SUR LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE ÉLASTIQUE

PAR

IVAR FREDHOLM
À STOCKHOLM.

On connaît le rôle fondamental que joue l'intégrale particulière $\frac{1}{r}$ de l'équation $\Delta u = 0$ dans la théorie du potentiel. On connaît de même des intégrales particulières des équations d'équilibre d'un corps élastique isotrope, qui pour cette partie de la théorie de l'élasticité jouent un rôle tout à fait analogue à celui de la fonction $\frac{1}{r}$ dans la théorie du potentiel. Les dites intégrales particulières ont pour caractère commun la propriété d'être homogènes du degré -1 et d'avoir un seul point singulier réel à distance finie.

Il est naturel de se proposer la question s'il existe des intégrales particulières des équations de l'équilibre d'un corps cristallisé quelconque, jouissant des mêmes propriétés que la fonction $\frac{1}{r}$.

J'espère d'avoir donné une réponse satisfaisante de cette question par les résultats suivants.

Dans le premier chapitre j'ai donné une formule représentant toutes les intégrales homogènes du degré -1 et analytiques, d'une équation aux dérivées partielles et à coefficients constants. En donnant aux éléments arbitraires dans cette formule des valeurs convenables, on trouve que les équations différentielles de la forme $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u = 0$, où f est une forme définie, admettent toujours un certain nombre d'intégrales qui sont régulières pour tout système réel des variables, le système $x = y = z = 0$ seul excepté.

A l'aide de ces intégrales je déduis, dans le second chapitre, du théorème connu de BETTI une formule permettant d'exprimer les composantes de déformation à l'intérieur d'un corps, si on se donne ces composantes à la surface ainsi que les forces agissant sur la surface.

La dite formule se compose de trois espèces d'intégrales, parfaitement analogues aux intégrales qui représentent, dans la théorie du potentiel, les potentiels d'une masse étendue à trois dimensions, d'une couche simple et d'une couche double. Dans le troisième chapitre on trouvera une étude de ces intégrales.

Dans le même chapitre j'ai de plus démontré que l'on pourra exprimer toute intégrale homogène de degré négatif entier des équations d'équilibre, qui est régulière pour des valeurs réelles, comme fonction linéaire des dérivées des intégrales régulières du degré -1. Ensuite j'ai montré quelle est la signification physique des intégrales homogènes du degré -1, et j'ai résolu le problème d'équilibre d'un milieu élastique infiniment grand, non déformé à l'infini.

CHAPITRE I.

§ 1. *Les solutions homogènes du degré* -1 *des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

Les fonctions homogènes du degré -1, satisfaisant à une équation différentielle linéaire homogène et à coefficients constants

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)u = 0, \tag{1}$$

peuvent s'obtenir de l'intégrale particulière

$$u = \frac{1}{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3},$$

en formant l'expression

$$(2) \qquad u = \int \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi}{f_2(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)}.$$

Dans cette formule les variables sont liées l'un à l'autre par la relation

$$f(\xi, \eta) = f(\xi, \eta, 1) = 0,$$

$f_2(\xi, \eta)$ désigne la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, et $\psi(\xi, \eta)$ est une fonction entière rationnelle en η du degré $n - 1$, n étant le degré de f, par rapport à ξ elle sera une fonction analytique.

Cela posé, nous faisons sur $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ les hypothèses:

1. que le coefficient de ξ_2^n soit différent de zéro,

2. que les facteurs de f, si elle est réductible, soient tous inégaux.

En vertu de l'hypothèse 1 nous pourrons écrire

$$f(\xi, \eta) = f_0 \eta^n + f_1 \eta^{n-1} + \ldots + f_n,$$

où f_0 est certainement différent de zéro. En vertu de la seconde hypothèse les racines $\eta_1 \ldots \eta_n$ de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ seront en général inégales.

Substituons maintenant ces racines successivement pour η dans l'expression (2) et faisons la somme des résultats, nous aurons une fonction symétrique des racines η, dont on obtient l'expression en fonction de ξ seul de la manière suivante.

Décomposons en des fractions simples la fonction rationnelle de η

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)}.$$

Pourvu que la variable ξ ait une valeur telle que les racines η_ν de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ soient tous inégales, on obtient

$$(3) \qquad \frac{\psi(\xi, \eta)}{f(\xi, \eta)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\xi, \eta_\nu)}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)} \cdot \frac{1}{\eta - \eta_\nu}$$
$$+ \frac{\psi(\xi, \eta_0)}{f(\xi, \eta_0)(\xi x_1 + \eta x_2 + x_3)},$$

où η_0 est déterminé par l'équation $\xi x_1 + \eta_0 x_2 + x_3 = 0$.

Développons maintenant les deux membres de l'équation (3) suivant les puissances négatives de η et écrivons que les coefficients de $\frac{1}{\eta}$ sont égaux, nous aurons l'expression cherchée

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\xi, \eta_\nu)}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)} = -\frac{\psi(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)}. \tag{4}$$

Posons maintenant

$$\psi(\xi, \eta) = k_1 \eta^{n-1} + k_2 \eta^{n-2} + \ldots + k_n,$$

avec les valeurs suivantes des coefficients k:

$$\begin{aligned} k_1 &= f_0 \psi_1, \\ k_2 &= f_1 \psi_1 + f_0 \psi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n &= f_{n-1}\psi_1 + f_{n-2}\psi_2 + \cdots + f_0 \psi_n, \end{aligned} \tag{5}$$

où les ψ désignent des fonctions analytiques indéterminées.

En formant maintenant l'intégrale définie

$$u = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\psi(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)} d\xi, \tag{6}$$

où le contour fermé C ne doit contenir d'autres points singuliers que les racines de l'équation $f(\xi, \eta_0) = 0$, on obtient une intégrale homogène du degré -1 de l'équation (1), comme cela résulte évidemment de l'équation (4). Nous allons démontrer qu'on pourra choisir les fonctions indéterminées ψ_ν de manière que les n premiers coefficients du développement de u suivant les puissances croissantes de x_2 seront égaux aux n coefficients correspondants dans le développement d'une fonction homogène du degré -1.

En développant la fonction $-\frac{\psi(\xi, \eta)}{x_2 f(\xi, \eta)}$ suivant les puissances décroissantes de η on trouve

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{x_2 f(\xi, \eta)} = -\frac{1}{x_2}\left(\frac{\psi_1}{\eta} + \frac{\psi_2}{\eta^2} + \ldots + \frac{\psi_n}{\eta^n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi_{n+\nu}}{\eta^{n+\nu}}\right). \tag{7}$$

Ce développement converge, pourvu qu'on ait donné à η une valeur satisfaisant à l'inégalité $|\eta| > R$, où R désigne la valeur absolue de la plus grande racine en η de l'équation $f(\xi, \eta) = 0$.

Soit $\xi = -\frac{x_3}{x_1}$ un point régulier pour les fonctions $\phi_1(\xi) \ldots \phi_n(\xi)$ et choisissons pour contour d'intégration un cercle C avec le point $-\frac{x_3}{x_1}$ comme centre et avec un rayon ρ assez petit pour que C ne contienne aucun point singulier des fonctions ϕ. Supposons cette condition vérifiée si $\rho < \delta$ et posons $\xi = -\frac{x_3}{x_1} + \rho e^{\theta i}$, d'où il vient $\eta_0 = -\frac{x_1}{x_2}\rho e^{\theta i}$.

Parce que les racines de l'équation $f(\xi, \eta_0) = 0$ pour $x_2 = 0$ deviennent tous égales à $-\frac{x_3}{x_1}$, on pourra choisir x_2 assez petit pour que le cercle C contienne toutes ces racines, et qu'en même temps le module de η_0 soit plus grand que R.

Les conditions précédentes étant vérifiées, on pourra intégrer les deux membres de l'équation (7), ce qui nous donne le résultat

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\phi(\xi, \eta_0)}{x_2 f(\xi, \eta_0)}\, d\xi \\
&= \frac{1}{x_1}\phi_1\left(-\frac{x_3}{x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1^2}\phi_2'\left(-\frac{x_3}{x_1}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x_2^{n-1}}{\underline{|n-1}\, x_1^n}\phi_n^{(n-1)}\left(-\frac{x_3}{x_1}\right) + \ldots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Mais ici le coefficient de x_2^ν: $\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}}\frac{1}{x_1^{\nu+1}}\phi_{\nu+1}^{(\nu)}\left(-\frac{x_3}{x_1}\right)$ est une fonction homogène des variables x_3 et x_1 du degré $-(\nu+1)$, qu'on pourra choisir arbitrairement si $\nu \leqq n-1$.

Donc, la formule (6) nous donne bien toute intégrale homogène du degré -1 de l'équation (1) qui est développable suivant les puissances croissantes de x_2.

Comme on peut toujours faire un changement linéaire de variables de manière qu'une fonction, de l'espèce considérée ici, soit régulière pour $x_2 = 0$ et que l'hypothèse 1 soit vérifiée en même temps, on peut considérer comme résolu le problème de trouver les intégrales homogènes et analytiques du degré -1 de l'équation (1). Toutefois il reste une restriction, à savoir l'hypothèse 2. Mais il est aisé de voir que cette restriction n'a aucune importance. Car l'expression (6), satisfaisant identiquement à l'équation (1), ne cesse pas à satisfaire à la même équation, si la fonction $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ par hasard a un facteur multiple. De plus le développement (8) a la même forme encore dans ce cas, et les coefficients des n premiers termes sont des fonctions arbitraires.

La formule (6) est ainsi toujours l'expression de l'intégrale cherchée.

