SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

P. BOUTROUX

à PARIS.

Introduction.

L'éude directe des développement en série, à laquelle ABEL a su donner une si brillante impulsion, et qu'il a appelée »la partie la plus essentielle des mathématiques», a occupé, dans les travaux de ses successeurs, une place prépondérante Le moment est venu maintenant de considérer en eux-mêmes et d'analyser avec quelques détails les types généraux de fonctions dont la science a été ainsi enrichie. Or il faut bien reconnaître que les propriétés d'une fonction n'apparaissent que rarement sur un développement infini. C'est pourquoi il sera souvent avantageux de substituer à l'étude d'un développement celle de caractères moins précis mais plus intuitifs, aptes à servir de marque aux fonctions d'une classe déterminée, en permettant de les distinguer des fonctions voisines et de les reconnaître lorsqu'elles sont définies par une équation différentielle ou de toute autre manière.

Le mode de croissance, objet des beaux travaux de MM. HADAMARD et BOREL, paraît être, pour les fonctions entières, un tel caractère. Toutefois, si l'on veut que la connaissance de ce mode de croissance puisse, dans une étude ultérieure, tenir lieu de celle de la fonction, il est nécessaire de le déterminer avec plus de précision qu'on ne l'a fait encore. C'est la tâche que je me suis proposée dans ce mémoire.

MM. HADAMARD et BOREL ont montré [1] que le module d'une fonction entière dépend étroitement de celui du $n^{\text{ième}}$ zéro. Toutefois l'on avait

[1] Des généralisations des théorèmes de MM. HADAMARD et BOREL viennent d'être tout récemment indiquées par M. E. LINDELÖF qui a établi des propositions voisines de celles qui sont exposées dans la première partie de ce travail. M. LINDELÖF a également obtenu, de son côté, un exemple de fonction de genre zéro se trouvant la somme de deux fonctions de genre *un*. (Voir page 141.)

lieu de craindre que ce rapprochement ne pût être poussé très loin et qu'il fallût pour arriver à un résultat un peu précis tenir compte des arguments des zéros. Je montre qu'il n'en est rien en général, et j'obtiens alors une représentation asymptotique du module maximum pour $|z| = r$ d'une fonction entière de genre fini. Ce résultat me permet d'étudier en détail le cas resté obscur où le module maximum d'une fonction de genre p se comporte approximativement comme e^{r^p}. Je constate que dans ce cas la fonction peut exceptionnellement perdre tous les caractères qui la distinguent des fonctions de genre $p - 1$. D'ailleurs dans ce cas encore, les propriétés fondamentales de la fonction résultent de son mode de croissance qui apparaît alors comme plus important que le genre; *une telle fonction de genre p peut en effet être la somme de deux fonctions de genre $p - 1$.* Ce fait vient contredire l'opinion générale qui était, comme on sait, que la somme de deux fonctions de genre p est toujours de genre p au plus.

Les conclusions de ma première partie me conduisent à faire ressortir de nouveau l'importance toute speciale des fonctions à croissance régulière signalées par M. Borel, c'est à dire des fonctions dont le module maximum $M(r)$ satisfait à partir d'une certaine valeur de r à la double inégalité

$$e^{r^{\rho - \varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\rho + \varepsilon}}.$$

Toutefois j'ai pensé qu'il y avait intérêt à ne pas se borner à ces fonctions précisément afin d'avoir un moyen de les reconnaître lorsqu'on les rencontre dans une application: j'ai donc cherché à ne faire que les hypothèses strictement indispensables pour rendre possible un résultat précis. Dans le même ordre d'idées j'ai défini ainsi une classe assez étendue de fonctions dont le module maximum pour $|z| = r$ est égal à e^{hn}, n étant le nombre des zéros dont le module est inférieur à r, et h un nombre positif fini.

La seconde partie de ce travail est consacrée à la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini. On sait déjà que le module maximum d'une fonction entière est comparable à celui de sa dérivée. Mais j'ai pu obtenir un résultat beaucoup plus précis. Si l'on exclut du champ de la variable certaines aires fermées entourant les pôles, aires dont la somme peut être rendue négligeable, la dérivée logarithmique d'une fonction de genre fini reste comparable, partout ailleurs, à une puissance finie de la variable; j'étudie alors, dans le champ conservé, son module maximum pour $|z| = r$. La méthode suivie s'applique, sans modifications, à des fonctions méromorphes d'un type plus général, et l'on obtient alors, au sujet de ces fonctions, une théorie de tous points analogue à celle qui a servi de base à l'étude des fonctions entières.

Je donne une application de cette théorie en étudiant la croissance des fonctions méromorphes récemment découvertes par M. P. Painlevé au cours de ses recherches sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. M. Painlevé a signalé trois types d'équations dont les intégrales sont des fonctions méromorphes nouvelles. Je montre que les intégrales des deux premiers types se définissent à l'aide de fonctions entières de genre 2 ou 3 dont le module maximum croît comme

$$e^{r^{\frac{5}{2}}} \quad \text{ou} \quad e^{r^3}.$$

Dans la troisième partie, je cherche à étendre les résultats des deux premières au cas des fonctions de genre infini, et j'étudie le troisième type d'équations à intégrales méromorphes nouvelles signalé par M. Painlevé. Je constate que les fonctions entières correspondantes croissent comme e^{e^r}, $e^{e^{2r}}$ ou $e^{e^{\frac{4}{3}r}}$.

J'ai abordé dans la quatrième partie un problème un peu différent en cherchant à préciser les résultats obtenus par MM. Borel et Lindelöf sur la croissance des intégrales d'une équation différentielle algébrique du premier ordre et j'ai été conduit ainsi à définir une classe d'équations dont les intégrales ont un mode de croissance très analogue à celui des fonctions entières de genre fini. J'indique, pour terminer, la conclusion qui me semble devoir être tirée de ces divers résultats. La relation remarquable qui existe entre la croissance d'une fonction entière et sa nature analytique (en particulier, avec le nombre des branches de la fonction inverse) ne nous paraît pas tenir à des circonstances fortuites ou spéciales: elle n'est vraisemblablement que la manifestation d'une propriété plus générale des fonctions analytiques.

PREMIÈRE PARTIE.

Je vais me borner, pour commencer, à l'étude des fonctions entières de genre fini; me réservant de montrer, dans une partie postérieure, comment la méthode employée pour ces fonctions peut être appliquée aux fonctions de genre infini.

1. Désignons par $F(z)$ une fonction entière de genre fini p. Soit $M(r)$ son module maximum pour $|z| = r$, r_i le module de son $i^{\text{ème}}$ zéro, enfin n le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur à r.

MM. Hadamard et Schou[1] ont donné une limite supérieure du nombre n. Ils ont montré que l'inégalité

$$M(r) < e^{V(r)} \tag{1}$$

supposée satisfaite pour toute valeur de r, entraîne

$$n < CV(r), \tag{2}$$

C étant une constante finie.

La réciproque du théorème de M. Hadamard est-elle vraie? On n'a pas encore complètement répondu à cette question, et c'est elle qui doit nous préoccuper tout d'abord.

