ESSAI SUR LES FONCTIONS Θ DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Par

PAUL APPELL

à Paris.

Première partie.

I. Dans les Annales de la Faculté des Sciences de Marseille pour 1891, t. I, p. 1—7, j'ai considéré une fonction définie par une série simple, ayant comme terme général une exponentielle dont l'exposant est un polynôme du quatrième degré par rapport au rang n du terme. J'ai indiqué (loc. cit. et Bulletin de la Société mathématique de France, t. XIX, année 1890—91, p. 125—127) des relations fonctionnelles que vérifient cette fonction et d'autres fonctions qui s'en déduisent. Enfin, je suis revenu sur ce sujet dans deux notes des *Comptes Rendus: Sur les fonctions Θ de degrés supérieurs*, 25 Septembre 1911, t. 153, p. 584—587, *Sur les fonctions Θ du quatrième degré*, 2 Octobre 1911, t. 153, p. 617—618, et dans un article des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo: Sur des fonctions se rattachant aux fonctions Θ du quatrième degré*, séance du 10 Décembre 1911, t. XXXIII, p. 86—89. En 1892 M. l'Abbé Rivereau a publié dans le tome II des Annales de la Faculté des Sciences de Marseille un article relatif à la fonction que j'avais définie dans le tome I. Je publie ici la première partie de l'ensemble de ces recherches.

II. *Fonction Θ fondamentale du quatrième degré.* En modifiant légèrement la notation autrefois adoptée, posons

$$(1)\qquad \begin{cases} (n,4)=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \\[2ex] (n,3)=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3} \\[2ex] (n,2)=\dfrac{n(n-1)}{1\cdot2} \\[2ex] (n,1)=n, \end{cases}$$

en remarquant que chacune de ces fonctions est la différence de la précédente, par rapport à l'accroissement 1:

$$(2)\qquad \begin{cases}(n,3)=(n+1,4)-(n,4)\\(n,2)=(n+1,3)-(n,3)\\(n,1)=(n+1,2)-(n,2).\end{cases}$$

Soient enfin A une constante dont la partie réelle est *négative* et X, Y, Z des variables complexes.

Nous appellerons *fonction Θ fondamentale du quatrième degré* la fonction entière:

$$(3)\qquad \Theta(A,X,Y,Z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{(n,4)A+(n,3)X+(n,2)Y+(n,1)Z}.$$

Cette fonction vérifie les quatre relations

$$(4)\qquad \begin{cases}\Theta(A,X+2\pi i,Y,Z)=\Theta(A,X,Y,Z)\\\Theta(A,X,Y+2\pi i,Z)=\Theta(A,X,Y,Z)\\\Theta(A,X,Y,Z+2\pi i)=\Theta(A,X,Y,Z)\\\Theta(A,X+A,Y+X,Z+Y)=e^{-Z}\Theta(A,X,Y,Z).\end{cases}$$

Les trois premières de ces relations sont évidentes, car les coefficients de X, Y, Z dans le terme général de la série (3) sont des entiers. Quant à la quatrième des relations (4) on l'obtient de la façon suivante; les identités (2) montrent que

$$\Theta(A,X+A,Y+X,Z+Y)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{(n+1,4)A+(n+1,3)X+(n+1,2)Y+(n,1)Z};$$

si l'on remplace, dans l'exposant, $(n,1)$ par $(n+1,1)-1$ et si l'on remarque que, n variant de $-\infty$ à $+\infty$, on peut remplacer $n+1$ par n, on a la quatrième des relations (4). On remarquera que la substitution faite sur les lettres A, X, Y, Z dans cette quatrième relation, consiste à *ajouter à chacune des trois dernières lettres X, Y, Z la précédente.*

Il est évident enfin que la fonction Θ conserve la même valeur quand on remplace X, Y, Z par des valeurs X_1, X_1, Z_1 telles que, dans l'exposant du terme général de la série (3) les coefficients de n^3 et de n changent de signe, celui de n^2 restant le même.

Pour obtenir ces valeurs remarquons que

$$(5)\qquad \begin{cases} (-n,4) = (n+3,4) = (n,4) + 3(n,3) + 3(n,2) + (n,1) \\ (-n,3) = -(n+2,3) = -(n,3) - 2(n,2) - (n,1) \\ (-n,2) = (n+1,2) = (n,2) + (n,1) \\ (-n,1) \qquad\qquad\quad = -(n,1). \end{cases}$$

Donc en écrivant

$$A(-n,4) + X(-n,3) + Y(-n,2) + Z(-n,1) = A(n,4) + X_1(n,3) + Y_1(n,2) + Z_1(n,1)$$

on voit que

$$(6)\qquad X_1 = 3A - X, \qquad Y_1 = 3A - 2X + Y, \qquad Z_1 = A - X + Y - Z$$

ce qu'on peut écrire, sous forme symétrique,

$$(6')\qquad X + X_1 = 3A, \qquad Y - X = Y_1 - X_1, \qquad Z + Z_1 - \frac{1}{2}(Y + Y_1) = -\frac{1}{2}A.$$