On doit observer que les intégrales, dont nous avons donné l'expression sous forme d'intégrale définie, peuvent se présenter sous une forme débarrassée de tout signe d'intégration. Car, en se servant de l'équation (4), on peut aisément effectuer l'intégration dans la formule (8) et on trouve pour expression de u la somme suivante de résidus

$$u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\xi_\nu, \eta_\nu)}{x_1 f_2(\xi_\nu, \eta_\nu) - x_2 f_1(\xi_\nu, \eta_\nu)}, \tag{9}$$

où ξ_ν, η_ν désignent les coordonnées des points d'intersection des lignes

$$f(\xi, \eta) = 0, \qquad \xi x_1 + \eta x_2 + x_3 = 0,$$

et f_1 et f_2 sont définies par les formules

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

En se servant des coordonées homogènes ξ_1, ξ_2, ξ_3 à la place de ξ et de η on peut donner à u une forme plus symétrique. Posons $f_\nu = \dfrac{\partial f}{\partial \xi_\nu}$, il vient

$$nf(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 = 0.$$

Comme nous avons

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0,$$

on déduit, en introduisant trois constantes k_1, k_2, k_3,

$$\frac{\xi_1}{x_2 f_3 - x_3 f_2} = \frac{\xi_2}{x_3 f_1 - x_1 f_3} = \frac{\xi_3}{x_1 f_2 - x_2 f_1} = \frac{k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3}{\begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ f_1, & f_2, & f_3 \end{vmatrix}}.$$

Pour que la dernière expression ne soit pas illusoire, il faut que les k satisfassent à l'inégalité

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 \neq 0.$$

Par introduction des expressions $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ et $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_3}$ on trouve

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{x_1 f_2 - x_2 f_1} = \frac{\xi_3 \xi_3^{n-2} \psi\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}\right)}{x_1 f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - x_2 f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$
$$= \frac{\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3)}{\begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ f_1, & f_2, & f_3 \end{vmatrix}},$$

où l'on a désigné par $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ la fonction homogène du degré $n - 2$ $\xi_3^{n-2}\psi\left(\frac{\xi_1}{\xi_3}, \frac{\xi_2}{\xi_3}\right)$. L'expression de u à l'aide des coordonnées homogènes devient donc

$$u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu, \xi_3^\nu)(k_1\xi_1^\nu + k_2\xi_2^\nu + k_3\xi_3^\nu)}{\begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ f_1^\nu, & f_2^\nu, & f_3^\nu \end{vmatrix}}, \tag{10}$$

$\xi_1^\nu, \xi_2^\nu, \xi_3^\nu$ étant les coordonnées des points d'intersection des lignes

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \qquad x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0,$$

et $f_a^\nu = f_a(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu, \xi_3^\nu)$.

Afin d'obtenir une expression symétrique de u en forme d'intégrale définie il convient d'exprimer la variable ξ dans la formule (6) par une variable auxiliaire s de la manière suivante.

Définissons ξ_1, ξ_2 et ξ_3 en fonction de s par l'équation

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = \begin{vmatrix} k_1 & , & k_2 & , & k_3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 \\ a_1 s + b_1 & , & a_2 s + b_2 & , & a_3 s + b_3 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

qui doit être vérifiée quelles que soient les quantités k_ν.

Nous supposons que les a_ν et les b_ν soient des constantes arbitraires réelles mais indépendantes des k_ν.

Pour $k_\nu = x_\nu$ la formule (11) nous donne

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0.$$

De l'expression $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ il vient $\eta_0 = \frac{\xi_2}{\xi_3}$ et

$$d\xi = \frac{\xi_3 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_3}{\xi_3^2},$$

expression qui prend, après un calcul facile, la forme

$$d\xi = -\frac{x_2}{\xi_3^2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} ds,$$

ou, si nous désignons le déterminant par (x, a, b),

$$d\xi = -\frac{x_2}{\xi_3^2}(x, a, b)ds.$$

En introduisant ces expressions des ξ, η_0 et $d\xi$ dans la formule (6) on trouve enfin

$$(12) \qquad u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(a, b, x)}{f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} ds.$$

Par rapport à cette formule nous faisons les remarques suivantes. Le contour C doit contenir du moins une des racines de l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, autrement u serait nul.

Supposons qu'on ait fixé un contour d'intégration C. Alors il est clair qu'on pourra faire varier les constantes arbitraires a_ν et b_ν d'une manière continue sans que cela ait aucune influence sur la valeur de u, pourvu que, pendant cette variation, aucun des zéros de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ne traverse le contour C.

Il est clair qu'on pourra aussi faire varier les x_ν sous la même condition, sans que l'intégrale (12) cesse de représenter la même fonction analytique.

En particulier, supposons que le contour C soit l'axe des s réelles et que f soit une forme définie. Alors deux systèmes de valeurs des constantes a_ν, b_ν donnent la même valeur à u, si on peut passer de l'un système à l'autre par variation continue, sans rencontrer de système pour lequel il y a des racines réelles de l'équation $f = 0$. Mais s'il y a une racine réelle en s de l'équation $f = 0$, les valeurs correspondantes des ξ_1, ξ_2, ξ_3 seront $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; dans ce cas l'équation (11) nous donne, en y posant $k_\nu = a_\nu$,

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = (a, b, x) = 0.$$

La condition $(a, b, x) = 0$ est ainsi nécessaire pour que $f = 0$ ait une racine réelle en s.

En supposant de plus que $\phi(-x_1, -x_2, -x_3) = \phi(x_1, x_2, x_3)$, cherchons quelle sera la valeur de $u(x_1, x_2, x_3)$, quand on change le signe des variables x_1, x_2, x_3. Parce qu'on ne peut passer du point (x_1, x_2, x_3) au point $(-x_1, -x_2, -x_3)$ sans rencontrer des valeurs pour lesquelles on a $(a, b, x) = 0$, il est nécessaire de faire varier les quantités a_ν, b_ν en même temps que les x_ν. Supposons par exemple que les valeurs des quantités a_ν, b_ν soient telles que (a, b, x) conserve la valeur 1 pendant que (x_1, x_2, x_3) passe du point (x_1, x_2, x_3) au point $(-x_1, -x_2, -x_3)$. Comme alors les fonctions ϕ et f ne changent pas de signe, on aura

$$u(-x_1, -x_2, -x_3) = u(x_1, x_2, x_3).$$

§ 2. *Le cas où $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une forme définie.*

Supposons que la forme $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ soit une forme définie, c'est à dire que l'équation

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

n'admette pas de solution réelle autre que la solution évidente

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.$$

Nous allons démontrer, dans ce cas, qu'il se trouve parmi les intégrales homogènes du degré -1 un certain nombre jouissant de la propriété d'être holomorphes dans le voisinage de tout point réel, l'origine seulement excepté.

Les fonctions considérées ici étant homogènes, il suffit de démontrer que nos fonctions sont régulières pour toutes les valeurs réelles satisfaisant à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

De l'équation (11) on tire, en donnant aux quantités k_1, k_2, k_3 les valeurs a_1, a_2, a_3,

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = (a, b, x),$$

d'où l'on conclut que la distance du point ξ_1, ξ_2, ξ_3 à l'origine n'est jamais moindre que

$$r = \frac{|(a, b, x)|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, les nombres a_ν, b_ν choisis de manière que r soit plus grand qu'une quantité donnée différente de zéro, soit d. En appelant μ le minimum de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pour les valeurs réelles satisfaisant à l'équation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1,$$

on peut affirmer que le minimum de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pour des valeurs réelles de s n'est pas moindre que μd^n.

Alors l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ n'admet aucune racine réelle en s. De plus, le coefficient de s^n dans cette équation étant

$$f\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\right),$$

on pourra toujours choisir a_1, a_2, a_3 de manière que ce coefficient sera en valeur absolue plus grand qu'une quantité positive donnée, soit A. Les autres coefficients étant toujours finis, il est clair qu'on pourra décrire du point $s = 0$ comme centre un cercle C avec un rayon ρ indépendant de x_1, x_2, x_3 et assez grand pour que toutes les racines en s de l'équation $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ soient intérieures à C.

Prenons maintenant pour contour d'intégration dans la formule (12) un demi-cercle C_1 avec le rayon ρ_1 plus grand que ρ ayant le diamètre sur l'axe des s réelles et l'origine pour centre. Alors je dis que la fonction $u(x_1, x_2, x_3)$ définie par l'équation

$$u = \int_{C_1} \frac{\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(a, b, x)}{f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} ds,$$

où ψ désigne une fonction entière rationnelle et homogène du degré $n-2$, n'aura pas de singularités réelles.

On voit maintenant que la valeur absolue de $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, quand s parcourt la partie curviligne de C_1, ne descend jamais au dessous de la quantité $A(\rho_1 - \rho)^n$. Soit m le plus petit des nombres μd^n et $A(\rho_1 - \rho)^n$; alors m est une limite inférieure des valeurs absolues que prend $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ quand s décrit le contour C_1. Cela posé, on peut trouver deux nombres h et $m_1 < m$ de manière que l'inégalité

$$|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, s) - f(x_1, x_2, x_3, s)| \leqq m_1$$

soit vérifiée pour tous les h_ν satisfaisant aux inégalités

$$(13) \qquad |h_\nu| < h. \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,3)}$$

Dans l'inégalité précédente on a désigné $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ par $f(x_1, x_2, x_3, s)$.

Maintenant il est facile de voir que le développement de $\frac{(a, b, x)\psi}{f}$ suivant les puissances croissantes des h_ν converge pour tous les h_ν satisfaisant aux inégalités (13). Posons

$$(14) \qquad \frac{(a, b, x)\psi}{f} = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \Phi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3},$$

et soit G une limite supérieure des valeurs de $(a, b, x)\psi$ pour les valeurs des variables considérées. Nous avons montré que la valeur absolue de $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3)$ n'est pas moindre que $m - m_1$, par suite on trouve

$$|\Phi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}| < \frac{G}{m - m_1} \frac{1}{h^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}}.$$

Le développement (14) étant ainsi uniformément convergent, on a le droit d'écrire

$$(15) \qquad u = \int_{C_1} \frac{(a, b, x)\psi}{f} ds = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3} \int_{C_1} \Phi_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} ds.$$

Il s'en suit que la fonction u est développable dans le voisinage d'un point réel quelconque x_1, x_2, x_3 satisfaisant à l'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et que ce développement converge pour tous les h_ν qui sont moindres que h. Soit ce développement

$$u = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} u_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3},$$

le développement de u autour d'un point x_1, x_2, x_3 satisfaisant à l'égalité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ s'écrit

$$u = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \frac{u_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}{r^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} h_3^{\lambda_3} \tag{16}$$

et converge par suite, si les h_ν satisfont à l'inégalité

$$|h_\nu| < h\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \tag{17}$$

et a fortiori si $\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} < h\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Il importe d'observer que le développement (16) est aussi uniformément convergent, si on le considère comme fonction des variables réelles x_1, x_2, x_3 assujetties à la condition

$$\frac{1}{h}\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} < \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

car dans ce cas encore chaque terme du développement de u est inférieur en valeur absolue au terme correspondant d'une série convergente dont les termes sont indépendants des termes dans le développement de u.

§ 3. *Application à un système d'équations différentielles.*

Dans la suite nous aurons en particulier besoin des intégrales homogènes du degré -1 de deux systèmes d'équations différentielles, à savoir

$$\text{(18 a)} \quad \sum_{\mu=1}^{3} \Delta_{\mu\lambda} u_\mu = 0, \qquad \text{(18 b)} \quad \sum_{\lambda=1}^{3} \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda = 0.$$

où les $\Delta_{\lambda\mu}$ désignent des symboles d'opération de la forme

$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

où $\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ désigne un coefficient constant.