Bien entendu, la question n'aura un sens que si $F(z)$ est un produit de facteurs primaires: si cette fonction contenait un facteur exponentiel $e^{H(z)}$, son ordre de grandeur pourrait être absolument indépendant du nombre n; c'est donc le produit de facteurs primaires, $G(z)$, contenu dans $F(z)$ que je vais me proposer d'étudier. Les résultats que j'obtiendrai ne s'en appliqueront pas moins au cas le plus général: soit en effet

$$F(z) = G(z)e^{H(z)},$$

[1] Hadamard, Journ. de Math., 1893. Schou, Comptes rendus, t. 125, p. 763.

j'ai le droit de supposer que l'ordre de grandeur de $e^{H(z)}$ est inférieur ou égal à celui de $G(z)$; car, si cette condition n'était pas réalisée pour $F(z)$, elle le serait certainement pour $F(z) - a$, quel que soit a (sauf pour une valeur de a au plus).[1]

Considérons donc le produit infini $G(z)$. M. Borel s'est proposé de lui trouver une limite supérieure (pour $|z| = r$), et il a démontré la proposition suivante:[2]

Soit ρ un nombre positif tel que l'on ait, quelque petit que soit α, à partir d'une certaine valeur de n

$$r_n > n^{\frac{1}{\rho+\alpha}}. \tag{3}$$

On aura, quel que soit ε, à partir d'une certaine valeur de r,

$$|G(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}. \tag{4}$$

M. Borel a appelé *ordre* de $G(z)$ le plus petit nombre ρ satisfaisant à la condition (3). Ce nombre est tel que la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho-\alpha}}$ soit divergente et la série $\sum \frac{1}{r_n^{\rho+\alpha}}$ convergente, quel que soit α.

2. Voulant donner du module maximum pour $|z| = r$, $M(r)$, une représentation asymptotique aussi exacte que possible, je dois chercher avant tout si l'on ne peut pas obtenir une limite supérieure de $M(r)$ plus précise que la limite (4).

Quelque naturelle que semble cette recherche, on a pu se demander s'il y avait lieu de l'entreprendre. Nous ne savons pas en effet, *à priori*, jusqu'où va la relation observée entre la croissance de $M(r)$ et le nombre n défini plus haut: or s'il fallait pour déterminer $M(r)$ avec quelque précision faire intervenir des éléments nouveaux comme, par exemple, les arguments des zéros, les difficultés du problème seraient singulièrement accrues.

---

[1] Cela résulte de la généralisation du théorème classique de M. Picard sur les fonctions entières. Voir Borel, *Sur les zéros des fonctions entières*. (Acta Math. 1896.)

[2] Acta Math. 1896 (Art. cité); *Leçons sur les fonctions entières*, p. 61.

Il semble précisément à première vue que cette circonstance défavorable se présente. Considérons, en effet, avec M. Borel,[1] les deux fonctions $\sin \pi z$ et $\frac{1}{\Gamma(z)}$. Leurs zéros ont mêmes modules $1, 2, 3, \ldots$ et cependant leurs modules maxima sont respectivement proportionnels à e^r et à r^r. M. Borel fut tenté de conclure qu'il faut ou tenir compte des arguments des zéros ou se contenter de la limite (4).

Fort heureusement il se trouve que les deux fonctions signalées par M. Borel rentrent dans un cas d'exception: nous constaterons qu'on a en général le droit de faire abstraction des arguments des zéros. C'est là ce qui permet de préciser notablement les résultats de MM. Hadamard et Borel.

Une représentation exacte de $M(r)$ aura surtout son intérêt lorsque l'on étudièra la classe, fondamentale en pratique, des fonctions à croissance régulière définies par M. Borel (*voir* Introduction). Mais il convient peut-être de s'attacher, pour commencer, à des types de fonctions plus généraux; il est utile, en effet, de connaître des propositions applicables à des fonctions dont on ne sait pas encore si elles sont à croissance régulière. On aura précisément ainsi un moyen de démontrer, s'il y a lieu, que leur croissance est bien régulière.

3. Pour établir les résultats que j'ai en vue, j'aurai à évaluer certaines intégrales définies où figure la fonction r_i ou une fonction $\phi(i)$ comparable à r_i. Cette évaluation ne sera évidemment possible que si l'on fait certaines hypothèses sur la croissance de cette fonction $\phi(i)$; mais des hypothèses très générales suffiront. C'est ainsi qu'il n'est pas nécessaire de supposer que $\phi(i)$ est à *croissance régulière* (la définition de M. Borel étant étendue aux fonctions croissantes qui restent comparables à une puissance finie de la variable). En d'autres termes, nos calculs pourront porter sur des fonctions $\phi(x)$ qui ne satisfont pas nécessairement, à partir d'une certaine valeur de x, à une double inégalité de la forme

$$x^{\lambda-\varepsilon} < \phi(x) < x^{\lambda+\varepsilon} \quad (\varepsilon \text{ arbitrairement petit}).$$

L'analyse n'a pas cru devoir s'occuper jusqu'ici de semblables fonctions: il

[1] *Leçons sur les fonctions entières*, p. 99.

est cependant possible d'effectuer sur elles des calculs précis, moyennant des hypothèses assez larges sur leur mode de croissance.

Evalution de certaines intégrales définies.

4. $G(z)$ étant un produit de facteurs primaires de genre p, je suppose ses zéros rangés par ordre de modules croissants suivant la règle de WEIERSTRASS, en sorte que l'on a

$$r_i \leqq r_{i+1},$$

si l'on désigne par r_i le module du zéro de rang i.

Les r_i étant connus, il est toujours possible de former une fonction de x holomorphe, réelle et positive qui, pour x entier et égal à i, prenne la valeur r_i. J'appelle $\omega(x)$ une telle fonction.

On peut définir la fonction $\omega(x)$ au moyen d'une formule d'interpolation quelconque; mais je supposerai, ce qui est évidemment légitime, qu'elle ne cesse pas de croître lorsque x varie de 0 à $+\infty$.

Cela posé, désignant par m, n deux entiers positifs finis $(m < n)$ et par λ un nombre positif, proposons-nous de déterminer une limite supérieure d'une somme de la forme

$$\sum_{i=m+1}^{i=n} [\omega(i)]^{-\lambda}, \qquad \sum_{i=n+1}^{\infty} [\omega(i)]^{-\lambda}.$$

Nous augmentons évidemment ces sommes en les remplaçant par les intégrales définies

$$\int_m^n [\omega(x)]^{-\lambda} dx, \qquad \int_n^\infty [\omega(x)]^{-\lambda} dx.$$

Tout revient donc à trouver des limites supérieures de ces intégrales. Pour y parvenir, je substituerai à $\omega(x)$ une fonction $\psi(x)$ qui, pour x réel et positif, soit elle-même réelle, positive et inférieure à $\omega(x)$, cette fonction $\psi(x)$ étant choisie de telle manière que l'on sache calculer les intégrales

$$I = \int_m^n [\psi(x)]^{-\lambda} dx, \qquad I_1 = \int_n^\infty [\psi(x)]^{-\lambda} dx$$

dont la seconde est supposée avoir une limite.

Il nous faut chercher quelles hypothèses il convient de faire a priori sur $\psi(x)$ pour obtenir aisément une limite de ces intégrales définies.

La solution la plus simple consisterait à prendre pour $\psi(x)$ une puissance de x. J'ai rappelé qu'il existe un nombre ρ (ordre de la fonction entière) tel que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$(3) \qquad r_i > i^{\frac{1}{\rho+\alpha}}$$

quelque petit que soit α. On peut donc faire

$$\psi(x) = x^{\frac{1}{\rho+\alpha}}.$$

Ce choix nous ramènerait à la méthode qu'a suivie M. Borel, dans les travaux cités plus haut, pour évaluer le module maximum du produit $G(z)$.

