QUELQUES REMARQUES SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

JULIUS PETERSEN

À COPENHAGUE.

Soit $\varphi(z)$ une fonction uniforme, ne possédant aucun point essentiel à distance finie. Posons

$$\log\varphi(z) = \log R + \theta i, \tag{1}$$

R désignant le module et θ l'argument de la fonction; l'on a alors

$$\frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \log R}{\partial y} = -\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

ou

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial R}{\partial\theta}\frac{y}{r^2}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial\theta}{\partial\theta}\frac{x}{r^2},$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{\partial R}{\partial\theta}\frac{x}{r^2}\right) = -\frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{\partial\theta}{\partial\theta}\frac{y}{r^2},$$

formules d'où l'on tire

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} = -\frac{1}{Rr}\frac{\partial R}{\partial\theta}; \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\theta} = \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}; \tag{2}$$

$$d\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \log R}{\partial\theta}dr + r\frac{\partial \log R}{\partial r}d\theta. \tag{3}$$

Si l'on intègre cette dernière expression, en prenant pour chemin d'intégration une courbe fermée, l'on obtient, comme l'on sait, pour résultat $2\pi n$, où n désigne le nombre des zéros diminué de celui des infinis, respectivement situés dans la partie du plan limitée par la courbe. Si la courbe est une circonférence ayant l'origine pour centre, on a $dr = 0$, et

$$n = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial \log R}{\partial r}r\,d\theta. \tag{4}$$

Cette formule a une intéressante analogie avec la formule de Gauss, qui détermine la quantité d'électricité contenue dans une partie de l'espace limitée par une surface géometrique, savoir:

$$E = \frac{1}{4\pi}\int N d\phi$$

où $d\phi$ désigne l'élément de surface et N la force normale. Si nous concevons qu'en tout zéro et en tout infini soit concentrée une masse 1 repoussant et attirant respectivement avec une force inversement proportionnelle à la distance, l'on aura pour un zéro la force normale

$$\frac{1}{\rho}\cos\varphi,$$

ρ désignant la distance et φ l'angle (r, ρ). En multipliant par ds et en intégrant le long de la circonférence du cercle, l'on obtient pour

$$\int \frac{1}{\rho}\cos\varphi\, ds$$

la valeur 2π, lorsque le point est à l'intérieur du cercle, et la valeur zéro, lorsqu'il est à l'extérieur du cercle. L'on a ainsi

$$n = \frac{1}{2\pi}\int N ds$$

où N désigne la force normale totale ayant son origine en tous les zéros et infinis. Si l'on suppose que les zéros et infinis donnent naissance à un potentiel $\log R$, la force normale sera $\frac{\partial \log R}{\partial r}$ et nous retombons sur notre formule (4). Pour le cercle on peut mettre une courbe fermée quelconque.

De cette formule (4) l'on peut en déduire d'autres par voie d'intégration; pour plus de simplicité nous supposerons qu'il n'y a pas d'infinis, c'est à dire que notre fonction transcendante est entière. En multipliant par $\frac{dr}{r}$ et en intégrant de 0 à r il vient

$$(5) \qquad \int_0^r \frac{n\, dr}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{R}{R_0}\, d\theta,$$

où R_0 est la valeur de R au centre du cercle. Désignons maintenant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les modules des zéros situés à l'intérieur du cercle du rayon r, rangés par ordre de grandeur. Pour $0 < r < \alpha_1$, on a $n = 0$; pour $\alpha_1 < r < \alpha_2$, on a $n = 1, \ldots$ etc., et alors

$$\int_0^r \frac{n\,dr}{r} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dr}{r} + 2\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dr}{r} + \ldots + n\int_{\alpha_n}^{r} \frac{dr}{r} = \log\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 2\log\frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \ldots + n\log\frac{r}{\alpha_n},$$

d'où

$$\log\frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{R}{R_0}\,d\theta, \tag{6}$$

où le second membre détermine la valeur moyenne de $\log\frac{R}{R_0}$ sur le cercle. La formule nous montre que cette valeur est continue. [1]

Posons

$$\frac{\log n}{\log \alpha_n} = \rho_n \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha_n^{\rho_n}} = \frac{1}{n}. \tag{7}$$

Je supposerai encore que ρ_n a une limite ρ, ou, d'une manière plus précise que, ε désignant une grandeur positive qui peut devenir aussi petite que l'on veut, l'on peut toujours trouver une valeur de r telle que, pour cette valeur de r et toute valeur plus grande, on ait

$$\frac{1}{n^{1-\varepsilon}} > \frac{1}{\alpha_n^{\rho}} > \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

L'on reconnait que ρ est le nombre que M. Borel appelle *l'ordre* de la fonction. La série

$$\sum \frac{1}{\alpha_n^{\rho}}$$

se trouvant sur la limite de convergence et divergence, le genre p de la fonction doit être le plus grand nombre entier contenu en ρ, si ρ est fractionnaire; si, au contraire, ρ est un nombre entier on aura $p = \rho - 1$ ou $p = \rho$. Dans les deux cas nous supposerons que le genre est déterminé par les facteurs primaires de la fonction.

---

[1] Monsieur Jensen m'a informé qu'il a déjà démontré cette formule par une autre voie et en a fait l'objet d'une communication à la Société mathématique de Copenhague.