Nous aurons les intégrales cherchées de la manière suivante. Eliminons soit entre les équations (18 a) ou (18 b) deux des inconnues, nous obtenons une équation différentielle qui peut s'écrire sous forme symbolique

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix} v = 0.$$

Cette équation différentielle est linéaire, homogène du sixième ordre et à coefficients constants. Appelons f la fonction qu'on obtient en remplaçant dans le déterminant les signes d'opération $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ par des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3.

D'après ce qui précède les intégrales cherchées seront représentées par les formules

$$(19) \qquad v_a = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{(a, b, x)\psi_a}{f} ds = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{6} \int_C \frac{\psi_a(\xi, \eta_\nu) d\xi}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)},$$

où il ne s'agit que de déterminer les fonctions ψ.

En introduisant les expressions (19) dans les équations (18 b), on trouve

$$\sum_{\nu=1}^{6} \int_C \frac{\Delta^\nu_{1\mu}\psi_1 + \Delta^\nu_{2\mu}\psi_2 + \Delta^\nu_{3\mu}\psi_3}{f_2(\xi, \eta_\nu)(\xi x_1 + \eta_\nu x_2 + x_3)^3} d\xi = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

où les $\Delta^\nu_{\lambda\mu}$ désignent les fonctions qu'on obtient en remplaçant dans les $\Delta_{\lambda\mu}$ $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ par $\xi, \eta_\nu, 1$ respectivement.

On voit qu'on satisfait aux équations précédentes en prenant pour les ψ des fonctions du quatrième degré dépendant de trois constantes arbitraires et définies par les formules

$$\psi_1 = \begin{vmatrix} k_1 & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ k_2 & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ k_3 & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{vmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & k_1 & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & k_2 & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & k_3 & \Delta_{33} \end{vmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & k_1 \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & k_2 \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & k_3 \end{vmatrix}.$$

Prenons enfin pour contour d'intégration C le demi-cercle défini dans le numéro précédent, les formules (19) représenteront des intégrales du système (18 b) dont le seul point singulier réel à distance finie est le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Désignons par $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les intégrales ainsi obtenues. Maintenant on aura immédiatement les intégrales analogues du système (18 a) en échangeant entre eux dans les expressions des ψ les indices des Δ. Appelons ces intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Il résulte de la formule (10) § 1 que ces intégrales α et β sont des fonctions algébriques.

CHAPITRE II.

La méthode de Green.

§ 1. *Démonstration d'un théorème fondamental.*

Considérons un corps élastique quelconque. Soient u_1, u_2, u_3 les composantes du déplacement d'un point du corps, x_1, x_2, x_3 les coordonnées rectangulaires du même point dans l'état naturel. Alors on sait que le potentiel des forces intérieures s'exprime à l'aide d'une forme quadratique définie des six variables

$$\partial_{\nu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu}, \qquad \partial_{\lambda\mu} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\lambda}. \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$$

Soit f cette forme, dS l'élément de volume S du corps considéré, le dit potentiel est égal à l'intégrale $\int f dS$, étendue sur le volume S.

En appliquant le principe des vitesses virtuelles on s'imaginee nu autre déformation, dont les composantes seront v_1, v_2, v_3 et on considère l'intégrale $\int \Delta dS$, où Δ est la forme bilinéaire

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial \delta_{11}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{22}} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{33}} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \delta_{23}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial f}{\partial \delta_{31}} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial f}{\partial \delta_{12}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right).$$

La considération de l'intégrale $\int \Delta dS$ nous conduira au théorème fondamental, dont la démonstration fait l'objet de ce paragraphe.

J'observe d'abord que la forme Δ est loin d'être la forme bilinéare la plus générale qu'on puisse former avec les dérivées premières des fonctions u et v. Cependant, comme les théorèmes que j'ai l'intention de démontrer subsistent encore dans le cas général, je suppose, que Δ soit une forme bilinéaire quelconque des premières dérivées des fonctions u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3. Posons pour abréger

$$u_{\mu\beta} = \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\beta}, \qquad v_{\lambda\alpha} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\alpha}.$$

Nous exprimons la forme Δ par la formule

$$\Delta = \sum_{\lambda\mu\alpha\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} v_{\lambda\alpha} u_{\mu\beta}, \qquad (\lambda, \mu, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{2}$$

où le symbole $\binom{\lambda\mu}{\alpha\beta}$ désigne une constante et chacun des indices prend les valeurs 1, 2, 3 indépendamment des autres.

Nous supposons que les six fonctions u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 et leurs dérivées des deux premiers ordres soient des fonctions continues dans un certain domaine réel D.

Introduisons des quantités $T_{\lambda\alpha}$ et $\mathfrak{T}_{\mu\beta}$ définies par les formules

$$T_{\lambda\alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial v_{\lambda\alpha}}, \qquad \mathfrak{T}_{\mu\beta} = \frac{\partial \Delta}{\partial u_{\mu\beta}}.$$

Prenons dans l'intérieur du domaine D un volume S limité par une surface ω, possédant un plan tangent déterminé en chaque point. Soit $d\omega$ l'élément de ω.

Des identités

$$\Delta = \sum_{\lambda\alpha} T_{\lambda\alpha} v_{\lambda\alpha} = \sum_{\mu\beta} \mathfrak{T}_{\mu\beta} u_{\mu\beta}$$

on déduit maintenant d'une manière bien connue deux expressions de l'intégrale $\int\limits_S \Delta\, dS$

$$\int\limits_S \Delta\, dS \tag{3}$$

$$= \int\limits_\omega \sum_\lambda v_\lambda \sum_\alpha T_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha) d\omega - \int\limits_S \sum_\lambda v_\lambda \sum_\alpha \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} dS$$

et

$$\int\limits_\omega \sum_\mu u_\mu \sum_\beta \mathfrak{T}_{\mu\beta} \cos(nx_\beta) d\omega - \int\limits_S \sum_\mu u_\mu \sum_\beta \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_\beta} dS,$$

où n désigne la normale extérieure de la surface ω et $\cos(nx_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ ses cosinus directeurs.

De l'équation (1) on tire les expressions des $T_{\lambda\alpha}$ et $\mathfrak{T}_{\mu\beta}$

$$\begin{aligned} T_{\lambda\alpha} &= \sum_{\mu\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} u_{\mu\beta} = \sum_{\mu=1}^{3} \left[\binom{\lambda\mu}{\alpha 1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \binom{\lambda\mu}{\alpha 2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \binom{\lambda\mu}{\alpha 3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right] u_\mu, \\ \mathfrak{T}_{\mu\beta} &= \sum_{\lambda\alpha} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} v_{\lambda\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{3} \left[\binom{\lambda\mu}{1\beta}\frac{\partial}{\partial x_1} + \binom{\lambda\mu}{2\beta}\frac{\partial}{\partial x_2} + \binom{\lambda\mu}{3\beta}\frac{\partial}{\partial x_3}\right] v_\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

d'où il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} &= \sum_{\alpha\beta\mu} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \\ \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_\beta} &= \sum_{\alpha\beta\lambda} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \end{aligned} \tag{5}$$

Si l'on introduit maintenant les signes d'opération

$$\Delta_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha_{\lambda\mu} &= \binom{\lambda\mu}{\alpha 1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \binom{\lambda\mu}{\alpha 2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \binom{\lambda\mu}{\alpha 3}\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \nabla^\beta_{\lambda\mu} &= \binom{\lambda\mu}{1\beta}\frac{\partial}{\partial x_1} + \binom{\lambda\mu}{2\beta}\frac{\partial}{\partial x_2} + \binom{\lambda\mu}{3\beta}\frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned} \tag{7}$$

on pourra écrire les formules (4) et (5)

$$T_{\lambda\alpha} = \sum_\mu \Delta^\alpha_{\lambda\mu} u_\mu, \qquad \mathfrak{T}_{\mu\beta} = \sum_\lambda \nabla^\beta_{\lambda\mu} v_\lambda, \tag{8}$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial T_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} = \sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} u_\mu, \tag{9 a}$$

$$\sum_\beta \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\beta}}{\partial x_\beta} = \sum_\lambda \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda. \tag{9 b}$$

Maintenant je suppose que les fonctions u_λ et v_λ satisfassent aux systèmes d'équations différentielles

$$\sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} u_\mu = U_\lambda, \qquad \sum_\lambda \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda = V_\mu, \tag{10}$$

où les lettres U_λ et V_μ désignent des fonctions continues et uniformes. En formant maintenant la différence des expressions (3) j'obtiens, en ayant égard aux équations (10), l'équation

$$\int\limits_S \sum_\rho (U_\rho v_\rho - V_\rho u_\rho)\, dS \tag{11}$$

$$= \int\limits_\omega \left\{ \sum_\lambda v_\lambda \sum_\alpha T_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha) - \sum_\lambda u_\lambda \sum_\alpha \mathfrak{T}_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha) \right\} d\omega.$$

En posant pour abréger

$$T_\lambda = \sum_\alpha T_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha), \qquad \mathfrak{T}_\lambda = \sum_\alpha \mathfrak{T}_{\lambda\alpha} \cos(nx_\alpha),$$

on peut écrire la formule (11) sous la forme

$$\int\limits_S \sum_\rho (U_\rho v_\rho - V_\rho u_\rho)\, dS = \int\limits_\omega \sum_\lambda (v_\lambda T_\lambda - u_\lambda \mathfrak{T}_\lambda)\, d\omega. \tag{12}$$

Cette formule est l'expression du théorème fondamental, qui pour les systèmes (10) joue le même rôle que le théorème de Green pour l'équation de Laplace. Dans le cas particulier, où Δ est la variation du potentiel intérieur d'un corps élastique, le théorème fondamental est identique au théorème connu de Betti.

§ 2. *Application de la méthode de Green aux systèmes* $\Sigma_\mu \Delta_{\lambda\mu} u_\lambda = U_\mu, \quad \Sigma_\lambda \Delta_{\lambda\mu} v_\lambda = V_\mu.$

Soient u_1, u_2, u_3 trois fonctions satisfaisant aux équations

$$\sum_{\mu=1}^{3} \Delta_{\lambda\mu} u_\mu = U_\lambda,$$

et supposons que les conditions de continuité du § 1 soient vérifiées. En prenant pour les fonctions v les fonctions $\beta_\mu(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0)$ nous pourrons appliquer la formule (12) du § 1 à condition d'exclure du domaine d'intégration S la partie à l'intérieur d'une surface fermée ω'. Nous supposons que ω' soit une sphère avec le rayon arbitrairement petit r et avec le point $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ comme centre. Soient $\sigma_{\lambda\alpha}$ et σ_λ les fonctions déduites des fonctions β de la même manière que les quantités $\mathfrak{T}_{\lambda\alpha}$ et $\mathfrak{T}_\lambda$ des fonctions v. Appelons S' le domaine S moins la sphère ω'. Alors l'application de la formule (12) nous donne

$$(13) \qquad \int_\omega \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega + \int_{\omega'} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega' \\ = \int_{S'} \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS'.$$

Faisons maintenant décroître le rayon r, l'intégrale

$$\int_{\omega'} \sum_\rho \beta_\rho T_\rho d\omega'$$

converge évidemment vers zéro, parce que les intégrales β_ρ sont des fonctions homogènes du degré -1 et T_ρ reste finie pour $r = 0$.

