues, et soit $(\mathfrak{S})$ le système ainsi obtenu: il va sans dire que, dans cette transformation, nous conservons aux variables indépendantes leurs cotes respectives, et que nous attribuons aux nouvelles fonctions inconnues les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes correspondantes. Si aux relations du nouveau système $(\mathfrak{S})$ on adjoint maintenant toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, il résulte de la remarque faite ci-dessus que le groupe illimité ainsi formé peut se déduire des relations primitives de (S) en remplaçant les dérivées principales de $u, v, \ldots$ par les dérivées semblables de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, puis les fonctions $u, v, \ldots$ et leurs dérivées paramétriques par $I_u + \mathfrak{u}$, $I_v + \mathfrak{v}, \ldots$ et les dérivées semblables de ces sommes. De là on conclut immédiatement: 1° que chaque équation du système $(\mathfrak{S})$ est normale;[1] 2° que, sauf le changement de $u, v, \ldots$ en $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, les deux systèmes (S) et $(\mathfrak{S})$ ont mêmes premiers membres, et par suite que les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques; 3° que si, sans changer les valeurs initiales des variables indépendantes, on impose, d'une part aux intégrales hypothétiques de (S) les déterminations initiales déjà indiquées, d'autre part à celles de $(\mathfrak{S})$ des déterminations initiales identiquement nulles, les relations primitives, numériquement concordantes dans le premier cas, le seront aussi dans le second, et fourniront, pour les dérivées principales semblables des inconnues correspondantes, les mêmes valeurs initiales. En conséquence, *tout revient à prouver la convergence des développements des intégrales hypothétiques qui, dans le système* $(\mathfrak{S})$, *répondent à des déterminations initiales identiquement nulles.*

Comme on a attribué aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes $u, v, \ldots$, il est clair que les inconnues engagées dans le système $(\mathfrak{S})$ et les dérivées de ces inconnues se partageront encore en trois catégories. Pour faciliter le langage, et faute d'une dénomination meilleure, nous nommerons *dominantes* les dérivées de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ qui sont

ou de première catégorie et d'ordre K',

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on substituera à ce membre de phrase le suivant:

»1° que, pour chaque équation du système $(\mathfrak{S})$, toute inconnue ou dérivée figurant effectivement dans le second membre a une cote première au plus égale à celle du premier membre.»

ou de deuxième catégorie et d'ordre K'',
ou de troisième catégorie et d'ordre K''',

et *secondaires* toutes celles qui sont

ou de première catégorie et d'ordre $< K'$,
ou de deuxième catégorie et d'ordre $< K''$,
ou de troisième catégorie et d'ordre $< K'''$.

On voit par là que *l'ensemble des dérivées secondaires équivaut exactement à celui des dérivées dont la cote première tombe au dessous de Γ.* On observera en outre que *le système ($\mathfrak{S}$) ne contient, outre les variables et les inconnues, que des dérivées dominantes et secondaires,* et que *chacune de ses équations, linéaire par rapport à l'ensemble des dérivées dominantes, a pour premier membre une de celles-ci.*

Nous nommerons, dans ce qui suit:

coefficients du système ($\mathfrak{S}$) les diverses fonctions (des variables, inconnues et dérivées secondaires) qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des dérivées dominantes, soit comme termes indépendants de ces dérivées;

$x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales de $x, y, \ldots$;

$\mathfrak{f}, \ldots$ les diverses quantités du groupe formé par les inconnues $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ et leurs dérivées secondaires (toutes ces quantités ont des valeurs initiales nulles, puisque les déterminations initiales sont identiquement nulles);

$\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots$ les inconnues de première catégorie, g' leur nombre, $g'_1, g'_2, \ldots, g'_{K'-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K'-1$;

$\mathfrak{u}'', \mathfrak{v}'', \ldots$ les inconnues de deuxième catégorie, g'' leur nombre, $g''_1, g''_2, \ldots, g''_{K''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K''-1$;

$\mathfrak{u}''', \mathfrak{v}''', \ldots$ les inconnues de troisième catégorie, g''' leur nombre, $g'''_1, g'''_2, \ldots, g'''_{K'''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K'''-1$.[1]

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on nommera en outre *termes anormaux* du système ($\mathfrak{S}$) tous ceux qui, dans quelque second membre de ($\mathfrak{S}$), contiennent une dérivée anormale par rapport au premier membre correspondant; et *termes normaux* du système ($\mathfrak{S}$) tous les autres termes des seconds membres.

D'ailleurs, les seconds membres du système primitif S étant, par la définition même des intégrales ordinaires, développables dans un domaine des valeurs initiales choisies pour les diverses quantités qui y figurent, on voit sans peine que les coefficients du système ($\mathfrak{S}$), fonctions des diverses quantités

$$x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,\mathfrak{f}\,,\,\ldots\,,$$

sont développables dans un domaine des valeurs initiales

$$x_0\,,\,y_0\,,\,\ldots\,,\,0\,,\,\ldots\,.$$

VII. Soient

ε une constante positive moindre que $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire moindre que le quotient de 1 par le nombre des catégories d'inconnues du système donné);

μ une constante positive quelconque;

$$\begin{cases} K', K'', K''', \\ g'\;\;, g'_1\;\;, g'_2\;\;, \ldots, g'_{K'-1}, \\ g''\;, g''_1\;, g''_2\;, \ldots, g''_{K''-1}, \\ g''', g'''_1, g'''_2, \ldots, g'''_{K'''-1}, \end{cases}$$

les entiers définis dans ce qui précède (V), (VI);

w', w'', w''' trois fonctions inconnues de la variable indépendante t.

Si l'on pose

$$(50)\qquad \begin{cases} z = t + g'w' \;\;+ g'_1\,\dfrac{\partial w'}{\partial t} + \ldots + g'_{K'-1}\,\dfrac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}} \\ \qquad\;\; + g''w'' \;+ g''_1\,\dfrac{\partial w''}{\partial t} + \ldots + g''_{K''-1}\,\dfrac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}} \\ \qquad\;\; + g'''w''' + g'''_1\,\dfrac{\partial w'''}{\partial t} + \ldots + g'''_{K'''-1}\,\dfrac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{cases}$$

et $\theta(z) = \frac{1}{1-z}$, *le système différentiel*

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} &= \frac{\mu\theta(z)}{1-3\varepsilon\theta(z)}, \\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} &= \frac{\mu\theta(z)}{1-3\varepsilon\theta(z)}, \\ \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} &= \frac{\mu\theta(z)}{1-3\varepsilon\theta(z)} \end{aligned}\right.$$

admet un groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales

$$(52)\qquad \left.\left\{\begin{aligned} w' &= \frac{\partial w'}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}} = 0 \\ w'' &= \frac{\partial w''}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}} = 0 \\ w''' &= \frac{\partial w'''}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}} = 0 \end{aligned}\right\}\right. \text{ pour } t = 0.$$

Les dérivées restantes de ces intégrales ont d'ailleurs, pour $t = 0$, des valeurs initiales essentiellement positives.

D'abord, l'existence d'un groupe d'intégrales répondant aux conditions initiales (52) résulte immédiatement de l'alinéa IV du présent numéro 22.

D'un autre côté, si l'on développe $\theta(z)$ par la formule

$$1 + z + z^2 + \ldots,$$

et que, après avoir remplacé z par le second membre de (50), on ordonne le résultat par rapport aux puissances de

$$\begin{array}{llll} t\ , & & & \\ w'\ , & \frac{\partial w'}{\partial t}\ , & \ldots, & \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}}\ , \\ w''\ , & \frac{\partial w''}{\partial t}\ , & \ldots, & \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}}\ , \\ w'''\ , & \frac{\partial w'''}{\partial t}\ , & \ldots, & \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}\ , \end{array}$$

on voit immédiatement que les valeurs initiales de la fonction ainsi obtenue et de ses dérivées partielles de tous ordres sont essentiellement positives. Il en est de même de la fonction $\frac{1}{1-3\varepsilon\theta(z)}$, qu'on peut, à cause de $\varepsilon < \frac{1}{3}$, développer suivant la formule

$$1 + 3\varepsilon\theta + 3^2\varepsilon^2\theta^2 + \ldots,$$

par suite enfin du produit

$$\mu\theta(z) \cdot \frac{1}{1-3\varepsilon\theta(z)},$$

second membre commun aux équations du système (51). Les valeurs initiales des dérivées principales de nos intégrales jouissent donc, elles aussi, de la propriété annoncée: car l'attribution aux quantités

$$t\,,\ w'\,,\ w''\,,\ w'''$$

des cotes respectives

$$1\,,\ -K'\,,\ -K''\,,\ -K'''$$

met tout d'abord en évidence la nature orthonome du système (51), et, cela étant, on aperçoit sans peine que le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, effectué de proche en proche pour les classes successives à l'aide des relations primitives, conduit nécessairement à des résultats tous positifs.

Nous désignerons par $W'(t)$, $W''(t)$, $W'''(t)$ les intégrales considérées du système (51).

Nous ferons en outre observer ce qui suit.

Si l'on nomme $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \ldots, \varepsilon_1''', \varepsilon_2''', \ldots,$ des quantités positives (en nombre limité) vérifiant les relations

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \ldots &= \varepsilon, \\ \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \ldots &= \varepsilon, \\ \varepsilon_1''' + \varepsilon_2''' + \ldots &= \varepsilon, \end{aligned}$$

le système (51) entraîne évidemment comme conséquence

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} &= \mu\theta(z) + \varepsilon_1'\ \theta(z)\ \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} + \varepsilon_2'\ \theta(z)\ \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} + \cdots \\ &\quad + \varepsilon_1''\ \theta(z)\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} + \varepsilon_2''\ \theta(z)\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} + \cdots \\ &\quad + \varepsilon_1'''\theta(z)\frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} + \varepsilon_2'''\theta(z)\frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} + \cdots, \\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} &= \text{idem}, \\ \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} &= \text{idem}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, le système (51) entraînant aussi comme conséquence les relations

$$\frac{\mu\varepsilon\theta^2(z)}{1 - 3\varepsilon\theta(z)} = \varepsilon\theta(z)\frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} = \varepsilon\theta(z)\frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} = \varepsilon\theta(z)\frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}},$$

si, dans l'une quelconque des équations (53), on remplace telle ou telle des sommes

$$\varepsilon_1'\ \theta(z)\ \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} + \varepsilon_2'\ \theta(z)\ \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} + \cdots,$$

$$\varepsilon_1''\ \theta(z)\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} + \varepsilon_2''\ \theta(z)\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} + \cdots,$$

$$\varepsilon_1'''\theta(z)\frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} + \varepsilon_2'''\theta(z)\frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} + \cdots,$$

par la quantité $\frac{\mu\varepsilon\theta^2(z)}{1 - 3\varepsilon\theta(z)}$, on tombe encore sur une conséquence de (51).

VIII. *Le système déduit de* ($\mathfrak{S}$) *en y remplaçant les coefficients des seconds membres par certaines majorantes relatives aux valeurs initiales*

$$x_0\,,\ y_0\,,\ \ldots,\ 0\,,\ \ldots$$

des quantités

$$x\,,\ y\,,\ \ldots,\ \mathfrak{f}\,,\ \ldots$$

possède un groupe d'intégrales qui s'annulent, ainsi que leur dérivées secondaires, pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

tandis que toutes leurs autres dérivées ont des valeurs initiales positives.

Aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x\,,\ y\,,\ \ldots,\ \mathfrak{u}',\ \mathfrak{v}',\ \ldots,\ \mathfrak{u}'',\ \mathfrak{v}'',\ \ldots,\ \mathfrak{u}''',\ \mathfrak{v}''',\ \ldots$$

du système ($\mathfrak{S}$) faisons correspondre autant de constantes positives

(54) $$\xi, \eta, \ldots, \upsilon', \psi', \ldots, \upsilon'', \psi'', \ldots, \upsilon''', \psi''', \ldots,$$

que nous nommerons, pour abréger, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite l'une quelconque des dérivées des inconnues, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par ceux de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non; désignons enfin d'une manière générale par $\varphi, \ldots$ les poids respectifs des quantités $\mathfrak{f}, \ldots$.

Cela posé, considérons une équation, conséquence de (51), subsistant entre

$$z, \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}}, \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}}, \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}},$$

et remplaçons-y la somme z par la somme

$$s = \xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \ldots + \varphi\mathfrak{f} + \ldots;$$

substituons d'autre part à la dérivée $\frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}}$, qui peut figurer dans divers termes de l'équation considérée, divers produits obtenus chacun en multipliant l'une quelconque des dérivées dominantes de $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots$ par son poids; effectuons enfin des substitutions analogues pour chacune des dérivées $\frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}}$ et pour chacune des dérivées $\frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}}$: la relation résultante sera, comme il est bien facile de s'en rendre compte, identiquement vérifiée pour

(55) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{u}' = \frac{1}{\upsilon'} W'\ [\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \ldots], \\ \mathfrak{v}' = \frac{1}{\psi'} W'\ [\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{u}'' = \frac{1}{\upsilon''} W''\ [\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \ldots], \\ \mathfrak{v}'' = \frac{1}{\psi''} W''\ [\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{u}''' = \frac{1}{\upsilon'''} W'''[\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \ldots], \\ \mathfrak{v}''' = \frac{1}{\psi'''} W'''[\xi(x - x_0) + \eta(y - y_0) + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Prenons maintenant, dans le système $(\mathfrak{S})$, une équation quelconque $(\mathfrak{s})$, et désignons par q', q'', q''' les nombres respectifs $(\geqq 0)$ des dérivées dominantes de première, seconde, troisième catégorie, qui figurent *effectivement* dans son second membre; par

$$\begin{matrix} \Delta_1' & , \Delta_2' & , \dots, \Delta_{q'}' , \\ \Delta_1'' & , \Delta_2'' & , \dots, \Delta_{q''}'' , \\ \Delta_1''' & , \Delta_2''' & , \dots, \Delta_{q'''}''' \end{matrix}$$

ces dérivées respectives, par

$$\begin{matrix} \varpi_1' & , \varpi_2' & , \dots, \varpi_{q'}' , \\ \varpi_1'' & , \varpi_2'' & , \dots, \varpi_{q''}'' , \\ \varpi_1''' & , \varpi_2''' & , \dots, \varpi_{q'''}''' \end{matrix}$$

leurs poids respectifs, par Δ le premier membre de $(\mathfrak{s})$, et par ϖ le poids de Δ. Si l'entier q' n'est pas nul, on remplacera l'ensemble des termes en $\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_{q'}'$ qui figurent dans le second membre de $(\mathfrak{s})$ par

$$\frac{\varepsilon}{q'}\varpi_1'\theta(s)\Delta_1' + \frac{\varepsilon}{q'}\varpi_2'\theta(s)\Delta_2' + \dots + \frac{\varepsilon}{q'}\varpi_{q'}'\theta(s)\Delta_{q'}';$$

si q' est nul, on remplacera cet ensemble absent par $\frac{\mu\varepsilon\theta^2(s)}{1 - 3\varepsilon\theta(s)}$. On effectuera des substitutions analogues pour les termes en $\Delta_1'', \Delta_2'', \dots, \Delta_{q''}''$, et pour les termes en $\Delta_1''', \Delta_2''', \dots, \Delta_{q'''}'''$ qui figurent dans le second membre de $(\mathfrak{s})$. Quant au terme indépendant des dérivées dominantes, on le remplacera par $\mu\theta(s)$. On remplacera enfin le premier membre Δ par $\varpi\Delta$, et on multipliera les deux membres par $\frac{1}{\varpi}$. L'équation finalement obtenue $((\mathfrak{s}))$ ne différera alors de $(\mathfrak{s})$ que par les coefficients, fonctions de $x, y, \dots, \mathfrak{f}, \dots$, qui figurent dans le second membre. A chaque équation du système $(\mathfrak{S})$ on fera correspondre de même une équation telle que $((\mathfrak{s}))$; on obtiendra finalement un système $((\mathfrak{S}))$ ne différant de $(\mathfrak{S})$ que par les coefficients des seconds membres, et identiquement vérifié par la substitution aux inconnues des seconds membres de (55), c'est à dire de fonctions qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives. Chacun des nouveaux coefficients s'obtient d'ailleurs en faisant le produit de $\theta(s)$ par quelque constante positive, et y ajoutant parfois le produit de $\frac{\theta^2(s)}{1-3\varepsilon\theta(s)}$ par quelque autre constante positive. La première de ces deux constantes, qui seule est importante à considérer, et que nous nommerons, pour abréger, *caractéristique* du coefficient, dépend de ε ou de μ suivant que le coefficient où elle figure multiplie ou non quelque dérivée dominante. Son produit par $\theta(s)$ est identique au coefficient de $((\mathfrak{S}))$ dont il s'agit, ou l'admet pour majorante relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots, 0, \ldots$ de $x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$.