III. *Fonctions Θ générales du quatrième degré d'ordre α.* Désignons par ω une constante dont la partie réelle est négative, par x, y, z trois variables complexes, et considérons le polynôme

$$\varphi(n) = \alpha(n,4) + \beta(n,3) + \gamma(n,2) + \delta(n,1)$$

où n est un entier quelconque, α un entier positif, différent de zéro, β, γ, δ des entiers déterminés arbitrairement choisis positifs, négatifs ou nuls.

Ce polynôme prend des valeurs entiers pour toute valeur entière, positive, négative ou nulle de n. Nous aurons alors, en désignant par $Df(n)$ une différence telle que $f(n+1) - f(n)$:

$$\begin{aligned} D\varphi(n) &= \alpha(n,3) + \beta(n,2) + \gamma(n,1) + \delta \\ DD\varphi(n) = D^2\varphi(n) &= \alpha(n,2) + \beta(n,1) + \gamma \\ DD^2\varphi(n) = D^3\varphi(n) &= \alpha(n,1) + \beta \\ DD^3\varphi(n) = D^4\varphi(n) &= \alpha. \end{aligned}$$

Cela posé, considérons la fonction entière de x, y, z:

$$(7)\qquad \theta\begin{pmatrix} \omega, x, y, z \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega\varphi(n) + xD\varphi(n) + yD^2\varphi(n) + zD^3\varphi(n)}.$$

Cette fonction de x, y, z possède la période $2\pi i$ par rapport à chacune des variables séparément: elle vérifie, de plus, la relation

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x+\omega, y+x, z+y\\ \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta\end{pmatrix} = e^{-\alpha z}\,\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}. \tag{8}$$

En effet, calculant, sur la série, le premier membre de la relation (8) et remarquant que

$$\begin{aligned} \varphi(n) + D\varphi(n) &= \varphi(n+1)\\ D\varphi(n) + D^2\varphi(n) &= D\varphi(n+1)\\ D^2\varphi(n) + D^3\varphi(n) &= D^2\varphi(n+1)\\ D^3\varphi(n) \qquad\qquad &= D^3\varphi(n+1) - \alpha, \end{aligned}$$

on voit que ce premier membre est égal au produit de $e^{-\alpha z}$ par la série (7), où n est remplacé par $(n+1)$: ce qui démontre la relation (8).

La fonction $\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}$ peut s'exprimer à l'aide de la fonction Θ fondamentale. En effet, en ordonnant l'exposant du terme général de la série (7) par rapport à $(n, 4)$, $(n, 3)$, $(n, 2)$ et $(n, 1)$, on a, pour cet exposant

$$\alpha\omega(n,4) + (\alpha x + \beta\omega)(n,3) + (\alpha y + \beta x + \gamma\omega)(n,2) + \\ + (\alpha z + \beta y + \gamma x + \delta\omega)(n,1) + \beta z + \gamma y + \delta x.$$

En comparant cet exposant à celui du terme général de la fonction fondamentale $\Theta(A, X, Y, Z)$, on voit que

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix} = e^{\beta z + \gamma y + \delta x}\,\Theta(A, X, Y, Z) \tag{9}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A &= \alpha\omega\\ X &= \alpha x + \beta\omega\\ Y &= \alpha y + \beta x + \gamma\omega\\ Z &= \alpha z + \beta y + \gamma x + \delta\omega. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Toutes les fonctions θ qui dépendent de quatre entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se ramènent donc au seul élément analytique Θ.

IV. *Réduction de l'entier β.* Quand l'entier positif α est choisi, on peut, dans les formules précédentes, donner aux entiers β, γ, δ des valeurs arbitraires. Mais il est à remarquer qu'on peut toujours ramener β à avoir l'une des valeurs

$$0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1.$$

En effet, l'entier n prenant, dans la série (7) toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, on ne change pas la somme de la série en remplaçant, dans le terme général, n par $n+k$, k désignant un entier arbitrairement choisi. Le polynôme $\varphi(n)$ est alors remplacé par un autre

$$\psi(n) = \varphi(n+k) = \varphi(k) + n\,D\varphi(k) + (n,2)\,D^2\varphi(k) + (n,3)\,D^3\varphi(k) + (n,4)\,D^4\varphi(k),$$

ou, en intervertissant l'ordre et remplaçant les différences par leurs valeurs

$$\psi(n) = \alpha(n,4) + (\alpha k + \beta)(n,3) + [\alpha(k,2) + \beta k + \gamma](n,2) + \\ + [\alpha(k,3) + \beta(k,2) + \gamma k + \delta](n,1) + \varphi(k).$$

La série devient alors

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix} = e^{\omega\varphi(k)}\,\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta', \gamma', \delta'\end{pmatrix}$$

où

$$\beta' = \alpha k + \beta$$
$$\gamma' = \alpha(k,2) + \beta k + \gamma$$
$$\delta' = \alpha(k,3) + \beta(k,2) + \gamma k + \delta,$$

k étant arbitraire.