Voyons ce que deviendra l'autre partie de l'intégrale appartenant à la sphère ω'. Il suffit de considérer l'intégrale

$$J_1 = \int u_1 (\sigma_{11} \cos(nx_1) + \sigma_{12} \cos(nx_2) + \sigma_{13} \cos(nx_3)) d\omega'$$

où n désigne la normale extérieure au volume S', c'est à dire la normale intérieure à la sphère ω'. Désignons par $\sigma'_{\alpha\beta}$ la valeur de la fonction homogène du degré -2 $\sigma_{\alpha\beta}$ sur la surface d'une sphère au rayon 1 concentrique avec ω', et l'élément de surface de cette sphère par $d\omega_1$. Alors les valeurs de la fonction $\sigma_{\alpha\beta}$ en deux points sur le même rayon, l'un sur ω' et l'autre sur ω, sont liées par la formule

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{r^2}\sigma'_{\alpha\beta}$$

et on a de plus

$$d\omega' = r^2 d\omega_1.$$

Ainsi on peut écrire

$$J_1 = \int u_1(\sigma'_{11}\cos(nx_1) + \sigma'_{12}\cos(nx_2) + \sigma'_{13}\cos(nx_3))d\omega_1.$$

Dans cette formule u_1 seul dépend de r. Posons $u_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = u_1^0$; à cause de la continuité de u_1 nous pourrons choisir r assez petit pour que $|u_1 - u_1^0|$ soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite δ. Soit de plus g la plus grande valeur absolue de la quantité entre les parenthèses dans l'expression de J_1, il vient

$$\begin{aligned} &\left| J_1 - u_1^0 \int_{\omega_1} (\sigma'_{11}\cos(nx_1) + \sigma'_{12}\cos(nx_2) + \sigma'_{13}\cos(nx_3))d\omega_1 \right| \\ &= \int_{\omega_1} (u_1 - u_1^0)(\sigma'_{11}\cos(nx_1) + \sigma'_{12}\cos(nx_2) + \sigma'_{13}\cos(nx_3))d\omega_1 \\ &< \delta g \int d\sigma_1 \\ &< 4\pi\delta g, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\lim_{r=0} J_1 = u_1^0 \int_{\omega'} \sigma_1 d\omega'.$$

Posons pour abréger

$$L_p = \int_{\omega'} \sigma_p d\omega', \tag{14}$$

nous aurons

$$\lim_{r=0} \int_{\omega'} \Sigma_p u_p \sigma_p d\omega' = L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0.$$

L'intégrale dans le second membre de l'équation (13) conserve évidemment une valeur finie, quand nous faisons tendre r vers zéro, car, en désignant par G et g les limites supérieures des $|U_\rho|$ et $|r\beta_\rho|$, nous aurons

$$\left|\int_{S'} \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS'\right| < Gg \int_{S'} \frac{dS'}{r}.$$

Mais on sait que l'intégrale dans le second membre conserve une valeur finie, quelque petit que soit r. Par conséquent il est loisible d'écrire

$$\lim_{r=0} \int_{S'} \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS' = \int_{S} \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS.$$

Le résultat des tous ces passages à la limite s'exprime par la formule

$$(15) \qquad L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0 = \int_\omega \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS.$$

De même on obtient une formule analogue pour les fonctions v_μ, satisfaisant au système adjoint

$$\Sigma_\mu \Delta_{\mu\lambda} v_\mu = V_\lambda.$$

En désignant par τ_ρ la quantité analogue à σ_ρ déduite des intégrales α, et par M_ρ l'intégrale

$$M_\rho = \int_{\omega'} \tau_\rho d\omega', \qquad (\rho=1,2,3)$$

la formule s'écrit

$$(16) \qquad M_1 v_1^0 + M_2 v_2^0 + M_3 v_3^0 = \int_\omega \Sigma_\rho (\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho V_\rho \alpha_\rho dS.$$

Envisageons de plus le cas où le point $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ est situé à la surface ω, et supposons que la surface ω ait en A un plan tangent déterminé. Décrivons à cet effet, de A comme centre, la sphère ω' et appelons ν la partie de ω qui est à l'extérieur de la sphère ω'. Soit S' la partie de S qui est à l'extérieur de la sphère ω'. Appliquons le théorème de réciprocité au volume S', nous aurons, en appelant ω' la partie de la surface sphérique ω' qui est à l'intérieur de S:

$$\int_{\omega'} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega' + \int_\nu \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\nu$$
$$= \int_{S'} \Sigma_\rho u_\rho \beta_\rho dS'.$$

On démontre, comme dans ce qui précède, que la limite de l'intégrale dans le second membre pour $r = 0$ est une quantité finie. De même on trouve la limite de la première intégrale

$$\lim_{r=0} \int_{\omega'} \Sigma(\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega' = - u_1^0 \int_{\omega'} \sigma_1 d\omega' - u_2^0 \int_{\omega'} \sigma_2 d\omega' - u_3^0 \int_{\omega'} \sigma_3 d\omega',$$

où les intégrales dans le second membre doivent être étendues à la partie de la surface sphérique ω' qui est du côté intérieur du plan tangent à ω au point A — le côté intérieur du plan tangent étant celui de la normale intérieure. Parce que les σ_ρ sont des fonctions paires quantités il s'en suit que la valeur de $\int \sigma_\rho d\omega'$ est égale à $\frac{1}{2} L_\rho$. On démontre aussi que la limite de l'intégrale

$$\int_{\nu} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\nu$$

pour $r = 0$ est une quantité finie. Cette limite peut donc être exprimée par l'intégrale

$$\int_{\alpha} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega.$$

Nous sommes ainsi conduits à la formule

$$L_1 u_1^0 + L_2 u_2^0 + L_3 u_3^0 = 2 \int_{\omega} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - 2 \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS,$$

et de même à la formule analogue

$$M_1 v_1^0 + M_2 v_2^0 + M_3 v_3^0 = 2 \int_{\omega} \Sigma_\rho (\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - 2 \int_S \Sigma V_\rho \alpha_\rho dS.$$

Enfin, si A est un point à l'extérieur du volume S je rappelle qu'on a

$$\int_{\omega} \Sigma_\rho (\beta_\rho T_\rho - u_\rho \sigma_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS = 0,$$

$$\int_{\omega} \Sigma_\rho (\alpha_\rho \mathfrak{T}_\rho - v_\rho \tau_\rho) d\omega - \int_S \Sigma_\rho V_\rho \alpha_\rho dS = 0,$$

car en ce cas aucun point singulier ne se trouve à l'intérieur de ω.

Dans le paragraphe suivant nous allons calculer les valeurs des coefficients L et M. Comme il en résultera que ces coefficients sont différents de zéro, les formules (15) et (16) permettent de calculer les valeurs des fonctions u et v dans l'intérieur d'un volume S, si nous connaissons les valeurs de ces fonctions et de certaines fonctions linéaires de leurs premières dérivées pour les points (x_1, x_2, x_3) appartenant à la surface ω.

En particulier ces formules s'appliquent à la théorie de l'équilibre d'un corps élastique cristallisé quelconque. Dans ce cas les quantités T_ρ désignent les composantes de pression à la surface du corps considéré. Nous reviendrons dans le dernier chapitre à cette application.

§ 3. *Calcul des coefficients* L *et* M.

Nous avons défini le coefficient L_ρ par la formule

$$L_\rho = \int_\omega \sigma_\rho d\omega,$$

où l'intégrale doit être étendue sur une certaine surface sphérique ω. En prenant cependant pour les fonctions u_λ des valeurs constantes, l'application de la formule (15) § 2 nous apprend que L_ρ est indépendant de la forme spéciale de la surface d'intégration, de sorte que ω peut être une surface fermée quelconque contenant l'origine, pourvu que par une déformation continue, elle puisse se ramener à la sphère ω. Prenons en particulier pour ω un cylindre C parallèle à l'axe des x_1 et dont les bases aient pour équations $x_1 = a$ et $x_1 = -a$. En appelant ds l'élément linéaire de l'intersection du cylindre C avec le plan des x_2, x_3, on pourra écrire l'expression de L_ρ

$$L_\rho = \int_s \int_{-a}^{+a} \sigma_\rho ds dx_1 + B,$$

où B est la somme des deux intégrales étendues sur les bases de C. Mais en appelant A l'aire du base et en désignant par σ_0 la plus grande valeur absolue de σ_ρ quand x_1 est égal à l'unité on a

$$|B| < \frac{2A\sigma_0}{a^2}.$$

Il s'en suit que $\lim B = 0$ pour a infini. Par suite on pourra écrire

$$L_\rho = \lim_{a=\infty} \int_s \int_{-a}^{+a} \sigma_\rho \, ds \, dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s \sigma_\rho \, ds \, dx_1 .$$

Mais il est clair qu'on pourra choisir une quantité positive a_0 telle que les deux intégrales

$$\int_a^{\infty} \sigma_\rho dx_1 \, , \int_{-a}^{-\infty} \sigma_\rho dx_1$$

aient des valeurs moindres qu'une quantité arbitrairement petite si a est positive et plus grande que a_0. Il s'en suit que l'on a le droit d'intervertir l'ordre des intégrations dans la formule pour L_ρ. Calculons d'abord l'intégrale

$$J(a) = \int_{-a}^{+a} \sigma_\rho dx_1 .$$

Si nous supposons pour le moment que x_2 ait une valeur positive, nous pouvons employer l'expression de β_ν que nous avons donné dans le chapitre I, § 3:

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^6 {}_a \frac{\psi_\nu(\xi, \eta_a) d\xi}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)},$$

où le contour C ne doit contenir que ceux des zéros de $\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3$ dont la partie imaginaire est positive. De cette expression de β_ν on déduit l'expression suivante de $\sigma_{\rho\nu}$ (voir § 1 form. (8))

$$(1) \qquad \sigma_{\rho\nu} = -\frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^6 {}_a \frac{\Delta^\nu_{1\rho}\psi_1 + \Delta^\nu_{2\rho}\psi_2 + \Delta^\nu_{3\rho}\psi_3}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)^2} d\xi,$$

où les expressions $\Delta^\nu_{\mu\rho}$ désignent les fonctions linéaires en ξ et η qu'on obtient en remplaçant dans les expressions (7) § 1 les signes $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ respectivement par ξ, η_a et 1.