La constante positive ε étant choisie sous la seule condition d'être inférieure à $\frac{1}{3}$, fixons maintenant les valeurs des constantes positives (54). Considérons à cet effet le domaine des valeurs

$$(56) \qquad x_0, y_0, \ldots, 0, \ldots$$

à l'intérieur duquel les coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{S})$ sont développables, et soient

r une quantité positive moindre que tous ses rayons;

M une quantité positive supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé les divers coefficients du système $(\mathfrak{S})$ à partir des valeurs (56), on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les quantités

$$x-x_0, y-y_0, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$$

par la constante r; [1]

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on remplacera cette phrase par la suivante:

»M une quantité positive supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé à partir des valeurs (56) les coefficients des termes normaux du système $(\mathfrak{S})$ et les dérivées premières des coefficients des termes anormaux, on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les quantités

$$x-x_0, y-y_0, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$$

par la constante r.»

P la plus grande des deux quantités $M, \frac{1}{r}$;

Q un entier positif supérieur à la plus grande valeur que puisse atteindre, pour une équation quelconque du système ($\mathfrak{S}$), le nombre des dérivées dominantes figurant au second membre;

$h_2, h_3, \ldots, h_p$ les plus petites valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes seconde, troisième, ..., $p^{\text{ième}}$ des diverses variables indépendantes;

$G_2, G_3, \ldots, G_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des quantités $\mathfrak{f}, \ldots$, c'est à dire des fonctions inconnues et de leurs dérivées secondaires;

$j_2, j_3, \ldots, j_p$ les plus petites valeurs, et $J_2, J_3, \ldots, J_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des diverses dérivées dominantes.

Désignant en outre par

$$\alpha\ ,\ \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$$

$p + 1$ constantes positives dont les valeurs vont être fixées dans un instant, nous prendrons: 1° pour le poids d'une variable indépendante, un produit de puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de cette variable; 2° pour le poids d'une fonction inconnue, le quotient de α par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue considérée. — Le poids d'une dérivée de fonction inconnue aura alors pour valeur le quotient de α par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la dérivée dont il s'agit.

Cela étant, [1] on déterminera successivement les quantités $\theta_p, \theta_{p-1}, \ldots, \theta_2, \theta_1$ et α de manière à vérifier les inégalités:

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on remplacera la fin du présent alinéa VIII par ce qui suit:

»Cela étant, on déterminera successivement les quantités $\theta_p, \theta_{p-1}, \ldots, \theta_2, \theta_1$ et α de manière à vérifier les inégalités

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_p > 1, \\ &\theta_p > \frac{PQ}{\varepsilon}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_{p-1} > 1, \\ &\theta_{p-1} > \frac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_p^{J_p-j_p}; \end{aligned}\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_2 > 1, \\ &\theta_2 > \frac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_3^{J_3-j_3}\ldots\theta_p^{J_p-j_p}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 > 1, \\ &\theta_1 > \frac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_2^{J_2-j_2}\theta_3^{J_3-j_3}\ldots\theta_p^{J_p-j_p}, \\ &\theta_1 > P\theta_2^{-h_2}\theta_3^{-h_3}\ldots\theta_p^{-h_p}; \end{aligned}\right.$$

$$\alpha > P\theta_1^{\Gamma-1}\,\theta_2^{G_2}\theta_3^{G_3}\ldots\theta_p^{G_p}.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_p > 1, \\ &\theta_p > \frac{PQ}{\varepsilon}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_{p-1} > 1, \\ &\theta_{p-1} > \frac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_p^{J_p-j_p}; \end{aligned}\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_2 > 1, \\ &\theta_2 > \frac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_3^{J_3-j_3}\ldots\theta_p^{J_p-j_p}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 > 1, \\ &\theta_1 > \frac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_2^{J_2-j_2}\theta_3^{J_3-j_3}\ldots\theta_p^{J_p-j_p}, \\ &\theta_1 > \frac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_2^{J_2-j_2-h_2}\theta_3^{J_3-j_3-h_3}\ldots\theta_p^{J_p-j_p-h_p}, \\ &\theta_1 > P\theta_2^{-h_2}\theta_3^{-h_3}\ldots\theta_p^{-h_p}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha > P\theta_1^{\Gamma-1}\theta_2^{G_2}\theta_3^{G_3}\ldots\theta_p^{G_p}, \\ &\alpha > \frac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_1^{\Gamma-1}\,\theta_2^{J_2-j_2+G_2}\theta_3^{J_3-j_3+G_3}\ldots\theta_p^{J_p-j_p+G_p}, \end{aligned}\right.$$

Dans ces conditions, les quantités $\xi, \eta, \ldots, \varphi, \ldots$ et les caractéristiques dépendant de ε ne peuvent manquer, comme nous allons le voir, d'être toutes supérieures à P.

---

et on raisonnera comme il suit pour établir que les coefficients du système désigné par $((\mathfrak{S}))$ sont majorants pour les coefficients correspondants de $(\mathfrak{S})$.

En premier lieu, les constantes $\xi, \eta, \ldots, \varphi, \ldots$ ne peuvent manquer d'être toutes supérieures à P. Car, les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ étant toutes plus grandes que 1, et les cotes premières des variables indépendantes au moins égales à 1, les quantités $\xi, \eta, \ldots$ sont toutes au moins égales à

$$\theta_1 \theta_2^{h_2} \theta_3^{h_3} \ldots \theta_p^{h_p},$$

par suite supérieures à P; et, d'un autre côté, puisque les quantités $\mathfrak{f}, \ldots$ ont toutes des cotes premières moindres que Γ, les quantités $\varphi, \ldots$ sont toutes au moins égales à

$$\frac{a}{\theta_1^{\Gamma-1} \theta_2^{G_2} \theta_3^{G_3} \ldots \theta_p^{G_p}},$$

par suite aussi supérieures à P.

Si l'on considère maintenant une équation quelconque du système $((\mathfrak{S}))$, et, dans le second membre de cette équation, une dérivée dominante qui soit normale par rapport au premier membre, la dérivée dont il s'agit a nécessairement: soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantites $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ sont toutes supérieures à 1, les caractéristiques dépendant de ε dans les termes normaux des seconds membres de $((\mathfrak{S}))$ ont donc, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \ldots \theta_3^{j_3 - J_3} \theta_2^{j_2 - J_2} \theta_1,$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \ldots \theta_3^{j_3 - J_3} \theta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p^{j_p - J_p} \theta_{p-1},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_p;$$

elles sont donc toutes supérieures à P.

Passons aux termes anormaux. Le coefficient d'un terme anormal a d'abord, dans $((\mathfrak{S}))$, une valeur initiale positive, au lieu d'une valeur initiale nulle qu'il possède dans $(\mathfrak{S})$. On observera ensuite que la dérivée première, par rapport à l'une quelconque des quantités

Effectivement, les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ étant toutes supérieures à I, et les cotes premières des variables indépendantes au moins égales à I, les quantités $\xi, \eta, \ldots$ sont toutes au moins égales à

$$\theta_1 \theta_2^{h_2} \theta_3^{h_3} \ldots \theta_p^{h_p},$$

par suite supérieures à P; et, d'un autre côté, puisque les quantités $\mathfrak{f}, \ldots$ ont toutes des cotes premières moindres que Γ, les quantités $\varphi, \ldots$ sont toutes au moins égales à

$$\frac{a}{\theta_1^{\Gamma-1} \theta_2^{G_2} \theta_3^{G_3} \ldots \theta_p^{G_p}},$$

par suite aussi supérieures à P.

$x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots,$ du coefficient d'un terme anormal, est le produit de $\theta^s(s)$ par une constante positive, et que cette constante positive est au moins égale à la plus petite des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q} \xi \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \ldots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \eta \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \ldots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \varphi \theta_2^{j_2-J_2} \theta_3^{j_3-J_3} \ldots \theta_p^{j_p-J_p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

par suite au moins égale à la plus petite des deux quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q} \theta_1 \theta_2^{j_2+h_2-J_2} \theta_3^{j_3+h_3-J_3} \ldots \theta_p^{j_p+h_p-J_p},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q} \frac{a}{\theta_1^{\Gamma-1}} \theta_2^{j_2-J_2-G_2} \theta_3^{j_3-J_3-G_3} \ldots \theta_p^{j_p-J_p-G_p},$$

par suite encore supérieure à P.

Finalement, si, désignant par ω le poids maximum des premiers membres du système $((\mathfrak{S}))$, on prend $\mu > P\omega$, toute caractéristique dépendant de μ, étant au moins égale à $\frac{\mu}{\omega}$, sera, elle aussi, supérieure à P.

En rapprochant tout ce qui précède des alinéas I et II du n° 22, on voit sans peine que les divers coefficients du système $(\mathfrak{S})$ admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs (56), les coefficients correspondants du système $((\mathfrak{S}))$. Nous avons d'ailleurs déjà remarqué que ce dernier admet un groupe d'intégrales qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives.»

Si l'on considère maintenant une équation quelconque du système $(\!(\mathfrak{S})\!)$, chacune des dérivées dominantes figurant au second membre a nécessairement: soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celle du premier membre, avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ sont toutes supérieures à 1, les caractéristiques dépendant de ε ont donc, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q}\theta_p^{j_p-J_p}\ldots\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2^{j_2-J_2}\theta_1,$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\theta_p^{j_p-J_p}\ldots\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\theta_p^{j_p-J_p}\theta_{p-1},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\theta_p;$$

elles sont donc toutes supérieures à P.

Finalement, si, désignant par ω le poids maximum des premiers membres du système $(\!(\mathfrak{S})\!)$, on prend $\mu > P\omega$, toute caractéristique dépendant de μ, étant au moins égale à $\frac{\mu}{\omega}$, sera, par suite, supérieure à P.

En rapprochant des alinéas I et II tout ce qui précède, on voit sans peine que les divers coefficients du système $(\mathfrak{S})$ admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs (56), les coefficients correspondants du système $(\!(\mathfrak{S})\!)$. Nous avons d'ailleurs déjà remarqué que ce dernier admet un groupe d'intégrales qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent des valeurs initiales positives.

IX. *Les intégrales hypothétiques de* $(\mathfrak{S})$ *qui, pour* $x-x_0=y-y_0=\ldots=0$, *ont des déterminations initiales identiquement nulles, ont leurs développements nécessairement convergents, ce qui achève la démonstration.*

Il suffit, pour l'établir, de prouver que, dans le système $(\!(\mathfrak{S})\!)$, les dérivées de tous ordres des intégrales effectives dont nous venons de constater l'existence ont des valeurs initiales positives (ou nulles), supérieures (ou égales) aux modules des valeurs initiales que doivent prendre les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$. Le point en question se trouve déjà établi pour les dérivées paramétriques, car leurs valeurs initiales sont nulles dans le système $(\mathfrak{S})$, tandis qu'elles sont positives ou nulles dans le système $(\!(\mathfrak{S})\!)$: il reste donc à l'établir pour les dérivées principales.

Or, si l'on prend dans les systèmes $(\mathfrak{S})$ et $(\!(\mathfrak{S})\!)$ deux relations primitives correspondantes $(\mathfrak{p})$ et $(\!(\mathfrak{p})\!)$, le second membre de la première est une somme de produits pouvant contenir en facteurs quatre sortes de quantités, savoir: certains entiers positifs; certains coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{S})$; certaines dérivées partielles de ces coefficients; enfin certaines dérivées, principales ou paramétriques, des fonctions inconnues. Et le second membre de la deuxième est composé exactement de la même façon avec les entiers positifs dont il s'agit, les majorantes des coefficients de $(\mathfrak{S})$, leurs dérivées partielles, et les dérivées principales ou paramétriques des fonctions inconnues. D'un autre côté, comme nous l'avons déjà dit, les valeurs initiales des dérivées paramétriques des intégrales effectives de $(\!(\mathfrak{S})\!)$ sont positives, et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$. Si donc on ordonne par rapport aux dérivées principales les seconds membres de $(\mathfrak{p})$ et $(\!(\mathfrak{p})\!)$, et qu'on y remplace par leurs valeurs initiales les variables, les inconnues, et les dérivées paramétriques, le second des polynomes ainsi obtenus aura ses coefficients positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants du premier. On voit alors, par un raisonnement effectué de proche en proche pour les classes successives, que les valeurs initiales des dérivées principales des intégrales effectives de $(\!(\mathfrak{S})\!)$ sont positives, et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$: c'est ce qui restait à établir. [1]

---

[1] Dans la démonstration du n° 31 (*infrà*), on remplacera la dernière phrase de l'alinéa IX par la suivante:

»En observant maintenant que toutes les dérivées principales anormales par rapport

QUATRIÈME PARTIE.

Réduction d'un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable.