Il existe toujours une valeur de k et une seule, positive, négative ou nulle, telle que β' soit égal à l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$. C'est cette valeur que nous attribuerons à k. La fonction θ, où β est quelconque, pourra donc toujours, au facteur constant $e^{\omega\varphi(k)}$ près, être remplacée par une fonction analogue où

$$(11) \qquad 0 \leq \beta \leq \alpha - 1.$$

A l'avenir, dans toutes les fonctions θ considérées, β sera supposé vérifier cette condition (11).

Le nombre positif α étant appelé *l'ordre de la fonction* θ, on voit qu'il existe une *infinité* de fonctions

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}$$

d'ordre donné α: on les obtient toutes en faisant

$$\beta = 0, 1, 2, \ldots \alpha - 1,$$
$$\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty$$
$$\delta = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \infty.$$

V. *Changement de n en $-n$.* Si dans $\varphi(n)$ on change n en $-n$, on obtient un nouveau polynôme qui donne la même fonction θ

$$\varphi_1(n) = \varphi(-n) = \alpha(n, 4) + \beta_1(n, 3) + \gamma_1(n, 2) + \delta_1(n, 1),$$

d'où, en se reportant aux relations (5) et (6)

$$\beta_1 = 3\alpha - \beta, \ \gamma_1 = 3\alpha - 2\beta + \gamma, \ \delta_1 = \alpha - \beta + \gamma - \delta.$$

On a alors

$$\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix} = \theta\begin{pmatrix}\omega, \ x, \ y, \ z\\ \alpha, \beta_1, \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$$

VI. *Substitution inverse.* La fonction θ admet la période $2\pi i$ par rapport à chacune des variables x, y, z; elle vérifie la relation

$$\theta(\omega, x + \omega, y + x, z + y) = e^{-\alpha z}\theta(\omega, x, y, z)$$

ou

$$\theta(\omega, x', y', z') = e^{-\alpha z}\theta(\omega, x, y, z)$$

en posant

$$x' = x + \omega, \qquad y' = y + x, \qquad z' = z + y.$$

La substitution inverse donne

$$x = x' - \omega, \qquad y = y' - x' + \omega, \qquad z = z' - y' + x' - \omega;$$

on a donc aussi

$$(12) \qquad \theta(x' - \omega, y' - x' + \omega, z' - y' + x' - \omega) = e^{\alpha(z' - y' + x' - \omega)}\theta(x', y', z').$$

VII. *Fonction entière la plus générale vérifiant les mêmes relations fonctionnelles qu'une fonction θ d'ordre α.* Cherchons la fonction entière la plus générale $G(x, y, z)$ vérifiant les relations

$$(13) \qquad \begin{cases} G(x + 2\pi i, y, z) = G(x, y, z) \\ G(x, y + 2\pi i, z) = G(x, y, z) \\ G(x, y, z + 2\pi i) = G(x, y, z) \\ G(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-\alpha z}G(x, y, z) \end{cases}$$

où α est un entier *positif* donné; nous allons montrer que cette fonction G est une fonction linéaire, à coefficients constants, des fonctions θ d'ordre α

$$G(x,y,z) = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} \sum_{\delta=-\infty}^{\delta=+\infty} A_{\beta,\gamma,\delta}\, \theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

où les coefficients $A_{\beta,\gamma,\delta}$ sont des constantes. C'est ce qui résulte de la méthode des coefficients indéterminés. D'abord les trois premières relations (13) montrent que G est développable en une série de la forme

$$G(x,y,z) = \Sigma\, B_{l,m,n}\, e^{lx+my+nz}$$

les trois entiers l, m, n prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et les $B_{l,m,n}$ étant des coefficients indépendants de x, y, z.