Nous aurons par suite pour l'intégrale J une expression de la forme

$$(2) \qquad J(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \int_C \sum_1^6 {}_a \frac{A_2^a \cos(nx_2) + A_3^a \cos(nx_3)}{f_2(\xi, \eta_a)(\xi x_1 + \eta_a x_2 + x_3)^2} d\xi dx_1 .$$

Désignons pour abréger $A_2^a \cos(n, x_2) + A_3^a \cos(n, x_3)$ par $\Phi(\xi, \eta_a)$, nous aurons en exécutant l'intégration par rapport à x_1 — ce qui est évidemment loisible —

$$J(a) = \frac{1}{\pi} \int\limits_C \sum_1^6 {}_a \frac{2a\Phi(\xi, \eta_a) d\xi}{f_2(\xi, \eta_a)(a\xi + \eta_a x_2 + x_3)(-a\xi + \eta_a x_2 + x_3)}.$$

Mais dans cette formule il est aisé à effectuer l'intégration, ce qui nous donne le résultat

$$J(a) = i \sum_\nu \frac{4a\Phi(\xi_\nu, \eta_\nu) d\xi}{\left(a \dfrac{\partial f}{\partial \eta_\nu} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial \xi_\nu}\right)(-a\xi_\nu + \eta_\nu x_2 + x_3)}$$

$$+ i \sum_\nu \frac{4a\Phi(\xi'_\nu, \eta'_\nu)}{\left(-a \dfrac{\partial f}{\partial \eta'_\nu} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial \xi'_\nu}\right)(a\xi'_\nu + \eta'_\nu x_2 + x_3)},$$

où l'on doit donner aux ξ_ν, η_ν les valeurs satisfaisant aux équations

$$f(\xi, \eta) = 0, \qquad a\xi + \eta x_2 + x_3 = 0$$

et aux ξ'_ν, η'_ν les valeurs satisfaisant aux équations

$$f(\xi', \eta') = 0, \qquad -a\xi' + \eta' x_2 + x_3 = 0;$$

dans les deux cas ξ et ξ' doivent avoir ses parties imaginaires positives. A l'aide de ces équations linéaires on peut écrire l'expression de $J(a)$ comme il suit

$$J(a) = 2i \sum_\nu \frac{a\Phi(\xi_\nu, \eta_\nu)}{\left(a \dfrac{\partial f}{\partial \eta_\nu} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial \xi_\nu}\right)(\eta_\nu x_2 + x_3)} + 2i \sum_\nu \frac{a\Phi(\xi'_\nu, \eta'_\nu)}{\left(-a \dfrac{\partial f}{\partial \eta'_\nu} - x_2 \dfrac{\partial f}{\partial \xi'_\nu}\right)(\eta'_\nu x_2 + x_3)},$$

et nous aurons à chercher la limite de cette fonction pour $a = \infty$.

Puisque pour $a = \infty$ les lignes droites qui déterminent ξ, ξ', η, η' tendent vers la ligne $\xi = 0$, les valeurs correspondantes de η satisfont à l'équation

$$f(0, \eta) = 0.$$

Comme de plus la partie imaginaire de ξ est positive et que nous avons supposé que x_2 est positif, il s'en suit que la partie imaginaire de η doit être négative et la partie imaginaire de η' doit être positive. Ce raisonnement suppose, il est vrai, que les racines de $f(0, \eta) = 0$ soient finies, mais on pourra toujours par un changement de coordonnées s'arranger de manière que les dites racines soient à la fois finies et inégales. Cela posé, on trouve facilement la limite cherchée

$$\lim_{a=\infty} J(a) = 2i\sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{\Phi(0\,,\eta_\nu)}{\frac{\partial f}{\partial \eta_\nu}(\eta_\nu x_2 + x_3)} - 2i\sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{\Phi(0\,,\eta'_\nu)}{\frac{\partial f}{\partial \eta'_\nu}(\eta'_\nu x_2 + x_3)}.$$

Mais en introduisant la valeur de Φ, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_\rho dx_1 = 2i\sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{A_2 \cos(nx_2) + A_3 \cos(nx_3)}{f_2(0\,,\eta_\nu)(\eta_\nu x_2 + x_3)}$$

$$-2i\sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{A_2^{\nu'} \cos(nx_2) + A_3^{\nu'} \cos(nx_3)}{f_2(0\,,\eta'_\nu)(\eta'_\nu x_2 + x_3)}.$$

Dans la déduction de cette formule nous avons supposé x_2 plus grand que zéro mais on voit que l'égalité subsiste encore quand x_2 est négative, car σ_ρ ne change pas de signe si on change les signes de x_2 et x_3, et le second membre a la même propriété. Nous aurons maintenant à calculer

$$\int_s J(\infty) ds,$$

mais comme la valeur de cette intégrale ne dépend pas de la forme du contour s, on conclut que A_3^ν et $A_3^{\nu'}$ doivent satisfaire aux relations

$$A_2^\nu \eta_\nu + A_3^\nu = 0, \qquad A_2^{\nu'} \eta'_\nu + A_3^{\nu'} = 0.$$

En tirant A_3^ν et $A_3^{\nu'}$ de ces formules et en se rappelant que n désigne la normale intérieure de s, on parvient à la formule

$$L_\rho = -2i\int_s \sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{A_2^\nu(\eta_\nu dx_2 + dx_3)}{f_2(0\,,\eta_\nu)(\eta_\nu x_2 + x_3)} + 2i\int_s \sum_{1}^{3}{}_{\nu} \frac{A_2^{\nu'}(\eta'_\nu dx_2 + dx_3)}{f_2(0\,,\eta'_\nu)(\eta'_\nu x_2 + x_3)},$$

mais ici il est facile d'éxécuter les intégrations; on trouve

$$\int \frac{\eta_\nu dx_2 + dx_3}{\eta_\nu x_2 + x_3} = 2\pi i, \qquad \int \frac{\eta'_\nu dx_2 + dx_3}{\eta'_\nu x_2 + x_3} = -2\pi i,$$

et par suite

$$L_\rho = 4\pi \sum_{a=1}^{6} \frac{A_2^a}{f_2(\mathrm{o}, \eta_a)},$$

où l'on doit étendre la sommation à toutes les racines de l'équation $f(\mathrm{o}, \eta) = \mathrm{o}$. Si on observe que la somme dans le second membre n'est autre chose que le coefficient de $\frac{1}{\eta}$ dans le développement de $\frac{A_2}{f(\mathrm{o}, \eta)}$ suivant les puissances décroissantes de η, il est facile de simplifier l'expression de L_ρ. Nous avons en effet (voir form. (1) et (2) ce paragraphe)

$$A_2 = \nabla_{1\rho}^2 \psi_1 + \nabla_{2\rho}^2 \psi_2 + \nabla_{3\rho}^2 \psi_3$$

$$= \nabla_{1\rho}^2 \begin{vmatrix} k_1 & \Delta_{21} & \Delta_{32} \\ k_2 & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ k_3 & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \nabla_{2\rho}^2 \begin{vmatrix} \Delta_{11} & k_1 & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & k_2 & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & k_3 & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \nabla_{3\rho}^2 \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & k_1 \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & k_2 \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & k_3 \end{vmatrix}$$

d'où l'on tire, en se rappelant les formules (6) et (7) § 1, la valeur suivante du coefficient de η^5 dans A_2

$$\binom{1\rho}{22} \begin{vmatrix} k_1, & \binom{21}{22}, & \binom{31}{22} \\ k_2, & \binom{22}{22}, & \binom{32}{22} \\ k_3, & \binom{23}{22}, & \binom{33}{22} \end{vmatrix} + \binom{2\rho}{22} \begin{vmatrix} \binom{11}{22}, & k_1, & \binom{31}{22} \\ \binom{12}{22}, & k_2, & \binom{32}{22} \\ \binom{13}{22}, & k_3, & \binom{33}{22} \end{vmatrix} + \binom{3\rho}{22} \begin{vmatrix} \binom{11}{22}, & \binom{21}{22}, & k_1 \\ \binom{12}{22}, & \binom{22}{22}, & k_2 \\ \binom{13}{22}, & \binom{23}{22}, & k_3 \end{vmatrix},$$

ou plus simplement

$$= k_\rho \begin{vmatrix} \binom{11}{22}, & \binom{21}{22}, & \binom{31}{22} \\ \binom{12}{22}, & \binom{22}{22}, & \binom{32}{22} \\ \binom{13}{22}, & \binom{23}{22}, & \binom{33}{22} \end{vmatrix},$$

mais ici le déterminant qui multiplie k_ρ est égal au coefficient de η^6 dans $f(\mathrm{o}, \eta)$; par conséquent on aura

$$L_\rho = 4\pi k_\rho.$$

Parce que L_ρ ne dépend point des coefficients $\binom{\alpha\beta}{\lambda\mu}$ et comme on aurait obtenu la valeur de M_ρ par le même calcul, en prenant pour point de départ des formules où l'on eût changé $\binom{\alpha\beta}{\lambda\mu}$ en $\binom{\beta\alpha}{\mu\lambda}$, on conclut que la valeur de M_ρ est

$$M_\rho = 4\pi k_\rho.$$

Les formules (15) et (16) du paragraphe précédent prendront par suite la forme

$$(15\text{a})\quad k_1 u_1^0 + k_2 u_2^0 + k_3 u_3^0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho (T_\rho \beta_\rho - u_\rho \sigma_\rho)\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho\, dS$$

et

$$(16\text{a})\quad k_1 v_1^0 + k_2 v_2^0 + k_3 v_3^0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho (\mathfrak{T}_\rho \alpha_\rho - v_\rho \tau_\rho)\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho V_\rho \alpha_\rho\, dS.$$

Dans le cas où le point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est un point de la surface ω avec un plan tangent déterminé on a les formules

$$(17\text{a})\quad k_1 u_1^0 + k_2 u_2^0 + k_3 u_3^0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho (T_\rho \beta_\rho - u_\rho \sigma_\rho)\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho\, dS,$$

$$(18\text{a})\quad k_1 v_1^0 + k_2 v_2^0 + k_3 v_3^0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho (\mathfrak{T}_\rho \alpha_\rho - v_\rho \tau_\rho)\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho V_\rho \alpha_\rho\, dS.$$

CHAPITRE III.

Applications.

