RECHERCHE SUR LES CHAMPS DE FORCE HYDRODYNAMIQUES

PAR

V. BJERKNES
à STOCKHOLM.

I. *Introduction.*

1. Les recherches théoriques et expérimentales de C. A. Bjerknes ont fait ressortir une analogie profonde entre certains phénomènes hydrodynamiques et les phénomènes électriques ou magnétiques.[1] Mais cette analogie n'est démontrée jusqu'ici que dans une étendue très limitée. Car les développements théoriques se restreignent au cas spécial, où les corps, qui produisent les champs, affectent la forme sphérique.

Je me propose de développer ici la théorie sans aucune restriction de cette nature.

2. Pour y arriver, j'ai changé légèrement la manière de poser le problème. Au lieu de considérer le mouvement de corps rigides, ou de corps solides élastiques, je considère le mouvement de *corps fluides* dans le fluide.

Une modification de ce genre est nécessaire au point de vue physique. Car si, dans le problème des sphères, on pousse les approximations au delà d'une certaine limite, on rencontre un défaut dans l'analogie.[2] Ce défaut est la conséquence évidente de la rigidité que possèdent les corps de forme sphérique. Car la rigidité introduit entre le corps et le fluide ambiant

---

[1] Voir V. Bjerknes: *Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes Theorie,* vol. I et II, Leipzig 1900—02.

[2] l. c. T. II, p. 175.

Acta mathematica. 30. Imprimé le 6 octobre 1905.

un contraste qui n'a rien de correspondant dans la théorie des phénomènes électriques ou magnétiques. En effet, dans la théorie de ces phénomènes on représente à l'aide d'un même système d'équations les champs à l'intérieur des corps et les champs dans le milieu ambiant, avec cette seule différence que dans le milieu extérieur le système d'équations se réduit à une forme spécialisée. Je prends donc, dans le problème hydrodynamique, un point de départ tout-à-fait analogue: je suppose que le mouvement du système hydrodynamique est déterminé, dans toute son étendue, par les équations les plus générales des fluides parfaits; et je suppose qu'en vertu de certaines propriétés spéciales ces équations se simplifient d'une manière déterminée dans le fluide qui est extérieur aux corps fluides.

3. Le problème, étant posé de cette manière, se simplifie en même temps au point de vue mathématique. Car la recherche d'une analogie possible se réduit donc évidemment à une comparaison directe des équations hydrodynamiques avec les équations des champs électriques ou magnétiques. On serait tenté, il est vrai, de conclure de suite qu'une analogie générale n'existe pas, les équations hydrodynamiques étant totalement différentes des équations des champs électromagnétiques. Mais cette conclusion est trompeuse: on peut en transformant les équations des fluides parfaits les ramener à une forme, qui se rapproche singulièrement des équations de MAXWELL pour le cas de l'électromagnétisme stationnaire.

Je suis arrivé à cette transformation en essayant de discuter le mouvement d'un élément du fluide en m'appuyant sur les mêmes principes qui ont permis à C. A. BJERKNES de discuter le mouvement d'un corps sphérique dans le fluide. Voici l'idée qui préside à cette discussion.[1] On considère le mouvement actuel du fluide comme le résultat de la superposition de deux mouvements partiels, appelés dans la terminologie de C. A. BJERKNES, le mouvement *induit* et le mouvement *d'énergie*. C'est le mouvement induit qui constitue le *champ*, proprement dit. Le mouvement d'énergie joue un double rôle. D'un côté il correspond à l'état de *polarisation intrinsèque* des aimants permanents ou des corps à polarisation électrique intrinsèque, tels que les cristaux pyroélectriques. D'un autre coté il correspond au mouvement *visible* que prennent les corps sous l'action des

[1] l. c. T. I, p. 133—210, T. II, p. 238—274.

forces pondéromotrices du champ. Si on passe ensuite au cas où l'analogie se présente sous la forme la plus complète, c'est à dire au cas des mouvements vibratoires, la vitesse d'énergie se divise en deux parties, une partie rigoureusement périodique, qui correspond au champ intrinsèque, et une partie progressive, qui correspond au mouvement visible.

C'est en appliquant ces mêmes principes dans des conditions plus générales, qu'on arrive à la solution complète du problème des analogies entre les champs hydrodynamiques et les champs électriques ou magnétiques.

II. *Hypothèses générales.*

4. Les quantités scalaires ou vectorielles, dont on se sert dans la mécanique des milieux continus, peuvent se diviser en deux groupes distincts, que j'appellerai le groupe *cinématique* et le groupe *dynamique*. Les quantités du premier groupe dépendent seulement, comme l'indique leur nom, des notions de longueur et de temps, celles du second dépendent aussi de la notion de *densité*. J'appellerai correspondantes par rapport aux dimensions, ou simplement correspondantes, deux quantités, dont les dimensions sont les mêmes à un facteur près des dimensions de la densité, ML^{-3}.

Il est important de faire attention simultanément aux correspondances et aux différences que présentent entre elles ces quantités. C'est pourquoi je désignerai par les même lettres des quantités correspondantes, mais en marquant d'une barre la quantité appartenant au groupe dynamique.

La correspondance que je définis ainsi n'est pas uniforme au point de vue mathématique. A une quantité de l'un des groupes on peut adjoindre un nombre quelconque de quantités correspondantes qui appartiennent à l'autre groupe. Mais l'intérêt, qui s'attache à la correspondance, augmente d'autant plus que se distinguent davantage les quantités correspondantes par des analogies ou des contrastes caractéristiques dans leurs propriétés mathématiques ou physiques.

Citons un premier exemple de quantités correspondantes. La force par unité de masse, ou la force accéleratrice, dont je désigne les composantes par X, Y, Z, appartient au groupe cinématique, les dimensions étant simplement celles d'une accélération. La force par unité de volume,

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, appartient au contraire au groupe dynamique. Désignant la densité par q, ou bien le volume spécifique par k,

$$k = \frac{1}{q}, \tag{a}$$

les relations entre les composantes de ces deux forces s'écriront

$$\begin{aligned} \overline{X} &= qX \quad \text{ou bien} \quad & X &= k\overline{X}, \\ \overline{Y} &= qY & Y &= k\overline{Y}, \\ \overline{Z} &= qZ & Z &= k\overline{Z}. \end{aligned} \tag{b}$$

Ces quantités correspondantes sont liées par les relations les plus simples possibles. Nous rencontrerons plus tard des quantités correspondantes qui ont entre elles des relations plus compliquées.

5. Soient maintenant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque géométrique, u, v, w les composantes de la vitesse d'un point physique quelconque appartenant au fluide, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ les composantes de la force par unité de volume, qui agit sur ce point fluide, p la pression et k le volume spécifique du fluide. Les équations de mouvement du fluide s'écriront alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\frac{du}{dt} &= \overline{X} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{1}{k}\frac{dv}{dt} &= \overline{Y} - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{1}{k}\frac{dw}{dt} &= \overline{Z} - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{a}$$

A ces équations dynamiques il faut ajouter l'équation de continuité, qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{b}$$

Remarquons que chacun des membres de cette équation représente la vitesse d'expansion d'un élément mobile du fluide, rapportée à l'unité de volume de cet élément.

On doit se rappeler que dans ces équations la différentiation par rapport au temps $\frac{d}{dt}$ se rapporte aux changements qui s'achèvent au point physique mobile. Si l'on veut passer aux changements qui s'achèvent au point géométrique immobile, on emploie le développement eulerien

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{c}$$

où $\frac{\partial}{\partial t}$ se rapporte aux changements qui s'achèvent au point géométrique immobile.

III. *Transformation des équations hydrodynamiques.*

6. Les équations que je viens d'écrire servent à calculer le mouvement *actuel* du fluide. Je décomposerai ce mouvement en deux mouvements partiels, qui se distingueront l'un de l'autre par certaines propriétés caractéristiques.

En écrivant

$$\begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e \\ v &= k\bar{v} + v_e \\ w &= k\bar{w} + w_e \end{aligned} \tag{a}$$

je sépare la vitesse actuelle u, v, w en deux vitesses partielles, $k\bar{u}, k\bar{v}, k\bar{w}$ et u_e, v_e, w_e, que j'appellerai plus tard, après les avoir complètement determinées, la *vitesse induite* et la *vitesse d'énergie.* J'ai écrit les composantes de la première sous la forme $k\bar{u}, k\bar{v}, k\bar{w}$, par ce qu'il est préférable, ainsi qu'on le verra par la suite, de représenter le mouvement induit non pas par sa vitesse, mais par le vecteur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, quantité de mouvement par unité de volume. J'appellerai ce vecteur *l'intensité de champ*[1] du mouvement induit.

La vitesse u, v, w du mouvement actuel, et l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ du mouvement induit, sont des quantités, dont la correspondance (4) joue pour nous le rôle le plus important. Cette correspondance se

[1] l. c. I, p. 139.

réduit à une simple proportionalité dans le cas spécial, où la vitesse u_e, v_e, w_e du mouvement énergetique est égale à zéro.

7. Je considère maintenant le membre de gauche de la première équation de mouvement (5, a). La substitution de la valeur de u (6, a) donne pour ce membre

$$\frac{1}{k}\frac{du}{dt} = \frac{1}{k}\frac{d(k\bar{u})}{dt} + \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt}.$$

En effectuant la différentiation du premier terme du second membre et tenant compte de (5, b) on trouve

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{k}\frac{du}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt}.$$

Le premier terme du 2ème membre de cette équation s'écrit en vertu du développement eulerien (5, c)

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

ou ensuite

$$\text{(b)} \qquad \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

Dans le trinome du second membre j'exprime, en vertu de (6, a), la vitesse actuelle u, v, w à l'aide des deux vitesses partielles. Ce trinome peut donc s'écrire

$$u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + u_e\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_e\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w_e\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$$

ou bien, si on sépare un terme qui a la forme d'une dérivée par rapport à x

$$u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + \bar{u}u_e + \bar{v}v_e + \bar{w}w_e\right\}$$

$$- \left\{\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x} + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\right\}.$$

Si, dans la première parenthèse, on élimine u_e, v_e, w_e à l'aide des équations (6, a), on obtient

$$u\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+v\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+w\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{u\bar{u}+v\bar{v}+w\bar{w}-\frac{1}{2}k(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)\right\}$$
$$-\left\{\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}+\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\right\}.$$

En introduisant ce développement en (b), et ensuite le développement (b) en (a), il vient enfin

$$\text{(c)}\quad \frac{1}{k}\frac{du}{dt}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{u\bar{u}+v\bar{v}+w\bar{w}-\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)\right\}$$
$$+\frac{1}{k}\frac{du_e}{dt}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u}-\left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)$$
$$-\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}+w\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}-\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)-v\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right).$$

C'est l'expression plus développée du premier membre de la première équation de mouvement (5, a).