L'entier positif α étant donné, groupons d'abord les termes dans lesquels n est de la forme

$$n = \alpha\, p + \beta,$$

où p est un entier variant de $-\infty$ à $+\infty$ et β un entier déterminé ayant une des valeurs

$$0, 1, 2, \ldots \alpha - 1,$$

de telle façon que p soit le quotient et β le reste de la division de n par α. La série se décompose ainsi en une somme de α séries:

$$G = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} \sum_{l,m,p} B_{l,m,\alpha p+\beta}\, e^{lx+my+(\alpha p+\beta)z}$$

l, m, p variant de $-\infty$ à $+\infty$. Prenons les termes qui correspondent à une valeur déterminée de β:

$$G_\beta = \sum_{l,m,p} B_{l,m,\alpha p+\beta}\, e^{lx+my+(\alpha p+\beta)z}.$$

Introduisons à la place de l et m d'autres entiers γ et δ en posant

$$m = \gamma + \beta p + \alpha(p, 2)$$

$$l = \delta + \gamma p + \beta(p, 2) + \alpha(p, 3).$$

A chaque groupe de valeurs de l, m, p répond un seul groupe de valeurs de γ, δ, p et réciproquement. Nous pourrons alors écrire

$$G_\beta = \sum_{\gamma, \delta, p} C_{\gamma, \delta, p}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p)}$$

en posant pour abréger

$$\begin{aligned} l &= \varphi_1(p) = \delta + \gamma p + \beta(p, 2) + \alpha(p, 3) \\ m &= \varphi_2(p) = \varphi_1(p+1) - \varphi_1(p) = D\varphi_1(p) \\ n &= \varphi_3(p) = \varphi_2(p+1) - \varphi_2(p) = D^2\varphi_1(p). \end{aligned}$$

Il reste à écrire que la fonction G_β vérifie la relation

$$G_\beta(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-\alpha z} G_\beta(x, y, z).$$

On devra avoir

$$\Sigma C_{\gamma, \delta, p}\, e^{\omega\varphi_1(p) + x[\varphi_1(p) + \varphi_2(p)] + y[\varphi_2(p) + \varphi_3(p)] + z\varphi_3(p)} = \Sigma C_{\gamma, \delta, p}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p) - \alpha z}.$$

Mais comme

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) + \varphi_2(p) &= \varphi_1(p+1) \\ \varphi_2(p) + \varphi_3(p) &= \varphi_2(p+1) \\ \varphi_3(p) \qquad\quad &= \varphi_3(p+1) - \alpha \end{aligned}$$

on a

$$\Sigma C_{\gamma, \delta, p}\, e^{\omega\varphi_1(p)}\, e^{x\varphi_1(p+1) + y\varphi_2(p+1) + z\varphi_3(p+1) - \alpha z} = \Sigma C_{\gamma, \delta, p}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p) - \alpha z}$$

ou, en changeant, dans le premier membre, p en $p - 1$

$$\Sigma C_{\gamma, \delta, p-1}\, e^{\omega\varphi_1(p-1)}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p) - \alpha z} = \Sigma C_{\gamma, \delta, p}\, e^{x\varphi_1(p) + y\varphi_2(p) + z\varphi_3(p) - \alpha z}.$$

Les entiers qui multiplient x, y, z dans les exponentielles des deux membres étant égaux, les coefficients sont égaux, et on a

$$C_{\gamma, \delta, p} = C_{\gamma, \delta, p-1}\, e^{\omega\varphi_1(p-1)}.$$

Ecrivons cette relation en y remplaçant successivement p par $1, 2, 3, \ldots p$, et multiplions membre à membre les relations obtenues, nous aurons enfin

$$\begin{aligned} C_{\gamma, \delta, p} &= C_{\gamma, \delta, o}\, e^{\omega[\varphi_1(o) + \varphi_1(1) + \cdots + \varphi_1(p-1)]} \\ &= C_{\gamma, \delta, o}\, e^{\omega\varphi(p)}, \end{aligned}$$

en posant

$$\varphi(p) = \alpha(p, 4) + \beta(p, 3) + \gamma(p, 2) + \delta p.$$

La fonction G_β est alors

$$G_\beta = \sum_{\gamma, \delta, p} C_{\gamma, \delta, o} e^{\omega\varphi(p) + xD\varphi(p) + yD^2\varphi(p) + zD^3\varphi(p)}.$$

Faisons d'abord la sommation par rapport à p, en laissant β, γ, δ constants: nous aurons comme coefficient de $C_{\gamma,\delta,o}$ une fonction $\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}$. Nous écrirons à la place de $C_{\gamma,\delta,o}$ un coefficient $A_{\beta,\gamma,\delta}$ pour rappeler que $C_{\gamma,\delta,o}$ peut dépendre de β. Nous aurons ainsi

$$G_\beta(x, y, z) = \sum_{\gamma, \delta} A_{\beta,\gamma,\delta}\, \theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}. \tag{14}$$

D'où enfin, pour la fonction G

$$G(x, y, z) = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} G_\beta(x, y, z) = \sum_{\beta=0}^{\beta=\alpha-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} \sum_{\delta=-\infty}^{\delta=+\infty} A_{\beta,\gamma,\delta}\, \theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}.$$

Telle est donc l'expression générale des fonctions entières vérifiant les relations (13). Cette expression renferme une double infinité de coefficients arbitraires $A_{\beta,\gamma,\delta}$ β variant de 0 à $\alpha - 1$ et γ, δ prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