§ 1. *Application à la théorie de l'équilibre d'un corps solide élastique.*

Soit f une forme quadratique définie des six variables

$$\delta_{\nu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu}, \qquad \delta_{\lambda\mu} = \delta_{\mu\lambda} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\lambda},$$

nous avons déjà rappelé que $\int f dS$ peut représenter le potentiel des forces intérieures d'un corps élastique. Prenons un autre système de variables

$$\varepsilon_{\nu\nu} = \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\nu}, \qquad \varepsilon_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\mu\lambda} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda},$$

je rappelle que nous avons (§ 1, chapitre II)

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial \delta_{11}}\varepsilon_{11} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{22}}\varepsilon_{22} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{33}}\varepsilon_{33} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{23}}\varepsilon_{23} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{31}}\varepsilon_{31} + \frac{\partial f}{\partial \delta_{12}}\varepsilon_{12}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{11}}\delta_{11} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{22}}\delta_{22} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{33}}\delta_{33} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{23}}\delta_{23} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{31}}\delta_{31} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{12}}\delta_{12}.$$

Il s'en suit que les quantités $T_{\lambda\alpha}$ sont identiques aux composantes de pression qu'on désigne d'ordinaire par $t_{\lambda\alpha}$ (voir p. ex. Clebsch, *Theorie d. Elasticität*).

Soient X_1, X_2, X_3 les composantes rectangulaires de la force sollicitant un élément de volume, les composantes de déformation satisfont aux équations

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial t_{\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} = -X_\alpha. \qquad (\alpha=1,2,3)$$

Mais ces équations sont identiques aux équations différentielles (10) § 1, chapitre II. Cela suffit pour voir les rapports des problèmes traités auparavant avec le problème de l'équilibre d'un corps élastique solide.

Il reste à démontrer que le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$ ne peut être nul pour aucun système de valeurs réelles des variables. Dans l'expression de Δ posons $u_\lambda = v_\lambda$, il vient

$$2f = \Delta(u, u).$$

Substituons dans cette équation $u_{\mu\beta} = x_\mu \xi_\beta$, on obtient

$$2f = \sum_{\lambda,\mu,\alpha,\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} x_\lambda x_\mu \xi_\alpha \xi_\beta = \sum_{\lambda,\mu} x_\lambda x_\mu \sum_{\alpha,\beta} \binom{\lambda\mu}{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} \Delta_{\lambda\mu}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_\lambda x_\mu.$$

C'est à dire, si l'on fait dans $2f$ les substitutions

$$\delta_{\nu\nu} = x_\nu \xi_\nu, \qquad \delta_{\lambda\mu} = x_\lambda \xi_\mu + x_\mu \xi_\lambda,$$

on obtient une forme quadratique en x_1, x_2, x_3, dont le déterminant est précisément le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$.

Supposons que ce déterminant fût nul pour un système de valeurs réelles des variables, soit $\xi_\nu = \alpha_\nu$, où l'une des quantités α_ν doit être différente de zéro. Alors on pourrait trouver un système de valeurs réelles $x_\nu = a_\nu$, où l'une des quantités a_ν doit être différente de zéro, pour lequel f serait égale à zéro. Mais pour l'évanouissement de f il faut que $\delta_{\nu\nu} = 0$, $\delta_{\lambda\mu} = 0$, ou bien que les équations suivantes soient vérifiées

$$a_\nu \alpha_\nu = 0, \qquad a_\lambda \alpha_\mu + a_\mu \alpha_\lambda = 0.$$

Nous pouvons supposer que α_1 soit différent de zéro; il s'en suit que $a_1 = 0$. En substituant cette valeur dans les autres équations, on trouve $a_2\alpha_1 = 0$, $a_3\alpha_1 = 0$, d'où l'on conclut que $a_2 = a_3 = 0$, ce qui est contraire à la supposition. Ainsi le déterminant des fonctions $\Delta_{\lambda\mu}$ est différent de zéro pour tout système de valeurs réelles des variables ξ_ν, le système $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ seulement excepté C. Q. F. D.

§ 2. *Développements en série.*

Nous avons vu que les fonctions α, et β jouissent de la propriété d'être développables en des séries de puissances dans le voisinage d'un point réelle a_1, a_2, a_3 quelconque, à l'exception seulement du point $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. De plus le développement de $\alpha(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3)$ suivant les puissances des variables h_1, h_2, h_3 converge pour toutes les valeurs de ces variables h satisfaisant à l'inégalité

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \leqq \mu \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

où μ est une quantité positive indépendante des quantités a_ν et h_ν et inférieure à l'unité.

Cela rappelé, supposons que u_1, u_2, u_3 forment un système d'intégrales de équations différentielles (7) chapitre II vérifiant les conditions nécessaires pour l'application du théorème de Betti dans un domaine limité par deux surfaces sphériques 1 et 2 ayant l'origine pour centre et ρ_1 et ρ_2 pour rayons. Supposons l'inégalité $\frac{\rho_2}{\rho_1} < \mu^2$ remplie, il s'en suit

$$\frac{\rho_2}{\mu} < \rho_1 \mu.$$

Prenons un point x_1, x_2, x_3 situé entre les sphères des rayons $\frac{\rho_2}{\mu}$ et $\rho_1\mu$ et soit ξ_1, ξ_2, ξ_3 un point sur la sphère 2, le développement de

$$\alpha(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$$

suivant les puissances des variables ξ_ν converge, si

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} < \mu\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

ou, en considérant la série comme fonction de x_1, x_2, x_3, si

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > \frac{\rho_2}{\mu}.$$

Soit η_1, η_2, η_3 un point sur la sphère 1, le développement de

$$\alpha(\eta_1 - x_1, \eta_2 - x_2, \eta_3 - x_3)$$

suivant les puissances des variables x_1, x_2, x_3 converge, si

$$\sqrt{x_1^2 + x_1^2 + x_3^2} < \mu\rho_1.$$

Ainsi les deux développements des fonctions

$$\alpha(\eta_1 - x_1, \eta_2 - x_2, \eta_3 - x_3) \quad \text{et} \quad \alpha(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)$$

ont pour domaine de convergence commun l'espace entre les deux surfaces sphériques des rayons $\frac{\rho_2}{\mu}$ et $\rho_1\mu$.

Ces développements convergent encore dans le même domaine si le point ξ_1, ξ_2, ξ_3 est à l'intérieur de la sphère 2 et le point η_1, η_2, η_3 est à l'extérieur de la sphère 1.

Appliquons maintenant la formule (4) chapitre II aux fonctions u_1, u_2, u_3. En prenant pour domaine S l'espace entre les deux sphères 1 et 2, nous obtenons en appelant ω_1 et ω_2 les surfaces des deux sphères 1 et 2:

$$
\begin{aligned}
&k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega_1} \sum_{\rho=1}^{3} T_\rho(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{x_1^{\lambda_1} . x_2^{\lambda_2} . x_3^{\lambda_3}}{|\underline{\lambda_1}\, |\underline{\lambda_2}\, |\underline{\lambda_3}} \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \beta_\rho(-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3)}{\partial \eta_1^{\lambda_1} \partial \eta_2^{\lambda_2} \partial \eta_3^{\lambda_3}} d\omega_1 \\
&- \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega_1} \sum_{\rho=1}^{3} u_\rho(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{x_1^{\lambda_1} . x_2^{\lambda_2} . x_3^{\lambda_3}}{|\underline{\lambda_1}\, |\underline{\lambda_2}\, |\underline{\lambda_3}} \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \sigma_\rho(-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3)}{\partial \eta_1^{\lambda_1} \partial \eta_2^{\lambda_2} \partial \eta_3^{\lambda_3}} d\omega_1 \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega_2} \sum_{\rho=1}^{3} T_\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \frac{\xi_1^{\lambda_1} . \xi_2^{\lambda_2} . \xi_3^{\lambda_3}}{|\underline{\lambda_1}\, |\underline{\lambda_2}\, |\underline{\lambda_3}} \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \beta_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \partial x_3^{\lambda_3}} d\omega_2 \\
&- \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega_2} \sum_{\rho=1}^{3} u_\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \frac{\xi_1^{\lambda_1} . \xi_2^{\lambda_2} . \xi_3^{\lambda_3}}{|\underline{\lambda_1}\, |\underline{\lambda_2}\, |\underline{\lambda_3}} \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \sigma_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \partial x_3^{\lambda_3}} d\omega_2 .
\end{aligned}
$$

Mais de la convergence uniforme des séries il suit qu'on en pourra effectuer l'intégration en intégrant chaque terme; on obtient ainsi un développement de l'expression $k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3$, valable dans l'espace entre les deux sphères des rayons $\frac{\rho_2}{\mu}$ et $\rho_1 \mu$. Ce développement consiste en deux parties dont l'une est une série de puissances et l'autre est une série dont les termes sont les dérivées partielles des fonctions β_ν. La première de ces parties converge à l'intérieur de la sphère de rayon $\mu\rho_1$ et la seconde à l'extérieur de la sphère de rayon $\frac{\rho_2}{\mu}$.

Considérons maintenant le développements de quelques fonctions spéciales. Supposons d'abord que u_1, u_2, u_3 désignent les fonctions homogènes du degré entier négatif $-n$ et vérifiant les conditions nécessaires de continuité dans toute l'espace à l'exception de l'origine. Quand le rayon ρ_1 tend vers l'infini les deux premières intégrales tendent évidemment vers zéro. Des autres termes il ne reste que ceux qui sont homogènes du degré $-n$, de sorte qu'on obtient

$$
\begin{aligned}
&k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 \\
&= \sum_{\rho=1}^{3} \left(\sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} A^\rho_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \beta_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \partial x_3^{\lambda_3}} - \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} B^\rho_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \frac{\partial^{\mu_1+\mu_2+\mu_3} \sigma_\rho(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \partial x_3^{\mu_3}} \right)
\end{aligned}
$$

où les valeurs $A^{\rho}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ et $B^{\rho}_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ sont des coefficients constants et les indices doivent satisfaire aux conditions

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n - 1, \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = n - 2. \end{cases}$$

Supposons en particulier que n soit égal à l'unité il vient

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2 + A_3 \beta_3.$$

De plus nous savons que les fonctions β dépendent linéairement des constantes k de sorte qu'on peut écrire

$$\beta_\rho = k_1 \beta_{\rho 1} + k_2 \beta_{\rho 2} + k_3 \beta_{\rho 3},$$

d'où résultent pour les fonctions u les expressions

$$u_\nu = A_1 \beta_{2\nu} + A_2 \beta_{2\nu} + A_3 \beta_{3\nu}. \qquad (\nu=1,2,3)$$

Posons dans ces formules $u_\nu = \alpha_\nu$ nous obtenons, en observant que dans ce cas $A_\rho = k_\rho$

$$\alpha_\nu = k_1 \beta_{1\nu} + k_2 \beta_{2\nu} + k_3 \beta_{3\nu}. \qquad (\nu=1,2,3)$$

On déduit de cette formule, en égalant les coefficients des constantes k_ν et en posant

$$\alpha_\nu = k_1 \alpha_{\nu 1} + k_2 \alpha_{\nu 2} + k_3 \alpha_{\nu 3},$$

la rélation

$$\alpha_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu},$$

à l'aide de laquelle on pourra écrire l'expression des fonctions u de la manière suivante

$$u_\nu = A_1 \alpha_{\nu 1} + A_2 \alpha_{\nu 2} + A_3 \alpha_{\nu 3}. \qquad (\nu=1,2,3)$$

Il résulte de cette formule que les fonctions α_ν sont les seules intégrales homogènes du degré -1 des équations (7) § 2 ayant la propriété d'être uniformes et continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres pour toutes les valeurs réelles des variables.