8. J'écris donc sous cette forme le membre de gauche de la première équation de mouvement (5, a). Je soumets ensuite l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ à la condition de satisfaire à l'équation

$$\text{(a)}\qquad \frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{p+u\bar{u}+v\bar{v}+w\bar{w}-\frac{1}{2}k(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)\right\}.$$

La vitesse u_e, v_e, w_e satisfera donc à l'équation

$$\text{(b)}\qquad \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt}=X-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u}+\left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}-w\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}-\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right).$$

Ces deux équations, et les autres qui s'en déduisent par symétrie, déterminent les deux mouvements partiels. Et ces deux mouvements ainsi déterminés apparaissent comme jouissant de propriétés bien différentes.

Les équations (a) du premier mouvement partiel contiennent la pression p. Ce mouvement est donc de nature hydrodynamique proprement dite. Il existe partout où il y a de la pression variable de point à point. Son champ s'étendra donc en général à tout le fluide. C'est le mouvement que j'appellerai *le mouvement induit.*

Les équations (b) du second mouvement partiel contiennent la force extérieure $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, et en outre une force fictive d'origine hydrodynamique, dont la première composante est

$$(c) \qquad \overline{X}_e = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

Rien n'exige d'ailleurs, que ces forces soient répandues dans tout l'espace. Ce mouvement partiel peut donc être un mouvement de nature locale, qui n'existe que dans certaines parties limitées du fluide. En conservant la terminologie de C. A. Bjerknes j'appellerai ce mouvement partiel *le mouvement d'énergie* et la force fictive (c) *la force d'énergie hydrodynamique.*[1]

9. Au système des équations originaires, 5, a et b, qui détermine le mouvement actuel du fluide, on peut ainsi substituer un système d'équations plus développé, qui détermine en même temps le mouvement actuel, le mouvement partiel induit et le mouvement partiel énergétique. Voici ce système d'équations.

Le mouvement actuel se détermine en fonction des deux mouvements partiels par les équations de connexion

$$(A) \qquad \begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e \\ v &= k\bar{v} + v_e \\ w &= k\bar{w} + w_e \end{aligned}$$

Les variations dans le temps du mouvement induit se déterminent par les équations

[1] l. c. T. I, p. 133—139.

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial \bar u}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{p + u\bar u + v\bar v + w\bar w - \frac{1}{2}k(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\right\}\\
\frac{\partial \bar v}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left\{p + u\bar u + v\bar v + w\bar w - \frac{1}{2}k(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\right\}\\
\frac{\partial \bar w}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z}\left\{p + u\bar u + v\bar v + w\bar w - \frac{1}{2}k(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\right\}.
\end{aligned}$$

Les variations dans le temps du mouvement d'énergie se déterminent par les équations

$$\text{(C}_1\text{)}\qquad \begin{aligned}
\frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} &= \bar X + \bar X_e,\\
\frac{1}{k}\frac{dv_e}{dt} &= \bar Y + \bar Y_e,\\
\frac{1}{k}\frac{dw_e}{dt} &= \bar Z + \bar Z_e,
\end{aligned}$$

dans lesquelles la force d'énergie hydrodynamique $\bar X_e, \bar Y_e, \bar Z_e$ est donnée par les expressions

$$\text{(C}_2\text{)}\qquad \begin{aligned}
\bar X_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar u + \left(\bar u\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar v\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar w\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\frac{\partial k}{\partial x} - w\left(\frac{\partial \bar u}{\partial z} - \frac{\partial \bar w}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial \bar v}{\partial x} - \frac{\partial \bar u}{\partial y}\right),\\
\bar Y_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar v + \left(\bar u\frac{\partial u_e}{\partial y} + \bar v\frac{\partial v_e}{\partial y} + \bar w\frac{\partial w_e}{\partial y}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\frac{\partial k}{\partial y} - u\left(\frac{\partial \bar v}{\partial x} - \frac{\partial \bar u}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial \bar w}{\partial y} - \frac{\partial \bar v}{\partial z}\right),\\
\bar Z_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar w + \left(\bar u\frac{\partial u_e}{\partial z} + \bar v\frac{\partial v_e}{\partial z} + \bar w\frac{\partial w_e}{\partial z}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar u^2 + \bar v^2 + \bar w^2)\frac{\partial k}{\partial z} - v\left(\frac{\partial \bar w}{\partial y} - \frac{\partial \bar v}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial \bar u}{\partial z} - \frac{\partial \bar w}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

A ces équations il faut ajouter l'équation de continuité

$$\text{(D)}\qquad \frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Pour des raisons qu'on trouvera justifiées par les développements ultérieurs de ce mémoire on peut appeler ce système d'équations *la forme électroidique* des équations hydrodynamiques.

IV. *Discussion générale.*

10. On sait que deux quantités dérivées déterminent la nature de la distribution dans l'espace d'un vecteur quelconque u, v, w. Ce sont la quantité scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e, \tag{a}$$

qu'on appelle *la divergence*, et le vecteur

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= l, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= m, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= n, \end{aligned} \tag{b}$$

qu'on appelle *la rotation* (ou bien le *curl*) du vecteur primaire u, v, w.

Dans le cas où il existe des surfaces de discontinuité, on rencontre comme cas limite de la divergence (a) la différence des composantes normales du vecteur u, v, w de part et d'autre de la surface: c'est la *divergence de surface.* De même on rencontre comme cas limite de la rotation (b) la différence géométrique des composantes tangentielles de part et d'autre de la surface: c'est la *rotation de surface* (ou bien le glissement) à la surface de discontinuité. Nous pouvons donner à nos théorèmes en même temps une généralité et une simplicité très convenables en prenant les notions de divergence et de rotation dans le sens général où elles comprennent la divergence de surface et la rotation de surface. C'est ce que nous ferons toujours.

Si la divergence est nulle, le champ du vecteur s'appelle *solenoidal;* si la rotation est nulle, le champ s'appelle *irrotationel* ou bien *potentiel,* par ce que dans ce cas les composantes du vecteur sont les dérivées d'une fonction potentielle.

On peut considérer la divergence et la rotation en quelque sorte comme les dérivées d'un champ de vecteur. Si on les connait, on peut, par un procédé d'intégration, déterminer le champ du vecteur primaire u, v, w à un champ solenoidal et irrotationel près, qui joue le rôle de constante d'intégration. Ce champ possède un potentiel qui satisfait à l'équation de LAPLACE, et qui se détermine à l'aide des conditions aux surfaces limites du champ. En d'autres termes, la détermination de ce champ revient à la solution du problème de DIRICHLET.

Dans les recherches générales de la mathématique physique on se débarrasse ordinairement de la solution de ce problème. On y arrive en supposant que le champ s'étend à l'infini, mais qu'il a ses divergences et ses rotations dans l'éspace fini. Dans ces conditions on peut supposer, sans contradiction, que le vecteur disparait à l'infini, et le champ de LAPLACE disparait alors identiquement. Dans ce cas la divergence et la rotation déterminent donc uniformément le champ du vecteur primaire.

Si à cette propriété mathématique s'ajoutent des propriétés physiques fondamentales, ces quantités dérivées joueront forcément un grand rôle dans la théorie des phénomènes en question, ainsi que le prouvent un grand nombre d'exemples de la physique mathématique. Examinons donc la divergence et la rotation des deux vecteurs fondamentaux de notre problème, c'est à dire de la vitesse actuelle u, v, w et de l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

11. Quand il s'agit de la vitesse actuelle u, v, w, la divergence e, qu'on calcule par l'équation (10, a), exprime simplement la vitesse d'expansion d'un élément mobile du fluide, rapportée à l'unité de volume de cet élément. L'équation (a) est ainsi équivalente à l'équation de continuité (D), et on est donc amené nécessairement à considérer cette divergence comme une des quantités fondamentales de notre problème. La condition spéciale

$$e = 0 \tag{a}$$

exprime l'incompressibilité de l'élément fluide mobile. Dans la partie du fluide où cette condition est satisfaite la distribution de la vitesse actuelle est solenoidale.

La rotation (b) de la vitesse actuelle est la quantité qu'on appelle aussi quelque fois le tourbillon. Je préfère l'appeler *la densité de tourbillon*, et donner le nom de *tourbillon* à l'intégrale de sa composante normale prise sur une surface. C'est le tourbillon ainsi défini qui, d'après les célèbres théorèmes de v. HELMHOLTZ, se conserve tout le long d'une surface matérielle mobile dans le fluide. Mais dans les conditions que suppose notre problème, les hypothèses sur lesquelles repose la démonstration des théorèmes de v. HELMHOLTZ ne sont pas en général remplies. Pendant le mouvement des tourbillons naissent et disparaissent et le vecteur (b) n'a pas de propriétés générales assez simples pour prendre place parmi les quantités que nous considérons comme fondamentales.

Remarquons enfin que les quantités dérivées de la vitesse actuelle, que nous venons de considérer, appartiennent à la classe des quantités cinématiques. Pour les distinguer de quantités analogues, qui se présenteront tout à l'heure, nous complèterons leur désignation par l'adjonction de l'adjectif *cinématique.*

12. La divergence de l'intensité de champ

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \bar{e}$$

est la quantité dynamique qui correspond à la vitesse d'éxpansion cinématique e. Elle n'a pas en général de signification ou de propriétés physiques très simples. Elle ne jouera donc pas de rôle absolument fondamental, et cependant, en raison des propriétés remarquables de l'intensité de champ, elle nous rendra de grands services pour la représentation analytique des phénomènes.

La rotation de l'intensité de champ jouit au contraire d'une propriété physique très remarquable. Des deux dernières équations du mouvement induit (B) on tire immédiatement

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) = 0.$$

On peut y ajouter deux équations analogues, et l'intégration immédiate de ces équations donne

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \bar{l}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \bar{m}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \bar{n}. \end{aligned}$$

Les composantes de la rotation de l'intensité de champ sont donc des constantes d'intégration. Et l'opération $\frac{\partial}{\partial t}$ se rattachant aux changements qui s'achèvent au point géométrique considéré, on voit que le vecteur $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ possède en chaque point de l'espace une direction et une valeur absolue indépendantes du temps.