En remplaçant $\theta\begin{pmatrix}\omega, x, y, z\\ \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix}$ par son expression à l'aide de la fonction fondamentale Θ, on a aussi

$$G(x, y, z) = \sum_{\beta,\gamma,\delta} A_{\beta,\gamma,\delta}\, e^{\delta x + \beta y + \gamma z}\, \Theta(A, X, Y, Z) \tag{15}$$

où

$$\begin{cases} A = \alpha\omega \\ X = \alpha x + \beta\omega \\ Y = \alpha y + \beta x + \gamma\omega \\ Z = \alpha z + \beta y + \gamma x + \delta\omega. \end{cases} \tag{10}$$

La fonction entière $G(x, y, z)$ que nous venons de trouver et qui est définie par l'équation (15) renferme une infinité de coefficients arbitraires $A_{\beta,\gamma,\delta}$. On pourra évidemment chercher à disposer de ces coefficients de telle façon que la fonction G vérifie d'autres relations fonctionnelles distinctes des relations (13). Nous reviendrons plus tard sur ce point.

VIII. *Fonctions méromorphes laissées invariables par les substitutions du groupe d'une fonction θ du quatrième degré.*

Soit en général $G(x, y, z / \alpha)$ une fonction entière vérifiant les quatre relations fondamentales (13). Nous venons de donner l'expression générale de la fonction G. Quand nous voudrons mettre en évidence l'ordre α, nous écrirons $G(x, y, z / \alpha)$. Nous appellerons ces fonctions G des fonctions entières générales d'ordre α.

Soient $G_1(x, y, z / \alpha_1)$, $G_2(x, y, z / \alpha_2), \ldots, G_k(x, y, z / \alpha_k)$, k de ces fonctions d'ordres respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Désignons par $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des constantes et formons la fonction

$$H(x, y, z) = \prod_{i=1}^{i=k} G_i(x, y, z - c_i / \alpha_i). \tag{16}$$

Cette fonction est entière: elle admet la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable; enfin elle vérifie la relation

$$H(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)z + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_k c_k} H(x, y, z).$$

Posons

$$c = \frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_k c_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \alpha$$

nous aurons

$$H(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-\alpha(z-c)} H(x, y, z)$$

ou, en faisant

$$z - c = z'$$

$$H(x + \omega, y + x, z' + y + c) = e^{-\alpha z'} H(x, y, z' + c);$$

la fonction $H(x, y, z' + c)$ est donc une fonction entière $G(x, y, z' / \alpha)$ et on a

$$G(x, y, z - c / \alpha) = \prod_{i=1}^{i=k} G_i(x, y, z - c_i / \alpha_i). \tag{17}$$

La fonction méromorphe

$$F(x,y,z)=\frac{\prod_{i=1}^{i=k} G_i(x,y,z-c_i/\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{j=\lambda} G_j(x,y,z-g_j/\alpha'_j)} \tag{18}$$

où

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_\lambda$$

$$\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2+\cdots+\alpha_k c_k=\alpha'_1 g_1+\alpha'_2 g_2+\cdots+\alpha'_\lambda g_\lambda+2n\pi i$$

vérifie les quatre relations

$$\begin{cases} F(x+2\pi i, y, z)=F(x,y,z) \\ F(x, y+2\pi i, z)=F(x,y,z) \\ F(x,y,z+2\pi i)=F(x,y,z) \\ F(x+\omega, y+x, z+y)=F(x,y,z). \end{cases} \tag{19}$$

Il est évident que les dérivées partielles de F par rapport à z vérifient les mêmes relations.

La fonction méromorphe

$$F(x,y,z)=\sum_{i=1}^{i=k} A_i \frac{d \operatorname{Log} G_i(x,y,z-g_i/\alpha_i)}{dz} \tag{20}$$

où

$$A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\cdots+A_k\alpha_k=0$$

vérifie les mêmes relations, car l'effet de la dernière substitution du groupe est de faire croître chaque terme de $-A_i\alpha_i$. Une expression de la forme

$$F(x,y,z)=A\frac{d^n \operatorname{Log} G(x,y,z-g/\alpha)}{dz^n} \tag{21}$$

où $n>1$, vérifie encore ces relations, quels que soient n, α et la constante g.

Enfin, il est évident que les sommes, les produits, les quotients de ces expressions sont des fonctions méromorphes vérifiant les mêmes relations (19).

Toutes les fonctions que nous venons de former et qui vérifient les relations (19) sont de la forme

$$F(x,y,z)=\frac{G_1(x,y,z-g/\alpha)}{G(x,y,z-c/\alpha)},$$

G_1 et G étant deux fonctions entières générales vérifiant les mêmes relations fonctionnelles qu'une fonction θ d'ordre α.