23. Nous rappellerons tout d'abord le principe suivant.

Soient $x, y, \ldots$ des variables en nombre quelconque que l'on considère comme étant toutes indépendantes les unes des autres; soient en outre

$$\begin{cases} f(x, y, \ldots) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, \ldots) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

deux systèmes d'équations numériquement vérifiées pour les valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$, et dont les premiers membres soient des fonctions bien définies de $x, y, \ldots$ dans un domaine suffisamment restreint des valeurs $x_0, y_0, \ldots$. Le champ de variation de $x, y, \ldots$ étant supposé réduit à un pareil domaine, si le second des deux systèmes considérés admet toutes les solutions numériques du premier, on dit qu'il est une *conséquence algébrique* du premier; et si chacun des deux systèmes est une conséquence algébrique de l'autre, on dit qu'il sont *algébriquement équivalents.*

Cela posé, et $x, y, \ldots$ ayant la même signification que ci-dessus, *si l'équation*

$$F(x, y, \ldots) = 0, \tag{57}$$

numériquement vérifiée pour les valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$, *a son*

---

au premier membre commun de $(\mathfrak{p})$ et $((\mathfrak{p}))$ ont disparu du premier polynome après cette substitution, on voit, par un raisonnement effectué de proche en proche pour les classes successives, que les valeurs initiales des dérivées principales des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$ sont positives, et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$: c'est ce qui restait à établir.»

premier membre développable dans un domaine de ces valeurs, si de plus la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ *ne s'annule pas pour les valeurs dont il s'agit, l'équation* (57) *équivaut algébriquement, dans le voisinage de* $x_0, y_0, \ldots$, *à une équation*

$$x = \Xi(y, \ldots), \tag{58}$$

dont le second membre, développable dans un domaine des valeurs $y_0, \ldots$, *se réduit, pour ces dernières, à* x_0.

Ecrire la formule (58), c'est ce qu'on appelle résoudre *au point de vue algébrique* l'équation (57) par rapport à x dans le voisinage de $x_0, y_0, \ldots$.

24. *Etant donné un système différentiel S, dont les second membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire sans changement de variables ni intégration un second système admettant les mêmes intégrales, et composé:* 1° *d'un groupe orthonome passif où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé;* 2° *d'un groupe de relations exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du premier groupe, et des dérivées de celles-ci.* [1]

(Il va sans dire que *ces deux groupes de relations peuvent éventuellement se réduire à un seul.*)

Nous présenterons tout d'abord une remarque générale sur le genre de raisonnement que l'on est obligé de faire dans une semblable question, quel que soit d'ailleurs le mode de réduction adopté. On doit en effet, quel que soit ce mode, résoudre algébriquement par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées, considérées dans un certain ordre, certaines relations dont les unes sont données, et dont les autres s'introduisent au fur et à mesure des calculs. Or, on suppose essentiellement que chacune des résolutions successives, auxquelles on est ainsi conduit, peut s'effectuer conformément au principe du numéro précédent 23, sans que les résolutions antérieures en soient troublées. Cette présomption,

---

[1] Cette proposition et la démonstration qui suit ont été publiées, en juin 1893, dans les Annales de l'Ecole Normale (p. 151 et suiv.): on trouvera toutefois, dans la rédaction actuelle, quelques légères améliorations.

à laquelle les faits peuvent, dans tel ou tel cas, ne pas donner raison, se justifie toutefois assez fréquemment pour que nos déductions conservent toute leur valeur générale: mais, à vrai dire, la très-grande généralité du problème posé ne nous permettra d'obtenir, dans les raisonnements de l'alinéa III (*infrà*), ni une rigueur absolue, ni une précision irréprochable.

Cela posé, voici comment on peut s'y prendre pour établir la proposition générale formulée ci-dessus.

I. *Si dans un système différentiel, résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, on attribue, conformément aux indications du n°* 6, *p cotes à chacune des variables et des inconnues, et si chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités normales par rapport au premier membre correspondant, on peut, sans changer les cotes, en déduire un système orthoïque équivalent, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.*

Si le système donné $\mathfrak{H}$ n'est pas orthoïque, on désignera par C la cote première maxima de ses premiers membres; puis, de l'ensemble des relations déduites de $\mathfrak{H}$ par différentiations, on extraira un groupe $\mathfrak{H}'$ choisi de telle sorte, que, dans le système simultané

$$(59) \qquad (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'),$$

chacune des dérivées principales (12) dont la cote première ne surpasse pas C figure comme premier membre une fois et une seule. Les équations du système (59), rangées à la suite les unes des autres d'après la classe croissante de leurs premiers membres (8), sont successivement résolubles par rapport aux dérivées qui figurent dans ces premiers membres, et, en effectuant la résolution dont il s'agit, nous sommes conduit à un système

$$(60) \qquad (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'),$$

composé de deux groupes d'équations dont les premiers membres sont respectivement identiques à ceux des groupes $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$, tandis que les seconds membres, indépendants de toute quantité anormale, le sont en outre de toute dérivée principale. De là résulte immédiatement la nature orthoïque du système $\mathfrak{K}$, et nous allons prouver maintenant qu'au point de vue de l'intégration ce système équivaut à $\mathfrak{H}$.

1° *Toute solution de* $\mathfrak{H}$ *vérifie* $\mathfrak{R}$.

Car elle vérifie (59), et par conséquent aussi (60).

2° *Toute solution de* $\mathfrak{R}$ *vérifie* $\mathfrak{H}$.

Effectivement, les équations du système (59) étant disposées les unes à la suite des autres dans leur ordre de résolution successive, et celles du système (60) dans l'ordre correspondant, désignons par $\mathfrak{h}_i$ et $\mathfrak{r}_i$ les équations de rang i de ces deux systèmes respectifs. Si l'on observe que la relation $\mathfrak{h}_1$ fait nécessairement partie du groupe $\mathfrak{H}$, que dès lors $\mathfrak{r}_1$ fait partie du groupe $\mathfrak{R}$, et que, les relations $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{r}_1$ étant identiques entre elles, toute solution de $\mathfrak{R}$ vérifie $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{r}_1$, il nous suffit évidemment de faire voir qu'en supposant vérifiées les diverses équations du système $\mathfrak{R}$ et celles des deux suites

$$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_q,$$

$$\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_q,$$

les équations $\mathfrak{h}_{q+1}, \mathfrak{r}_{q+1}$ le sont également. Or, si $\mathfrak{r}_{q+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{R}$, elle est vérifiée par hypothèse, donc aussi $\mathfrak{h}_{q+1}$, qui peut être considérée comme une combinaison de $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_q, \mathfrak{r}_{q+1}$. Si $\mathfrak{r}_{q+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{h}_{q+1}$ fait partie du groupe $\mathfrak{H}'$, et peut se déduire par différentiation de quelqu'une des équations $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_q$; elle est donc vérifiée en même temps que ces dernières, par suite aussi $\mathfrak{r}_{q+1}$, qui s'obtient par une combinaison de $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_q, \mathfrak{h}_{q+1}$.

II. *Si l'on considère diverses fonctions*

$$u, v, \ldots, w \tag{61}$$

des variables indépendantes

$$x, y, \ldots, z,$$

et que l'on forme successivement, avec des dérivées de $u, v, \ldots, w$, divers ensembles (limités) dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents, le nombre de ces ensembles est forcément limité. [1]

[1] Cette proposition, dont j'ai publié la démonstration en juin 1893 (Annales de l'Ecole Normale, 1893, p. 171, 172 et 173), contient comme cas particulier la sui-

Plaçons-nous, en effet, dans l'hypothèse contraire, et supposons qu'on puisse former une suite *indéfinie* d'ensembles, dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents. En pareil cas, quelqu'une des fonctions (61), u par exemple, fournit certainement des dérivées à un nombre illimité d'ensembles. Si l'on désigne par E' l'un de ces derniers ensembles, et par

$$(62) \qquad \frac{\partial^{\lambda'+\mu'+\dots+\nu'}u}{\partial x^{\lambda'}\partial y^{\mu'}\dots\partial z^{\nu'}}$$

l'une des dérivées de u qui figurent dans E', il y a encore, à la suite de E', un nombre illimité d'ensembles contenant des dérivées de la fonction u; pour chacune de ces dérivées, l'un au moins des ordres partiels $\lambda,\mu,\dots,\nu$, relatifs à $x, y, \dots, z$, est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (62), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqu'une des

$$(\lambda'+1)+(\mu'+1)+\dots+(\nu'+1)$$

catégories que définissent respectivement les relations

$$\begin{array}{l}\lambda=0\,;\ \lambda=1\,;\ \lambda=2\,;\ \dots;\ \lambda=\lambda';\\ \mu=0\,;\ \mu=1\,;\ \mu=2\,;\ \dots;\ \mu=\mu';\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \nu=0\,;\ \nu=1\,;\ \nu=2\,;\ \dots;\ \nu=\nu'.\end{array}$$

Des diverses catégories ci-dessus définies, une au moins, par exemple

$$(63) \qquad \lambda=l,$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité d'en-

---

vante, formulée par M. Delassus en 1896: *Si l'on considère une suite infinie d'ensembles canoniques d'ordres croissants*

$$E^n,\ E^{n+1},\ \dots,\ E^\mu,\ \dots$$

tels que l'on ait, quel que soit μ,

$$(E^\mu)' \leqq E^{\mu+1},$$

le nombre des termes de la suite pour lesquels il y a inégalité est forcément limité (Annales de l'Ecole Normale, 1896, p. 431 et 432).

sembles postérieurs à E'. Si l'on désigne par E'' l'un de ces derniers ensembles, et par

$$(64)\qquad \frac{\partial^{l+\mu''+\dots+\nu''}u}{\partial x^l \partial y^{\mu''}\dots\partial z^{\nu''}}$$

l'une des dérivées de u de la catégorie (63) qui figurent dans E'', il y a encore, à la suite de E'', un nombre illimité d'ensembles contenant des dérivées de u de cette même catégorie; pour chacune des dérivées en question, l'un au moins des ordres partiels $\mu, \dots, \nu$ relatifs à $y, \dots, z$ est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (64), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqu'une des

$$(\mu'' + 1) + \dots + (\nu'' + 1)$$

catégories que définissent respectivement les couples de relations

$$\left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 0;\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 1;\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 2;\end{array}\right. \quad \dots; \quad \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = \mu'';\end{array}\right.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 0;\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 1;\end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 2;\end{array}\right. \quad \dots; \quad \left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = \nu''.\end{array}\right.$$

De ces nouvelles catégories, une au moins, par exemple

$$\left|\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = m,\end{array}\right.$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité d'ensembles postérieurs à E''. En poursuivant ce raisonnement et désignant par $\dots, n$ des entiers convenablement choisis, on arrivera à cette conclusion absurde que la catégorie

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = m,\\ \dots\dots\\ \nu = n,\end{array}\right.$$

ne comprenant évidemment qu'une seule dérivée de u, en fournit à un nombre illimité d'ensembles.

III. Pour démontrer la proposition dont l'énoncé figure en tête du présent numéro 24, nous adopterons pour les variables, et aussi pour les inconnues engagées dans le système S, un ordre déterminé, et nous attribuerons des cotes à toutes ces quantités, conformément aux indications données dans l'exemple II du n° 21. Considérant alors la suite taxique, nous chercherons quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure effectivement dans les équations du système, nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes: nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système S' contenant une équation de moins que le proposé, et dans lequel ne figure plus la dérivée éliminée ni aucune des dérivées situées à sa gauche dans la suite taxique. Nous considérerons, parmi les dérivées restantes, la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent effectivement dans S', nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de S' où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En d'autres termes, nous déduirons des équations données, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique, et, en poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus aucune dérivée, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, l'un différentiel, l'autre fini. Si le groupe fini, résolu par rapport aux fonctions inconnues successives, ne nous conduit pas à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, auquel cas le système proposé serait impossible, il nous permettra d'exprimer certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes, et par suite aussi les dérivées des premières en fonctions composées différentielles des secondes. Le groupe différentiel pourra alors être transformé en un système d'ordre au plus égal à S, et qui sera de même nature que S, avec cette différence que le nombre des fonctions inconnues s'y trouvera diminué, ainsi que le nombre des équations. Sur ce système on opérera comme sur le proposé, et ainsi de suite. Finalement, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, le système proposé se trouvera remplacé par un groupe différentiel exclusivement composé de relations normales, et par quelques groupes finis. Si, dans chacun de ces derniers, on tient compte de ceux qui ont été obtenus après lui, on voit que leur ensemble exprime quelques-unes des fonctions inconnues à l'aide des variables indépendantes et des fonctions inconnues restantes. Celles-ci sont seules impliquées dans le groupe différentiel, que l'on peut, en vertu de l'alinéa I, remplacer par un système taxique $\mathfrak{T}$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.

Si le système $\mathfrak{T}$ n'est point passif, on considérera, parmi les conditions de passivité, celles qui ne se réduisent pas à des identités, et l'on observera qu'elles constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire. De ces relations on déduira alors, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique; si, une fois ces formules obtenues, les conditions de passivité ne fournissent en outre aucune relation finie, on adjoindra au système $\mathfrak{T}$ les formules dont il vient d'être question, et l'on substituera au système total ainsi formé, où les équations sont toutes normales, un système taxique $\mathfrak{T}'$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres (I). Si le système $\mathfrak{T}'$ n'est pas passif, on le traitera comme le système $\mathfrak{T}$, et, sauf la rencontre d'un système passif, on continuera ainsi tant que les systèmes $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, ... successivement obtenus ne fourniront, par la résolution de leurs conditions de passivité, aucune relation finie. Si, à un moment donné, on tombe sur un système non passif où cette circonstance cesse d'être réalisée, on considérera le groupe différentiel et le groupe fini déduits des conditions de passivité; du groupe fini, supposé possible, on tirera un certain nombre des fonctions inconnues exprimées à l'aide des variables indépendantes et des autres fonctions inconnues, et le système dont il s'agit, préalablement augmenté du groupe différentiel, pourra, grâce aux formules résultantes, être transformé en un système de même nature que S, mais impliquant moins de fonctions inconnues encore que n'en impliquait le système $\mathfrak{T}$.

Sur le système résultant, on recommencera à nouveau toutes les opérations successives précédemment exécutées sur S, et ainsi de suite.

Or il est facile de voir que l'application d'un pareil mécanisme conduit forcément soit à une impossibilité, soit à un système passif, soit à l'élimination complète des dérivées. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, elle ne pourrait manquer de conduire à un système taxique non passif qui, traité comme l'a été tout-à-l'heure le système $\mathfrak{T}$, engendrerait, sans réduction ultérieure du nombre des fonctions inconnues, une suite *illimitée* de systèmes également taxiques et non passifs. En comparant entre eux deux systèmes consécutifs de cette dernière suite, on trouverait dans le second deux groupes: l'un composé d'équations en nombre égal à celles du premier système et ayant respectivement les mêmes premiers membres; l'autre résolu par rapport à des dérivées paramétriques du premier. En vertu de l'alinéa II, toutes les dérivées des fonctions inconnues finiraient donc par devenir principales, et les conditions de passivité ne fourniraient plus alors que des relations finies; on serait donc conduit, contrairement à ce qui précède, soit à une impossibilité, soit à une réduction du nombre des fonctions inconnues.