Nous appellerons ce vecteur *la densité de tourbillon dynamique*, et son intégrale de surface le *tourbillon dynamique*. Cette intégrale de surface est naturellement indépendante du temps, comme la densité de tourbillon. Le mouvement induit possède donc une propriété extrêmement remarquable que l'on peut énoncer ainsi:

Le mouvement partiel induit est un mouvement à tourbillons dynamiques invariables et stationnaires dans l'espace.

Les quantités $\bar{e}$ et $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ ont ainsi en général des propriétés bien différentes de celles des quantités cinématiques correspondantes e, l, m, n. Mais dans un cas spécial ces propriétés se rapprochent: C'est lorsque la vitesse d'énergie devient identiquement nulle $u_e = v_e = w_e = 0$ et qu'en même temps le fluide est homogène, $k = k_0$. On a donc

$$\text{(c)}\qquad \begin{aligned} u &= k_0 \bar{u} & & & l &= k_0 \bar{l}, \\ v &= k_0 \bar{v} & e &= k_0 \bar{e} & m &= k_0 \bar{m}, \\ w &= k_0 \bar{w} & & & n &= k_0 \bar{n}. \end{aligned}$$

Dans ce cas les quantités cinématiques et les quantités correspondantes dynamiques sont simplement proportionnelles entre elles avec le facteur de proportionalité constant k_0.

Du théorème ci-dessus il résulte le corollaire suivant:

Si à une époque quelconque le mouvement induit ne comporte pas de tourbillons dynamique dans un certain espace, il n'en comportera jamais dans cet espace.

En raison de cette propriété le cas où ces tourbillons sont nuls est particulièrement important. Dans un espace où ces tourbillons n'existent pas l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ dépendra à toute époque d'un potentiel

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \\ \bar{v} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \\ \bar{w} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ces expressions rendent immédiatement intégrables les équations (E). Après l'intégration ces équations se réduisent à une seule, savoir

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = P - p - u\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - v\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - w\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{2}k\left\{\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}\right)^2\right\}$$

ou bien, en vertu de (5, c)

$$\text{(e)} \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = P - p + \frac{1}{2}k\left\{\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Ici la constante d'intégration P est indépendante des coordonnées et ne peut dépendre que du temps. La formule permet de calculer la pression p, si l'on connait en même temps le mouvement actuel et le mouvement induit.

13. Nous sommes maintenant en état de démontrer une propriété importante du second mouvement partiel, le mouvement d'énergie.

Des équations (C_1) on conclut que la vitesse d'énergie, que possède un élément mobile du fluide, peut subir des variations par suite de deux causes, l'action d'une force extérieure $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ et l'action d'une force hydrodynamique d'énergie $\bar{X}_e, \bar{Y}_e, \bar{Z}_e$. Supposons qu'aucune force extérieure n'agite l'élément consideré et examinons de plus près la force d'énergie hydrodynamique, (C_2). Le premier terme de cette force disparaîtra, si la vitesse actuelle u, v, w n'a pas de divergence, c'est à dire si l'élément en question ne possède pas de vitesse d'expansion e. Le troisième terme disparaîtra, si le volume spécifique k n'est pas variable de point à point dans l'élément. Le quatrième et le cinquième termes disparaîtront, si, dans le volume de l'élément, l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ne possède pas de tourbillon. Si nous supposons donc que l'élément considéré appartienne à une partie du fluide homogène et incompressible, et à une partie de l'espace où le mouvement induit ne possède pas de tourbillon dynamique, l'expression de la force d'énergie hydrodynamique se réduira au second terme du deuxième membre des équations (C_2). Le système (C_1) se réduit donc à l'équation

$$\frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} = \bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}$$

et aux deux autres qui s'en déduisent par symétrie. Ces équations nous montrent, que dans les conditions que nous avons définies, la vitesse d'énergie ne peut varier que si elle préexiste déjà dans l'élément fluide considéré. Si donc l'élément ne possède pas de vitesse d'énergie dès l'origine, il n'en aura jamais. On trouve donc le résultat suivant:

Une vitesse d'énergie n'existe jamais dans une partie du fluide qui satisfait à la fois aux cinq conditions suivantes: n'etre soumise à l'action d'aucune force extérieure; être homogène; être incompressible; avoir à l'origine une vitesse d'énergie nulle; appartenir à un espace dans lequel à l'origine du temps il n'existe pas de tourbillons dynamiques du mouvement induit.

V. *Suppositions sur la constitution du système fluide.*

14. Nous allons considérer dès maintenant un système fluide d'une constitution spéciale. Le théorème énoncé ci-dessus nous permet de concevoir un système, tel que certaines parties limitées du fluide possèdent seules la vitesse d'énergie, ou la faculté d'en pouvoir acquérir, tandis que l'autre partie, qui est illimitée, n'en possède pas, et n'en peut acquérir. Désignons la partie illimitée du nom de *fluide fondamental*, et appelons *corps* les parties limitées. Ces corps ne doivent exister qu'en nombre fini et dans une région finie de l'espace.

Les conditions qui doivent être satisfaites par le fluide fondamental sont, d'après le théorème ci-dessus, les suivantes: il doit être homogène et incompressible, être exempt de l'action de toute force extérieure, et dépuis l'origine du temps être dénué de vitesse d'énergie et de tourbillon dynamique. Les corps se distingueront du fluide fondamental par une ou par plusieurs des qualités suivantes:

1. Posséder des vitesses d'énergie u_e, v_e, w_e.

2. Posséder des vitesses d'expansion e.

3. Posséder un volume spécifique k, différent du volume spécifique constant k_0 du fluide fondamental.

4. Posséder des tourbillons dynamiques du mouvement induit, avec la densité de tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Le tourbillon dynamique étant stationnaire dans l'espace (12), il en résulte que tout corps qui possède de tels tourbillons est aussi stationnaire dans l'espace. Nous verrons plus tard l'importance de cette remarque. Les corps, au contraire, qui n'ont pas ce mouvement tourbillonnaire, peuvent changer d'une manière quelconque leur forme ou leur position dans l'espace.

15. En traitant la dynamique de ce système on doit se rappeler que la transformation des équations hydrodynamiques, que nous avons effectuée, suppose dès l'origine une continuité complète. En effet les équations transformés contiennent des dérivées de quantités telles que $k, u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, u_e, v_e, w_e$. On est ainsi amené à admettre qu'il n'y a pas de changement brusque aux surfaces limites des corps: On imagine l'existence de couches de passage, dans lesquelles, avec une vitesse aussi grande que l'on voudra mais toujours d'une manière continue, les propriétés du corps convergent vers celles du fluide fondamental. Dans ces couches la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, la densité de tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$, et la vitesse d'expansion e tendent vers zéro, et le volume spécifique k vers la valeur constante k_0, qu'il garde partout dans le fluide fondamental. Naturellement cette couche de passage appartient au corps, et à la surface limite le corps possède déjà toutes les propriétés du fluide fondamental.

Mais il n'est pas nécessaire d'introduire cette hypothèse de continuité. On sait que les équations hydrodynamiques primitives n'exigent d'autre continuité que celle de la non-existence de vides dans l'intérieur du fluide. Rien n'empèche donc de faire disparaître l'épaisseur des couches de passage et de chercher les limites vers lesquelles convergent alors les équations (9) pour les points de ces couches. On trouve donc qu'il se sépare de la force $(9, C_2)$ une force qui s'applique aux éléments de la surface de discontinuité, et qu'il faut compter par unité de surface. D'ailleurs on peut opérer *comme si la condition de continuité était toujours remplie,* à la condition de compter les divergences des vecteurs en question comme comprenant aussi les divergences de surface, et de compter les rotations des vecteurs comme comprenant aussi les rotations de surface. C'est ce que nous ferons toujours.

En procédant ainsi, nous considérons donc toujours les intégrales de volume où figurent les divergences ou les rotations, comme contenant implicitement des intégrales de surface dans lesquelles figurent les divergences ou les rotations de surface. Ce sont les intégrales de surface qui proviennent des intégrales de volume dans les couches de passage, quand on fait disparaître l'épaisseur de ces couches.

16. Examinons maintenant le mouvement dans le fluide fondamental.

La vitesse d'énergie étant ici nulle, le mouvement actuel s'identifie avec le mouvement induit, ce qui s'exprime par les équations

$$\text{(a)}\qquad \begin{aligned} u &= k_0\bar{u}\,, \\ v &= k_0\bar{v}\,, \\ w &= k_0\bar{w}\,, \end{aligned}$$

k_0 étant le volume spécifique constant du fluide fondamental. Le tourbillon dynamique étant nul, l'intensité de champ dépend d'un potentiel uniforme ou non uniforme $\bar{\varphi}$, et la vitesse actuelle u, v, w, qui est simplement proportionnelle à l'intensité de champ, dépendra aussi d'un potentiel $\varphi = k_0\bar{\varphi}$. En introduisant l'un ou l'autre de ces potentiels dans l'équation de continuité, on trouve qu'ils satisfont à l'équation de Laplace. Le champ de l'un ou de l'autre de ces deux vecteurs est donc le champ solenoidal et irrotationnel bien connu. La valeur numérique des vecteurs disparait donc à l'infini au moins comme des quantités du second ordre, les potentiels au moins comme des quantités du premier ordre. Ces propriétés du champ dans ses parties infiniment éloignées nous permettent d'effectuer ci-dessous, par la manière connue, les intégrations par parties de certaines intégrales cubiques qui sont étendues à tout l'espace.

17. Le mouvement des corps se distingue de celui du fluide fondamental par l'existence d'une quantité scalaire, la vitesse d'expansion e, et de deux quantités vectorielles, la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e et la densité de tourbillon dynamique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Considérons l'intégrale de volume

$$\text{(a)} \qquad T = \int \frac{1}{2k}(u^2 + v^2 + w^2)d\tau$$

qui, étendue à tout l'espace, représente l'énergie cinétique du système. Montrons qu'on peut exprimer cette énergie à l'aide d'une intégrale qui s'étend aux corps seulement.