Mais on sait qu'il peut exister un écart considérable entre la fonction $\omega(x)$ et la puissance de x, $x^{\frac{1}{\rho+\alpha}}$. C'est là une conséquence de l'existence des fonctions à croissance irrégulière.[1] D'autre part, dans le cas même où l'ordre d'infinité de r_i est déterminé (d'après la définition de M. Borel), il est souvent possible d'assigner au module r_i une limite inférieure plus précise que la limite (3). On aura par exemple

$$r_i > i^{\frac{1}{\rho+\alpha}} (\log i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

σ étant un nombre fini. Il est à prévoir que l'on obtiendra des limites plus exactes si l'on peut, dans les divers calculs effectués, remplacer $x^{\frac{1}{\rho+\alpha}}$ par une fonction $\psi(x)$ plus voisine de $\omega(x)$.

Laissons donc de côté, pour un moment, la fonction $\omega(x)$ et faisons à priori certaines hypothèses sur $\psi(x)$, en montrant que ces hypothèses rendront possible la limitation des intégrales définies I et I_1.

5. Faisant d'abord varier x entre m et n, *supposons qu'il existe deux nombres positifs* μ et ν *tels que les fonctions* $\frac{x^\mu}{\psi}$ *et* $\frac{\psi}{x^\nu}$ *soient croissantes ou du moins ne décroissent pas lorsque* $m < x < n$. Nous distinguerons alors divers cas suivant la valeur qu'a λ dans l'intégrale I.

---

[1] Voir dans l'*Introduction*, la définition de M. Borel. M. Borel a montré qu'il est facile de former des fonctions à croissance irrégulière.

Premier cas. *μ est inférieur à* $\frac{1}{\lambda}$.

Exprimons que les dérivées logarithmiques des deux fonctions $\frac{x^{\lambda\mu}}{\psi^{\lambda}}$ et $\frac{\psi^{\lambda}}{x^{\lambda\nu}}$ sont positives: nous obtenons

$$\frac{\lambda\nu}{x} \leqq \frac{-\frac{d\psi^{-\lambda}}{dx}}{\psi^{-\lambda}} \leqq \frac{\lambda\mu}{x}$$

et nous en déduisons la double inégalité

$$(1-\lambda\mu)\psi^{-\lambda} \leqq \psi^{-\lambda} + x\frac{d\psi^{-\lambda}}{dx} \leqq (1-\lambda\nu)\psi^{-\lambda}$$

où $1-\lambda\mu$ et $1-\lambda\nu$ sont des nombres positifs.

D'où, en intégrant:

$$\frac{1}{1-\lambda\nu}[x\psi^{-\lambda}]_m^n \leqq \int_m^n \psi^{-\lambda} dx < \frac{1}{1-\lambda\mu}[x\psi^{-\lambda}]_m^n.$$

Par suite, on peut poser

$$\int_m^n \psi^{-\lambda} dx = cn[\psi(n)]^{-\lambda} \tag{5}$$

et c conserve une valeur finie lorsque n augmente indéfiniment $\left(c < \frac{1}{1-\lambda\mu}\right)$.

6. **Deuxième cas.** *ν est supérieur à* $\frac{1}{\lambda}$.

En procédant exactement comme dans le premier cas, nous aboutissons cette fois à l'inégalité

$$(\lambda\nu - 1)\psi^{-\lambda} \leqq -\frac{d}{dx}(x\psi^{-\lambda})$$

où l'on a $\lambda\nu - 1 > 0$.

Si l'on intègre, on pourra poser

$$\int_m^n \psi^{-\lambda} dx = cm[\psi(m)]^{-\lambda}$$

et c restera fini lorsque n augmentera indéfiniment.

Si donc les conditions impossées à $\psi(x)$ ne cessent pas d'être vérifiés pour $x > m$, on aura

$$\int_m^\infty \psi^{-\lambda} dx = c_1 m [\psi(m)]^{-\lambda}$$

c_1 étant une constante positive finie, et par suite (si l'on remplace m par n, en se reportant aux notations du § 4)

$$I_1 = c_1 n [\psi(n)]^{-\lambda}.$$

7. **Troisième cas.** Supposons maintenant que l'on ne puisse trouver ni un nombre μ inférieur à $\frac{1}{\lambda}$, ni un nombre ν supérieur à $\frac{1}{\lambda}$ satisfaisant dans l'intervalle mn aux conditions énoncées ce qu'on peut exprimer grossièrement en disant que, dans cet intervalle, $\psi^{-\lambda}$ croît approximativement comme $\frac{1}{x}$. Nous sommes alors conduits à imposer au choix de $\psi(x)$ une condition supplémentaire. Je supposerai qu'il existe deux nombres μ_1 et ν_1 tels que les fonctions

$$\frac{x(\log x)^{\mu_1}}{\psi^\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\psi^\lambda}{x(\log x)^{\nu_1}}$$

soient croissantes ou du moins ne décroissent pas dans l'intervalle mn. La dérivée logarithmique de $\psi^{-\lambda}$ satisfera, pour $m < x < n$ aux inégalités

$$\frac{1}{x} + \frac{\nu_1}{x \log x} \leqq - \frac{\frac{d\psi^{-\lambda}}{dx}}{\psi^{-\lambda}} \leqq \frac{1}{x} + \frac{\mu_1}{x \log x}.$$

Ici encore, suivant les valeurs de μ_1 et ν_1 diverses circonstances pourront se présenter.

Soit d'abord $\mu_1 < 1$. On aura

$$(1 - \mu_1)\psi^{-\lambda} \leqq \frac{d}{dx}(\psi^{-\lambda} x \log x).$$

On pourra, par suite, poser, lorsque n devient très grand

(7) $$\int_m^n \psi^{-\lambda} dx = cn \log n [\psi(n)]^{-\lambda} \quad (c \text{ nombre fini}).$$

---

[1] $\log x$ représente ici la valeur arithmétique du logarithme.

Soit maintenant $\nu_1 > 1$. On aura

$$(\nu_1 - 1)\psi^{-\lambda} \leqq -\frac{d}{dx}(\psi^{-\lambda} x \log x),$$

ce qui permettra de poser

$$(8) \qquad \int_m^n \psi^{-\lambda} dx = cm \log m [\psi(m)]^{-\lambda},$$

où c reste fini lorsque m augmente indéfiniment.

Soit enfin $\mu_1 > 1$, $\nu_1 < 1$. On peut exprimer ce fait en disant que dans l'intervalle mn (ou du moins dans un intervalle intérieur à mn), la fonction $\psi^{-\lambda}$ se comporte à la façon de $\frac{1}{x \log x}$. Je ne puis rien dire alors sur la valeur des intégrales précédentes, à moins de faire une hypothèse plus précise sur la croissance de la fonction $\psi(x)$.