25. Ainsi donc, *étant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine:*

Ou bien ce système n'admet aucune solution;

Ou bien il équivaut à quelque système fini que l'on en peut déduire, sans changement de variables, par de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations;

Ou bien enfin son intégration se ramène de la même manière à celle de quelque système orthonome passif.

26. La réduction des systèmes différentiels quelconques aux systèmes orthonomes passifs peut encore s'opérer à l'aide d'une méthode un peu différente, fondée sur le théorème suivant:

Etant donné un système différentiel S dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots,$ en déduire sans changement de variables ni intégration un second système admettant les mêmes intégrales, et formé de deux groupes d'équations S_1, S_2 qui jouissent de la double propriété ci-après énoncée: 1° l'une des fonctions inconnues, u, du système proposé ne se trouve plus impliquée dans le groupe S_2; 2° en substituant aux inconnues restantes,

$v, \ldots,$ des intégrales quelconques du groupe S_2, on transforme le groupe S_1, soit en une formule unique exprimant directement la fonction u à l'aide des variables $x, y, \ldots,$ soit en un système orthonome passif à la seule fonction inconnue u.[1]

Nous ne traiterons provisoirement comme inconnue qu'une seule des fonctions $u, v, \ldots,$ la fonction u par exemple, nous adopterons pour les variables indépendantes un ordre déterminé, et nous attribuerons des cotes à $u, x, y, \ldots,$ conformément aux indications données dans l'exemple II du n° 21. Formant alors, avec les dérivées de u, la suite taxique, à laquelle nous adjoindrons, sur sa droite, la fonction u elle-même, nous chercherons quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure effectivement dans les équations du système, nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes: nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système S', contenant une équation de moins que le proposé, et dans lequel ne figure plus la dérivée éliminée, ni aucune des dérivées situées à sa gauche. Parmi les dérivées restantes, nous considérerons la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent effectivement dans S', nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de S' où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus la fonction u ni aucune de ses dérivées, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, savoir: 1° les formules de résolution $\mathfrak{A}$ successivement obtenues; 2° les équations non encore résolues $\mathfrak{B}$. Si parmi ces dernières figure quelque relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots,$ le système proposé est impossible. Si parmi les premières figure une relation $\mathfrak{a}$ résolue par rapport à u, elle ne contient dans son second membre ni u ni aucune de ses dérivées, et la fonction u se trouve ainsi exprimée à l'aide des variables indépendantes $x, y, \ldots,$ des fonctions restantes $v, \ldots$ et de leurs dérivées; les diverses dérivées de u peuvent donc, elles aussi, s'exprimer de la même manière, et en portant

[1] Voir les Annales de l'Ecole Normale, juin 1893, p. 178, 179 et 180.

leurs valeurs, avec celle de u, dans les formules de résolution précédentes, nous obtiendrons certaines relations $\mathfrak{G}$ ne contenant plus la fonction u ni aucune de ses dérivées: le groupe S_1 se composera alors de la relation unique $\mathfrak{a}$, et le groupe S_2 des relations $\mathfrak{B}, \mathfrak{G}$.

Si aucun de ces cas ne se présente, on pourra, en vertu d'une proposition démontrée plus haut (24, I), remplacer le système $\mathfrak{A}$ par un système taxique $\mathfrak{T}$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. On observera alors que les conditions de passivité du système $\mathfrak{T}$ constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire. On traitera ces relations comme on a traité le système proposé S, et l'on en déduira de même: 1° un premier groupe $\mathfrak{A}'$ d'équations, obtenues par résolutions successives, ayant pour premiers membres certaines dérivées de u et éventuellement cette fonction même; 2° un deuxième groupe $\mathfrak{B}'$ de relations ne contenant plus la fonction u ni aucune de ses dérivées. Si parmi les dernières $\mathfrak{B}'$ figure quelque relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, le système proposé est impossible. Si dans le groupe $\mathfrak{A}'$ figure une relation $\mathfrak{a}'$ résolue par rapport à u, la fonction u et ses dérivées peuvent s'exprimer à l'aide des variables indépendantes $x, y, \ldots$, des fonctions restantes $v, \ldots$ et de leurs dérivées, et en portant les valeurs ainsi obtenues dans les relations précédentes du groupe $\mathfrak{A}'$ et dans celles du groupe $\mathfrak{T}$, on obtiendra certaines relations $\mathfrak{G}'$ ne contenant plus la fonction inconnue u ni aucune de ses dérivées: le groupe S_1 se composera alors de la relation unique $\mathfrak{a}'$, et le groupe S_2 des relations $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{G}'$. Si le groupe $\mathfrak{A}'$ n'existe pas, le groupe S_1 se compose des relations $\mathfrak{T}$, et le groupe S_2 des relations $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$.

Si aucun de ces cas ne se présente, on pourra déduire du système $(\mathfrak{T}, \mathfrak{A}')$ un système taxique $\mathfrak{T}'$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. Sur le système $\mathfrak{T}'$ on opérera comme sur $\mathfrak{T}$, et ainsi de suite.

Or, un pareil mécanisme ne peut manquer de conduire finalement soit à une impossibilité, soit à une équation résolue par rapport à u, soit à des conditions de passivité indépendantes de u et de ses dérivées. Car, dans le cas contraire, il conduirait à une suite illimitée de systèmes taxiques possédant la propriété suivante: chacun des systèmes dont il s'agit comprendrait un premier groupe d'équations en nombre égal à celles du système précédent et ayant respectivement les mêmes premiers membres, puis un deuxième groupe d'équations résolues par rapport à des dérivées paramétriques du précédent. Il résulte de cette circonstance que toutes les dérivées de u finiraient par devenir principales (24, II), et à partir de ce moment les conditions de passivité demeureraient finies par rapport à u, ce qui est évidemment incompatible avec notre hypothèse.

27. Au système S_2 on pourra appliquer la proposition du numéro précédent, et continuer ainsi jusqu'à épuisement des fonctions inconnues. Dès lors:

Etant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un second système admettant les mêmes intégrales, et formé de groupes successifs d'équations

$$G_1 , G_2 , \ldots , G_r ,$$

qui jouissent des propriétés suivantes:

1° Ces groupes sont en nombre égal à celui des inconnues

$$u_1 , u_2 , \ldots , u_r .$$

2° Dans le groupe G_k ($k = 1 , 2 , \ldots , r$) se trouvent engagées les seules inconnues

$$u_k , u_{k+1} , \ldots , u_r .$$

3° Si le groupe G_k n'est pas entièrement dépourvu d'équations, la substitution à

$$u_{k+1} , \ldots , u_r$$

d'intégrales quelconques du système

$$G_{k+1} , \ldots , G_r$$

transforme G_k, soit en une formule exprimant l'inconnue u_k à l'aide des variables indépendantes, soit en un système orthonome passif à la seule inconnue u_k.

L'intégration du système proposé se ramène ainsi à l'intégration successive de divers systèmes orthonomes passifs n'impliquant chacun qu'une seule fonction inconnue, et la seule connaissance des premiers membres de

$$G_1, G_2, \ldots, G_r$$

permet de fixer avec une entière précision l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales du système proposé.

27 bis. Plus généralement:

Etant donné un système différentiel S, dont les seconds membres sont nuls et les premiers développables dans quelque domaine, on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un second système admettant les mêmes intégrales, et formé des groupes successifs d'équations

$$S_1, S_2, \ldots, S_q,$$

auxquels correspondent les groupes successifs d'inconnues

$$s_1, s_2, \ldots, s_q$$

de la façon suivante:

1° *L'ensemble de ces derniers reproduit une fois et une seule chacune des inconnues du système proposé S.*

2° *Dans le groupe S_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ se trouvent engagées les seules inconnues*

$$s_k, s_{k+1}, \ldots, s_q.$$

3° *Si le groupe S_k n'est pas entièrement dépourvu d'équations, la substitution aux inconnues*

$$s_{k+1}, \ldots, s_q$$

d'intégrales quelconques du système

$$S_{k+1}, \ldots, S_q$$

transforme S_k, soit en un groupe de formules exprimant les inconnues s_k à l'aide des variables indépendantes, soit en un système orthonome passif aux seules inconnues s_k.

L'intégration du système proposé S se ramène ainsi à l'intégration successive de divers systèmes orthonomes passifs, et la seule connaissance des premiers membres de

$$S_1, S_2, \ldots, S_q$$

permet de fixer avec une entière précision l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales du système S.

CINQUIÈME PARTIE.

Propositions diverses sur les systèmes non orthonomes.

28. Nous nous proposons, dans le présent chapitre, d'examiner certaines formes différentielles non orthonomes, et d'établir, pour des données initiales convenablement choisies, l'existence de leurs intégrales.

Une fonction $f(x, y, \ldots)$ de variables en nombre quelconque sera dite *quasi-exponentielle*, si, en désignant par M_0, α des constantes positives convenablement choisies, et par $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs particulières convenablement choisies de $x, y, \ldots$, elle admet pour majorante (22, I), relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots$, la fonction

$$\Psi(x, y, \ldots) = M_0 e^{\alpha[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots]}.$$

D'après cette définition, une fonction quasi-exponentielle est développable à l'aide d'une série entière indéfiniment convergente. En outre, comme nous allons maintenant le prouver, elle jouit, en tout point analytique $(x_1, y_1, \ldots)$, d'une propriété semblable à celle que la définition précédente lui assigne en $(x_0, y_0, \ldots)$. Effectivement, si l'on développe, à partir de $x_0, y_0, \ldots$, les deux quantités

$$f(x_1, y_1, \ldots), \quad \Psi(x_1, y_1, \ldots),$$

il résulte de la définition des majorantes que chaque terme du premier développement a un module inférieur à celui du terme correspondant du second; à plus forte raison le module du premier développement est-il moindre que la somme des modules des termes du second; or, le second ayant tous ses coefficients positifs, il est clair qu'en désignant par $\xi_1, \eta_1, \ldots$ les modules respectifs des différences $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0, \ldots$, la somme des modules de ses termes est

$$M_0 e^{a(\xi_1+\eta_1+\ldots)};$$

on aura donc

$$\bmod f(x_1, y_1, \ldots) < M_0 e^{a(\xi_1+\eta_1+\ldots)}.$$

Un raisonnement semblable, appliqué aux fonctions

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots), \quad \Psi^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots) = M_0 a^{p+q+\ldots} e^{a[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots]},$$

dont la première a pour majorante la seconde, conduira à l'inégalité

$$\bmod f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_1, y_1, \ldots) < M_0 a^{p+q+\ldots} e^{a(\xi_1+\eta_1+\ldots)}.$$

En posant $M_0 e^{a(\xi_1+\eta_1+\ldots)} = M_1$, il vient finalement

$$\bmod f(x_1, y_1, \ldots) < M_1,$$
$$\bmod f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_1, y_1, \ldots) < M_1 a^{p+q+\ldots},$$

ce qui revient à dire que, relativement aux valeurs $x_1, y_1, \ldots$, la fonction $f(x, y, \ldots)$ a pour majorante

$$M_1 e^{a[(x-x_1)+(y-y_1)+\ldots]}.$$

Les fonctions quasi-exponentielles donnent encore lieu aux remarques suivantes:

I. *Toutes les dérivées d'une fonction quasi-exponentielle $f(x, y, \ldots)$ sont elles-mêmes quasi-exponentielles.*

Posons en effet

$$f^{(p',q',\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots) = \varphi(x, y, \ldots)$$

et

$$M_0 \alpha^{p'+q'+\cdots} = M'_0.$$

La fonction $f(x, y, \ldots)$ étant quasi-exponentielle, il résulte de la définition que l'on a, pour toutes valeurs positives ou nulles des entiers $p, q, \ldots,$

$$\operatorname{mod} f_{x, y, \ldots}^{(p'+p, q'+q, \ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < M_0 \alpha^{(p'+p)+(q'+q)+\cdots}$$

ou

$$\operatorname{mod} \varphi_{x, y, \ldots}^{(p, q, \ldots)}(x_0, y_0, \ldots) < M'_0 \alpha^{p+q+\cdots}.$$

La fonction $\varphi(x, y, \ldots)$ a donc pour majorante, relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots,$

$$M'_0 e^{\alpha[(x-x_0)+(y-y_0)+\cdots]}.$$

II. *Si l'on effectue sur une fonction quasi-exponentielle un nombre quelconque de quadratures simples, en ayant soin que le résultat de chacune d'elles se réduise, pour une valeur particulière donnée de la variable qu'elle intéresse, à une fonction quasi-exponentielle des. variables restantes, le résultat final de l'opération est lui-même une fonction quasi-exponentielle.*

On peut évidemment se borner au cas d'une seule quadrature, relative, par exemple, à la variable x. Cela étant, supposons que le résultat d'une pareille quadrature, exécutée sur la fonction quasi-exponentielle $f(x, y, \ldots)$, doive se réduire, pour $x = x_0$, à la fonction quasi-exponentielle $\omega(y, \ldots)$, et soient $y_0, \ldots$ des valeurs particulières quelconques de $y, \ldots,$

$$\sum_{p, q, \ldots} a_{p, q, \ldots} \frac{(x-x_0)^p}{1 \cdot 2 \ldots p} \frac{(y-y_0)^q}{1 \cdot 2 \ldots q} \cdots,$$

$$\sum_{q, \ldots} b_{q, \ldots} \frac{(y-y_0)^q}{1 \cdot 2 \ldots q} \cdots$$

les développements respectifs de $f(x, y, \ldots)$, $\omega(y, \ldots)$ à partir de x_0, $y_0, \ldots$. L'intégrale, développée à partir des mêmes valeurs, a évidemment pour expression

$$F(x, y, \ldots) = \sum_{q, \ldots} b_{q, \ldots} \frac{(y-y_0)^q}{1 \cdot 2 \ldots q} \cdots + \sum_{p, q, \ldots} a_{p, q, \ldots} \frac{(x-x_0)^{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots p(p+1)} \frac{(y-y_0)^q}{1 \cdot 2 \ldots q} \cdots.$$

D'un autre côté, si l'on désigne par M_0, α, N_0, β quatre constantes positives convenablement choisies, on a, puisque $f(x, y, \ldots)$ et $\omega(y, \ldots)$ sont quasi-exponentielles,

$$\operatorname{mod} a_{p,q,\ldots} < M_0 \alpha^{p+q+\cdots}, \quad \operatorname{mod} b_{q,\ldots} < N_0 \beta^{q+\cdots},$$

ou

$$\operatorname{mod} a_{p,q,\ldots} < \frac{M_0}{\alpha} \alpha^{(p+1)+q+\cdots}, \quad \operatorname{mod} b_{q,\ldots} < N_0 \beta^{q+\cdots};$$

on en tire à plus forte raison, en désignant par P_0 la plus grande des quantités $\frac{M_0}{\alpha}$, N_0, et par γ la plus grande des quantités α, β,

$$\operatorname{mod} a_{p,q,\ldots} < P_0 \gamma^{(p+1)+q+\cdots}, \quad \operatorname{mod} b_{q,\ldots} < P_0 \gamma^{q+\cdots},$$

c'est à dire

$$\operatorname{mod} F^{(p+1,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) < P_0 \gamma^{(p+1)+q+\cdots},$$
$$\operatorname{mod} F^{(0,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) < P_0 \gamma^{q+\cdots}.$$

La fonction $F(x, y, \ldots)$ est donc elle-même quasi-exponentielle, ce que nous voulions établir.