Écrivons la vitesse actuelle u, v, w sous la forme

$$u = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},$$

$$v = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z},$$

$$w = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

L'expression de T peut donc s'écrire

$$T = \frac{1}{2}\int\left(u\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + v\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + w\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)d\tau$$

$$+ \int\frac{1}{2k}\left\{u\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau.$$

Dans la seconde intégrale du second membre, exprimons la vitesse induite $k\bar{u}, k\bar{v}, k\bar{w}$ à l'aide de la vitesse actuelle et de la vitesse d'énergie (9, A). Alors

$$T = \frac{1}{2}\int\left(u\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + v\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + w\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)d\tau$$

$$+ \int\frac{1}{2k}\left\{u_e\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + v_e\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + w_e\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau$$

$$+ \frac{1}{2}\int\left\{\bar{u}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + \bar{v}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + \bar{w}\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau.$$

Toutes ces intégrales devraient s'étendre à l'espace entier. Mais la vitesse d'énergie n'existant que dans les corps, il suffit d'étendre la seconde intégrale aux corps seulement. Sur les deux autres on peut effectuer une intégration par parties, qu'on peut ensuite, en vertu des propriétés du champ dans les régions infiniment éloignées (16), étendre à tout l'espace. Les intégrales de surface, qui ressortent de l'intégration par partie, disparaissent donc, et en tenant compte des relations (10, a) et (12, b) on trouve l'expression suivante de l'énergie T

(b)
$$T = -\frac{1}{2}\int e\bar{\varphi}\,d\tau$$
$$+\int \frac{1}{2k}\left\{u_e\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)+v_e\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right)+w_e\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int(\bar{l}L+\bar{m}M+\bar{n}N)\,d\tau$$

la première et la dernière intégrale contenant implicitement, dans le cas de discontinuités, des intégrales de surface (15).

Dans toutes ces intégrales l'expression sous le signe somme est identiquement nulle en tous les points du fluide fondamental, et nous avons donc réussi à exprimer l'énergie du mouvement induit à l'aide d'intégrales qu'il suffit d'étendre au volume des corps.

18. Nous allons en tirer une conséquence importante.

Supposons la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, le tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et la vitesse d'expansion e égales à zéro. L'énergie T disparait comme le montre l'expression (17, b). Mais quand T disparait, l'expression (17, a) nous montre que la vitesse actuelle u, v, w disparait aussi dans tous les points de l'espace. La vitesse d'énergie étant déjà nulle par hypothèse, il en résulte que le mouvement induit disparait aussi. Dans ces conditions il n'existe plus de mouvement.

Cela étant, considérons deux champs différents, ayant en chaque point les mêmes valeurs de la vitesse d'énergie, u_e, v_e, w_e, du tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et de la vitesse d'expansion e. La différence de ces deux champs de mouvement est donc un champ dans lequel toutes ces quantités sont identiquement égales à zéro, c'est à dire, d'après ce que nous venons de voir, un champ qui disparait complètement. Les deux champs ne peuvent donc pas différer l'un de l'autre, et il en résulte le théorème que voici.

La vitesse d'énergie, le tourbillon dynamique du mouvement induit et la vitesse d'expansion du mouvement actuel déterminent le champ de mouvement d'une manière uniforme.

19. Pour nous rendre compte de la généralité du théorème, remarquons que les corps tels que nous les avons définis peuvent avoir un mouvement quelconque. Car les forces extérieures, qui produisent le mouvement, ne sont soumises à aucune restriction. Rien ne nous empèche donc de supposer l'existence de forces qui par exemple donnent à ces corps le mouvement de corps rigides, ou de corps solides élastiques.

On a donc le droit de supposer aussi que les corps, que nous avons définis, sont réellement des corps rigides ou des corps solides élastiques. Si l'on s'imagine ces corps liquéfiés, et que l'on détermine les forces nécessaires pour leur donner, dans ces conditions, le même mouvement qu'ils auraient étant solides, et si l'on détermine ensuite les deux mouvements partiels d'après les équations (9), on peut appliquer le théorème énoncé. Dans ce sens le théorème, ainsi que tous les résultats que nous développerons ci-dessous, s'appliqueront à des corps étrangers quelconques qui se meuvent dans le fluide. Dans ces applications on doit tenir compte des divergences ou des tourbillons de surface qui existent sur les surfaces limites entre le fluide fondamental et les corps. La considération de ces divergences et de ces tourbillons de surface revient à ceci, qu'en calculant les divergences et les tourbillons, on compte la surface adjacente du fluide fondamental comme appartenant au corps.

En tout cas le théorème conduit à ce résultat remarquable que certaines particularités du mouvement, que possèdent les différents éléments des corps, (y compris en cas de discontinuité le mouvement des éléments immédiatement adjacents du fluide ambiant), déterminent le champ de mouvement dans chaque point de l'espace. On peut imaginer ce résultat découvert expérimentalement par un observateur qui ne possède que des méthodes indirectes pour observer les champs et les différentes particularités du mouvement. On comprend facilement qu'un tel observateur, en trouvant le résultat que nous venons d'énoncer, soit tenté d'en donner une interprétation physique spéciale, en l'attribuant à une action à distance émanant des différents éléments de volume des corps, et se faisant sentir en tout point de l'éspace. Voilà le premier germe des phénomènes d'actions apparentes à distance, que nous étudierons ci-dessous.

VI. *Analogie géométrique directe des champs hydrodynamiques et des champs électromagnétiques stationnaires.*

20. Appliquons le théorème ci-dessus en considérant dès maintenant la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, le tourbillon dynamique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et la vitesse d'expansion e comme des quantités données. Les équations, qui déterminent uniformément le champ en fonction de ces quantités données, sont donc les suivantes

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e, \\ v &= k\bar{v} + v_e, \\ w &= k\bar{w} + w_e, \end{aligned}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \bar{l}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \bar{m}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \bar{n}, \end{aligned}$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e$$

auxquelles on doit joindre les conditions suivantes, qui s'appliquent au fluide fondamental

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} u_e &= 0, & \bar{l} &= 0, & e &= 0, \\ v_e &= 0, & \bar{m} &= 0, & k &= k_0, \\ w_e &= 0, & \bar{n} &= 0, \end{aligned}$$

k_0 étant constant en chaque point du fluide fondamental.

21. Comparons maintenant ce système hydrodynamique à un système électromagnétique, consistant en un certain nombre de corps limités, environnés d'un milieu extérieur, qui s'étend à l'infini. Le milieu extérieur doit être homogène, et en outre dénué de toute polarisation intrinsèque, et de toute distribution de masses magnétiques ou de courants électriques. Les corps doivent se distinguer du milieu extérieur par une ou par plusieurs des propriétés suivantes:

1. Posséder des polarisations magnétiques intrinsèques, u_e, v_e, w_e.

2. Posséder une distribution de masses magnétiques avec la densité e.

3. Posséder une perméabilité magnétique k différente de la perméabilité constante k_0 du milieu extérieur.

4. Posséder une distribution de courants électriques avec la densité $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$.

Sous ces conditions il existe dans l'espace entier, dans le milieu extérieur ainsi que dans l'intérieur des corps, un champ magnétique stationaire uniformément déterminé. Définissons ce champ à l'aide de deux vecteurs, savoir *l'intensité de champ magnétique* $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, et *l'induction* (dans la terminologie de HERTZ *la polarisation*) *magnétique* u, v, w. Supposons enfin qu'on exprime toutes les quantités dans le système d'unités rationelles de M. OLIVER HEAVISIDE.[1] Le système d'équations, qui détermine la distribution des deux vecteurs dans l'espace, est donc justement le système (20, A—D), qui détermine la distribution des vecteurs correspondants, de la vitesse u, v, w et de l'intensité de champ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, dans le système hydrodynamique.

En particulier, les équations (A) sont les équations de connection, qui expriment l'induction (la polarisation) en fonction de l'intensité de champ et de la polarisation intrinsèque. (B) sont les équations qui déterminent le courant électrique en fonction de l'intensité de champ magnétique. (C) est l'équation qui détermine la densité magnétique vraie (s'il en existe) en fonction de l'induction magnétique. Les équations (D) donnent enfin les simplifications qu'on admettra par hypothèse dans le milieu extérieur.

Si l'on avait employé les unités magnétiques traditionnelles, les équations du champ magnétique auraient été encore les équations (A—C), avec cette seule différence que le dernier terme à droite de chaque équation

---

[1] OLIVER HEAVISIDE, *Electromagnetic Theory*, London 1893. T. I, p. 116—125.

aurait été affecté du facteur numérique irrationel 4π. En introduisant dans l'hydrodynamique un système d'unitès affectant la même irrationalité, on peut naturellement donner aux formules hydrodynamiques la même forme irrationelle. Mais cette observation n'a d'autre intérêt que de montrer, à l'aide de cette image dynamique des phénomènes électromagnétiques, l'absurdité complète du système d'unités qu'on emploie aujourd'hui dans la science de l'électricité et du magnétisme.[1]

22. Le dualisme bien connu des phénomènes électriques et magnétiques a pour conséquence qu'on peut encore comparer, à un autre point, les phénomènes hydrodynamiques aux phénomènes électromagnétiques. Au lieu de considérer le champ magnétique on peut considérer le champ électrique d'un système de corps, possèdants une distribution de masses électriques vraies de densité e, des polarisations électriques intrinsèques u_e, v_e, w_e, une distribution de »courants magnétiques stationnaires» avec la densité $-\bar{l}, -\bar{m}, -\bar{n}$, et enfin des constantes diélectriques k variables d'une manière quelconque. Les équations (20, A—D) sont alors les équations qui déterminent la distribution de l'intensité de champ électrique $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ et de l'induction (la polarisation) électrique u, v, w.

Dans la pratique, suivant les circonstances, on adoptera l'une ou l'autre de ces comparaisons. La seconde présente cet avantage qu'une densité électrique vraie existe réellement, tandis qu'on ne connait pas de densité magnétique vraie. C'est donc seulement avec ce dernier mode de comparaison qu'on trouve une quantité physique réelle qui corresponde à la vitesse d'expansion e. En revanche le premier mode de comparaison a l'avantage que le tourbillon dynamique corresponde au courant électrique stationnaire qui existe réellement. Le courant magnétique, au contraire, n'est pas en général stationnaire ou ne peut l'être que momentanément. Néanmoins, pour des raisons de symétrie, il est commode de faire figurer dans les formules des symboles qui représentent ces quantités fictives, les masses magnétiques vraies et les courants magnétiques stationnaires.