En prenant la dérivée *par rapport* à z,

$$F'_z = \frac{G'_1 G - G_1 G'}{G^2},$$

on voit que le produit

$$\Phi(x, y, z) = G^2 F_z'$$

est une fonction *entière* de x, y, z; comme F'_z vérifie les relations (19), $\Phi(x, y, z)$ admet la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifie la relation

$$\Phi(x + \omega, y + x, z + y) = e^{-2\alpha(z-c)}\, \Phi(x, y, z).$$

En posant $z - c = z'$, on transforme donc cette fonction Φ en une fonction entière générale d'ordre 2α vérifiant les mêmes relations que $\theta(x, y, z)$: soit $G_2(x, y, z'/2\alpha)$ cette fonction. La dérivée F'_z est alors le quotient de deux de ces fonctions θ généralisées

$$(22) \qquad F'_z = \frac{G_2(x, y, z - c/2\alpha)}{G^2(x, y, z - c/\alpha)}.$$

IX. *Il n'existe pas de fonctions entières vérifiant les relations* (19). De même qu'il n'existe pas de fonctions *entières* d'une variable avec deux périodes, il n'existe pas de fonction *entière* $F(x, y, z)$ vérifiant les relations (19). En effet, si une pareille fonction existait, elle serait représentée, pour toutes les valeurs des variables, par une série

$$F(x, y, z) = \Sigma B_{l, m, n}\, e^{lx + my + nz}$$

l, m, n étant des entiers qui varient de $-\infty$ à $+\infty$ et $B_{l,m,n}$ des coefficients constants. En écrivant que cette fonction vérifie la relation

$$F(x + \omega, y + x, z + y) = F(x, y, z)$$

on a

$$\Sigma B_{l, m, n}\, e^{l\omega} e^{(l+m)x + (m+n)y + nz} = \Sigma B_{l, m, n}\, e^{lx + my + nz}.$$

D'où, en identifiant les coefficients des termes $e^{(l+m)x + (m+n)y + nz}$ dans les deux membres

$$(23) \qquad B_{l+m, m+n, n} = e^{l\omega} B_{l, m, n}.$$

Considérons les coefficients dans lesquels n a une valeur *déterminée* non nulle. Nous pourrons poser

$$m = np + r$$

en appelant p le quotient et r le reste de la division de m par n, r étant un des nombres $0, 1, 2, \ldots n-1$ si n est positif, $0, 1, 2, \ldots -n-1$, si n est négatif. Nous grouperons alors les termes pour lesquelles r a une valeur déterminée. Dans ces conditions p varie de $-\infty$ à $+\infty$. Nous poserons ensuite

$$l = (p, 2)n + pr + q,$$

q variant de $-\infty$ à $+\infty$ pour que l varie de $-\infty$ à $+\infty$. Avec ces notations, pour faire croître m de n et l de m, il suffit de faire croître p de 1. Le coefficient $B_{l,m,n}$ où n et r ont des valeurs déterminées, deviendra une fonction de p et q, $C_{p,q}$, et la relation (23) deviendra

$$C_{p+1,q} = e^{[(p,2)n+pr+q]\omega} C_{p,q}. \tag{24}$$

Remplaçant p par $0, 1, 2, \ldots p-1, p$ et multipliant, on a

$$C_{p,q} = e^{[(p,3)n+(p,2)r+pq]\omega} C_{o,q}.$$

Les termes correspondants de la série, où q a une valeur déterminée seront alors

$$C_{o,q} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} e^{\omega\psi(p)+x\psi_1(p)+y\psi_2(p)+z\psi_3(p)}$$

en posant pour abréger

$$\psi(p) = (p, 3)n + (p, 2)r + pq$$

et désignant par ψ_1, ψ_2, ψ_3 les différences $D\psi(p), D^2\psi(p), D^3\psi(p)$. Or cette série est évidemment *divergente*, car, dans l'exposant de e, le terme de degré le plus élevé en p est $\frac{\omega n p^3}{6}$ et p varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Il ne peut donc exister que des termes dans lesquels $n = 0$; la fonction F est alors indépendante de z.

X. *Fonctions entières de deux variables vérifiant des relations analogues à* (19). Par contre, il existe des fonctions de deux et, en général, d'un nombre pair de variables, vérifiant des relations analogues à (19). Bornons nous ici à une fonction entière de deux variables $g(x, y)$ telle que

$$\begin{cases} g(x + 2\pi i, y) = g(x, y) \\ g(x, y + 2\pi i) = g(x, y) \\ g(x+\omega, y+x) = g(x, y). \end{cases} \tag{25}$$

