BEWEIS DES LAURENT'SCHEN SATZES

VON

LUDWIG SCHEEFFER

in BERLIN.

Als Ergänzung zu den Theoremen des Herrn MITTAG-LEFFLER über die Darstellung analytischer Funktionen hat der LAURENT'sche Satz neuerdings grosse Bedeutung gewonnen. Es dürfte daher der folgende Beweis desselben von Interesse sein, welcher lediglich auf den elementaren Principien des Herrn WEIERSTRASS beruht, während die früheren Beweise, soweit sie uns bekannt sind, sämmtlich von RIEMANN's partieller Differentialgleichung oder CAUCHY's Integralsatz Gebrauch machen.

Wir formuliren den Satz folgendermassen:

Wenn eine Funktion der complexen Veränderlichen y innerhalb eines ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkte a eingeschlossenen Gebietes eindeutig ist und sich in der Umgebung jedes im Gebiete gelegenen Punktes y_0 nach positiven Potenzen von $y - y_0$ entwickeln lässt, so wird sie in dem ganzen ringförmigen Gebiet durch eine nach positiven und negativen Potenzen von $y - a$ fortschreitende Potenzreihe dargestellt.

Wir beweisen den Satz in § 1 zunächst für einen speciellen Fall. In § 2 wird dann gezeigt, wie sich der allgemeinste Fall auf jenen speciellen zurückführen lässt.

1.

Die Funktion $f(y)$ habe innerhalb eines ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen mit den Radien r und r_1 und dem Mittelpunkte o eingeschlossenen Gebietes G folgende Eigenschaften: sie sei eindeutig, ungerade und überall von dem Charakter einer ganzen Funktion. Ist dann $rr_1 = 1$ und $r > 1 + \sqrt{2}$, so kann $f(y)$ innerhalb des Gebietes G auf folgende Art in eine nach positiven und negativen Potenzen von y fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Die Funktion

$$\varphi(z) = f(y) + f(y'),$$

in welcher y und y' die Wurzeln der Gleichung $y + \frac{1}{y} = z$ sind, ist offenbar eine eindeutige Funktion von z innerhalb eines um den Punkt o mit dem Radius $\rho = r - \frac{1}{r}$ beschriebenen Kreises; denn jedem Werthe von z innerhalb dieses Kreises entsprechen nur Werthe von y, die im Gebiete G liegen.

Die Funktion $\varphi(z)$ hat ferner in jedem Punkte z_0, welcher innerhalb des genannten Kreises liegt, den Charakter einer ganzen Funktion. Dies ist ohne Weiteres klar für alle von ± 2 verschiedenen Werthe von z_0; denn in der Umgebung jedes derartigen Punktes können $y - y_0$ und $y' - y'_0$, also auch $f(y)$ und $f(y')$ nach positiven Potenzen von $z - z_0$ entwickelt werden. Ist dagegen $z_0 = \pm 2$, so wird $y_0 = y'_0 = \pm 1$, und die Entwickelung von $y - y_0$ und $y' - y'_0$ nach Potenzen von $z - z_0$ ist unmöglich. Es wird aber in diesem Falle für jede positive ganze Zahl n

$$(y - y_0)^n + (y' - y'_0)^n$$

eine ganze rationale Funktion von $z - z_0$, und da die Entwickelungen von $f(y)$ und von $f(y')$ nach Potenzen von $y - y_0$ resp. $y' - y'_0$ entsprechend gleiche Coëfficienten haben, ist eine Entwickelung von $\varphi(z)$ nach Potenzen von $z - z_0$ auch hier nachgewiesen.

Die Funktion $\varphi(z)$ hat also innerhalb des Kreises ρ überall den Charakter einer ganzen Funktion und lässt sich dementsprechend durch eine nach positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe darstellen, welche für alle Werthe von z, deren absoluter Betrag kleiner als ρ, d. h. als $r - \frac{1}{r}$, ist, convergirt. Mit anderen Worten: die Funktion $f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ lässt sich durch eine nach positiven Potenzen von $y + \frac{1}{y}$ fortschreitende Reihe darstellen, so lange $\left| y + \frac{1}{y} \right|$ kleiner als $r - \frac{1}{r}$ ist.

Aus dieser Reihe entsteht nun eine nach positiven und negativen Potenzen von y fortschreitende Reihe, wenn alle Potenzen von $y + \frac{1}{y}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt und die Coëfficienten gleicher Potenzen von y zusammengezogen werden. Die neue Reihe convergirt jedenfalls für alle Werthe y, welche der Bedingung

$$|y| + \left|\frac{1}{y}\right| < r - \frac{1}{r}$$

genügen, d. h. für alle Werthe, welche innerhalb eines von zwei Kreisen r' und $\frac{1}{r'}$ begrenzten Ringes liegen. r' wird durch die Gleichung

$$r' + \frac{1}{r'} = r - \frac{1}{r}$$

bestimmt, welche durch einen positiven Werth von r' erfüllbar ist, da $r > 1 + \sqrt{2}$ angenommen war.