Posant, d'une manière générale,

$$\log_2 x = \log \log x, \qquad \log_3 x = \log \log_2 x, \quad \ldots,$$

et désignant par μ_k un nombre quelconque inférieur à 1, par ν_k un nombre quelconque supérieur à 1, je supposerai que l'un des deux rapports

$$\frac{x \log x \ldots (\log_k x)^{\mu_k}}{\psi^\lambda}, \qquad \frac{\psi^\lambda}{x \log x \ldots (\log_k x)^{\nu_k}}$$

soit croissant (ou du moins ne décroisse pas), lorsque k dépasse un certain entier fini.

Dans le premier cas, l'intégrale

$$\int_m^n \psi^{-\lambda} dx$$

est divergente et a une valeur de la forme

$$(9) \qquad I = c\psi^{-\lambda} n \log n \,.\, \log_2 n \ldots \log_k n \quad (c \text{ positif fini}).$$

Dans le second cas, la même intégrale est convergente, et nous obtenons pour elle une valeur de la forme

$$c\psi^{-\lambda} m \log m \ldots \log_k m \quad (c \text{ positif fini}).$$

Si l'on fait croître n jusqu'à $+\infty$ et que l'on change m et n, en se reportant aux notations du § 4, on pourra écrire l'égalité

$$I_1 = c_1 \psi^{-\lambda} n \log n \ldots (\log_k n) \tag{10}$$

où c_1 conserve, lorsque n augmente, une valeur positive finie.

8. On constate ainsi que les hypothèses faites sur $\psi(x)$ permettent bien d'assigner, pour les grandes valeurs de x, une limite supérieure aux intégrales [1] I et I_1.

Il est à remarquer d'ailleurs que les raisonnements précédents n'exigent nullement que λ, μ et ν soient positifs. Soit, d'une manière générale, une fonction réelle et positive $f(x)$, satisfaisant aux conditions suivantes: il existe deux nombres positifs ou négatifs, μ et ν, tels que les fonctions $\frac{x^\nu}{f(x)}$ et $\frac{f(x)}{x^\mu}$ soient croissantes. Si nous écartons, pour simplifier, le cas exceptionnel où $\mu < -1 < \nu$, nous pourrons affirmer que l'intégrale *indéfinie de $f(x)$ devient infinie comme $xf(x)$.*

L'hypothèse faite sur $f(x)$ revient, d'ailleurs, à supposer que la dérivée de $f(x)$ devient infinie comme $\frac{f(x)}{x}$. Nous avons donc démontré que de cette propriété de la dérivée, on a le droit de conclure à celle de l'intégrale. Nous constatons ainsi que la croissance de $f(x)$ est tout-à-fait analogue à celle d'une puissance de x.

---

[1] Dans une note insérée aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences le 4 février 1901, j'ai obtenu les mêmes résultats en suivant une voie un peu différente, mais en imposant à $\psi(x)$ des conditions équivalentes à celles que j'ai énoncées ici. Ces conditions étaient les suivantes:

Si $\rho \neq p$, l'on pose

$$\psi(x) = x^{\frac{1}{\rho}} \psi_1(x)$$

et l'on suppose $\psi_1(x)$ tel que la fonction

$$\varepsilon \log x - \log \psi_1$$

soit positive et croissante lorsque $\varepsilon p < 1 - \frac{p}{\rho}$. $\psi_1(x)$ sera par exemple de la forme

$$(\log x)^{\sigma_1} (\log^{(2)} x)^{\sigma_2} \ldots .$$

Si ρ était égal à p, on isolerait dans la fonction ψ le produit $x^{\frac{1}{\rho}} (\log x)^{\frac{1}{\tau}}$.

9. Revenons maintenant au produit de facteurs primaires $G(z)$ dont nous supposons les zéros connus, et voyons comment nous pourrons former la fonction $\psi(x)$.

Le cas où l'on obtiendra les résultats les plus précis est évidemment celui où la fonction $\omega(x)$ définie au § 4 satisfait elle-même aux conditions imposées à $\psi(x)$. On peut alors substituer ω à ψ dans tous les calculs précédents.

Si l'on introduit dans l'énoncé le genre p et l'ordre ρ du produit $G(z)$, cette classe sera définie par les caractères suivants (on suppose $p \neq 0$):

1°. Lorsque l'ordre ρ n'est pas entier, *il existe un nombre* μ *inférieur à* $\frac{1}{p}$ *et un nombre* ν, *tels que les rapports* $\frac{x^\mu}{\omega(x)}$, $\frac{\omega(x)}{x^\nu}$ *soient croissants à partir d'une certaine valeur de* x.

On a alors l'égalité (5) pour $\lambda \leqq p$ et l'égalité (6) pour $\lambda > p$.

Parmi les classes de fonctions pour lesquelles la condition énoncée est réalisée, il en est une qui doit surtout attirer notre attention: elle comprend les fonctions dont les zéros sont répartis de telle sorte que les deux rapports

$$\frac{i^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}{r_i} \quad \text{et} \quad \frac{r_i}{i^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}}$$

soient croissants à partir d'une certaine valeur de i, quel que soit le nombre ε. Cette classe de fonctions rentre dans celle des *fonctions à croissance régulière* qu'a définie M. Borel; elle comprend toutes les fonctions qui ont été étudiées jusqu'ici par l'analyse.

Les calculs précédents nous permettront d'ailleurs de subdiviser cette classe en faisant sur la croissance de r_i des hypothèses de plus en plus précises.

Mais nous n'épuiserons pas ainsi la famille de fonctions que définissent les conditions imposées plus haut à $\omega(x)$. Cette famille comprend des fonctions *qui ne sont pas à croissance régulière, au sens adopté par M. Borel, mais pour lesquelles le module* r_i *pourra osciller, lorsque* i *croit, entre* $i^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}$ et $i^{\frac{1}{p}-\alpha}$ (ε, α nombres positifs arbitrairement petits). Nous obtiendrons néanmoins sur ces fonctions des résultats aussi précis que sur les précédentes.

10. 2°. *Lorsque $\rho = p$, la classe de fonctions considérée est définie par ce fait qu'outre le nombre ν défini plus haut, il existe un nombre σ inférieur à $\frac{1}{p}$ tel que le rapport $\frac{x^{\frac{1}{p}} (\log x)^{\sigma}}{\omega}$ soit croissant à partir d'une certaine valeur de x.* (La fonction ω se trouve alors satisfaire aux conditions du § 7 avec $\mu_1 < 1$, et l'on a, pour $\lambda = p$, l'égalité (7); l'égalité (5) reste d'ailleurs vérifiée pour $\lambda < p$, l'égalité (6) pour $\lambda > p$).

S'il n'existe pas de tel nombre σ il existe du moins un entier fini k et un nombre σ inférieur à $\frac{1}{p}$ tel que le rapport

$$\frac{x^{\frac{1}{p}} (\log x)^{\frac{1}{p}} \ldots (\log_k x)^{\sigma}}{\omega}$$

soit croissant à partir d'une cnrtaine valeur de x. (On aura alors, pour $\lambda = p$, l'inégalité (9)).

3°. Lorsque $\rho = p + 1$, nous supposerons qu'*il existe* (outre le nombre p défini au § 9) *un entier fini k et un nombre σ supérieur à $\frac{1}{p+1}$ tels que le rapport*

$$\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}} (\log x)^{\frac{1}{p+1}} \ldots (\log_k x)^{\sigma}},$$

soit croissant à partir d'une certaine valeur de x. On aura alors, pour $\lambda = p + 1$, l'inégalité (10).