§ 3. *Des propriétés des intégrales dans les formules fondamentales.*

Dans la formule fondamentale (15) chapitre II nous avons désigné par T_ρ certaines fonctions linéaires des premières dérivées des fonctions u_1, u_2, u_3. Laissons maintenant de côté cette définition des quantités T_ρ et supposons seulement qu'elles soient des fonctions finies et en général continues des paramètres qui fixent la position d'un point sur la surface ω.

Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point réel A d'ailleurs quelconque, et ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées d'un point A' sur la surface ω.

Considérons l'intégrale

$$\varphi = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3 = \frac{1}{4\pi}\int_\omega \Sigma_\rho T_\rho \beta_\rho d\omega; \tag{1}$$

montrons que φ est une fonction continue pour tout système de valeurs réelles de x_1, x_2, x_3. Comme il résulte immédiatement de ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent que φ est continue pour des points extérieurs à ω, prenons un point A sur ω.

Décrivons de A comme centre une sphère s de rayon ε; soit φ_0 la partie de l'intégrale φ étendue sur la partie ω_0 de ω intérieure à s et désignons par φ' le reste $\varphi - \varphi_0$. Alors φ' est une fonction continue en A. Mais nous savons qu'on peut déterminer une quantité finie et positive g de manière que

$$|\beta_\rho| < \frac{g}{r},$$

r étant la distance AA'. Soit de plus G une limite supérieure des fonctions T_ρ, on a

$$|\varphi_0| < \frac{3}{4\pi} G . g \int_{\omega_0} \frac{d\omega}{r}.$$

Mais on connaît des éléments de la théorie du potentiel que la valeur de l'intégrale dans cette inégalité converge vers zéro avec le rayon ε. Donc, on peut déterminer ε assez petit pour que la différence de deux valeurs de φ_0 en des points intérieurs à s soit moindre qu'une quantité arbitrairement petite, d'où résulte bien que $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$ est une fonction continue en A.

Passons maintenant à l'intégrale

$$\vartheta = k_1\vartheta_1 + k_2\vartheta_2 + k_3\vartheta_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho \beta_\rho dS$$

où U_ρ est une fonction continue des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Il est clair que ϑ est une fonction continue ainsi que ses dérivées pour des points $A(x_1, x_2, x_3)$ extérieurs au volume S.

Pour établir la continuité de ϑ pour des points appartenant à S on n'a qu'à répéter la démonstration bien connue pour la continuité du potentiel d'une masse étendue à trois dimensions.

Par la même méthode on établit aussi la continuité des premières dérivées de ϑ.

Revenons maintenant à la formule (15 a) chapitre II. Nous avons vu que l'expression

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho (T_\rho\beta_\rho - U_\rho\sigma_\rho) d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho\beta_\rho dS \tag{2}$$

pour des points A appartenant au volume S représente la fonction $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$ et si le point A se trouve sur ω, l'expression (2) est égale à $\frac{1}{2}(k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3)$ et enfin, si A est en déhors de S elle est égale à zéro. Mais de ce que nous avons démontré de la continuité des intégrales φ et ϑ, il suit que les changements brusques de l'expression (2) sont dus à l'intégrale

$$\varpi = k_1\varpi_1 + k_2\varpi_2 + k_3\varpi_3 = \frac{1}{4\pi}\int \Sigma_\rho u_\rho \sigma_\rho d\omega.$$

Soit s un point de la surface ω. Désignons par ϖ_s la valeur de ϖ au point s, par ϖ_{is} la limite de ϖ quand le point $A(x_1, x_2, x_3)$ tend vers s en étant à l'intérieur de la surface, par ϖ_{es} la limite de ϖ quand le point A tend vers s en étant à l'extérieur de la surface, on a les deux relations

$$\begin{aligned} \varpi_{is} &= \varpi_s - \frac{1}{2}(k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3), \\ \varpi_{es} &= \varpi_s + \frac{1}{2}(k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Donc, si u_1, u_2, u_3 sont les valeurs sur la surface ω de trois fonctions des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et si les fonctions aient des dérivées continues des deux premiers ordres, les formules (3) nous informent de la discontinuité de l'intégrale ϖ.

Mais nous allons démontrer que les formules subsistent encore dans des conditions un peu plus générales.

Soient u_1, u_2, u_3 des fonctions des paramètres qui fixent la position d'un point sur ω. Supposons que ces fonctions admettent des dérivées finies du premier ordre, et prenons sur ω un point s où la courbure est finie. Décrivons de s comme centre une sphère de rayon ε, qui découpe sur la surface ω une courbe γ. Soit ϖ' la partie de l'intégrale relative à l'aire ω_0 intérieure à γ, on aura

$$\varpi' = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_0}\Sigma_\rho u_\rho \sigma_\rho d\omega = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_0}\Sigma_\rho u_\rho^s \sigma_\rho d\omega + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_0}\Sigma_\rho (u_\rho - u_\rho^s) d\omega.$$

Mais comme σ_ρ est une fonction homogène du degré -2 qui est régulière en dehors du point s on peut poser, en désignant par r la distance de s à un autre point de ω:

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_\rho^0}{r^2},$$

où σ_ρ^0 est une fonction dont le module a une limite supérieure finie, soit g. Alors on a

$$\int\limits_{\omega_0}\Sigma_\rho (u_\rho - u_\rho^s)\sigma_\rho d\omega = \int\limits_{\omega_0}\sum_\rho \frac{u_\rho - u_\rho^s}{r}\sigma_\rho^0 \cdot \frac{d\omega}{r}.$$

Mais il existe une limite supérieure finie de $\frac{1}{r}(u_\rho - u_\rho^s)$, quelque petit que soit r; soit u cette limite on pourra écrire

$$\left|\int\limits_{\omega_0}\Sigma_\rho (u_\rho - u_\rho^s)\sigma_\rho d\omega\right| < 3gu\int\limits_{\omega_0}\frac{d\omega}{r}.$$

Mais dans la théorie du potentiel on démontre que l'intégrale a une valeur absolue moindre que

$$\frac{2\pi\varepsilon}{\cos\gamma_0}$$

où γ_0 désigne le plus grand angle d'une normale à ω_0 avec la normale en s.

L'intégrale $\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_1}\Sigma_\rho u_\rho^s \sigma_\rho d\omega$ n'est jamais plus grande que $k_1u_1^s+k_2u_2^s+k_3u_3^s$.

Nous pouvons donc écrire l'inégalité suivante

$$|\varpi'|<|k_1u_1^s+k_2u_2^s+k_3u_3^s|+\frac{3gu\varepsilon}{2\cos\gamma_0},$$

d'où il résulte qu'on peut choisir le rayon ε assez petit pour que l'intégrale $\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho(u_\rho-u_\rho^s)\sigma_\rho d\omega$ soit en valeur absolue moindre qu'une quantité arbitrairement petite δ.

Comme l'intégrale $\varpi-\varpi'$ est continue dans le voisinage de s, on conclut que l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho(u_\rho-u_\rho^s)\sigma_\rho d\omega$$

est continue au point s. De là on déduit immédiatement les équations (3).

Comme les seconds membres dans les équations (3) sont indépendants des coefficients dans les équations différentielles définissant les fonctions β, on voit (voir p. 27) que les formules (3) subsistent aussi pour les fonctions définies par l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}(v_1\tau_1+v_2\tau_2+v_3\tau_3)d\omega.$$

Nous avons établi que les fonctions φ sont des fonctions continues; au contraire ses dérivées premières présentent des discontinuités dont nous allons montrer la nature sous l'hypothèse que les T_ν soient des fonctions ayant des dérivées du premier ordre.

Comme τ_ρ désigne une fonction linéaire des constantes arbitraires k, mettons-les en évidence, en écrivant

$$\tau_\rho=k_1\tau_\rho^1+k_2\tau_\rho^2+k_3\tau_\rho^3,$$

où les τ_ρ^ν sont des fonctions linéaires des cosinus directeurs de la normale de ω:

$$\tau_\rho^\nu=\Sigma_a\tau_{\rho a}^\nu\cos(nx_a),$$

d'où on déduit l'expression suivante de $\tau^{\nu}_{\rho\alpha}$ (voir form. (8) chapitre II § 1 et chapitre III § 2)

$$\tau^{\nu}_{\rho\alpha} = \sum\nolimits_{\mu} \Delta^{\alpha}_{\rho\mu} \alpha_{\mu\nu}.$$

A l'aide de ces notations nous pouvons substituer aux formules (3) l'énoncé suivante: l'intégrale $\int\limits_{\omega} v\tau^{\lambda}_{\alpha} d\omega$ est une fonction continue de (x_1, x_2, x_3) si λ est inégal à α; au contraire, si $\lambda = \alpha$, l'intégrale présente une discontinuité définie par les formules

$$\left[\int\limits_{\omega} v\tau^{\alpha}_{\alpha} d\omega\right]^{is}_{s} = -2\pi v_s, \qquad \left[\int\limits_{\omega} v\tau^{\alpha}_{\alpha} d\omega\right]^{es}_{s} = 2\pi v_s.$$

En différentiant maintenant l'expression de φ_{μ} à l'aide des fonctions α

$$\varphi_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} (T_1 \alpha_{\mu 1} + T_2 \alpha_{\mu 2} + T_3 \alpha_{\mu 3}) d\omega,$$

on obtient

$$\sum\nolimits_{\mu} \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \varphi_{\mu} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} \sum\nolimits_{\mu} (T_1 \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \alpha_{\mu 1} + T_2 \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \alpha_{\mu 2} + T_3 \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \alpha_{\mu 3}) d\omega$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} (T_1 \tau^{1}_{\lambda\alpha} + T_2 \tau^{2}_{\lambda\alpha} + T_3 \tau^{3}_{\lambda\alpha}) d\omega.$$