III. *Toute fonction composée à l'aide d'une composante entière et de fonctions simples quasi-exponentielles est elle-même quasi-exponentielle.* [1]

Il suffit évidemment d'établir cette propriété pour une somme et un produit de deux fonctions quasi-exponentielles.

Or, si les fonctions $f(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont toutes deux quasi-exponentielles, on a, en désignant par M_0, α, N_0, β quatre constantes positives convenablement choisies, et pour toutes valeurs positives ou nulles des entiers $p, q, \ldots$,

$$\operatorname{mod} f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) < M_0 \alpha^{p+q+\cdots},$$
$$\operatorname{mod} \varphi^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) < N_0 \beta^{p+q+\cdots}.$$

En désignant par P_0 la plus grande des deux quantités M_0, N_0, et par γ la plus grande des deux quantités α, β, on aura à plus forte raison

[1] Voir la note de la page 264.

$$\bmod f^{(p,q,\dots)}_{x,y,\dots}(x_0, y_0, \dots) < P_0 \gamma^{p+q+\dots},$$

$$\bmod \varphi^{(p,q,\dots)}_{x,y,\dots}(x_0, y_0, \dots) < P_0 \gamma^{p+q+\dots},$$

d'où l'on déduit, par addition membre à membre,

$$\bmod f^{(p,q,\dots)}_{x,y,\dots}(x_0, y_0, \dots) + \bmod \varphi^{(p,q,\dots)}_{x,y,\dots}(x_0, y_0, \dots) < 2 P_0 \gamma^{p+q+\dots},$$

et à plus forte raison

$$\bmod [f^{(p,q,\dots)}_{x,y,\dots}(x_0, y_0, \dots) + \varphi^{(p,q,\dots)}_{x,y,\dots}(x_0, y_0, \dots)] < 2 P_0 \gamma^{p+q+\dots}.$$

La somme des deux fonctions données est donc quasi-exponentielle.

Si l'on considère maintenant le produit

$$G(x, y, \dots) = f(x, y, \dots) . \varphi(x, y, \dots),$$

et qu'on le différentie p fois par rapport à x, q fois par rapport à y, etc., sans effectuer jamais la réduction des termes semblables, on a finalement une somme composée de $2^{p+q+\dots}$ termes; chacun de ces termes est d'ailleurs un produit de deux dérivées appartenant respectivement à f et à φ, et dont les ordres totaux respectifs ont pour somme $p + q + \dots$. On a donc, en donnant à P_0 et γ la même signification que ci-dessus,

$$\bmod G^{(p,q,\dots)}_{x,y,\dots}(x_0, y_0, \dots) < 2^{p+q+\dots} P_0^2 \gamma^{p+q+\dots},$$

ou

$$\bmod G^{(p,q,\dots)}_{x,y,\dots}(x_0, y_0, \dots) < P_0^2 (2\gamma)^{p+q+\dots}.$$

Le produit $G(x, y, \dots)$ est donc quasi-exponentiel.

29. *Si dans un système orthoïque passif, linéaire par rapport à l'ensemble des inconnues et de leurs dérivées, les termes indépendants de ces quantités sont tous quasi-exponentiels, et que les autres coefficients se réduisent tous à des constantes; si, de plus, les fonctions, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques du système, sont toutes quasi-exponentielles: les intégrales dont il s'agit existent effectivement et sont elles-mêmes quasi-exponentielles.*

I. Nous observerons tout d'abord qu'en vertu des n^os 2, 3, 4, et des remarques faites au numéro précédent 28, les déterminations initiales des intégrales hypothétiques sont toutes quasi-exponentielles.

Cela étant, soient $u, v, \dots$ les fonctions inconnues du système proposé, que nous désignerons par (S); $I_u, I_v, \dots$ leurs déterminations initiales respectives; $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$ de nouvelles fonctions inconnues. Si, comme à l'alinéa VI du n° 22, on effectue la transformation

$$\begin{cases} u = I_u + \mathfrak{u}, \\ v = I_v + \mathfrak{v}, \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

en attribuant à $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$ les mêmes cotes respectives qu'à $u, v, \dots$, on voit immédiatement: 1° que le système $(\mathfrak{S})$ ainsi obtenu est orthoïque comme le proposé, et que, sauf le changement de $u, v, \dots$ en $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \dots$, les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques; 2° que le système $(\mathfrak{S})$ est, comme le proposé, linéaire par rapport à l'ensemble des inconnues et de leurs dérivées, que les termes indépendants de ces quantités y sont tous quasi-exponentiels, et les autres coefficients tous constants; 3° enfin, que si l'on impose d'une part aux intégrales hypothétiques de (S) les déterminations initiales $I_u, I_v, \dots$, d'autre part à celles de $(\mathfrak{S})$ des déterminations initiales identiquement nulles, les relations primitives, numériquement concordantes dans le premier cas, le seront aussi dans le second, et fourniront, pour les dérivées principales semblables des inconnues correspondantes, les mêmes valeurs initiales. En conséquence, *tout revient à prouver:* 1° *la convergence des développements des intégrales hypothétiques qui, dans le système* $(\mathfrak{S})$, *répondent à des déterminations initiales identiquement nulles;* 2° *la nature quasi-exponentielle de ces intégrales.*

II. *Si, dans les seconds membres de* $(\mathfrak{S})$, *on remplace les termes indépendants par certaines majorantes relatives aux valeurs initiales* $x_0, y_0, \dots$ *des variables* $x, y, \dots$, *puis tous les autres coefficients (non nuls) par certaines constantes positives respectivement supérieures à leurs modules, le système résultant* $((\mathfrak{S}))$ *admet un groupe d'intégrales qui s'annulent toutes en* $x_0, y_0, \dots$, *tandis que leurs dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales essentiellement positives.*

Les termes indépendants qui figurent dans les seconds membres de $(\mathfrak{S})$ étant tous quasi-exponentiels, on peut assigner deux constantes positives, H, γ, telles, que les termes indépendants dont il s'agit admettent tous pour majorante, relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots$, la fonction

$$He^{\gamma[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots]}.$$

Je désigne en outre par μ une constante positive quelconque, qui sera fixée ultérieurement.

Cela étant, je considère une équation quelconque ($\mathfrak{s}$) du système ($\mathfrak{S}$), j'appelle n l'ordre du premier membre, r l'ordre du second, et je pose

$$(65) \qquad M = \gamma^n - M_0 - M_1\gamma - M_2\gamma^2 - \ldots - M_r\gamma^r:$$

dans la formule (65), $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_r$ désignent autant de constantes positives ou nulles; la constante M_0 sera choisie positive ou nulle, suivant que l'équation ($\mathfrak{s}$) contiendra ou non dans son second membre quelqu'une des fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ du système ($\mathfrak{S}$); même alternative pour la constante M_1, suivant que l'équation ($\mathfrak{s}$) contiendra ou non dans son second membre quelque dérivée première de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$; pour la constante M_2, suivant que l'équation ($\mathfrak{s}$) contiendra ou non dans son second membre quelque dérivée seconde de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$; et ainsi de suite jusqu'à M_r; enfin, celles des constantes $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_r$ qui ne sont pas nulles seront choisies suffisamment petites pour que la valeur de M définie par la formule (65) soit positive. Désignant alors par w une fonction inconnue de la variable indépendante t, je considère l'équation différentielle

$$(66) \qquad \frac{\partial^n w}{\partial t^n} = M_0\mu + M\mu e^{\gamma t} + M_0 w + M_1\frac{\partial w}{\partial t} + \ldots + M_r\frac{\partial^r w}{\partial t^r},$$

et je remarque qu'en vertu de la relation (65) elle admet l'intégrale

$$W(t) = \mu(e^{\gamma t} - 1),$$

qui s'annule pour $t = 0$, tandis que ses dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales essentiellement positives. Cette équation (66) peut d'ailleurs s'écrire sous une forme un peu différente, comme il suit: je laisse intacts le premier membre et les deux premiers termes du second membre; si M_0 n'est pas nul, j'appelle q_0 le nombre des termes qui, dans le second membre de ($\mathfrak{s}$), contiennent quelqu'une des fonctions inconnues

$\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, et je remplace, dans le second membre de (66), le terme $M_0 w$ par une somme de q_0 termes égaux chacun à $\frac{M_0}{q_0} w$; si M_1 n'est pas nul, j'appelle q_1 le nombre des termes qui, dans le second membre de ($\mathfrak{s}$), contiennent quelque dérivée première de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, et je remplace, dans le second membre de (66), le terme $M_1 \frac{\partial w}{\partial t}$ par une somme de q_1 termes égaux chacun à $\frac{M_1}{q_1} \frac{\partial w}{\partial t}$; et ainsi de suite jusqu'au dernier terme $M_r \frac{\partial^r w}{\partial t^r}$. De cette manière, je fais correspondre à l'équation ($\mathfrak{s}$) du système ($\mathfrak{S}$) une certaine équation différentielle

(66 bis),

écrite d'une certaine manière, et impliquant la fonction inconnue w de la variable indépendante t; au terme indépendant qui figure dans le second membre de ($\mathfrak{s}$) correspond, dans l'équation (66 bis), $M_0 \mu + M \mu e^{\gamma t}$; à tout autre terme (supposé effectif) du second membre de ($\mathfrak{s}$) correspond le produit d'une constante positive par l'une ou l'autre des quantités w, $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, ..., suivant que le terme considéré de ($\mathfrak{s}$) est d'ordre 0, 1, 2,....

Cela posé, aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x, y, \ldots, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$$

du système orthoïque ($\mathfrak{S}$), faisons correspondre autant de constantes positives

$$\xi, \eta, \ldots, \upsilon, \phi, \ldots,$$

que nous nommerons, pour abréger, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite l'une quelconque des dérivées des inconnues, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par ceux de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non. Dans l'équation (66 bis), nous remplacerons le terme indépendant $M_0 \mu + M \mu e^{\gamma t}$ par

$$M_0 \mu + M \mu e^{\gamma[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots]};$$

considérant ensuite le premier membre de (66 bis) ou tout autre terme du second membre, nous le comparerons au terme correspondant de l'équation ($\mathfrak{s}$), nous remplacerons la dérivée de w (d'ordre positif ou nul) qui figure dans le terme considéré de (66 bis) par la dérivée de $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ (d'ordre égal) qui figure dans le terme correspondant de $(\mathfrak{s})$, et, cette substitution une fois faite, nous multiplierons la dérivée en question par son poids; enfin, nous réduirons à l'unité le coefficient du premier membre. On voit immédiatement que l'équation résultante $((\mathfrak{s}))$ est identiquement vérifiée pour

$$(67)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u} = \dfrac{1}{\upsilon} W[\xi(x-x_0) + \eta(y-y_0) + \cdots], \\ \mathfrak{v} = \dfrac{1}{\phi} W[\xi(x-x_0) + \eta(y-y_0) + \cdots], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

A chaque équation du système $(\mathfrak{S})$ on fera correspondre de même une équation telle que $((\mathfrak{s}))$, et l'on tombera ainsi sur un système $((\mathfrak{S}))$, identiquement vérifié par la substitution à $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ des seconds membres des formules (67), c'est à dire de fonctions qui s'annulent pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

tandis que leurs dérivées de tous ordres prennent des valeurs initiales essentiellement positives.

Dans ce qui suit, je nommerai

P une constante positive supérieure au plus grand module que puissent atteindre, dans le système $(\mathfrak{S})$, les coefficients (constants) des termes non indépendants des seconds membres;

$h_2, h_3, \ldots, h_p$ les plus petites valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes seconde, troisième, $\ldots$, $p^{\text{ième}}$ des diverses variables indépendantes;

$j_2, j_3, \ldots, j_p$ les plus petites valeurs et $J_2, J_3, \ldots, J_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des fonctions $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ et de leurs diverses dérivées figurant effectivement dans le système $(\mathfrak{S})$;

ε la plus petite valeur que puissent atteindre, dans l'équation différentielle (66 bis) et autres analogues, les coefficients (constants) des termes non indépendants que contiennent effectivement leurs seconds membres.

Désignant en outre par

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$$

p constantes positives dont les valeurs vont être fixées dans un instant, nous prendrons: 1° pour chacune des quantités $\xi, \eta, \ldots$ un produit de puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la variable correspondante; 2° pour chacune des quantités $\upsilon, \psi, \ldots$ le quotient de 1 par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue correspondante. Le poids d'une dérivée quelconque (y compris l'ordre zéro) aura alors pour valeur le quotient de 1 par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la dérivée considérée.

Cela étant, nous déterminerons successivement $\theta_p, \theta_{p-1}, \ldots, \theta_2, \theta_1$ à l'aide des relations

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_p > 1, \\ &\theta_p > \frac{P}{\varepsilon}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_{p-1} > 1, \\ &\theta_{p-1} > \frac{P}{\varepsilon}\theta_p^{J_p - j_p}; \end{aligned}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_2 > 1, \\ &\theta_2 > \frac{P}{\varepsilon}\theta_3^{J_3 - j_3}\ldots\theta_p^{J_p - j_p}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 > 1, \\ &\theta_1 > \frac{P}{\varepsilon}\theta_2^{J_2 - j_2}\theta_3^{J_3 - j_3}\ldots\theta_p^{J_p - j_p}, \\ &\theta_1 > \theta_2^{-h_2}\theta_3^{-h_3}\ldots\theta_p^{-h_p}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces conditions, tout coefficient non indépendant pris dans les seconds membres du système $(\mathfrak{S})$ a, comme nous allons le faire voir, un module inférieur au coefficient correspondant (positif) du système $((\mathfrak{S}))$.

Considérons en effet deux équations correspondantes, $(\mathfrak{s})$ et $((\mathfrak{s}))$, des deux systèmes, et une dérivée (d'ordre positif ou nul) figurant effectivement dans le second membre de $(\mathfrak{s})$. En vertu de la définition des systèmes orthoïques, cette dérivée (d'ordre positif ou nul) possède: soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantités θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_p$ sont toutes plus grandes que 1, le coefficient de la dérivée considérée dans le second membre de l'équation $(\mathfrak{s})$ possède, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\theta_p^{j_p-J_p}\ldots\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2^{j_2-J_2}\theta_1,\\
&\varepsilon\theta_p^{j_p-J_p}\ldots\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\varepsilon\theta_p^{j_p-J_p}\theta_{p-1},\\
&\varepsilon\theta_p;
\end{aligned}$$

il est donc forcément supérieur à P, et par suite au module du coefficient correspondant du second membre de l'équation $(\mathfrak{s})$.