23. Nous pouvons donc résumer, dans le tableau synoptique suivant, les résultats que nous venons d'obtenir, relativement à l'analogie des champs

---

[1] V. Bjerknes, *Hydrodynamische Fernkräfte*, t. II, p. 228.

de mouvement hydrodynamiques avec les champs électriques ou magnétiques. Les notions qui n'ont qu'un sens fictif, et que nous ne gardons que pour conserver toute la généralité du problème, sont mises entre crochets.

	champ hydrodynamique	champ magnétique	champ électrique
u, v, w	Vitesse actuelle	Induction magnétique	Induction électrique
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Intensité de champ hydrodynamique	Intensité de champ magnétique	Intensité de champ électrique
u_e, v_e, w_e	Vitesse d'énergie	Polarisation magnétique intrinsèque	Polarisation électrique intrinsèque
e	Vitesse d'expansion par unité de volume	[Densité des masses magnétiques vraies]	Densité des masses électriques vraies
$\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$	Densité de tourbillon dynamique	Densité de courant électrique stationnaire	[Densité de courant magnétique stationnaire]
k	Volume spécifique	Perméabilite magnétique	Constante diélectrique

L'analogie se restreint au cas des champs électriques ou magnétiques stationnaires. Par la voie que nous avons suivie on n'arrive pas à une analogie hydrodynamique des phénomènes électromagnétiques les plus généraux. L'analogie cesse d'exister justement au point où commence le croisement des phénomènes électriques et magnétiques, et on n'arrive ainsi qu'à définir une analogie d'ordre électrique et à une analogie d'ordre magnétique, ces deux analogies n'ayant entre elles aucune connexion.

La cause pour laquelle l'analogie cesse justement d'exister en ce point est bien claire. Au moment où le courant, qu'il soit électrique ou magnétique, devient variable, l'existence d'un champ magnétique est nécessairement accompagnée d'un champ électrique, et vice versa. Mais, dans l'image hydrodynamique des phénomènes électriques ou magnétiques, ce qui correspond au courant, c'est le tourbillon dynamique du mouvement induit, et ce tourbillon a nécessairement un caractère stationnaire par rapport à l'espace et par rapport au temps. (12).

Si donc l'on veut étendre l'analogie au delà de la limite qui nous arrête ainsi, il faut modifier essentiellement la manière de poser le problème dynamique. Mais n'abordons pas cette question des généralisations possibles de l'analogie. Bornons nous à l'approfondir dans son étendue limitée.

VII. *Analogie dynamique inverse des champs hydrodynamiques et des champs électriques ou magnétiques stationnaires.*

24. Au point de vue géométrique il existe, ainsi que nous l'avons démontré, une identité complète entre les champs hydrodynamiques que nous étudions, et les champs électriques ou magnétiques stationnaires. Occupons nous maintenant de la dynamique des mêmes champs.

Des équations (9, B) nous pouvons déduire la valeur de la force qui produit le mouvement induit, la force d'induction [1] dans la terminologie de C. A. Bjerknes. Mais une discussion ultérieure de cette force n'a pas d'intérêt pour le but que nous poursuivons ici. Car d'un côté, sans nous occuper de l'expression explicite de cette force, nous avons pu déduire toutes les propriétés géometriques des champs, et en démontrer l'analogie avec les champs électriques ou magnétiques. D'un autre côté, la dynamique interne de ces derniers champs nous est complètement inconnue, et la discussion de la dynamique des champs correspondants hydrodynamiques ne peut donc pas, dans l'état actuel de nos connaissances, servir à approfondir l'analogie qui nous occupe.

25. Il reste donc à discuter la dynamique du mouvement énergétique. D'après les équations (9, C), ce mouvement partiel est l'effet de l'action combinée de deux forces, une force extérieure non hydrodynamique $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$,

[1] Remarquons que les seconds membres de ces équations ne représentent pas les composantes de cette force. En effet, les premiers membres n'ont pas la forme du produit d'une densité par une accélération. C'est d'ailleurs un avantage important de la méthode que nous employons ici, que de permettre d'éviter toute considération explicite de la force d'induction avec ses propriétés bizarres. La forme des équations (9, B) nous permettent de déduire les propriétés géometriques du mouvement induit sans nous occuper de ses propriétés dynamiques.

et une force due à la pression du fluide, la force d'énergie hydrodynamique $\overline{X}_e, \overline{Y}_e, \overline{Z}_e$. En tenant compte des équations (10, a) et (12, b) nous pouvons écrire les expressions des composantes de cette seconde force

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned}
\overline{X}_e &= -e\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - (\bar{m}w - \bar{n}v), \\
\overline{Y}_e &= -e\bar{v} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial y}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial y} - (\bar{n}u - \bar{l}w), \\
\overline{Z}_e &= -e\bar{w} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial z} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial z} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial z}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial z} - (\bar{l}v - \bar{m}u).
\end{aligned}$$

Chaque terme dans l'expression de cette force affecte la forme d'un produit de deux facteurs. Dans chaque produit l'un des facteurs, $e, \frac{\partial u_e}{\partial x}, \frac{\partial v_e}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_e}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial k}{\partial x}, \ldots, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$, représente un état ou une propriété intrinsèque de l'élément de volume qui subit la force. Ce facteur est identiquement nul dans le fluide fondamental. Il en résulte que ce sont les corps seulement qui sont soumis à l'action de la force (A). L'autre facteur dépend du champ, représenté soit par l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, soit par la vitesse actuelle u, v, w. Mais le champ dépend de son côté de certaines particularités caractéristiques du mouvement des différents éléments de volume des corps, comme le montre le théorème fondamental (18). La force (A) apparaît donc comme une action à distance, que subit chaque élément d'un corps de la part de tous les autres éléments de ce corps et de tous les éléments des corps distants.

Il se manifeste donc, dans notre système hydrodynamique, entre les divers éléments des corps, des forces qui ont le même caractère d'actions apparentes à distance que les forces pondéromotrices dans un système électrique ou magnétique.

26. Avant d'aller plus loin, rappelons nous ce que nous savons, et ce que nous ignorons, concernant les forces pondéromotrices dans les champs électriques ou magnétiques.

Nos expériences directes se rapportent aux *forces résultantes s'appliquant à des corps de dimensions finies.* Ces forces résultent d'une distribution de forces élémentaires, qui s'appliquent aux différentes éléments de volume des corps. Mais la connaissance de la force résultante ne suffit pas pour déterminer uniformément ces forces élémentaires.

On a essayé, il est vrai, de définir, par des voies indirectes, le système des forces élémentaires dans les champs électriques et magnétiques. On a même essayé d'aller encore plus loin, de déterminer les pressions à l'intérieur des champs, pressions dans lesquelles on cherche, d'après FARADAY et MAXWELL, la cause de ces forces. Mais on a le droit de se demander, si ces développements sont à l'abri de tout reproche. Une discussion de ces développements, faite en s'éclairant à la lumière de l'analogie hydrodynamique qui nous occupe ici, présenterait certainement un grand intérêt. Mais bornons nous ici à formuler les conclusions qu'on peut tirer, avec une sûreté absolue, relativement à l'analogie des phénomènes électriques ou magnétiques et des phénomènes hydrodynamiques. Autrement dit, bornons nous à considérer, dans le cas hydrodynamique comme dans le cas électrique ou magnétique, la force résultante appliquée à un corps de dimensions finies, c'est à dire la force dont les composantes sont

$$X = \int \overline{X}_e d\tau, \quad Y = \int \overline{Y}_e d\tau, \quad Z = \int \overline{Z}_e d\tau, \tag{a}$$

les intégrales étant étendues à un corps de dimensions finies.

27. En substituant les expressions (25, A) dans (26, a), on obtient les expressions de X, Y et Z, qui sont respectivement les sommes de quatre intégrales, correspondant aux quatre parties principales des formules (25, A). Ecrivons les intégrales qui se rapportent à la composante X. Nous aurons

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \tag{a}$$

ou

$$
(b)\qquad
\begin{aligned}
X_1 &= -\int e\bar{u}\,d\tau,\\
X_2 &= \quad\int\left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x}+\bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)d\tau,\\
X_3 &= \quad\int\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\,d\tau,\\
X_4 &= -\int(\bar{m}w-\bar{n}v)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Toutes ces intégrales sont bien connues dans la théorie de l'électricité ou du magnétisme. Elles représentent la composante X de la force résultante agissant sur un corps, composante qui ressort de quatre causes différentes, X_1 due à la distribution d'électricité ou de magnétisme vrai e, X_2 due aux polarisations intrinsèques u_e, v_e, w_e, X_3 due à l'hétérogénéité (forces dépendant de l'influence électrique ou du magnétisme induit) et enfin X_4 due à la distribution des courants électriques $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ ou du courant magnétique $-\bar{l}, -\bar{m}, -\bar{n}$. Seulement, chaque intégrale est affectée d'un signe contraire à celui avec lequel elle apparait dans l'électricité ou le magnétisme.

Il faut donc en conclure que les forces résultantes qui apparaissent dans le champ hydrodynamique sont toujours égales, mais de signe opposée, aux forces résultantes qui s'appliquent aux corps dans le champ électrique ou magnétique.

28. On peut faire remarquer que les intégrales (27, b) ne représentent pas sous la forme la plus ordinaire les forces agissant dans le champ électrique ou magnétique. Montrons donc, pour plus d'évidence, la transformation des intégrales (27, b) suivant la forme employée le plus souvant pour calculer ces forces. Cette transformation repose sur l'introduction de la divergence $\bar{e}$ (11, a) de l'intensité de champ comme quantité auxiliaire. C'est la quantité qu'on appelle, dans le cas de l'électricité ou du magnétisme, la *densité libre* d'électricité ou de magnétisme, pour la distinguer de *la densité vraie* e, qui est le quantité fondamental, proprement dite, au point de vue physique.