Désignons par $\overline{R}$ la plus grande valeur de R sur le cercle; de la formule (6) vient

$$\overline{R} > R_0 \frac{r^n}{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{8}$$

En définissant ρ comme précédemment l'on peut, pour r suffisamment grand, écrire

$$a_1 a_2 \ldots a_n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^{\frac{1}{\rho}} = \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{\rho}}; \qquad n = r^\rho,$$

d'où

$$\overline{R} > e^{\frac{1}{\rho} r^\rho}$$

où le facteur fini $\frac{1}{\rho}$ peut être omis. Lorsqu'une fonction croît comme e^{r^μ}, où μ doit être pris avec une définition analogue à celle de ρ, μ représente alors le nombre que M. Borel nomme l'*ordre apparent* de la fonction. La formule trouvée montre qu'on a toujours

$$\mu \geqq \rho. \tag{9}$$

D'après les recherches de MM. Hadamard et Borel, on a $\mu = \rho$ quand le genre est déterminé par les facteurs primaires, ce qui est toujours le cas lorsque μ est fractionnaire. Je vais en donner une démonstration nouvelle pour le cas où $p = 0$ et conséquemment $\rho \overline{\overline{<}} 1$.

On a

$$\overline{R} < R_0 \left(1 + \frac{r}{a_1}\right)\left(1 + \frac{r}{a_2}\right) \ldots \tag{10}$$

Lorsque, dans le cercle de rayon r, il se présente n zéros, on a, pour $q > n$

$$1 + \frac{r}{a_q} \leqq 1 + \frac{r^{\rho+\varepsilon}}{a_q^{\rho+\varepsilon}},$$

où ε désigne une petite grandeur positive qui s'évanouit pour $\rho = 1$. D'après un théorème connu, pour des valeurs positives $b_1, b_2, \ldots, b_m$, on a

$$\sqrt[m]{b_1 \cdot b_2 \ldots b_m} < \frac{1}{m}(b_1 + b_2 + \ldots + b_m);$$

par conséquent

$$\left(1+\frac{r}{a_{n+1}}\right)\left(1+\frac{r}{a_{n+2}}\right)\cdots\left(1+\frac{r}{a_{n+m}}\right)<\left(1+\frac{r^{\rho+\varepsilon}}{m}\sum_{n+1}^{n+m}\frac{1}{a_q^{\rho+\varepsilon}}\right)^m.$$

Si m croît indéfiniment, la somme au second membre aura une valeur finie que nous désignerons par k, et l'on a

$$\lim\left(1+\frac{kr^{\rho+\varepsilon}}{m}\right)^m=e^{kr^{\rho+\varepsilon}}.$$

Pour r suffisamment grand, on a

$$\left(1+\frac{r}{a_1}\right)\left(1+\frac{r}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{r}{a_n}\right)<\frac{(2r)^n}{a_1a_2\ldots a_n}<e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

et (10) donne

$$\overline{R}<e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

c'est à dire

$$\mu\leqq\rho,$$

et, par conséquent, en ayant égard à la formule (9) pour toute fonction de genre zéro

$$\mu=\rho.$$

Maintenant supposons que l'on ait $p>0$, et soient $1, \alpha, \beta$ les racines de l'équation $x^{p+1}=1$.

L'on a

$$\varphi(z)\varphi(\alpha z)\varphi(\beta z)\ldots=\left(1-\frac{z^{p+1}}{b_1^{p+1}}\right)\left(1-\frac{z^{p+1}}{b_2^{p+1}}\right)\cdots,$$

où $b_1, b_2, \ldots$ sont les zéros de $\varphi(z)$. Comme le produit est de genre zéro par rapport à z^{p+1}, on voit que pour la fonction

$$F(z)=\varphi(z)\varphi(\alpha z)\varphi(\beta z)\ldots$$

on a $\mu=\rho$. Ce dernier nombre est le même pour $F(z)$ et $\varphi(z)$, mais je n'ai pas réussi à démontrer directement que les deux fonctions ont même ordre apparent (le nombre μ), quand le genre de $\varphi(z)$ est déterminé par les facteurs primaires. Si p n'est pas déterminé par ces facteurs, le produit doit toujours croître moins rapidement que $\varphi(z)$.

Je donnerai maintenant une seconde application de la formule (4): D'après cette formule on a

$$\int_r^\infty \frac{n\,dr}{r^{\rho+1}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^\infty \frac{\partial \log R}{\partial r}\frac{dr}{r^\rho},$$

où l'on a écrit ρ au lieu de $\rho + \varepsilon$. L'on a ici

$$\int_r^\infty \frac{n\,dr}{r^{\rho+1}} = \frac{1}{\rho}\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{a_q^\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{n}{r^\rho},$$

où la série au second membre est convergente pour ε aussi petit que l'on veut. D'autre part, en intégrant par parties l'on a

$$\int_r^\infty \frac{\partial \log R}{\partial r}\frac{dr}{r^\rho} = \left[\frac{\log R}{r^\rho}\right]_r^\infty + \rho\int_r^\infty \log R \frac{dr}{r^{\rho+1}}.$$

Si l'on suppose que $\mu = \rho$,

$$\frac{\log R}{r^\rho}$$

sera égal à zéro pour $r = \infty$, d'où

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{a_q^\rho} = -\frac{n}{r^\rho} - \frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\log R}{r^\rho}d\theta + \frac{\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_r^\infty \frac{\log R}{r^{\rho+2}}r\,dr\,d\theta,$$

ce qui fait voir que la valeur moyenne de

$$\frac{\log R}{r^{\rho+2+\varepsilon}}$$

sur l'anneau circulaire infini, multipliée par la surface, est finie pour une valeur de $\varepsilon > 0$, si petite qu'elle soit, mais devient infini pour $\varepsilon = 0$.