Les quantités $\xi, \eta, \ldots$ sont en outre toutes supérieures à 1: car, la cote première de toute variable étant positive et au moins égale à 1, chacune des quantités dont il s'agit est au moins égale à

$$\theta_1\theta_2^{h_2}\theta_3^{h_3}\ldots\theta_p^{h_p},$$

par suite supérieure à 1.

Si, après avoir ainsi fixé $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$, on désigne par ω le poids maximum des premiers membres de $(\mathfrak{S})$, par λ la plus petite des constantes M définies par la relation (65) et autres analogues, et que l'on prenne $\mu > \frac{\omega H}{\lambda}$, le coefficient de

$$e^{\gamma[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots]},$$

dans l'un quelconque des termes indépendants des seconds membres de $(\mathfrak{S})$, ayant une valeur au moins égale à $\frac{\mu\lambda}{\omega}$, sera par suite supérieur à H; donc le terme indépendant considéré, dans lequel figure, outre l'exponentielle dont je viens de parler, une constante additive supérieure à zéro, est une majorante pour

$$He^{\gamma[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\dots]};$$

à plus forte raison, puisque les quantités $\xi, \eta, \dots$ sont toutes supérieures à 1, sera-t-il une majorante pour

$$He^{\gamma[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]},$$

à plus forte raison enfin pour le terme indépendant qui lui correspond dans le système $(\mathfrak{S})$.

En résumé donc, si l'on considère dans les seconds membres de $(\mathfrak{S})$ un terme indépendant quelconque, ce dernier a pour majorante le terme indépendant qui lui correspond dans le système $((\mathfrak{S}))$; les autres coefficients (constants et non nuls) des seconds membres de $(\mathfrak{S})$ se trouvent remplacés dans $((\mathfrak{S}))$ par certaines constantes positives respectivement supérieures à leurs modules; enfin le système $((\mathfrak{S}))$ admet un groupe d'intégrales qui s'annulent en $x_0, y_0, \dots$, tandis que leurs dérivées de tous ordres y prennent des valeurs initiales positives.

III. *Les intégrales hypothétiques de* $(\mathfrak{S})$ *qui, pour*

$$x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0,$$

ont des déterminations initiales identiquement nulles, ont des développements nécessairement convergents et sont quasi-exponentielles, ce qui achève la démonstration.

La convergence se prouve par un raisonnement tout semblable à celui de l'alinéa IX du n° 22, en établissant que les développements des fonctions (67) sont majorants pour ceux des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$ qui répondent à des déterminations initiales identiquement nulles.

D'ailleurs, en désignant par b la plus petite des quantités $\upsilon, \psi, \dots$, et par A la plus grande des quantités $\xi, \eta, \dots$, toute dérivée partielle d'ordre n des fonctions (67) a une valeur initiale dont le module tombe au dessous de $\frac{\mu}{b}(A\gamma)^n$; les fonctions (67) ont donc pour majorante commune

$$\frac{\mu}{b}e^{A\gamma[(x-x_0)+(y-y_0)+\dots]};$$

à plus forte raison les intégrales de ($\mathfrak{S}$) dont nous venons de démontrer l'existence admettent-elles pour majorante commune cette même fonction.

IV. L'énoncé formulé au début du présent numéro 29 cesserait d'être exact, si l'on substituait aux fonctions quasi-exponentielles, que j'y considère, certaines fonctions exprimables par un développement entier indéfiniment convergent: nous avons effectivement constaté, à l'alinéa I du n° 20, que si l'on assujettit une intégrale hypothétique de l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ à se réduire, pour $x = 0$, à une certaine série entière en y indéfiniment convergente, le développement, construit *a priori*, de l'intégrale est divergent.

30. Considérons un système différentiel où se trouvent réalisées à la fois les diverses conditions énoncées ci-après:

1° Le système est résolu par rapport à certaines dérivées, dont l'ensemble, comparé à celui des dérivées figurant dans les seconds membres, n'offre avec lui aucune variable de différentiation commune (de cette première hypothèse résulte, comme nous le verrons dans un instant, la nature orthoïque du système).

2° Si l'on forme un premier groupe $(x, y, \ldots)$ avec les variables de différentiation des premiers membres, et un deuxième groupe $(z, s, \ldots)$ avec toutes les variables restantes, les seconds membres, supposés linéaires par rapport aux inconnues et à leurs dérivées, ont de plus la forme entière par rapport aux variables du groupe $(z, s, \ldots)$; relativement à celles-ci, les termes indépendants des inconnues et de leurs dérivées ont des degrés quelconques, et le coefficient de tout autre terme un degré au plus égal à l'ordre du terme; relativement aux variables $(x, y, \ldots)$, ces diverses fonctions sont développables dans un même domaine.

3° Les conditions de passivité du système sont supposées satisfaites.

Cela étant, et les fonctions, en nombre fini, dont la donnée détermine entièrement un groupe d'intégrales hypothétiques (ordinaires) du système, étant choisies sous la seule restriction d'être entières par rapport aux variables $(z, s, \ldots)$, *les intégrales dont il s'agit existent effectivement, et ont elles-mêmes la forme entière par rapport aux variables* $(z, s, \ldots)$.

I. De la première des conditions supposées résulte la nature orthoïque du système.

Effectivement, le système est résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres. Si d'autre part on désigne par Q un entier supérieur à l'ordre maximum des dérivées figurant dans les seconds membres, et que l'on attribue aux fonctions inconnues la cote zéro, aux variables $x, y, \ldots$ la cote Q, et aux variables $z, s, \ldots$ la cote 1, chaque premier membre aura une cote au moins égale à Q, et chaque inconnue ou dérivée figurant dans les seconds membres une cote inférieure à Q.

II. On peut, dans la démonstration de la convergence des développements des intégrales, se borner au cas où les déterminations initiales sont toutes identiquement nulles.

Effectivement, les déterminations initiales sont, d'après l'hypothèse, forcément entières en $z, s, \ldots$. Cela étant, si on les ramène, par la transformation connue (22, VI), à être toutes identiquement nulles, le système transformé est identique au proposé, à cela près que les termes indépendants des inconnues et de leurs dérivées se trouvent remplacés par d'autres qui sont, comme eux, entiers par rapport aux variables $z, s, \ldots$.

III. Je considère un polynome entier de degré N en $z-z_0, s-s_0, \ldots$, les coefficients de ce polynome étant des fonctions de $x, y, \ldots$ développables dans un domaine de $x_0, y_0, \ldots$, et j'appelle

r une première constante positive moindre que les rayons du domaine;

M une deuxième supérieure à toutes celles que l'on obtient, lorsque, après avoir développé ces mêmes fonctions à partir de $x_0, y_0, \ldots$, on remplace dans ces développements les coefficients par leurs modules, et les différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$ par la constante r;

$\alpha_x, \alpha_y, \ldots$ des constantes positives au moins égales à $\frac{1}{r}$;

m un entier positif;

$\theta_N(t)$ la fonction entière $1 + t + t^2 + \ldots + t^N$.

Cela étant, la fonction

$$\Omega(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = \frac{M\theta_N[(z - z_0) + (s - s_0) + \ldots]}{[1 - \alpha_x(x - x_0) - \alpha_y(y - y_0) - \ldots]^m}$$

est une majorante du polynome proposé, $P(x, y, \ldots, z, s, \ldots)$, *relativement aux valeurs particulières* $x_0, y_0, \ldots, z_0, s_0, \ldots$.

Posons en effet

$$\Psi(x, y, \ldots) = \frac{M}{[1 - a_x(x - x_0) - a_y(y - y_0) - \ldots]^m},$$

d'où l'on tire

$$\Omega(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = \Psi(x, y, \ldots) \cdot \theta_N[(z - z_0) + (s - s_0) + \ldots]$$

et

$$(68) \qquad \frac{\partial^{i+l+\ldots+k+g+\ldots}\Omega}{\partial x^i \partial y^l \ldots \partial z^k \partial s^g \ldots} = \frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \ldots} \cdot \frac{\partial^{k+g+\ldots}\theta_N}{\partial z^k \partial s^g \ldots}.$$

Puisque P et Ω sont des polynomes de degré N en $z - z_0, s - s_0, \ldots$, toute dérivée de P ou Ω a une valeur initiale nulle, dès que la somme de ses ordres partiels relatifs à $z, s, \ldots$ est supérieure à N. On a d'ailleurs, pour $i + l + \ldots \geqq 0$, et en faisant suivre de l'indice zéro les notations des diverses fonctions à considérer et de leurs dérivées pour désigner leurs valeurs particulières en $x_0, y_0, \ldots, z_0, s_0, \ldots$,

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0 = M a_x^i a_y^l \ldots \times m(m+1)\ldots(m+i-1)$$
$$\times (m+i)(m+i+1)\ldots(m+i+l-1)$$
$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et à plus forte raison

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0 \geqq M \frac{1 \cdot 2 \ldots i}{r^i} \cdot \frac{1 \cdot 2 \ldots l}{r_l} \ldots,$$

d'où l'on tire, en désignant par $A_{k,g,\ldots}$ le coefficient du terme en

$$(z - z_0)^k (s - s_0)^g \ldots$$

dans le polynome P,

$$(69) \qquad \left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0 > \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}A_{k,g,\ldots}}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0.$$

On a d'autre part, pour $0 \leqq k + g + \ldots \leqq N$,

$$(70) \qquad \left[\frac{\partial^{k+g+\ldots}\theta_N}{\partial z^k \partial s^g \ldots}\right]_0 = 1 \cdot 2 \ldots (k + g + \ldots) \geqq 1 \cdot 2 \ldots k \cdot 1 \cdot 2 \ldots g \ldots.$$

Des relations (68), (69) et (70) on déduit

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots+k+g+\ldots}\Omega}{\partial x^i \partial y^l \ldots \partial z^k \partial s^g \ldots}\right]_0 > 1 \cdot 2 \ldots k \times 1 \cdot 2 \ldots g \times \ldots \times \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}A_{k,g,\ldots}}{\partial x^i \partial y^l \ldots}\right]_0$$

c'est à dire

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots+k+g+\ldots}Q}{\partial x^i \partial y^l \ldots \partial z^k \partial s^g \ldots}\right]_0 > \mathrm{mod}\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots+k+g+\ldots}P}{\partial x^i \partial y^l \ldots \partial z^k \partial s^g \ldots}\right]_0.$$

IV. *Si l'on désigne par w une fonction inconnue des deux variables indépendantes ξ et σ, par $\theta_n(\sigma)$ la fonction entière $1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^n$, et par $M, r, g_0, g_1, g_2, \ldots, g_K$ des constantes positives quelconques, l'équation aux dérivées partielles*

$$(71)\quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}\left[\theta_K(\sigma) + g_0 w + g_1\theta_1(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \sigma} + g_2\theta_2(\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \ldots + g_K\theta_K(\sigma)\frac{\partial^K w}{\partial \sigma^K}\right]$$

admet quelque intégrale possédant la double propriété: 1° d'être entière en σ; 2° de prendre, elle et ses dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles pour $\xi = \sigma = 0$.

Pour le démontrer, je pose

$$(72)\qquad w = u_0 + u_1\sigma + u_2\sigma^2 + \ldots + u_K\sigma^K,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_K$ étant des fonctions inconnues de la seule variable ξ. L'équation (71) devient:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \sigma\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \sigma^2\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \ldots + \sigma^K\frac{\partial u_K}{\partial \xi} \\ &= \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}[1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^K] \\ &+ \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}g_0[u_0 + u_1\sigma + u_2\sigma^2 + \ldots + u_K\sigma^K] \\ &+ \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}g_1(1+\sigma)[1.u_1 + 2.u_2\sigma + \ldots + K.u_K\sigma^{K-1}] \\ &+ \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}g_2(1+\sigma+\sigma^2)[1.2.u_2 + 2.3.u_3\sigma + \ldots + (K-1)Ku_K\sigma^{K-2}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{M}{1-\frac{\xi}{r}}g_K(1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^K).1.2\ldots Ku_K, \end{aligned}$$

et l'on voit que ses deux membres sont alors de degré K en σ. En égalant les coefficients des diverses puissances de σ dans les deux membres, on a un système différentiel dont les premiers membres sont respectivement

$$\frac{\partial u_0}{\partial \xi}, \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial u_K}{\partial \xi},$$

chaque second membre étant le produit de $\dfrac{M}{1-\dfrac{\xi}{r}}$ par une fonction linéaire de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_K$ à coefficients positifs ou nuls; si donc on assujettit les fonctions inconnues $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_K$ à prendre, pour $\xi = 0$, des valeurs initiales positives ou nulles, il est clair que les relations primitives fourniront, pour leurs dérivées de tous ordres, des valeurs initiales jouissant de la même propriété. De là résulte, en vertu de la formule (72), que w et ses dérivées partielles de tous ordres prendront, pour $\xi = \sigma = 0$, des valeurs initiales positives ou nulles.

V. Je reviens maintenant à l'énoncé général, en supposant, comme cela est permis (II), les déterminations initiales identiquement nulles.

Pour l'établir, j'évalue le degré maximum, par rapport à $z, s, \ldots$, des fonctions de $x, y, \ldots, z, s, \ldots$ qui jouent le rôle de coefficients dans les seconds membres; j'évalue aussi l'ordre maximum des seconds membres, et je désigne par K le plus grand de ces deux entiers. Je désigne ensuite par L l'ordre maximum des premiers membres du système donné ($\mathfrak{S}$); par g_0 le nombre des fonctions inconnues; par g_1 celui de leurs dérivées premières relatives aux seules variables du groupe $(z, s, \ldots)$; et de même par $g_2, \ldots, g_K$ les nombres de leurs dérivées d'ordres respectifs $2, \ldots, K$ qui se rapportent aux seules variables de ce groupe. Soient $x_0, y_0, \ldots, z_0, s_0, \ldots$ les valeurs initiales choisies pour les variables. Chaque coefficient des seconds membres étant, d'après l'hypothèse, entier en $z - z_0, s - s_0, \ldots$, a lui-même des coefficients, fonctions développables de $x, y, \ldots$, que je nommerai, pour abréger, *sous-coefficients* du système. Je désignerai maintenant par r une quantité positive inférieure aux rayons du domaine de $x_0, y_0, \ldots$ où les divers sous-coefficients du système sont supposés à la fois développables; par M' une quantité positive supérieure à toutes celles qu'on obtient lorsque, après avoir développé ces derniers à partir de $x_0, y_0, \ldots$, on remplace, dans les développements obtenus, les différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$ par r, et les constantes jouant le rôle de coefficients par leurs modules; enfin, je désignerai par M une dernière quantité positive supérieure à la fois aux diverses quantités

$$M', M'\frac{r}{1}, M'\frac{r^2}{1.2}, \ldots, M'\frac{r^{L-1}}{1.2\ldots(L-1)}.$$

Cela posé, je considère l'équation aux dérivées partielles (71), et j'y adjoins toutes celles qui s'en déduisent par $1, 2, \ldots, L-1$ différentiations relatives à la variable ξ. J'aurai ainsi un système

(73)

comprenant L équations dont les premiers membres sont respectivement

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \ldots, \frac{\partial^L w}{\partial \xi^L}.$$

En vertu de l'alinéa IV, l'équation (71), et par suite le système (73), admettent une intégrale entière en σ, de la forme

$$u_0 + u_1\sigma + u_2\sigma^2 + \ldots + u_K\sigma^K,$$

où $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_K$ désignent certaines fonctions de ξ, et cette intégrale possède, ainsi que ses dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles pour $\xi = \sigma = 0$. Nous la désignerons, pour abréger, par $W(\xi, \sigma)$.