Remarquons que, k_0 étant constant, on peut écrire la troisième intégrale (27, b) sous la forme

$$X_3 = \int \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial(k-k_0)}{\partial x}d\tau.$$

Si l'on effectue maintenant une transformation par parties dans tout le volume du corps, l'intégrale de surface disparaîtra, par ce qu'à la surface $k-k_0$ est égale à zéro. Il vient donc

$$X_3 = -\int (k-k_0)\left\{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau.$$

De même on obtient en transformant par parties l'intégrale X_2

$$X_2 = -\int \left\{u_e\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_e\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w_e\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau.$$

En faisant la somme des intégrales X_2 et X_3 et tenant compte des équations de connection (20, A) on trouve

$$X_2 + X_3 = -\int \left\{(u-k_0\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (v-k_0\bar{v})\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + (w-k_0\bar{w})\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau$$

ce qu'on peut ensuite écrire, en tenant compte de (20, B)

$$\text{(a)}\qquad X_2 + X_3 = -\int \left\{(u-k_0\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (v-k_0\bar{v})\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (w-k_0\bar{w})\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right\}d\tau$$
$$-\int\{(v-k_0\bar{v})\bar{n} - (w-k_0\bar{w})\bar{m}\}d\tau.$$

Transformons par parties la première de ces deux intégrales. L'intégrale de surface disparaîtra par ce qu'à la surface $u-k_0\bar{u}=v-k_0\bar{v}=w-k_0\bar{w}=0$. Il reste donc seulement l'intégrale de volume. Cette intégrale se sépare en deux, dont l'une contient la divergence e de la vitesse actuelle (20, C) et l'autre la divergence $\bar{e}$ de l'intensité de champ (12, a). La première de ces intégrales est simplement $-X_1$. De même on peut séparer de la seconde intégral (a) l'intégrale $-X_4$. Il vient donc

$$X_2 + X_3 = -X_1 - X_4 - k_0\int \bar{e}\bar{u}\,d\tau - k_0\int(\bar{m}\bar{w} - \bar{l}\bar{v})\,d\tau$$

d'où l'on déduit immédiatement la valeur de X. Les valeurs de Y et Z s'en déduisent par symétrie. On arrive ainsi enfin à l'expression suivante des composantes de la force résultante appliquée à un corps

$$
\text{(b)}\qquad
\begin{aligned}
X &= -k_0\int \bar{e}\bar{u}\,d\tau - k_0\int(\bar{m}\bar{w} - \bar{n}\bar{v})\,d\tau,\\
Y &= -k_0\int \bar{e}\bar{v}\,d\tau - k_0\int(\bar{n}\bar{u} - \bar{l}\bar{w})\,d\tau,\\
Z &= -k_0\int \bar{e}\bar{w}\,d\tau - k_0\int(\bar{l}\bar{v} - \bar{m}\bar{u})\,d\tau.
\end{aligned}
$$

En cas de discontinuité ces intégrales de volume contiennent implicitement des intégrales de surface où figurent les divergences de surface $\bar{e}$ et les tourbillons de surface $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Ce sont bien là les formules à l'aide desquelles on représente le plus souvant la force appliquée à un corps dans le champ électromagnétique, abstraction faite seulement des signes négatifs des seconds membres. La force se compose de deux parties, une première qui est analogue à la force vers la distribution du magnétisme libre $\bar{e}$, et une seconde qui est analogue à la force vers la distribution du courant électrique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$, les corps se trouvant dans un milieu ayant la perméabilité magnétique k_0.

Nous avons donc bien démontré que ces forces résultantes, qui agissent sur les corps dans le champ hydrodynamique, sont, au signe près, identiques aux forces pondéromotrices résultantes qui agissent sur les corps dans le champ électromagnétique.

VIII. *Actions à distance.*

29. L'analogie que nous venons de découvrir nous montre bien nettement que les forces hydrodynamiques ont le même caractère d'actions réciproques à distance qu'ont les forces pondéromotrices dans le champ électromagnétique. Mettons aussi ce résultat explicitement en évidence, en donnant aux formules, qui expriment les forces, l'apparence extérieur qui correspond à des forces à distance.

Pour y arriver, remarquons que les formules (28, b) expriment la force résultante à l'aide de l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ en connection avec la divergence $\bar{e}$ et la rotation $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ de ce même vecteur. On peut également exprimer le vecteur lui-même à l'aide de ces divergences et rotations. C'est en introduisant ces expressions du vecteur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ dans les formules (28, b) qu'on arrive aux formules qui donnent aux forces l'apparence extérieur de forces à distance.

30. Reprenons donc l'expression d'un vecteur à l'aide de ses divergences et de ses rotations. D'abord on peut toujours exprimer un vecteur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ à l'aide d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur en écrivant

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{M}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{N}}{\partial y}, \\ \bar{v} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial z}, \\ \bar{w} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{L}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{M}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ensuite on peut, s'il s'agit d'un espace infini, calculer $\bar{\varphi}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ à l'aide des quadratures

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\int \frac{\bar{e}_1}{4\pi r} d\tau_1, \\ \overline{L} &= -\int \frac{\bar{l}_1}{4\pi r} d\tau_1, \\ \overline{M} &= -\int \frac{\overline{m}_1}{4\pi r} d\tau_1, \\ \overline{N} &= -\int \frac{\bar{n}_1}{4\pi r} d\tau_1. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'indice 1 signifie que les quantités $\bar{e}, \bar{l}, \overline{m}, \bar{n}$ sont données en fonction des coordonnées x_1, y_1, z_1, qui servent de lettres d'intégration. r est la distance du point x_1, y_1, z_1, mobile pendant l'intégration, au point x, y, z, où l'on cherche la valeur des quantités $\bar{\varphi}, \overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$. Les intégrations s'étendent à toutes les régions de l'espace où existent les quantités $\bar{e}, \bar{l}, \overline{m}, \bar{n}$. L'intégration effective s'étend donc au volume des corps seulement. Mais, ces quantités étant identiquement nulles dans le fluide fondamental, on peut considérer les intégrations comme étendues à l'espace entier.

31. Substitutions (30, a) dans (28, b). La composante X s'écrit

$$\text{(a)} \qquad X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

où

$$
\text{(b)} \qquad
\begin{aligned}
X_1 &= -k_0 \int \bar{e} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} d\tau, \\
X_2 &= -k_0 \int \bar{e} \left(\frac{\partial \bar{M}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \right) d\tau, \\
X_3 &= -k_0 \int \left\{ \bar{m} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} - \bar{n} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right\} d\tau, \\
X_4 &= -k_0 \int \left\{ \bar{m} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{M}}{\partial x} \right) - \bar{n} \left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial z} \right) \right\} d\tau.
\end{aligned}
$$

x, y, z sont les lettres d'intégration, et l'intégration s'effectuee dans le volume du corps vers lequel s'exerce la force résultante que l'on cherche à déterminer.

Avant d'effectuer la substitution des valeurs de $\bar{\varphi}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$, transformons la dernière des quatre intégrales. L'addition et la soustraction du terme $\bar{l} \frac{\partial \bar{L}}{\partial x}$ nous permet d'écrire X sous la forme

$$X_4 = k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \bar{L}}{\partial x} + \bar{m} \frac{\partial \bar{M}}{\partial x} + \bar{n} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \right) d\tau - k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \bar{L}}{\partial x} + \bar{m} \frac{\partial \bar{L}}{\partial y} + \bar{n} \frac{\partial \bar{L}}{\partial z} \right) d\tau.$$

Or, la dernière de ces deux intégrales disparaît. Car, si nous intégrons par parties dans tout le volume du corps, nous avons une intégrale de surface qui contient les valeurs de $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ à la surface, et une intégral de volume qui contient la divergence

$$\frac{\partial \bar{l}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{m}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{n}}{\partial z}$$

du tourbillon $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$. Or ces deux intégrales disparaissent, parce qu'à la surface du corps le tourbillon est nul (15), et parce que la divergence d'un tourbillon est toujours identiquement nulle, comme on le voit de suite en formant la divergence des expressions (20, B). L'expression de X_4 s'écrit donc simplement

$$\text{(b')} \qquad X_4 = k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \bar{L}}{\partial x} + \bar{m} \frac{\partial \bar{M}}{\partial x} + \bar{n} \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \right) d\tau.$$

En substituant maintenant d'après (30, b) les valeurs de $\bar{\varphi}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ on peut effectuer sous le second signe somme les différentiations par rapport aux variables x, y, z. Il vient donc

$$
\text{(c)} \qquad
\begin{aligned}
X_1 &= k_0 \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\, d\tau d\tau_1, \\
X_2 &= k_0 \iint \bar{e}\left(\bar{m}_1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r} - \bar{n}_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\right) d\tau d\tau_1, \\
X_3 &= k_0 \iint \bar{e}_1 \left(\bar{m} \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r} - \bar{n} \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\right) d\tau d\tau_1, \\
X_4 &= -k_0 \iint (\bar{l}\bar{l}_1 + \bar{m}\bar{m}_1 + \bar{n}\bar{n}_1) \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\, d\tau d\tau_1.
\end{aligned}
$$

On en déduit par symétrie des expressions analogues relatives aux axes y et z.

32. Ces formules donnent bien à la force considerée l'apparence d'une force à distance, se composant de quatre forces partielles.

La première de ces forces partielles parait provenir d'une force agissant entre les masses magnétoïdiques libres $\bar{e}d\tau$ et $\bar{e}_1 d\tau_1$, que portent les éléments $d\tau$ et $d\tau_1$. Elle agit conformément à la loi de COULOMB, mais avec inversion de signe, les masses magnétoïdiques de même signe s'attirant et celles de signes contraires se repoussant.

La seconde force parait provenir d'une action à distance que subirait l'élément $d\tau$ de masse magnétoïdique $ed\tau$ de la part de l'élément $d\tau_1$ siège d'un courant électroïdiques de densité de courant $\bar{l}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1$. Pour mieux se rendre compte de la nature de cette force on peut choisir des éléments de volume particuliers. On peut diviser le corps en tubes infiniment minces engendrés par des lignes de courant électroïdique. On trouve ainsi sans difficulté que chaque élément linéaire ds_1 d'un tel tube agit sur la masse magnétoïdique $\bar{e}d\tau$ suivant la loi de BIOT et SAVART et suivant la règle d'AMPÈRE, mais cette dernière règle étant inversée de signe.

La troisième force représente la force que subit l'élément de volume $d\tau$, siège du courant électroïdique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$, de la part de l'élément de volume

$d\tau_1$ de masse magnétoïdique $\bar{e}_1 d\tau_1$. C'est la réaction correspondant à l'action envisagée dans le cas précédent.

La quatrième force parait provenir d'une action à distance apparente qui s'éffectuerait entre deux éléments de volume $d\tau$ et $d\tau_1$, sièges de courants électroïdiques de densités respectives $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et $\bar{l}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1$. En considérant les mêmes éléments de volume spéciaux que ci-dessus, on déduit facilement que deux filets de courant agissent l'un sur l'autre suivant la force qu'on deduit du potentiel de NEUMANN, mais avec inversion de signe.

IX. *Analogie analytique et analogie physique.*

33. Ainsi que nous l'avons trouvé, le mouvement de notre système hydrodynamique s'effectue conformément à des formules qui sont en même temps les formules fondamentales de l'électromagnétisme stationnaire. Au point de vue analytique l'analogie est complète, abstraction faite de l'inversion de signe des formules qui se rapportent aux forces pondéromotrices.