Pour la former prenons deux entiers quelconques λ et μ dont le premier λ est *positif* et différent de zéro. Désignons par $\psi(n)$ le polynôme en n

$$\psi(n) = \lambda(n, 2) + \mu n.$$

La fonction

$$(26) \qquad g(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega\psi(n) + xD\psi(n) + yD^2\psi(n)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega[\lambda(n,2)+\mu n] + x(\lambda n+\mu) + y\lambda}$$

vérifie les conditions indiquées. Elle peut d'ailleurs s'écrire

$$(27) \qquad g(x, y) = e^{\lambda y} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\omega[\lambda(n,2)+\mu n] + x(\lambda n+\mu)}$$

où la série est une fonction θ elliptique vérifiant les deux relations

$$\theta(x + 2\pi i) = \theta(x)$$
$$\theta(x + \omega) = e^{-\lambda x}\theta(x).$$

Nous désignerons la fonction entière (26) qui dépend des deux entiers λ et μ par

$$g\begin{pmatrix} x, y \\ \lambda, \mu \end{pmatrix}.$$

En posant

$$\Theta(X, A) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{A(n,2) + Xn}$$

où la partie réelle de A est négative, on a

$$g\begin{pmatrix} x, y \\ \lambda, \mu \end{pmatrix} = e^{\mu x + \lambda y}\,\Theta(\lambda x + \mu\omega, \lambda\omega).$$

On peut toujours, en remplaçant dans le terme général de la série (26) n par $n + k$, determiner k de façon que la nouvelle valeur de l'entier μ soit l'un des nombres $0, 1, 2 \ldots \lambda - 1$. C'est ce que nous supposerons réalisé par la suite. Il existe donc, une fois ω donné, une infinité de fonctions

$$g\begin{pmatrix} x, y \\ \lambda, \mu \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1, 2, \ldots + \infty$, $\mu = 0, 1, 2 \ldots \lambda - 1$. Pour chaque valeur de λ, il y a λ fonctions g.

Réciproquement, si l'on cherche la fonction entière la plus générale $g(x, y)$ vérifiant les relations (25), on trouve qu'elle est donnée par la série

$$g(x, y) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=+\infty} \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} A_{\lambda,\mu}\, g\begin{pmatrix} x, y \\ \lambda, \mu \end{pmatrix} \tag{28}$$

les coefficients $A_{\lambda,\mu}$ étant indépendants de x et y; c'est ce qu'on verra par la méthode des coefficients indéterminés, comme nous l'avons fait plus haut pour des questions analogues.

Il résulte de là que si $E(z)$ est une fonction entière quelconque de z la fonction

$$E[g(x, y)]$$

où $g(x, y)$ a la forme (28), a encore la même forme.

Soit $G(x, y, z / \alpha)$ une fonction entière vérifiant les mêmes relations qu'une fonction $\theta\begin{pmatrix} \omega, x, y, z \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \end{pmatrix}$ d'ordre α. Le produit $G(x, y, z / \alpha) g(x, y)$ est encore une fonction entière $G_1(x, y, z / \alpha)$ de même ordre, ayant par rapport à z les mêmes zéros que la première.

XI. *Dérivées partielles des fonctions F.* Soit d'abord une fonction $f(x, y)$ de deux variables admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant la relation (29)

$$f(x + \omega, y + x) = f(x, y). \tag{29}$$

Nous allons chercher des combinaisons des dérivées partielles de f vérifiant la même relation: il est évident que toutes les dérivées admettront la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable. Faisons

$$f_1 = f'_x, \ f_2 = f'_y$$

$$f_{11} = f''_{x^2}, \ f_{12} = f_{21} = f''_{xy}, \ f_{22} = f''_{y^2}$$

$$\ldots \text{etc.}$$

Les fonctions $f_2, f_{22}, \ldots$ ne contenant que des dérivées par rapport à y vérifient évidemment la relation (29). Mais il en existe d'autres, qu'on peut former comme il suit.

Ecrivons la relation

$$f(x, y) = 0$$

qui définit y en fonction de x. D'après la relation (29) si on a

$$y = \varphi(x)$$

on a aussi

$$y + x = \varphi(x + \omega)$$

ou en dérivant deux fois

$$y'' = \varphi''(x + \omega)$$

$$\varphi''(x) = \varphi''(x + \omega).$$

La dérivée y'' ne doit donc pas changer quand on change x en $x + \omega$ et y en $y + x$. (Voyez à un autre point de vue la note des Rendiconti di Palermo séance du 10 Decémbre 1911, t. XXXIII). Appliquons à $f(x, y) = 0$, le théorème des fonctions implicites, nous aurons

$$f_1 + y' f_2 = 0$$

$$f_{11} + 2 f_{12} y' + f_{22} y'^2 + y'' f_2 = 0$$

ou en éliminant y'

$$f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2 + y'' f_2^3 = 0.$$

La fonction

$$(30) \qquad g(x, y) = f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2$$