Nachdem hiermit die Existenz einer Doppelreihe nachgewiesen ist, durch welche die Funktion $f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ innerhalb des von den Kreisen r' und $\frac{1}{r'}$ begrenzten Ringes dargestellt wird, folgt durch Anwendung bekannter Sätze ohne Weiteres, dass diese Darstellung im ganzen Gebiete G gültig bleibt.

Ganz ebenso ist nun zu zeigen, dass die Funktion $\psi(z') = f(y) + f(y')$, in welcher y und y' die Wurzeln der Gleichung $y - \frac{1}{y} = z'$ sind, eine eindeutige Funktion von z' ist, die in eine gewöhnliche, für $|z'| < r - \frac{1}{r}$

convergirende Potenzreihe entwickelt werden kann. Man erhält durch ähnliche Betrachtungen, wie die eben angestellten, schliesslich eine Entwickelung der Funktion $f(y)+f\left(-\frac{1}{y}\right)$ nach positiven und negativen Potenzen von y innerhalb des Gebietes G.

Da $f(y)$ ungerade angenommen war, ist

$$f(y)=\frac{1}{2}\left[f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[f(y)+f\left(-\frac{1}{y}\right)\right].$$

Werden für die beiden Glieder auf der rechten Seite die Doppelreihen eingeführt, so erhalten wir eine gleichartige Reihe für $f(y)$. W. z. b. w.

2.

Wir befreien nun den Satz von den Beschränkungen, welche wir ihm in der vorhergehenden Nummer auferlegt haben.

Dass $f(y)$ ungerade angenommen wurde, beeinträchtigt offenbar die Allgemeinheit nicht, da bekanntlich jede Funktion auf die Form

$$f_1(y)+yf_2(y)$$

gebracht werden kann, wo $f_1(y)$ und $f_2(y)$ ungerade Funktionen sind. Auch die Bedingung, dass rr_1 gleich 1 sein sollte, enthält keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit. Denn wenn wir die beiden Radien r und r_1 endlich und von Null verschieden annehmen, wird jene Bedingung nach Einführung der Substitution $y=\sqrt{rr_1}\,.\,x$ immer erfüllt sein. Ist aber einer der Radien r und r_1 gleich Null oder unendlich gross, so wird man zunächst das Gebiet der Veränderlichen dadurch beschränken, dass man beide Radien von Null verschieden und endlich annimmt. Ist dann für dieses Gebiet die Reihenentwickelung nachgewiesen, so folgt aus bekannten Sätzen unmittelbar die Gültigkeit derselben im ganzen ursprünglichen Gebiete.

Hiermit hat der Beweis bereits denjenigen Grad der Allgemeinheit erreicht, dessen er als Ergänzung zu den Theoremen des Herrn MITTAG-LEFFLER bedarf. Er ist jetzt nämlich für alle diejenigen Fälle erbracht, wo der Quotient der Radien r und r_1 grösser als $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ist, speciell also auch für den Fall, dass der kleinere Radius gleich Null ist.

Wir können aber auch den Fall, wo der Quotient der Radien r und r_1 einen Werth zwischen $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ und 1 hat, auf den vorhergehenden zurückführen. Es existirt nämlich in diesem Falle offenbar immer eine ganze positive Potenz des Quotienten, welche grösser als $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ist. Ist n die Ordnungszahl dieser Potenz, so setzen wir:

$$y^n = x.$$

Bedeutet dann α eine primitive Wurzel der Gleichung

$$\alpha^n = 1,$$

und definiren wir f_μ folgendermassen

$$nf_\mu = \sum_{\lambda=0}^{n-1} (\alpha^\lambda y)^\mu f(\alpha^\lambda y),$$

so sind die n Grössen $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ offenbar eindeutige Funktionen von x in einem ringförmigen Gebiete dieser Variabeln von der Beschaffenheit, dass der Quotient der beiden charakteristischen Radien grösser als $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ist. Jene n Funktionen können in der Umgebung jeder im Gebiete gelegenen Stelle x_0 nach positiven Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden, da jeder der n Bestandtheile einer Funktion f_μ nach Potenzen von $y - y_0$, und $y - y_0$ wiederum nach Potenzen von $x - x_0$ zu entwickeln ist. Demnach lässt sich jede der Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ durch eine nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreitende Doppelreihe darstellen. Setzen wir statt x wieder y^n, so erhalten wir für die Funktionen f_μ Reihen, die nach positiven und negativen Potenzen von y fortschreiten.

Da nun

$$f(y) = \sum_{\mu=0}^{n-1} y^{-\mu} f_\mu$$

ist, ergiebt sich schliesslich ein Ausdruck für die Funktion $f(y)$ in Form einer nach positiven und negativen Potenzen fortschreitenden Reihe, welche für alle Werthe von y convergirt, deren absoluter Betrag zwischen r r_1 liegt.

Hiermit ist der LAURENT'sche Satz vollständig bewiesen.

Berlin, November 1883.