Je considère maintenant une équation déterminée du système proposé ($\mathfrak{S}$), et à cette équation j'en fais correspondre une de la manière suivante. Désignant par q l'ordre du premier membre de l'équation considérée (q est l'un des entiers $1, 2, \ldots, L$), je choisis dans le système (73) l'équation qui a pour premier membre $\frac{\partial^q w}{\partial \xi^q}$, savoir

$$\frac{\partial^q w}{\partial \xi^q} = \frac{1.2\ldots(q-1)}{r^{q-1}} \frac{M}{\left(1-\frac{\xi}{r}\right)^q}\Big[\theta_K(\sigma) + g_0 w + g_1\theta_1(\sigma)\frac{\partial w}{\partial \sigma} + \cdots$$
$$+ g_K\theta_K(\sigma)\frac{\partial^K w}{\partial \sigma^K}\Big] + \Sigma; \tag{74}$$

dans le second membre de cette dernière, Σ désigne une somme de produits (en nombre limité) dont chacun peut contenir en facteurs: 1° une constante positive; 2° une puissance de $\frac{1}{1-\frac{\xi}{r}}$; 3° une fonction $\theta(\sigma)$ (affectée d'un certain indice); 4° une dérivée de w intéressant au moins une fois la variable ξ. Dans cette équation (74), je remplace le premier membre $\frac{\partial^q w}{\partial \xi^q}$ par celui de l'équation considérée du système ($\mathfrak{S}$); dans le premier des deux termes du second membre de (74), je remplace ξ par la somme $(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots$, σ par la somme $(z-z_0)+(s-s_0)+\ldots$, $g_0 w$ par la somme des inconnues du système, $g_1\frac{\partial w}{\partial \sigma}$ par la somme de leurs dérivées premières relatives aux seules variables $z, s, \ldots$, etc., $g_K\frac{\partial^K w}{\partial \sigma^K}$ par la somme de leurs dérivées d'ordre K relatives aux mêmes variables; enfin, dans le second terme Σ du second membre de (74), je remplace ξ et σ par les sommes respectives $(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots$ et $(z-z_0)+(s-s_0)+\ldots$, puis $\frac{\partial^{\alpha+\beta} w}{\partial \xi^\alpha \partial \sigma^\beta}$ par $W_{\xi,\sigma}^{(\alpha,\beta)}[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots, (z-z_0)+(s-s_0)+\ldots]$.

A chaque équation du système proposé ($\mathfrak{S}$) j'en fais correspondre une de la manière que je viens de dire; j'obtiens ainsi un système (($\mathfrak{S}$)), identiquement vérifié quand on y remplace toutes les fonctions inconnues par $W[(x-x_0)+(y-y_0)+\ldots, (z-z_0)+(s-s_0)+\ldots]$. En vertu des propriétés démontrées de la composante $W(\xi, \sigma)$, les intégrales dont nous venons de constater l'existence effective dans le système (($\mathfrak{S}$)) sont entières en $z, s, \ldots$, et admettent, ainsi que leurs dérivées partielles de tous ordres, des valeurs initiales positives ou nulles.

Observons maintenant que le système (($\mathfrak{S}$)) ne diffère du proposé ($\mathfrak{S}$) qu'en ce que chaque coefficient (indépendant ou non) des seconds membres s'y trouve remplacé par une majorante. D'autre part, puisque les déterminations initiales sont supposées identiquement nulles pour les intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{S}$), les intégrales effectives de (($\mathfrak{S}$)) et leurs dérivées paramétriques ont des valeurs initiales au moins égales aux modules de celles qui ont été choisies pour les intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{S}$) et leurs dérivées semblables. En faisant alors le raisonnement ordinaire, on verra que la même propriété subsiste pour les dérivées principales. Donc les développements des intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{S}$)

sont, comme ceux des intégrales effectives de $(\!(\mathfrak{S})\!)$, convergents et entiers en $z, s, \ldots$).

31. Considérons un système différentiel S, où chacune des variables et des inconnues se trouve affectée de p cotes, et *supposons essentiellement que les cotes premières de toutes les variables indépendantes aient été choisies égales à un même entier positif.*

Supposons d'autre part que les circonstances suivantes se trouvent simultanément réalisées dans le système S:

1° Ce système, impliquant g fonctions inconnues, et composé de g équations, est résolu par rapport à g dérivées appartenant respectivement aux g fonctions inconnues, et ces g dérivées, non plus que leurs propres dérivées, ne figurent dans aucun des seconds membres, qui d'ailleurs sont supposés tous développables dans un même domaine.

2° Toute inconnue ou dérivée figurant *effectivement* dans le second membre d'une équation du système, possède une cote première au plus égale à celle du premier membre correspondant.

Finalement, dressons, pour chaque équation du système S, la liste des diverses quantités (fonctions inconnues ou dérivées) qui, figurant effectivement dans le second membre, se trouvent être anormales (6) vis à vis du premier; égalons à zéro les dérivées premières de chaque second membre, prises par rapport aux quantités anormales correspondantes, et désignons par (A) le groupe des équations ainsi obtenues.

Cela étant, si le groupe des équations (A) n'existe pas, ou, en d'autres termes, si aucun des seconds membres du système ne contient de quantité qui soit anormale vis à vis du premier membre correspondant, le système S rentre, comme cas particulier, dans la catégorie des systèmes orthonomes passifs, et l'on sait, d'après ce qui a été vu dans la troisième partie, que les intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales quelconques existent effectivement.

Nous allons maintenant nous occuper du cas où quelqu'une des équations du système S contient dans son second membre des quantités anormales vis à vis du premier, et établir à ce sujet la proposition suivante:

Le groupe des équations (A) *étant supposé exister, si l'on impose à des* *intégrales ordinaires hypothétiques du système S des déterminations initiales* (12) *arbitrairement choisies sous la seule restriction que les équations* (A) *se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des quantités qu'elles contiennent, les intégrales dont il s'agit ne peuvent manquer d'exister effectivement.*

I. Pour abréger, et faute d'une dénomination meilleure, nous qualifierons de *conforme* toute relation déduite du système S et satisfaisant à la fois aux deux conditions suivantes:

1° La relation dont il s'agit a pour premier membre quelque dérivée d'inconnue, et toute inconnue ou dérivée figurant effectivement dans le second membre possède une cote première au plus égale à celle du premier membre.

2° Toute dérivée première du second membre, prise par rapport à une quantité qui soit anormale vis à vis du premier, fournit, par son équation à zéro, une relation conséquence algébrique de (A).

Cela posé, *si sur une relation conforme on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.*

Cette proposition est évidente dans le cas très-particulier où le second membre de la relation donnée ne contiendrait que les seules variables indépendantes.

Plaçons-nous actuellement dans le cas général, et supposons qu'on exécute sur la relation donnée une différentiation première se rapportant, par exemple, à la variable x. On voit tout d'abord que la relation résultante satisfait, comme la proposée, à la première des deux conditions formulées dans la définition ci-dessus: car, en désignant par γ la cote première (positive) commune aux diverses variables indépendantes, la cote première du premier membre a augmenté de γ, et la cote première maxima des inconnues ou dérivées figurant dans le second membre a augmenté aussi de γ. Je dis qu'elle satisfait aussi à la deuxième condition.

Soit en effet

$$\partial = f(\ldots, \partial', \ldots) \tag{75}$$

la relation proposée, dans laquelle $\partial', \ldots$ désignent les diverses inconnues ou dérivées qui ont la même cote première que δ. En différentiant la relation (75) par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \ldots + \frac{\partial f}{\partial \delta'}\frac{\partial \delta'}{\partial x} + \ldots.$$

Les inconnues ou dérivées qui, dans le second membre de cette dernière relation, ont même cote première que $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, sont $\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots$, et les dérivées premières du second membre, prises successivement par rapport aux quantités

$$\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots,$$

sont respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial \delta'}, \ldots.$$

Si la dérivée $\frac{\partial \delta'}{\partial x}$ est anormale par rapport à $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, la quantité δ' l'est par rapport à δ, et comme la relation (75) est, par hypothèse, conforme, l'équation $\frac{\partial f}{\partial \delta'} = 0$ est conséquence algébrique de (A). D'ailleurs, en dehors des quantités $\frac{\partial \delta'}{\partial x}, \ldots$, aucune des inconnues ou dérivées figurant dans le second membre ne peut être anormale vis à vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, puisqu'elles ont une cote première inférieure.

On voit par là que la nature conforme de la relation (75) persiste après une première différentiation exécutée sur elle. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elle persiste après une seconde, et ainsi de suite quel que soit le nombre des différentiations.

II. *Toutes les relations primitives du système S sont conformes.*

Car les relations qui font partie du système le sont évidemment, et par suite aussi (I) toutes celles qu'on en déduit par différentiations.

III. *En supposant, comme nous l'avons fait, que les relations* (A) *se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des variables, des inconnues et des dérivées paramétriques qui y figurent, les relations primitives fournissent, sans incompatibilité, les valeurs initiales de toutes les dérivées principales, et, en conséquence, les développements par la formule de Taylor* *des intégrales hypothétiques répondant aux conditions initiales données peuvent être entièrement reconstruits.*

En attribuant aux variables, aux inconnues et aux dérivées paramétriques les valeurs initiales données, on transforme, comme nous allons le voir, chaque second membre des relations primitives en une simple fonction des dérivées principales dont les classes sont inférieures à celle du premier membre correspondant. Effectivement, l'opération dont il s'agit transforme chaque second membre du système S en une simple quantité numérique. D'un autre côté, si, sur une relation du système S, on exécute une différentiation d'ordre quelconque, le second membre de la relation résultante a la forme linéaire par rapport aux dérivées dont la cote première est égale à celle du premier membre, et en particulier par rapport aux dérivées principales anormales; le coefficient d'une dérivée principale anormale n'est alors autre chose que la dérivée première du second membre, prise par rapport à la dérivée principale anormale dont il s'agit, et, comme la relation est conforme, ce coefficient ne peut manquer de s'annuler quand les relations (A) se trouvent numériquement vérifiées, et par suite quand on attribue aux variables, aux inconnues et aux dérivées paramétriques les valeurs initiales données.

Cela étant, donnons aux variables indépendantes $x, y, \ldots$ leurs valeurs initiales. Dans ces conditions, les intégrales hypothétiques et leurs dérivées de tous ordres prennent également leurs valeurs initiales, et, comme celles des intégrales et de leurs dérivées paramétriques sont supposées données, chaque relation primitive ne contient plus dans son second membre d'autres quantités inconnues que les valeurs initiales des dérivées principales de classes inférieures à son premier membre. Si donc on partage les relations primitives en groupes successifs d'après la classe croissante de leurs premiers membres, si d'autre part on observe que chaque dérivée principale figure une fois et une seule dans les premiers membres de ces relations, on voit que les relations primitives du premier groupe fourniront, sans incompatibilité, les valeurs initiales des dérivées principales de première classe; puis, ces dernières une fois connues, que les relations primitives du deuxième groupe fourniront, sans incompatibilité, les valeurs initiales des dérivées principales de deuxième classe; et ainsi de suite indéfiniment.

IV. *Les intégrales hypothétiques répondant aux conditions initiales données ne peuvent manquer d'exister effectivement, si leurs développements, construits a priori à partir des valeurs initiales choisies pour les variables, sont convergents.*

On raisonnera comme à l'alinéa III du n° 14.

En conséquence, tout revient à prouver la convergence de ces développements.

V, VI, VII, VIII et IX. Il suffit maintenant, pour achever la démonstration, de répéter textuellement les alinéas V, VI, VII, VIII et IX du n° 22, avec les quelques modifications qui s'y trouvent indiquées par voie d'annotations.

APPENDICE.

Je me propose de faire voir, dans cet Appendice:

1° que tous les types de systèmes différentiels complètement intégrables étudiés jusqu'à ce jour ne sont que des cas particuliers du type que j'appelle aujourd'hui *orthonome;*

2° que les résultats exposés par M. Goursat dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences du 2 novembre 1897 sont contenus, comme cas particulier, dans ceux que j'expose au n° 31 du présent Mémoire.

I. Je ferai observer tout d'abord que le mot *orthonome*, tel qu'il se trouve défini au n° 21, possède une signification plus large que dans mes travaux antérieurs. Dans les travaux en question, j'ai considéré en effet un type de système différentiel auquel j'ai donné d'abord le nom d'*harmonique* (Annales de l'Ecole Normale, 1893), puis d'*orthonome* (Recueil des savants étrangers, tome 32, n° 3), et je me propose actuellement d'établir qu'un pareil type rentre, comme cas particulier, dans celui que je qualifie aujourd'hui d'*orthonome*, et qui fait l'objet de la troisième partie du présent Mémoire.

Je rappellerai tout d'abord les définitions de ces systèmes.

Désignant par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, et par $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues d'un système différentiel, faisons correspondre à chacune des quantités

$$x, y, \ldots, u, v, \ldots$$

p entiers positifs, nuls ou négatifs, que nous nommerons respectivement *cote première, cote seconde, ..., cote* $p^{\text{ième}}$ de cette quantité. Considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions inconnues, nommons *cote* $q^{\text{ième}}$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$ de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue les cotes $q^{\text{ièmes}}$ de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non.

Supposons enfin que le système se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, qui ne figurent, non plus que leurs propres dérivées, dans aucun des seconds membres, et que ces derniers, si l'on y considère pour un instant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, et les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ qui y figurent, comme autant de variables indépendantes distinctes, soient tous développables dans un même domaine.

Cela étant:

A. *Définition des systèmes harmoniques (ou anciens systèmes orthonomes).*

Le système en question sera dit *harmonique,* s'il satisfait à la condition suivante:

Les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ qui figurent *effectivement* dans le second membre d'une équation quelconque ont des ordres au plus égaux à celui du premier membre correspondant; de plus, en désignant par $c_1, c_2, \ldots, c_p$ les cotes du premier membre, et par $c_1', c_2', \ldots, c_p'$ les cotes d'une dérivée quelconque d'ordre égal figurant *effectivement* dans le second, les différences

$$c_1 - c_1', c_2 - c_2', \ldots, c_p - c_p'$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

B. *Définition des nouveaux systèmes orthonomes.*

Le système en question sera dit *orthonome,* si les deux conditions suivantes se trouvent à la fois remplies:

1° Les cotes premières des diverses variables indépendantes sont toutes égales à un même entier positif.