11. Considérons maintenant le cas général où $\omega(x)$ n'appartient pas à la classe définie par les hypothèses du paragraphe précédent, mais est une fonction croissante satisfaisant simplement aux conditions du § 4. La fonction $\psi(x)$, inférieure ou égale à $\omega(x)$ que l'on doit faire figurer dans les intégrales I et I_1 afin de les rendre calculables par la méthode exposée ci-dessus, ne peut plus alors coïncider avec $\omega(x)$. Cherchons dans quelle mesure elle pourra s'en rapprocher.

Je vais considérer, tout d'abord, le cas où l'ordre ρ n'est pas entier, et montrer qu'*on pourra faire coïncider ψ et ω pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.*

Soit μ un nombre compris entre $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{p}$. Il résulte de la définition même de l'ordre que la fonction $\frac{x^\mu}{\omega(x)}$ prend des valeurs indéfiniment croissantes. On peut, en effet, poser

$$\mu = \mu_1(1 + \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\mu_1} < \rho, \qquad \varepsilon > 0.$$

Si donc il existait un nombre c tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de x

$$\frac{x^{1+\varepsilon}}{\omega^{\frac{1}{\mu_1}}} < c,$$

la série $\sum \frac{1}{r_i^{\frac{1}{\mu_1}}}$ serait convergente, ce qui n'a pas lieu.

Considérons alors la courbe $\frac{x^\mu}{\omega(x)}$. On peut tracer une courbe *représentant une fonction toujours croissante, ou du moins, ne décroissant jamais,* qui reste toujours au-dessus de la courbe $\frac{x^\mu}{\omega(x)}$ et la touche en une infinité de points s'éloignant indéfiniment de l'origine. Nous prendrons pour $\frac{x^\mu}{\psi(x)}$ la plus petite fonction représentée par une telle courbe, et $\psi(x)$, qui coïncidera avec $\omega(x)$ pour des valeurs de x indéfiniment éloignées, satisfera bien, entre m et n, aux conditions énoncées au § 5 (premier cas).

D'autre part, lorsque x varie de n à $+\infty$, on sait que, si n est assez grand, le rapport $\frac{\omega(x)}{x^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$ et, par suite, $\frac{\psi}{x^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$ dévient supérieur à tout nombre donné, quelque petit que soit ε.

Il en résulte que (pour une infinité de valeurs de x figurant parmi les précédentes), ce rapport prend une série de valeurs plus petites que toutes les suivantes. Formons une fonction $\frac{\psi_1(x)}{x^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$ toujours croissante qui coïncidera avec $\frac{\omega}{x^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}$ pour ces valeurs de x. La fonction ψ_1 ainsi définie satisfera bien aux conditions voulues pour $x > n$.

12. Lorsque l'ordre ρ est entier il faut distinguer divers cas.

Soit $\rho = p$, et supposons qu'*il existe un entier k et un nombre σ inférieur à $\frac{1}{p}$ tel que le rapport*

$$\frac{x^{\frac{1}{p}} \dots (\log_k x)^\sigma}{\omega}$$

admette des valeurs indéfiniment croissantes. On pourra alors former, dans l'intervalle mn, une fonction croissante (ou, du moins, ne décroissant jamais) qui ne soit jamais inférieure au rapport considéré et lui soit égale pour des valeurs de x s'éloignant indéfiniment. Cela permettra de faire coïncider ω et ψ pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.

Lorsqu'il n'existe pas d'entier k satisfaisant à la condition indiquée, on remarquera qu'on pourra toujours satisfaire à cette condition quel que soit k, pourvu que l'on remplace ω par $\omega(\log_k x)^{-\varepsilon}$, où ε est un nombre positif arbitrairement petit. Si non il faudrait admettre qu'on peut trouver un nombre positif ε tel que le rapport

$$\frac{x^{\frac{1}{p}} \dots (\log_k x)^{\frac{1}{p}+\varepsilon}}{\omega}$$

reste, à partir d'une certaine valeur de x, inférieur à un nombre fixe, ce qui rendrait convergente la série $\sum \frac{1}{r_i^p}$, laquelle diverge par hypothèse. On peut donc affirmer que l'on pourra, en *tout cas, choisir la fonction ψ de façon que le rapport $\frac{\omega}{\psi}$ soit* (*entre m et n*) *inférieur à* $(\log_k x)^\varepsilon$ *pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.*

On se trouve d'ailleurs placé, pour $x > n$, dans les mêmes conditions que lorsque ρ n'était pas entier.

Supposons enfin que ρ *soit égal à* $p + 1$.

S'il existe un entier k et un nombre σ supérieur à $\frac{1}{p+1}$ tel que le rapport

$$\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}} \dots (\log_k x)^\sigma}$$

reste, à partir d'une certaine valeur de x, supérieur à tout nombre donné, on pourra faire coïncider les fonctions ω et ψ pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.

Mais s'il n'existe pas de tel entier k, les calculs précédents ne nous fourniront aucun renseignement précis sur la valeur du rapport $\frac{\omega}{\psi}$. J'étudierai par une méthode directe, au § 19, les fonctions entières pour lesquelles cette circonstance se présente.

Le module maximum d'une fonction entière d'ordre non entier.

13. Pour déterminer le mode de croissance d'une fonction entière, je m'efforcerai de suivre la voie la plus naturelle; partant du développement d'une telle fonction en produit infini, je considérerai ce produit sur une circonférence ayant pour centre l'origine, et je chercherai une limite supérieure et une limite inférieure de son module en un point quelconque de la circonférence. Je constaterai ensuite que dans des cas étendus ces deux limites coïncident: toutes les propriétés du module maximum de la fonction se trouveront alors résumées par une seule formule.

Soit $F(z)$ une fonction entière de genre fini, $G(z)$ le produit de facteurs primaires contenu dans $F(z)$, en sorte que l'on a

$$F(z) = G(z)e^{H(z)}.$$

$F(z)$ étant de genre fini, le facteur exponentiel $e^{H(z)}$ s'étudie très simplement. C'est donc à l'étude du produit de facteurs primaires, $G(z)$ que je dois m'attacher: cette étude suffit même au point de vue théorique en vertu du théorème de M. PICARD dont je rappelais au § 1 la généralisation.

14. Soit $G(z)$ de genre p et de la forme

$$\prod\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\cdots+\frac{z^p}{pa_i^p}}.$$

Rien ne serait changé aux raisonnements qui vont suivre si ce produit était multiplié par une puissance finie de z, c'est-à-dire si l'origine était un zéro de $G(z)$.

Formons une fonction $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées au § 4. Nous aurons $r_i \geqq \psi(i)$ $(r_i = |a_i|)$.

Suivant alors une méthode analogue à celle qu'a employée M. Borel, je définirai l'entier n par l'égalité

$$r = \eta\psi(n),$$

où η est une constante positive finie. Je supposerai d'ailleurs r assez grand pour que l'on ait $n > m$.