Mais bien que l'analogie analytique soit à tel point complète, un observateur qui regarde des mouvement fluides ne découvrira guère la moindre trace de cette analogie. Elle se dissimule par suite de diverses causes. D'abord le système hydrodynamique est un système en mouvement, tandis que le système électromagnétique est, au moins extérieurement, un système en repos. En général le système hydrodynamique change incessament de configuration, et l'analogie avec un système électromagnétique déterminé ne subsiste que pendant un instant, l'instant pendant lequel le système mobile passe par la configuration que possède constamment l'autre système. L'instant d'après le système hydrodynamique sera à comparer à un autre système électromagnétique, et ainsi de suite.

Il faudra donc que l'observateur se borne à faire ses observations au moment où existe l'analogie avec un système électromagnétique déterminé. Et pour pouvoir découvrir l'analogie qui existe pendant cet instant, il faudrait encore que l'observateur sût décomposer le mouvement actuel, qu'il observe, en deux mouvements partiels, et c'est là une opération qui s'éffectuera en général plus facilement dans les calculs mathématiques que dans les observations physiques.

Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que l'on n'ait pas depuis longtemps découvert cette analogie, uniquement en observant les mouvements des fluides.

34. La première condition, qui doit être satisfaite pour que l'analogie puisse ressortir visiblement aux yeux, est donc celle-ci, que le mouvement du système fluide soit d'une telle nature spéciale qu'il ne soit pas accompagné de changement de configuration essentielle. Nous verrons que cette condition nécessaire sera aussi suffisante pour que l'analogie puisse ressortir comme une réalite physique, apparente aux yeux.

Il existe deux formes de mouvements qui ne sont pas accompagnés de changements de configuration visibles. La première est celle du mouvement permanent. Dans ce cas l'invariabilité extérieure du système est assurée par la condition que le volume qu'occupe une masse quelconque du fluide sera, pendant le mouvement, toujours remplacé par une masse absolument semblable, possédant absolument le même mouvement. Un tel mouvement ne changera évidemment ni la forme extérieure des corps, ni les positions de ces corps dans l'espace.

La seconde forme est celle d'un mouvement vibratoire, qui se limite à des amplitudes très petites autour d'une configuration invariable. Dans ce cas la condition de la configuration invariable n'est remplie que d'une manière approximative. Mais l'approximation est d'autant plus grande qu'on choisit des amplitudes plus petites. On peut donc réaliser ainsi facilement dans la pratique le cas où la constatation des changements de configuration échappe à un observateur doué de sens grossiers.

35. Mais il y a une remarque importante à faire relativement à ce passage de l'analogie analytique à une analogie physique concrète. Déjà l'analogie analytique est de nature restreinte. Les formules hydrodynamiques que nous venons de développer correspondent à celles de l'électrodynamique stationnaire seulement, et non pas à celles de l'électrodynamique la plus générale. Si maintenant on passe de l'analogie analytique à une analogie physique, en introduisant l'une ou l'autre des hypothèses mentionnées ci-dessus, le domaine de l'analogie se restreint encore d'avantage. Et ce domaine se restreint de deux manières différentes suivant la nature du mouvement spécialisé.

Dans le cas du mouvement permanent on arrive à une analogie qui ressortit des travaux de v. HELMHOLTZ et de LORD KELVIN. Dans le cas du mouvement vibratoire on arrive à l'analogie qu'a trouvée C. A. BJERKNES pour le cas de corps sphériques, mais que nous allons démontrer ainsi d'une manière générale.

X. *État de mouvement permanent. Analogies de v. Helmholtz et de Lord Kelvin.*

36. Dans le régime permanent les corps paraîtront limités par des surfaces géométriques fixes dans l'éspace. Le mouvement du fluide extérieur sera donc complètement indépendant du mouvement que possède le fluide à l'intérieur des corps. Quelles que soient les hypothèses que l'on fasse relativement aux corps, le mouvement dans l'espace extérieur sera le mouvement irrotationnel d'un fluide homogène et incompressible, compris entre des surfaces limites fixes. Or on sait que ce mouvement ne peut exister qu'à la condition que l'espace soit à connections multiples. Il faut donc qu'un ou plusieurs des corps soient percés de canaux, à travers desquels le fluide peut circuler: c'est le mouvement de circulation à potentiel non uniforme, dont les propriétés sont bien connues. Les corps qui ne sont pas percés de canaux ne forment que des obstacles aux courants, qui existent, grâce aux canaux dans les autres corps. Partout les lignes de courant s'infléchissent tangentiellement aux surfaces des corps.

37. La constitution et le mouvement intérieur des corps étant indifférent vis-à-vis du mouvement du fluide fondamental, supposons d'abord un cas limite très simple. Supposons que les corps ont une densité infinie, et par conséquent un volume spécifique nul. Dans le cas magnétique correspondant les corps auront donc une perméabilité magnétique nulle: c'est le cas idéal d'une diamagnétisme extrême.

Poursuivons l'analogie dans ce cas idéal. Dans les corps infiniment diamagnétiques il peut exister une intensité de champ finie. Mais la perméabilité magnétique étant nulle, une induction nulle correspondra à l'intensité de champ finie. De même, dans les corps infiniment lourds il peut exister une intensité de champ, c'est à dire une quantité de mouvement, finie. Mais la vitesse qui y correspond est nulle. On peut donc donner à ces corps une distribution intérieure quelconque de l'intensité de champ. La condition de leur immobilité dans l'espace reste remplie, sans qu'il soit nécessaire de spécialiser la distribution de cette intensité de champ, ou bien d'introduire une vitesse d'énergie produite par des forces extérieures.

On peut donc se donner une distribution de l'intensité de champ qui correspond à une distribution quelconque des tourbillons dynamiques. Ou bien, on peut se donner dans les corps infiniment lourds une distribution quelconque de tourbillons dynamiques, et dans les corps infiniment diamagnétiques une distribution quelconque de courants électriques. Ces deux systèmes sont donc analogues entre eux dans le sens que nous avons développé. Au point de vue géométrique il y a une identité complète entre les champs des deux systèmes. Et à cette analogie géométrique directe s'ajoute l'analogie dynamique inverse. Il s'exerce dans le champ hydrodynamique entre les corps infiniment lourds des forces apparentes à distance, qui sont au signe près identiques aux forces qui agissent entre les corps infiniment diamagnétiques dans le champ électromagnétique. Ainsi les corps infiniment lourds dans le système hydrodynamique agissent les uns sur les autres à l'inverse des corps infiniment diamagnétiques qui sont le siège d'un système quelconque de courants électriques.

Dans des corps infiniment diamagnétiques qui sont percés d'un nombre suffisant de canaux d'une forme convenable, on peut distribuer des courants électriques de manière à obtenir dans l'espace extérieur un champ magnétostatique quelconque. En ce qui concerne ses actions extérieures ce corps peut donc représenter un aimant permanent quelconque, mais avec cette particularité que cet aimant serait construit en une matière infiniment diamagnétique. L'effet visible extérieur du diamagnétisme diminuera indéfiniment si l'espace occupé par les pores devient infiniment grand comparé à l'espace occupé par la matière du corps. Dans ce sens nos corps poreux infiniment lourds donnent l'image hydrodynamique des aimants permanents.

Ajoutons enfin qu'aux corps fluides infiniments lourds et immobiles nous pouvons, sans changer en rien l'effet extérieur, substituer des corps rigides immobiles. Nous retombons donc sur le résultat suivant:

Si dans un fluide homogène et incompressible il se trouve des corps poreux, immobiles dans l'espace, et si à travers les pores de ces corps le fluide exécute le mouvement de circulation irrotationnelle, ces corps poreux agiront les uns sur les autres comme des aimants permanents dont l'action apparente à distance serait changée de signe.

La première idée d'une analogie de ce genre est due à EULER, qui n'a pas soupconné pourtant la nature inverse de la force à distance. [1] L'énoncé précis et la démonstration rigoureuse sont dus à LORD KELVIN.[2]

38. Les développements de LORD KELVIN s'appuyaient sur l'analogie géométrique qu'avait énoncée v. HELMHOLTZ dans son mémoire célèbre sur les mouvements tourbillonnaires. Montrons la connection de l'analogie que nous avons développée ici avec celle de v. HELMHOLTZ.

Pour y arriver remarquons qu'au lieu de considérer des corps infiniment lourds, nous pouvons considérer des corps d'une densité quelconque. Mais pour assurer leur immobilité dans l'éspace il faut ou bien ajouter la vitesse d'énergie nécessaire, ou bien se donner une distribution de tourbillons tout à fait particulière. Dans le cas de l'électromagnétisme cela veut dire que si l'on donne aux corps des perméabilités magnétiques quelconques, il faut par des polarisations magnétiques intrinsèques particulières, ou par des distributions particulières de courants électriques, s'arranger pour que le champ extérieur reste le même que dans le cas de corps infiniment diamagnétiques. Ces magnétisations ou ces courants ont donc pour but de donner aux corps l'aspect extérieur de corps infiniment diamagnétiques.

Cela étant, supposons que le fluide qui constitue les corps ait la même densité que le fluide extérieur. Supposons la vitesse d'énergie nulle et supposons donnée une distribution de tourbillons dynamiques, assujettie à la condition de laisser les corps stationnaires dans l'espace. Nous retombons donc au cas des équations (12, c), et l'analogie se transfère immédiatement de l'intensité de champ et du tourbillon dynamique à la vitesse actuelle et au tourbillon cinématique. On peut donc, dans ce cas, comparer aussi la vitesse actuelle à l'intensité de champ magnétique, et le tourbillon cinématique au courant électrique: c'est la comparaison de v. HELMHOLTZ.

Mais v. HELMHOLTZ énonce son résultat sous une forme moins spécialisée. Car pour lui la distribution de tourbillons est quelconque, et il n'est pas

[1] EULER, *Lettres à une princesse d'Allemagne,* T. III, lettres CLXXVI—CLXXVIII.