2° Si, considérant une équation quelconque du système, on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_p$ les cotes du premier membre, par $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ celles d'une dérivée figurant *effectivement* dans le second, et par $c''_1, c''_2, \ldots, c''_p$ celles d'une fonction inconnue y figurant aussi *effectivement*, les différences

$$c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \ldots, c_p - c'_p$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive; la même chose a lieu pour les différences

$$c_1 - c''_1, c_2 - c''_2, \ldots, c_p - c''_p.$$

J'établirai enfin les propositions suivantes:

Tout système harmonique peut être considéré comme un système orthonome (nouvelle définition) où les cotes premières des diverses fonctions inconnues sont toutes égales entre elles.

Effectivement, étant donné un système harmonique, j'y affecte les diverses quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ d'une cote supplémentaire, que je considère comme *antérieure* à toutes celles qu'implique la définition $\boldsymbol{A}$, et je choisis cette cote nouvelle égale à 1 pour les variables $x, y, \ldots$, à zéro pour les inconnues $u, v, \ldots$. Il résulte de là que, dans le système donné, chaque variable, chaque inconnue et chaque dérivée d'inconnue se trouve affectée de $p + 1$ cotes, et que la cote première d'une quantité quelconque se trouve être égale:

s'il s'agit d'une variable, à 1;

s'il s'agit d'une inconnue, à zéro;

s'il s'agit d'une dérivée d'inconnue, à l'ordre même de cette dérivée.

Cela étant, on voit sans peine que les deux conditions énoncées dans la définition $\boldsymbol{B}$ se trouvent nécessairement satisfaites.

Réciproquement, si, dans un système orthonome (nouvelle définition), les cotes premières des diverses inconnues sont toutes égales entre elles, le système dont il s'agit est harmonique.

On considérera chaque variable et chaque inconnue comme affectée seulement des $p - 1$ dernières cotes qu'implique la définition $\boldsymbol{B}$, et l'on verra sans peine que la définition $\boldsymbol{A}$ se trouve satisfaite.

II. *Les systèmes harmoniques comprennent, comme cas particulier, ceux que j'ai nommés taxiques.*

Il suffit de rapprocher de l'alinéa précédent I l'exemple II du n° 21.

III. *Les systèmes harmoniques comprennent, comme cas particulier, les systèmes ci-dessous définis, que nous nommerons parataxiques.*

Désignant par $u, v, \ldots, w$ certaines fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, \ldots, s, t$, nous adopterons pour celles-ci un ordre déterminé, par exemple

$$x, y, \ldots, s, t, \tag{76}$$

et de même pour les inconnues un ordre déterminé, par exemple

$$u, v, \ldots, w. \tag{77}$$

Puis nous rangerons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres des diverses fonctions inconnues. Nous écrirons d'abord l'ensemble des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci l'ensemble des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier l'ensemble des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. En désignant maintenant par $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ les ordres partiels d'une dérivée quelconque relatifs à $x, y, \ldots, s, t$ respectivement, chacun des ensembles précédents sera divisé en ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α; chaque sous-ensemble en sous-ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β; et ainsi jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des ensembles obtenus après une pareille suite d'opérations se compose évidemment de dérivées semblables appartenant respectivement aux fonctions $u, v, \ldots, w$: ces dérivées seront finalement écrites de gauche à droite dans l'ordre qui correspond à celui des fonctions. Les dérivées de tous ordres de nos fonctions inconnues se trouvent alors rangées, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, dans un ordre bien déterminé. Nous qualifierons de *parataxique* la suite ainsi obtenue, et nous dirons qu'une dérivée de fonction inconnue est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, suivant que, dans la suite parataxique, elle figure à gauche ou à droite de cette autre.

Cela étant, un système différentiel sera dit *parataxique*, s'il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées, et si l'on peut trouver, pour les variables et les inconnues, deux ordres respectifs, (76), (77), tels, que chaque second membre ne contienne, outre les variables et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures au premier membre correspondant. [1]

Or, un pareil système est nécessairement orthonome (nouvelle définition).

Effectivement, si une dérivée de fonction inconnue est antérieure à une autre, il arrive forcément de trois choses l'une:

ou bien elle est d'ordre supérieur à cette autre;

ou bien elle est du même ordre (total), mais, en désignant par

$$\begin{gathered} \alpha' \ , \beta' \ , \ldots , \lambda' \ , \mu' \ , \\ \alpha'' , \beta'' , \ldots , \lambda'' , \mu'' \end{gathered}$$

les ordres partiels relatifs à

$$x , y , \ldots , s , t$$

de ces deux dérivées, les différences

$$\alpha' - \alpha'' , \beta' - \beta'' , \ldots , \lambda' - \lambda'' \tag{78}$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive;

ou bien enfin les deux dérivées ont les mêmes ordres partiels respectifs, mais la fonction inconnue à laquelle appartient la première dérivée précède, dans la suite (77), la fonction inconnue à laquelle appartient la seconde.

Cela étant, et en désignant par h le nombre des variables indépendantes, il suffit, pour se convaincre de la nature orthonome d'un système parataxique, d'attribuer:

---

[1] Il va sans dire que les seconds membres sont supposés tous développables dans un même domaine.

aux variables des cotes premières toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes premières toutes nulles;

aux variables et aux inconnues des cotes secondes toutes nulles, à l'exception de x qui aura pour cote seconde l'unité;

aux variables et aux inconnues des cotes troisièmes toutes nulles, à l'exception de y qui aura pour cote troisième l'unité;

etc.;

aux variables et aux inconnues des cotes $h^{\text{ièmes}}$ toutes nulles, à l'exception de l'avant-dernière variable s qui aura pour cote $h^{\text{ième}}$ l'unité;

finalement, aux variables des cotes $(h+1)^{\text{ièmes}}$ toutes nulles, et aux inconnues successives $u, v, \ldots, w$ des cotes $(h+1)^{\text{ièmes}}$ dont la valeur aille en décroissant.

Si l'on observe maintenant que, dans ce système orthonome, les cotes premières des inconnues sont toutes égales, il résulte de l'alinéa I que tout système parataxique est harmonique.

IV. *Les systèmes de Mme de Kowalevsky* (1875) *constituent un cas particulier des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Voir l'exemple I du n° 21.

V. *Les systèmes du premier ordre que M. Méray et moi avons étudiés en* 1890 *sous le nom de systèmes immédiats réguliers* (*ou semi-réguliers*), *constituent un cas particulier des systèmes harmoniques, et à plus forte raison* (I) *des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Effectivement, si l'on considère un système du premier ordre résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes $x, y, \ldots$ et les colonnes aux fonctions inconnues $u, v, \ldots$, en plaçant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient en même temps à la ligne (x) et à la colonne (u).

Supposons maintenant que les lignes du tableau ainsi obtenu puissent être rangées dans un ordre tel, qu'en y faisant abstraction pour un instant des colonnes vides et des colonnes pleines, chacune des autres, parcourue de bas en haut, soit formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein. Adoptons pour les lignes l'ordre dont il s'agit, et en même temps disposons les colonnes dans un ordre tel, que le nombre des cases vides n'augmente jamais d'une colonne à la suivante quand on lit le tableau de droite à gauche. Inversement alors il est clair: 1° qu'en faisant abstraction pour un instant des lignes vides et des lignes pleines, chacune des autres, parcourue de droite à gauche, est formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein; 2° que le nombre des cases vides n'augmente jamais d'une ligne à la suivante, quand on lit le tableau de bas en haut.

Cela étant, et après avoir donné à toutes les variables indépendantes la cote première 1, à toutes les fonctions inconnues la cote première zéro, distribuons les variables indépendantes en groupes successifs d'après les nombres décroissants de cases vides contenues dans les lignes correspondantes, et attribuons à chacune d'elles la cote seconde $1, 2, 3, \ldots$, suivant qu'elle appartient au premier, au second, au troisième ... groupe. Fixons pareillement la cote seconde de chaque fonction inconnue par la considération des nombres de cases vides contenues dans les diverses colonnes. On prouve alors bien aisément que *la cote seconde maxima des diverses dérivées figurant dans les seconds membres du système est inférieure à la cote seconde minima des diverses dérivées figurant dans les premiers.* Comme d'ailleurs les cotes premières de toutes les variables sont égales à 1, celles de toutes les inconnues égales à zéro, et celles de toutes les dérivées premières égales à 1, il est clair que le système proposé est orthonome (nouvelle définition), et de plus harmonique (I).

Cela étant, la simple définition des systèmes du premier ordre que M. Méray et moi avons étudiés en 1890 (Annales de l'Ecole Normale, 1890, p. 28, 29, 30, 44 et 45), montre qu'on peut les considérer comme un cas particulier fort restreint des systèmes harmoniques.

Comme je l'ai fait remarquer dans l'Introduction, et comme on peut aisément s'en assurer, ils comprennent à leur tour, comme cas particuliers, les formes du premier ordre étudiées par M. König et par les divers auteurs qui l'ont précédé.

VI. *Les systèmes canoniques de M. Bourlet* (1891) *constituent un cas particulier des systèmes parataxiques, à plus forte raison* (III) *des systèmes* *harmoniques, à plus forte raison enfin* (I) *des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Leur définition (voir la Thèse de M. BOURLET, p. 27) revient en effet à la suivante:

Un système différentiel sera dit *canonique*, s'il est du premier ordre, linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues qu'il implique, résolu par rapport à un certain nombre de ces dérivées, et si de plus les lignes et les colonnes de son tableau peuvent être rangées dans un ordre tel, que le second membre de l'équation écrite dans une case pleine quelconque ne contienne, outre les variables indépendantes et les fonctions inconnues, que les dérivées premières correspondant, soit aux cases vides situées dans les lignes inférieures à celle de la case pleine considérée, soit aux cases vides situées à droite dans la même ligne.

D'après cette définition, les systèmes canoniques de M. BOURLET ne sont évidemment autre chose que des systèmes parataxiques et linéaires du premier ordre.

VII. *Les systèmes canoniques définis et étudiés par M. Delassus en* 1896 *constituent un cas particulier des systèmes taxiques, à plus forte raison* (II) *des systèmes que j'ai étudiés en* 1893 *sous le nom d'harmoniques, à plus forte raison enfin* (I) *des systèmes que j'appelle aujourd'hui orthonomes.*

Désignons par n l'ordre d'un système différentiel donné; rangeons les dérivées de tous ordres des fonctions inconnues $u, v, \ldots, w$ dans l'ordre taxique, comme il a été expliqué au n° 21 (exemple II); et ne considérons, dans cette suite indéfinie, que la portion limitée E contenant les dérivées des ordres $1, 2, \ldots, n$. Si l'on parcourt de gauche à droite cette suite limitée, il résulte des explications données au n° 21 que l'on rencontrera successivement:

l'ensemble $E_u^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de u, l'ensemble $E_v^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de $v, \ldots,$ l'ensemble $E_w^{(n)}$ des dérivées d'ordre n de w;

l'ensemble $E_u^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de u, l'ensemble $E_v^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de $v, \ldots,$ l'ensemble $E_w^{(n-1)}$ des dérivées d'ordre $n-1$ de w;

etc.;

finalement, l'ensemble $E_u^{(1)}$ des dérivées premières de u, l'ensemble

$E_v^{(1)}$ des dérivées premières de $v, \ldots,$ l'ensemble $E_w^{(1)}$ des dérivées premières de w.

Cela posé, la définition donnée par M. Delassus de ses systèmes *canoniques* (voir les Annales de l'Ecole Normale, 1896, p. 440 et 441) revient à dire qu'un pareil système est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues, et que, si l'on partage en groupes les équations du système, suivant que les premiers membres des équations dont il s'agit appartiennent à l'un ou à l'autre des ensembles partiels

$$\begin{array}{llll} E_u^{(n)}, & E_v^{(n)}, & \ldots, & E_w^{(n)}, \\ E_u^{(n-1)}, & E_v^{(n-1)}, & \ldots, & E_w^{(n-1)}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_u^{(1)}, & E_v^{(1)}, & \ldots, & E_w^{(1)}, \end{array}$$

chacun des groupes d'équations ainsi obtenus satisfait à la double condition suivante: 1° en désignant par j le nombre des équations qui composent un groupe quelconque, ces j équations se trouvent résolues par rapport aux j premières dérivées de l'ensemble partiel correspondant; 2° chaque équation du groupe considéré ne contient dans son second membre, outre les variables indépendantes et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures, dans l'ensemble E, aux j premiers membres du groupe.

Les systèmes canoniques de M. Delassus sont donc évidemment taxiques.

VIII. *Les résultats exposés par M. Goursat dans les Comptes-Rendus de l'Académie des sciences du 2 novembre 1897, constituent un cas particulier de ceux que j'expose au n° 31 du présent Mémoire.*

Désignons en effet par u une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(79) \qquad \frac{\partial^n u}{\partial x^h \partial y^{n-h}} = F\Big(x, y, u, \partial, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^{h-1} \partial y^{n-h+1}}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{h+1} \partial y^{n-h-1}}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big),$$

dans le second membre de laquelle $\partial, \ldots$ désignent toutes les dérivées de u des ordres $1, 2, \ldots, n-1$. Si l'on attribue à x, y, u les cotes premières respectives $1, 1, 0$ et les cotes secondes respectives $c_x, c_y, 0$, avec la condition $c_x \gtrless c_y$, les quantités $u, \partial, \ldots$ seront toutes normales vis à vis du premier membre de l'équation (79), comme ayant une cote première inférieure; quant à la quantité

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^i \partial y^{n-i}},$$

qui a même cote première que le premier membre, elle sera normale ou non vis à vis de lui, selon que la différence

$$[hc_x + (n-h)c_y] - [ic_x + (n-i)c_y] = (h-i)(c_x - c_y)$$

sera ou non positive; en supposant, pour fixer les idées, $c_x > c_y$, on voit donc que les quantités

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^{h-1} \partial y^{n-h+1}}$$

sont normales vis à vis du premier membre $\frac{\partial^n u}{\partial x^h \partial y^{n-h}}$, mais que les quantités

(80) $$\frac{\partial^n u}{\partial x^{h+1} \partial y^{n-h-1}}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

ne le sont pas, sans toutefois que leur cote première surpasse celle du premier membre dont il s'agit.

L'application à ce cas particulier de notre proposition du n° 31 fournit alors le résultat suivant, dans lequel on reconnaîtra sans peine celui qu'a récemment formulé M. Goursat:

Si l'on désigne par (A) *le groupe des équations obtenues en égalant à zéro les dérivées premières du second membre de l'équation* (79) *par rapport aux quantités* (80), *et si l'on impose à une intégrale hypothétique de* (79) *des conditions initiales arbitrairement choisies sous la seule restriction que les équations* (A) *se trouvent numériquement vérifiées par les valeurs initiales des quantités qu'elles contiennent, l'intégrale dont il s'agit ne peut manquer d'exister effectivement.*