On sait qu'on peut trouver[1] un nombre positif b tel que le $i^{\text{ème}}$ facteur de $G(z)$ soit, en module inférieur, à $e^{b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{p+1}}$. Le produit des facteurs de rang supérieur à n est donc, en module, inférieur à

$$e^{br^{p+1}\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}}}.$$

D'autre part

$$\prod_1^n\left(1-\frac{z}{a_i}\right) < e^{r\sum\limits_1^n\frac{1}{r_i}}.$$

On a, par suite

$$\log|G(z)| < 2r\sum_1^n\frac{1}{r_i} + \ldots + \frac{r^p}{p}\sum_1^n\frac{1}{r_i^p} + br^{p+1}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}}.$$

Si nous supposons m choisi de telle sorte que $\psi(m)$ soit plus grand que 1 (ce qui est légitime, puisque $\psi(x)$ est une fonction croissante), on aura à fortiori

$$(11)\qquad \log|G(z)| < gr^p + 2r\int_m^n\frac{dx}{\psi(x)} + \ldots + \frac{r^p}{p}\int_m^n\frac{dx}{\psi^p} + br^{p+1}\int_n^{\infty}\frac{dx}{\psi^{p+1}}$$

g étant, de même que b, une constante positive finie.

15. Pour évaluer le second membre de l'inégalité (11), je supposerai d'abord que *l'ordre ρ du produit $G(z)$ n'est pas entier.*

Nous plaçant alors, par le choix de $\psi(x)$, dans le premier cas du § 5, nous pouvons remplacer les intégrales définies qui figurent dans l'inégalité (11) par les valeurs obtenues dans ce paragraphe. Faisons, pour $\lambda \leqq \mu$

[1] Voir en particulier Borel, *Leç. sur les fonc. ent.*, p. 51.

$$r^\lambda \int_m^n \frac{dx}{\psi^\lambda} = c_\lambda \eta^\lambda n.$$

Le nombre c_λ sera fini[1] en vertu de l'égalité (5) du § 5 et nous savons en calculer une limite supérieure.

De même

$$r^{p+1} \int_n^\infty \frac{dx}{\psi^{p+1}} = c_{p+1} \eta^{p+1} n,$$

c_{p+1} étant un nombre fini.

L'inégalité (11) devient donc

$$\log |G(z)| < g r^p + g_1 n \qquad (g_1 \text{ nombre fini})$$

ou

(12) $$|G(z)| < e^{hn},$$

h étant un nombre fini; car nous supposons ici $\rho > p$, en sorte que le rapport $\frac{n}{r^p}$ devient infiniment grand en même temps que r.

La démonstration précédente serait en défaut si $G(z)$ était de genre zéro. On poserait dans ce cas $z = u^q$, q étant un entier assez grand pour que la fonction de u, $G(u^q)$ soit de genre *un*. La proposition du § 15 s'applique à $G(u^q)$, ce qui montre que l'on a bien encore l'inégalité (12).

16. De l'inégalité (12), on peut tirer diverses conséquences. *Supposons qu'il existe des nombres $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ telle que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i*

$$r_i^\rho > i (\log i)^{\sigma_1} \ldots (\log_k i)^{\sigma_k}.$$

On prendra

$$\psi(x) = x^{\frac{1}{\rho}} (\log x)^{\frac{\sigma_1}{\rho}} \ldots (\log_k x)^{\frac{\sigma_k}{\rho}}.$$

D'où

$$r^\rho = \eta n (\log n)^{\sigma_1} \ldots (\log_k n)^{\sigma_k}.$$

---

[1] Lorsque je dirai, dans le cours de ce travail, qu'un nombre est fini, j'entendrai par là qu'il reste inférieur à un nombre fixe lorsque r ou n augmente indéfiniment.

Il en résulte évidemment

$$n < \eta_1 r^\rho (\log r)^{-\sigma_1} \ldots (\log_k r)^{-\sigma_k} \quad (\eta_1 \text{ constante positive finie})$$

et *l'on obtient pour* $|G(z)|$, *à partir d'une certaine valeur de* r, *la limite supérieure*

$$|G(z)| < e^{hr^\rho (\log r)^{-\sigma_1} \ldots (\log_k r)^{-\sigma_k}}$$

h restant, lorsque r augmente indéfiniment, inférieur à un nombre fixe. Ainsi se trouve précisé le théorème de M. Borel que j'ai rappelé au § 1.

17. Pour voir quelle précision il convient d'attendre de l'inégalité (12) dans le cas le plus général où l'ordre ρ est supposé non entier, je dois compléter le résultat précédent en donnant une limite inférieure du module maximum $M(r)$ pour $|z| = r$.

On pourrait déduire cette limite des théorèmes de MM. Hadamard et Schou. On l'obtiendra plus rapidement de la façon suivante.

Désignons par n' le nombre des zéros de $G(z)$ dont le module est inférieur à ηr, η étant un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$, et posons

$$G(z) = G_1(z) \prod_1^{n'} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right).$$

Lorsque $i < n'$, la partie réelle de $\log \frac{z - a_i}{a_i}$ a une valeur finie supérieure à $\log \frac{1 - \eta}{\eta}$. D'où

$$\prod_1^{n'} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) > e^{hn'},$$

h étant un nombre positif fini.

Considérons, d'autre part, l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{G_1(z)}{z} dz,$$

en désignant par C le contour du cercle de rayon r ayant son centre à l'origine. Cette intégrale est égale à l'unité. Il est donc certain que le module $|G_1(z)|$ est supérieur à *un* sur une infinité d'arcs de la circonférence C. On a sur ces arcs [1]

$$(13) \qquad |G(z)| > e^{hn'}.$$

Dans cette inégalité on peut donner à h la valeur $\log\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)$. Faisons en particulier $\eta = \frac{1}{e+1}$: on pourra alors remplacer l'inégalité (13) par l'inégalité

$$|G(z)| > e^{n'}.$$

Si, au lieu de $G(z)$, on considérait une fonction entière quelconque $F(z)$, il faudrait substituer à l'inégalité (13) l'inégalité

$$|F(z)| > |F(0)|e^{hn'}.$$

Remarquons enfin que le résultat subsiste si l'on remplace la circonférence C par un contour quelconque de longueur k_1 (k fini), dont tous les points sont à une distance de l'origine égale à $k_1 r$ (k_1 fini).

18. Il nous faut maintenant, pour compléter les résultats des paragraphes précédents, comparer les limites (12) et (13). Nous avons vu au § 11 que, si l'ordre ρ n'est pas entier, on peut toujours choisir la fonction $\psi(x)$ de façon que les fonctions ω et ψ coïncident pour une infinité de valeurs de x indéfiniment croissantes. Donc, pour une infinité de valeurs de r, le nombre n est déterminé par l'égalité $r = \eta r_n$, η étant fini et, si l'on veut, inférieur à $\frac{1}{2}$. On a pour ces valeurs $n' = n$.

Mais il pourra arriver que pour certaines fonctions et pour certaines valeurs de r le nombre n' soit notablement inférieur à n. On voit, en se reportant à la définition de n, qu'il en sera ainsi si la valeur de $\psi(n)$ est elle-même très petite par rapport au module r_n, c'est-à-dire si la fonction $\omega(x)$ prenant la valeur r_i pour $x = i$ ne satisfait pas aux conditions imposées à $\psi(x)$. Il y aurait donc lieu de rendre plus exactes encore les deux limites assignées à $M(r)$ afin d'amener, s'il est possible,

[1] La démonstration sera valable encore si le produit $G(z)$ est de genre infini. Mais, dans ce cas il y aura intérêt à compléter la proposition en donnant à η une valeur voisine de l'unité. J'indiquerai dans la troisième partie cette généralisation qui n'a point ici d'utilité.

ces limites à coïncider. Toutefois de telles recherches ne semblent offrir au point de vue pratique que peu d'intérêt: on n'a jamais rencontré dans les applications et on ne rencontrera vraisemblablement d'ici à longtemps que des fonctions pour lesquelles les nombres n et n' sont égaux. Il nous suffira donc d'avoir obtenu sur ces fonctions un résultat tout-à-fait précis.