[2] Sir W. THOMSON, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Feb. 1870: *Papers on Electrostatics and Magnetism,* London 1872, p. 567—571.
Philosophical Magazine, 4:th. Series, T. 45, p. 337—38. 1873.

nécessaire que les masses fluides, possédant le mouvement tourbillonnaire, forment des corps stationaires dans l'éspace. Ces corps peuvent avoir des mouvements quelconques. Mais on ne gagne cette généralisation de l'analogie géométrique qu'aux dépens de l'analogie dynamique qui disparaît totalement. Ce fait est mis en pleine évidence par les exemples qu'on calcule ordinairement dans les cours d'hydrodynamique. On trouve par exemple que deux filets de tourbillons de même intensité exécutent un mouvement de rotation l'un autour de l'autre, s'ils sont de même signe, et un mouvement de translation l'un auprès de l'autre s'ils sont de signes contraires. Mais on ne trouve pas la moindre trace d'une attraction ou une répulsion entre les filets comme entre des courants électriques parallèles. Du moment, au contraire, qu'on introduit la condition que les filets de tourbillons garderont leur situation dans l'espace, on trouvera une répulsion en cas de rotations de même sens, et une attraction en cas de rotations de sens contraire. Ce résultat peut être vérifié expérimentellement à l'aide de corps solides cylindriques auxquels on donne un mouvement de rotation dans l'eau.

Comme le prouve ce cas particulier, et comme le montrent les développements de LORD KELVIN, ainsi que les développements tout différents que nous venons de donner ici, c'est seulement dans le cas des tourbillons stationnaire dans l'espace que s'approfondit l'analogie de v. HELMHOLTZ, en s'étendant aux forces apparentes à distance entre les tourbillons.

XI. *État de mouvements vibratoires. Analogie de C. A. Bjerknes.*

39. Considérons maintenant l'état de mouvement vibratoire. Dans un tel mouvement, le tourbillon dynamique, s'il existe, doit être aussi nécessairement vibratoire, et par conséquent fonction du temps. Mais nous avons démontré que la valeur de ce tourbillon est indépendante du temps (12). Pour éviter cette contradiction il faut donc nécessairement supposer que ce tourbillon est partout identiquement nul

$$\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = 0.$$

C'est par cette condition que se restreint le domaine de l'analogie physique dans le cas des mouvements vibratoires.

Dans ce cas les équations (20, A—D), qui démontrent l'analogi géométrique, se réduisent à

$$
\text{(A)}\qquad
\begin{aligned}
u &= k\bar{u} + u_e,\\
v &= k\bar{v} + v_e,\\
w &= k\bar{w} + w_e,
\end{aligned}
$$

$$
\text{(B)}\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\text{(C)}\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e
$$

jointes aux conditions que dans le fluide fondamental on a

$$
\text{(D)}\qquad
\begin{aligned}
u_e &= 0, & e &= 0,\\
v_e &= 0, & k &= k_0.\\
w_e &= 0,
\end{aligned}
$$

De même les équations (25, A), qui démontrent l'analogie dynamique inverse, se réduisent à

$$
\text{(E)}\qquad
\begin{aligned}
\overline{X}_e &= -e\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x},\\
\overline{Y}_e &= -e\bar{v} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial y},\\
\overline{Z}_e &= -e\bar{w} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial z} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial z} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Ces équations sont satisfaites à chaque instant pendant le mouvement. Il faut en déduire ce que constatera un observateur, ayant des sens trop grossiers pour voir les petites oscillations, mais observant seulement ce qui en résulte en moyenne.

40. Soit $f(t)$ une fonction périodique du temps de période τ,

(a) $$f(t+\tau) = f(t).$$

La fonction doit avoir des valeurs toujours finies, mais la période τ doit être une petite quantité du premier ordre. Je suppose de plus que cette fonction périodique ait pour une période une valeur moyenne linéaire nulle, et une valeur moyenne quadratique égale à 1,

(b) $$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f(t)\,dt = 0,$$

(c) $$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} [f(t)]^2\,dt = 1.$$

Évidemment ces conditions ne restreignent pas essentiellement la forme de la fonction $f(t)$. Citons comme un exemple d'une fonction qui jouit de ces propriétés

(d) $$f(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \alpha\right).$$

Des hypothèses faites il résulte que nous pouvons toujours écrire

(e) $$\int_t^{t'} f(t)\,dt = \varepsilon$$

t' étant un temps quelconque et ε une petite quantité du premier ordre.

41. Remarquons maintenant que la vitesse d'expansion jointe à la vitesse d'énergie suffisent pour déterminer uniformément le champ de mouvement (18). Supposons donc ces quantités données comme des fonctions périodiques du temps par les équations

(a) $$\begin{aligned} e &= e_m\, f(t), \\ u_e &= u_{e,m} f(t), \\ v_e &= v_{e,m} f(t), \\ w_e &= w_{e,m} f(t). \end{aligned}$$

Ici e_m, $u_{e,m}$, $v_{e,m}$, $w_{e,m}$ sont des quantités indépendantes du temps qui donnent des mesures convenables de l'intensité moyenne des mouvements vibratoires considérés. Car en vertu de (40, c) nous avons par exemple

$$e_m^2 = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} e^2 d\tau.$$

Remarquons en outre que les quantités e_m, $u_{e,m}$, $v_{e,m}$, $w_{e,m}$ ont les unes par rapport aux autres les mêmes signes qu'ont à une époque quelconque les quantités dépendantes du temps e, u_e, v_e, w_e. D'autre part, en vertu de la propriété (40, e), les déplacements qui résultent des vitesses u_e, v_e, w_e, ou les changements de volume qui résultent de la vitesse d'expansion e, seront toujours des petites quantités du premier ordre. Il en résulte comme un corollaire, qu'à une petite quantité du premier ordre près on peut considérer le volume spécifique k d'une particule quelconque du fluide comme constante.

Cela étant on voit de suite qu'à des petites quantités du premier ordre près on peut satisfaire aux équations (39, A—D) en écrivant

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} u &= u_m f(t), & \bar{u} &= \bar{u}_m f(t),\\ v &= v_m f(t), & \bar{v} &= \bar{v}_m f(t),\\ w &= w_m f(t), & \bar{w} &= \bar{w}_m f(t). \end{aligned}$$

Car la substitution de (a) et (b) en (39, A—C) donne

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} u_m &= k\bar{u}_m + u_{e,m},\\ v_m &= k\bar{v}_m + v_{e,m},\\ w_m &= k\bar{w}_m + w_{e,m}, \end{aligned}$$

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \bar{w}_m}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial \bar{v}_m}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{(C)}\qquad \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} + \frac{\partial w_m}{\partial z} = e_m$$

relations auxquelles il faut joindre les conditions qui proviennent de la substitution en (39, D), savoir

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} &u_{e,m} = 0, &\quad e_m = 0, \\ &v_{e,m} = 0, &\quad k = k_0. \\ &w_{e,m} = 0, & \end{aligned}$$

Si les quantités indépendantes du temps $u_m, v_m, w_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m, \bar{w}_m, u_{e,m}, v_{e,m}, w_{e,m}, e_m, k$, satisfont aux équations (A—D), les formules (b) donnent la solution cherchée, qui est déterminée uniformément par les quantités données (a).

Dans ce champ de mouvement vibratoire s'exercent des forces $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, dont les valeurs momentanées sont données par les formules (39, E). Calculons les valeurs moyennes. Pour la composante X cette valeur sera

$$\overline{X}_{e,m} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} X d\tau.$$

En utilisant la propriété (40, c) de la fonction $f(t)$, nous trouvons donc sans difficulté

$$\text{(E)}\qquad \begin{aligned} \overline{X}_m &= -e_m\bar{u}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial x} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial x} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial x}, \\ \overline{Y}_m &= -e_m\bar{v}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial y} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial y} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial y}, \\ \overline{Z}_m &= -e_m\bar{w}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial z} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial z} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial z}. \end{aligned}$$

Comparons maintenant ces équations (A—E) aux équations primaires (39, A—E). On voit qu'elles ont exactement la même forme. Dans le cas des vibrations synchrones il n'est donc pas nécessaire d'écrire des formules différentes pour l'état de mouvement vrai, et pour l'état de mouvement moyen. On arrive aux équations qui décrivent l'état moyen simplement en changeant l'interprétation des symboles qui figurent dans les équations du mouvement vrai: on interprète les quantités $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, u_e, v_e, w_e, e$ non plus comme les valeurs actuelles, mais comme les moyennes quadratiques des quantités en question, et on considère en même temps k comme indépendant du temps.

42. Quand on a ainsi changé l'interprétation des symboles qui figurent dans les équations (39, A—E), il n'y figure plus que des paramètres indépendants du temps. Pour l'état de mouvement moyen l'analogie aux phénomènes électriques ou magnétiques subsiste donc indépendamment du temps. Dans cette interprétation des symboles, les équations (39, A—E) se distinguent des équations des champs électrostatiques ou magnétiques uniquement par le signe inverse des forces pondéromotrices (39, E). Pour un expérimentateur qui n'observe pas les petits mouvements, mais seulement les forces moyennes que subissent les corps, le système hydrodynamique semblerait donc être un système électrostatique ou magnétique, mais avec cette particularité singulière, que les masses de même nom s'attirent et les masses de nom contraire se repoussent.

Le courant électroïdique étant nul, $\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = 0$, on voit que les formules (28, b) de la force résultante vers un corps se réduisent à

(a)
$$X = -k_0 \int \bar{e}\bar{u}\,d\tau,$$
$$Y = -k_0 \int \bar{e}\bar{v}\,d\tau,$$
$$Z = -k_0 \int \bar{e}\bar{w}\,d\tau,$$

formules dans lesquelles on interprète maintenant $\bar{e}$ comme étant la moyenne quadratique de la quantité $\bar{e}$ primitive. Les formules

(b)
$$X = k_0 \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1,$$
$$Y = k_0 \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1,$$
$$Z = k \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1$$

donnent aux forces l'apparence extérieure de forces à distance entre les masses électroïdiques ou magnétoïdiques libres $\bar{e}d\tau$ et $\bar{e}_1 d\tau_1$. Ce sont, avec le signe changé, les formules qui permettent de calculer toutes les actions à distance de l'électrostatique ou du magnétisme, soit que les masses libres dépendent d'électrisations vraies, de polarisations électriques ou magnétiques intrinsèques, ou enfin du phénomène de l'influence.

Les formules (a) et (b) sont indépendantes de la forme des corps. Elles renferment donc comme des cas particuliers tous les résultats de C. A. BJERKNES relatifs aux actions apparentes à distance entre des corps sphériques qui effectuent des mouvements de vibrations dans un liquide parfait. Remarquons enfin que les expériences, à l'aide desquelles C. A. BJERKNES a vérifié dans une étendue si vaste ses résultats analytiques, réussissent aussi bien avec des corps d'autres formes que la forme sphérique. Les résultats généraux analytiques, que nous venons de développer, sont donc déjà vérifiés dans une étendue considérable par des expériences concrètes.