Multiplions les deux membres avec $\cos(nx_{\alpha})$ et faisons la somme par rapport à l'indice α, nous aurons

$$\sum\nolimits_{\alpha} \cos(nx_{\alpha}) \sum\nolimits_{\mu} \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \varphi_{\mu} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} (T_1 \tau^{1}_{\lambda} + T_2 \tau^{2}_{\lambda} + T_3 \tau^{3}_{\lambda}) d\omega. \tag{4}$$

Or l'intégrale dans le second membre est de la même forme que l'intégrale définissant la fonction ϖ, donc nous pouvons rendre compte de la discontinuité de l'expression (4) par les formules suivantes

$$\left[\sum_{\alpha\mu} \cos(nx_{\alpha}) \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \varphi_{\mu}\right]^{is}_{s} = \frac{1}{2} T_{\lambda}$$

$$\left[\sum_{\alpha\mu} \cos(nx_{\alpha}) \Delta^{\alpha}_{\lambda\mu} \varphi_{\mu}\right]^{es}_{s} = -\frac{1}{2} T_{\lambda}.$$

Reprenons maintenant l'étude de l'intégrale ϑ, en supposant que les fonctions U_ρ admettent des dérivées continues du premier ordre. En vertu de cette hypothèse on pourra écrire, en appliquant une formule bien connue de la théorie du potentiel:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_a} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \sum_\rho U_\rho \beta_\rho \cos(nx_a)\, d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S} \sum_\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial x_a} \beta_\rho dS.$$

En égalant les coefficients de k_μ dans les deux membres de cette équation et en remplaçant les fonctions $\beta_{\rho\mu}$ par les expressions équivalentes $\alpha_{\mu\rho}$, on trouve

$$\frac{\partial \vartheta_\mu}{\partial x_a} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \sum_\rho U_\rho \alpha_{\mu\rho} \cos(nx_a)\, d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S} \sum_\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial x_a} \alpha_{\mu\rho} dS.$$

Prenons la dérivée des deux membres par rapport à x_β il vient

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\mu}{\partial x_a \partial x_\beta} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \sum_\rho U_\rho \frac{\partial \alpha_{\mu\rho}}{\partial x_\beta} \cos(nx_a)\, d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S} \sum_\rho \frac{\partial U_\rho}{\partial x_a}\frac{\partial \alpha_{\mu\rho}}{\partial x_\beta} dS,$$

où le dernier terme est une fonction continue.

En multipliant les deux membres de l'équation par le coefficient $\binom{\lambda\mu}{a\beta}$ et en faisant la somme par rapport aux indices a et β, on trouve

$$\Delta_{\lambda\mu}\vartheta_\mu = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \sum_a \sum_\rho U_\rho \sum_\beta \binom{\lambda\mu}{a\beta} \frac{\partial \alpha_{\mu\rho}}{\partial x_\beta} \cos(nx_a)\, d\omega + \text{ une fonction continue.}$$

Rappelant la formule

$$\sum_\beta \binom{\lambda\mu}{a\beta} \frac{\partial \alpha_{\mu\rho}}{\partial x_\beta} = - \Delta^a_{\lambda\mu} \alpha_{\mu\rho},$$

on pourra écrire l'expression de $\Delta_{\lambda\mu}\vartheta_\mu$

$$\Delta_{\lambda\mu}\vartheta_\mu = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \sum_a \sum_\rho U_\rho \Delta^a_{\lambda\mu} \alpha_{\mu\rho} \cos(nx_a)\, d\omega + \text{ une fonction continue.}$$

Prenons la somme par rapport a μ, nous aurons

$$\sum_\mu \Delta_{\lambda\mu}\vartheta_\mu = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \sum_a \sum_\rho U_\rho \sum_\mu \Delta^a_{\lambda\mu} \alpha_{\mu\rho} \cos(nx_a)\, d\omega + \text{ une fonction continue.}$$

Mais on a la formule

$$\sum_\alpha \sum_\mu \Delta^\alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\mu\rho} \cos(nx_\alpha) = \tau^\rho_\lambda,$$

à l'aide de laquelle on obtient

$$\sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_\mu = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_\omega \sum_\rho U_\rho \tau^\rho_\lambda d\omega + \text{ une fonction continue.}$$

Nous avons démontré que l'intégrale qui figure dans cette formule éprouve une diminution brusque égale à U_λ quand le point $A(x_1, x_2, x_3)$ passe de l'intérieur à l'extérieur de la surface ω. Mais nous savons que $\sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_\mu$ est égale à zéro pour les points extérieurs à S; par suite on a pour les points intérieurs

$$\sum_\mu \Delta_{\lambda\mu} \vartheta_\mu = U_\lambda. \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

Il résulte de ce que nous avons démontré sur les fonctions ϑ qu'elles nous donnent la solution du problème suivant:

Déterminer l'état de déformation d'un milieu élastique illimité quand ce milieu n'est soumis qu'à des forces agissant aux éléments de volume intérieurs à une certain surface et qu'on suppose que la déformation à distance infinie est nulle.

Prenant en particulier le volume S infiniment petit on trouve que

$$\vartheta = -\frac{1}{4\pi} \sum_\rho \beta_\rho \int\limits_S U_\rho dS,$$

d'où, en posant $\int\limits_S U_\rho dS = -X_\rho$, on déduit

$$\vartheta_\nu = \frac{1}{4\pi}(X_1\beta_{1\nu} + X_2\beta_{2\nu} + X_3\beta_{3\nu}).$$

Ainsi il est clair que ces fonctions ϑ représentent les composantes de déformation dans le cas limite, où le milieu est sollicité en un seul point par une force dont les composantes sont X_1, X_2, X_3.

§ 4. *Usage de fonctions compensatrices.*

En s'inspirant des idées de GREEN on peut réduire les problèmes généraux de l'équilibre d'un corps élastique à des problèmes particuliers de la même nature.

Envisageons d'abord le cas, où l'on se donne les composantes de déformation sur la surface ω d'un corps S, et les forces agissant sur les éléments de volume du corps.

Si on peut résoudre le problème d'équilibre dans le cas particulier, où les composantes de déformation à la surface ω sont égales aux fonctions $\alpha_\nu(\xi_1-x_1, \xi_2-x_2, \xi_3-x_3)$ et les forces intérieures sont égales à zéro, on peut aussi résoudre le problème général. Désignons les composantes de déformation dans le problème particulier par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et les composantes de la pression à la surface par $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Alors le théorème de BETTI nous donne

$$0=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho(\gamma_\rho T_\rho-\Gamma_\rho u_\rho)d\omega-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho\gamma_\rho dS.$$

En formant la différence de cette expression et le second membre de l'équation (15 a) § 3 chap. II, on trouve la solution du problème général:

$$k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \Sigma_\rho(\Gamma_\rho-\sigma_\rho)u_\rho d\omega-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \Sigma_\rho U_\rho(\alpha_\rho-\gamma_\rho)dS.$$

Considérons le second problème, où les forces agissant sur la surface sont connues. Désignons par T_ρ les composants de ces forces. Soient U_1, U_2, U_3 les composantes de la force agissant sur un élément de volume de S. Alors on sait que le corps S doit être en équilibre sous l'influence de ces forces, ce qui entraîne les six conditions

$$\int\limits_\omega T_\rho d\omega+\int\limits_S U_\rho dS=0,$$

$$\int\limits_\omega(\xi_\lambda T_\rho-\xi_\rho T_\lambda)d\omega+\int\limits_S(\xi_\lambda U_\rho-\xi_\rho U_\lambda)dS=0.$$

La solution de ce problème d'équilibre n'est pas unique; soient u_1, u_2, u_3 des fonctions donnant une solution, on obtient toutes les autres par les formules

$$u_\lambda + a_\lambda + p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu$$

où a_λ et p_μ désignent des constantes.

A la déformation définie par les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ correspondent des composantes de pression égales aux τ_1, τ_2, τ_3. Nous avons déjà trouvé que $\int\limits_\omega \tau_\rho d\omega = 4\pi k_\rho$. En substituant dans la formule (15a) chapitre II des fonctions linéaires pour les u, on trouve

$$\int\limits_\omega (\xi_\lambda \tau_\rho - \xi_\rho \tau_\lambda) d\omega = 4\pi(x_\lambda k_\rho - x_\rho k_\lambda).$$

Prenons maintenant pour origine le centre de gravité de la surface ω, et pour axes les axes principales d'inertie de la surface ω.

Appliquons à la surface ω des forces dont les composantes sont

$$t_\lambda = b_\lambda + c_\mu \xi_\nu - c_\nu \xi_\mu. \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$$

Ecrivons les conditions pour que les forces $-t$ et τ se fassent équilibre, nous aurons

$$\int\limits_\omega t_\lambda d\omega = b_\lambda . \int\limits_\omega d\omega = 4\pi k_\lambda,$$

$$\int\limits_\omega (\xi_\lambda t_\rho - \xi_\rho t_\lambda) d\omega = c_\mu . \int\limits_\omega (\xi_\lambda^2 + \xi_\rho^2) d\omega = 4\pi(x_\lambda k_\rho - x_\rho k_\lambda).$$

On voit que les valeurs des coefficients b et c satisfaisant à ces équations sont des fonctions linéaires des variables x_ν. Pourvu que les coefficients b et c aient été choisis de manière à satisfaire aux conditions d'équilibre et en faisant l'hypothèse que le problème de l'équilibre soit possible, on peut résoudre ce problème dans le cas particulier où les forces agissant sur ω sont égales à

$$\tau_\rho - t_\rho.$$

Désignons, dans ce cas particulier, par $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les composantes de déformation et par $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ les composantes de pression correspondantes. On a par suite pour les points de la surface ω les relations

$$\tau_\rho - \Lambda_\rho = t_\rho.$$

D'ailleurs le théorème de BETTI nous donne

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma(\delta_\rho T_\rho - \Lambda_\rho u_\rho)\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Sigma_\rho U_\rho \delta_\rho\,dS,$$

et la formule (15) chapitre II

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho(T_\rho\alpha_\rho - u_\rho\tau_\rho)\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Sigma U_\rho\alpha_\rho\,dS,$$

d'où l'on obtient, en formant la différence,

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho T_\rho(\delta_\rho - \alpha_\rho)\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\Sigma_\rho U_\rho(\tau_\rho - \Lambda_\rho)\,d\omega$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Sigma_\rho U_\rho(\alpha_\rho - \delta_\rho)\,dS.$$

Mais ici la seconde intégrale est égale à une fonction linéaire des variables x_ν de la forme

$$k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 + \begin{vmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{vmatrix},$$

et qui par suite représente un simple déplacement du corps. En supposant cette fonction égale à zéro, nous obtenons la solution

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\Sigma_\rho T_\rho(\delta_\rho - \alpha_\rho)\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Sigma_\rho U_\rho(\alpha_\rho - \delta_\rho)\,dS.$$