vérifie la relation

$$g(x + \omega, y + x) = g(x, y).$$

Vérifions-le directement. Pour cela, étant donnée une fonction quelconque $\varphi(x, y)$ appelons $\bar{\varphi}$, avec un trait, ce que devient cette fonction quand on y remplace x et y par $x + \omega$ et $y + x$

$$\bar{\varphi} = \varphi(x + \omega, y + x).$$

Alors (29) donne

$$\bar{f} = f.$$

Dérivons cette relation par rapport à x et y: nous avons

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1 + \bar{f}_2 &= f_1 \\
\bar{f}_2 &= f_2 \\
\bar{f}_{11} + 2\bar{f}_{12} + \bar{f}_{22} &= f_{11} \\
\bar{f}_{12} + \bar{f}_{22} &= f_{12} \\
\bar{f}_{22} &= f_{22}.
\end{aligned}$$

Prenant alors la fonction (30) on a

$$\begin{aligned}
g &= (\bar{f}_{11} + 2\bar{f}_{12} + \bar{f}_{22})\bar{f}_2^2 \\
&\quad - 2(\bar{f}_{12} + \bar{f}_{22})(\bar{f}_1 + \bar{f}_2)\bar{f}_2 \\
&\quad + \bar{f}_{22}(\bar{f}_1 + \bar{f}_2)^2 \\
&= \bar{f}_{11}\bar{f}_2^2 - 2\bar{f}_{12}\bar{f}_1\bar{f}_2 + \bar{f}_{22}\bar{f}_1^2 \\
&= \bar{g}.
\end{aligned}$$

On obtiendrait d'autres formules analogues en calculant y''', y^{IV}, ... etc.

XII. *Expressions analogues pour les fonctions F de trois variables x, y, z, admettant la période $2\pi i$ par rapport à chaque variable et vérifiant la relation*

$$F(x + \omega, y + x, z + y) = F(x, y, z). \tag{31}$$

Appelons de même F_1, F_2, F_3 les trois dérivées premières;

$$\begin{matrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{matrix}$$

les six dérivées secondes ($F_{ik} = F_{ki}$), et désignons par $\bar{\varphi}$ ce que devient une fonction $\varphi(x, y, z)$ par l'effet de la substitution (x, y, z) $(x + \omega, y + x, z + y)$.

En dérivant par rapport aux trois variables, la relation (31), on a

$$\begin{aligned}
F_1 &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \\
F_2 &= \bar{F}_2 + \bar{F}_3 \\
F_3 &= \bar{F}_3
\end{aligned}$$

On en conclut

$$\bar{F}_2^2 - \bar{F}_2 \bar{F}_3 - 2 \bar{F}_1 \bar{F}_3 = F_2^2 - F_2 F_3 - 2 F_1 F_3.$$

On a donc ainsi deux fonctions dépendant des dérivées premières

$$(32) \qquad F_3, \quad F_2^2 - F_2 F_3 - 2 F_1 F_3$$

qui sont laissées invariables par les substitutions du groupe considéré.

Si nous passons aux dérivées secondes, nous avons

$$(33) \qquad \begin{cases} F_{22} = \bar{F}_{22} + 2 \bar{F}_{23} + \bar{F}_{33} \\ F_{23} = \bar{F}_{23} + \bar{F}_{33} \\ F_{33} = \bar{F}_{33}. \end{cases}$$

On en conclut que les trois fonctions

$$(34) \qquad \begin{cases} F_{33} \\ F_{23}^2 - F_{22} F_{33} \\ F_{22} F_3^2 - 2 F_{32} F_3 F_2 + F_{33} F_2^2 \end{cases}$$

sont invariables par les substitutions du même groupe. C'est ce qu'il est aisé de vérifier.

On peut rattacher ces formules à la théorie des formes. Ainsi, prenant la forme

$$\bar{F}_{22} X^2 + 2 \bar{F}_{23} X Y + \bar{F}_{33} Y^2,$$

faisons sur X et Y la substitution

$$X = X', \qquad Y = X' + Y'$$

de déterminant $+1$. L'effet de cette substitution en vertu des relations (33) est de transformer la forme en

$$F_{22} X'^2 + 2 F_{23} X' Y' + F_{33} Y'^2.$$

Les discriminants des deux formes sont donc égaux

$$F_{23}^2 - F_{22} F_{33} = \bar{F}_{23}^2 - \bar{F}_{22} \bar{F}_{33}$$

ce qui donne une des fonctions invariantes (34).

Des considérations analogues s'appliquent aux dérivées d'ordre plus élevé. En appliquant à une des fonctions trouvées (32) et (34) les mêmes calculs qu'à F, on en obtient évidemment d'autres possédant les mêmes propriétés.

XIII. *Transformations.* Dans une deuxième partie, nous nous occuperons, entre autres, de certaines transformations, dont nous avons donné un exemple simple dans les Comptes Rendus (Séance du 7 Septembre 1914).

Paris, le 17 Sept. 1914.