Pour savoir dans quel cas on aura le droit d'identifier les nombres n et n', il suffit d'ailleurs de se reporter au § 9, en considérant à nouveau la fonction $\omega(x)$ définie au § 4. S'il existe un nombre positif α tel *que les rapports* $\frac{x^{\frac{1}{\rho}-\alpha}}{\omega}$, $\frac{\omega}{x^{\frac{1}{\rho}-\alpha}}$ *soient croissants à partir d'une certaine valeur de* x nous pouvons dans tous nos calculs remplacer ϕ par ω. En particulier, le nombre n sera défini par l'égalité

$$r = \eta\omega(n) = \eta r_n,$$

η étant un nombre fini quelconque que l'on peut prendre inférieur à $\frac{1}{2}$.

On parviendra ainsi, lorsque $\omega(x)$, c'est à dire r_i, satisfait à la condition qui vient d'être énoncée, à la proposition suivante:

Si l'on désigne par n le nombre des zéros dont le module est inférieur à ηr $\left(\eta < \frac{1}{2}\right)$, on pourra, à partir d'une certaine valeur de r, poser

$$M(r) = e^{hn}, \tag{14}$$

h étant un nombre positif fini. Cette inégalité restera vraie pour toute valeur de r.

L'égalité (14) exprime en résumé toutes les propriétés du module $M(r)$.

19. Parmi les fonctions satisfaisant aux conditions énoncées, nous signalerons en particulier celles pour lesquelles il existe deux rapports croissants de la forme

$$\frac{i^{\frac{1}{\rho}}(\log i)^{\frac{\sigma_1}{\rho}}\dots(\log_k i)^{\frac{\sigma_k+\varepsilon}{\rho}}}{r_i}, \quad \frac{r_i}{i^{\frac{1}{\rho}}\dots(\log_k i)^{\frac{\sigma_k-\varepsilon}{\rho}}}.$$

Ces fonctions sont à *croissance régulière*.

Si l'on considère les puissances de la variable comme les types les plus réguliers de croissance, on pourra dire que la croissance de la fonction $G(z)$ est *parfaitement régulière* lorsque les nombres $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sont tous nuls. On énoncera alors le théorème suivant:

Si l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i = hi^{\frac{1}{\rho}} \quad (h \text{ positif fini})$$

on aura (pour toute valeur de r) *à partir d'une certaine valeur de r*

$$M(r) = e^{h'r^\rho} \qquad (h' \text{ positif fini}).$$

Relativement aux fonctions à croissance régulière, les inégalités (12) et (13) permettront d'énoncer, d'une manière générale, la proposition suivante:

Si l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$i^{\frac{1}{\rho}}(\log i)^{\frac{\sigma_1}{\rho}}\ldots(\log_k i)^{\frac{\sigma_k-\varepsilon}{\rho}} < r_i < i^{\frac{1}{\rho}}(\log i)^{\frac{\sigma_1}{\rho}}\ldots(\log_k i)^{\frac{\sigma_k+\varepsilon}{\rho}}$$

k étant un entier, et ε un nombre arbitrairement petit, l'on aura, à partir d'une certaine valeur de r

$$e^{r^\rho(\log r)^{\sigma_1}\ldots(\log_k r)^{\sigma_k-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^\rho(\log r)^{\sigma_1}\ldots(\log_k r)^{\sigma_k+\varepsilon}}.$$

20. Je vais maintenant compléter les résultats précédents en démontrant la réciproque du théorème énoncé au § 19.

Cette réciproque a été, en partie, établie par M. Borel qui a montré que lorsque $G(z)$ est un produit de facteurs primaires, la double inégalité

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

entraîne, quel que soit ε, à partir d'une certaine valeur de i

$$i^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} < r_i < i^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}.$$

On complète aisément cette proposition en s'appuyant sur l'inégalité (12).

Désignant par n la fonction inverse d'une certaine fonction $\psi(x)$, nous allons montrer que *l'égalité*

$$(15) \qquad M(r) = e^{hn} \quad (h \text{ positif fini})$$

supposée satisfaite à partir d'une certaine valeur de r entraîne à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i = h'\psi(i) \qquad (h' \text{ positif fini}).$$

Nous savons déjà que cette égalité est satisfaite pour des valeurs de i indéfiniment croissantes, et de plus que l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > h'\psi(i).$$

Il s'agit de remplacer cette inégalité par une égalité.

Supposons d'abord que la fonction $\psi(x)$ soit de la forme

$$\psi(x) = x^{\frac{1}{\rho}} (\log x)^{\frac{\alpha_1}{\rho}} \dots (\log_k x)^{\frac{\alpha_k}{\rho}}.$$

Si la proposition énoncée était inexacte, il faudrait admettre que, quelque grand que soit le nombre K, (comparable par exemple à $\log_k n_1$) on a, pour des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes

$$r_{n_1} = K\psi(n_1).$$

Le théorème du § 14 va nous conduire alors à une contradiction.

Faisons-y, en effet

$$r = K_1 \psi(n_1) = \psi(n).$$

D'après la définition de ψ, on aura lorsque n_1 sera assez grand l'inégalité

$$n_1 < (1 + \alpha) K_1^{-\rho} n,$$

où α est un nombre positif qui deviendra, avec $\frac{1}{n_1}$, inférieur à tout nombre donné.

Déterminons d'autre part le nombre n_2 par la condition

$$\psi(n_2) = K\psi(n_1)$$

d'où résulte l'inégalité

$$n_2 < (1 + \alpha_1) K^{\rho} n_1$$

(α_1 devenant, comme α, arbitrairement petit avec $\frac{1}{r}$).

Nous allons nous reporter à l'inégalité fondamentale du § 14, où nous remplacerons n par n_1. Elle devient

$$\log|G(z)| < 2r\sum_1^{n_1}\frac{1}{r_i} + \ldots + \frac{r^p}{p}\sum_1^{n_1}\frac{1}{r_i^p} + b_r^{n+1}\sum_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}}.$$

Lorsque $i < n_1$, on a $r_i > h'\psi(i)$.

Donc, si λ est un nombre inférieur à p, on a (§ 5)

$$r^\lambda\sum_1^{n_1}\frac{1}{r_i^\lambda} < c_\lambda r^\lambda\frac{n_1}{[\psi(n_1)]^\lambda} = c_\lambda K_1^\lambda n_1 \quad (c_\lambda \text{ constante positive finie}).$$

D'autre part

$$r^{p+1}\sum_{n_1+1}^{n_2}\frac{1}{r_i^{p+1}} < n_2\frac{r^{p+1}}{r_i^{p+1}} < (1+\alpha_1)K_1^{p+1}K^{\rho-p-1}n_1;$$

pour $i > n_2$, nous nous servons de nouveau de l'inégalité $r_i > h'\psi(i)$, et nous avons

$$r^{p+1}\sum_{n_2+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}} < c_{p+1}r^{p+1}\frac{n_2}{[\psi(n_2)]^{p+1}} < c_{p+1}(1+\alpha_1)K_1^{p+1}K^{\rho-p-1}n_1.$$

Posons alors

$$K_1 = K^{1-\beta},$$

β étant un nombre positif inférieur à 1. On aura

$$K_1^\lambda n_1 < K^{(1-\beta)(\lambda-\rho)}(1+\alpha)n, \qquad K_1^{p+1}K^{\rho-p-1}n_1 < K^{-\beta(p+1-\rho)}(1+\alpha)n$$

et par suite, si l'on se reporte à l'inégalité qui limite $\log|G(z)|$

$$M(r) < eK^{-c}n,$$

c étant un nombre positif fini.

Puisque K est arbitrairement grand, cette dernière inégalité est en contradiction avec l'inégalité (15). L'hypothèse faite sur r_{n_1} est donc inadmissible, ce qu'il fallait démontrer.

On parviendrait au même résultat en faisant sur la fonction $\psi(x)$ des hypothèses plus générales. Ainsi, l'on démontre [1] sans peine que le théorème précédent subsiste intégralement si l'on suppose simplement que *la fonction $\psi(x)$ satisfait aux conditions du § 9, et que l'on a de plus*

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu} < \beta\left(p + 1 - \frac{1}{\mu}\right),$$

μ et ν étant les deux nombres (compris entre le genre p et l'ordre ρ) que nous avons définis au § 9, et *β un nombre positif inférieur à* 1.

21. J'ai supposé dans ce qui précède que K était un nombre pouvant dépasser tout nombre donné. Mais rien n'empeche, dans le raisonnement précédent, de faire de K une fonction croissante de r.

Soit par exemple

$$K = (\log_k r)^\varepsilon,$$

ε étant un nombre arbitrairement petit. La démonstration précédente établit que s'il existait des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes, telles que l'on ait

$$r_{n_1} = (\log_k r)^\varepsilon \psi(n_1)$$

on aurait, pour des valeurs de r indéfiniment croissantes

$$M(r) < e^{(\log_k r)^{-\varepsilon c} n}.$$

D'où le théorème suivant:

Si, quelque petit que soit le nombre ε_1, la double inégalité

$$e^{hn} > M(r) > e^{(\log_k r)^{-\varepsilon_1} n}$$

[1] Si A est un nombre positif plus grand que 1, on a

$$A^\nu < \frac{\psi(Ax)}{\psi'(x)} < A^\mu.$$

L'égalité $K_1\psi(n_1) = \psi(n)$ entraîne donc $n_1 < K_1^{-\frac{1}{\mu}} n$, et l'égalité $\varphi(n_2) = K\psi(n_1)$ suppose $n_2 < K^{\frac{1}{\nu}} n_1$.

Tous les calculs faits plus haut subsistent alors, ρ étant remplacé par l'un des deux nombres $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$.

ne cesse pas d'être vérifiée, à partir d'une certaine valeur de r, *il en sera de même, de la double inégalité*

$$h'\psi(i) < r_i < (\log_k r_i)^{\varepsilon}\psi(i)$$

à partir d'une certaine valeur de r_i *(quelque petit que soit* ε*).*

Ce théorème, joint à celui du § 17, nous permet en particulier d'énoncer la réciproque de la proposition démontrée à la fin du § 19 relativement aux fonctions à croissance régulière.

Un cas particulièrement intéressant où le théorème trouve à s'appliquer sous sa première forme est celui où la fonction étudiée est à croissance parfaitement régulière, suivant le sens que j'ai donné à cette expression au § 19. On a alors le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que le module maximum $M(r)$ *soit, quel que soit* r, *égal à l'exponentielle* $e^{hr^{\rho}}$ *où* h *est un nombre fini, est que le rapport* $\frac{r_n^{\rho}}{n}$ *soit fini, quel que soit* n.

Nous constatons ainsi que, au point de vue qui nous occupe, les inégalités (12) et (13) donnent des renseignements suffisamment précis sur la croissance de $M(r)$, lorsque l'ordre ρ du produit $G(z)$ n'est pas entier. Elles conduisent à cette conclusion[1] que l'ordre de grandeur de $M(r)$ est déterminé par le nombre des zéros contenus dans le cercle de rayon r ayant pour centre l'origine. Ainsi se poursuit l'analogie déjà observée entre une fonction entière et un polynôme.

Je complèterai les résultats précédents dans la seconde partie de ce travail en étudiant les dérivées successives de $G(z)$. Mais je dois auparavant m'occuper du cas particulier que j'ai laissé de côté: celui où l'ordre ρ de $G(z)$ est entier. Je serai ainsi amené à aborder le problème de la détermination du genre d'une fonction entière. Je me proposerai, en particulier, de déterminer dans les cas restés douteux, le genre de la somme de deux fonctions entières.

---

[1] La présence dans la fonction entière étudiée d'un facteur exponentiel $e^{H(z)}$ ne modifierait rien aux résultats obtenus, puisque ρ est supposé non entier.

Les fonctions d'ordre entier et la détermination du genre.

22. Supposons que l'ordre ρ du produit de facteurs primaires $G(z)$ soit entier et *égal à* p. La proposition du § 17 subsistera sans modifications et l'on aura encore

$$M(r) > e^{hn'} \qquad (h \text{ fini}).$$

Au contraire, si nous cherchons à assigner à $M(r)$ une limite supérieure, nous rencontrerons des difficultés qui ne se présentaient pas lorsque ρ n'était pas entier.

Considérons de nouveau l'inégalité (11) obtenue au § 14. Nous voyons que si $\rho = p$, toutes les intégrales du second membre de cette inégalité auront la même limite que dans le cas général, excepté l'intégrale

$$\int_m^n \frac{dx}{[\psi(x)]^p}.$$

Nous pourrons donc, en tout cas, poser

$$|G(z)| < e^{hn + \frac{r^p}{p}\sum_1^n \frac{1}{r_i^p}},$$

h étant fini et n étant le nombre défini au § 14.

Pour obtenir une limite supérieure de la somme $\sum_1^n \frac{1}{r_i^p}$, nous allons être amenés à faire sur la fonction $\psi(x)$ une hypothèse supplémentaire; nous la supposerons choisie de telle sorte qu'il existe un nombre ρ_1 supérieur à p tel que le rapport

$$\frac{x^{\frac{1}{p}} (\log x)^{\frac{1}{\rho_1}}}{\omega}$$

soit croissant à partir d'une certaine valeur de x.

Nous aurons alors, en appliquant les résultats du § 5

$$r^p \int_m^n \frac{dx}{\psi^p} < cn \log n \qquad (c \text{ positif fini}).$$

D'où

(19) $$|G(z)| < e^{hr^p + h_1 n \log n} \qquad (h, h_1 \text{ positifs finis}).$$

Pour comparer les nombres n et n', nous suivons la discussion du § 12:

1°. *S'il existe un nombre σ inférieur à $\frac{1}{p}$ tel que le rapport*

$$\frac{x^{\frac{1}{p}} (\log x)^\sigma}{\omega}$$

admette des valeurs indéfiniment croissantes, on est assuré que les nombres n et n' coïncident pour des valeurs de r indéfiniment croissantes.

2°. S'il n'existe pas de tel nombre σ, soit ε un nombre arbitrairement petit: nous sommes certains que le rapport $\frac{n}{n'}$ sera inférieur à $(\log n)^\varepsilon$, pour des valeurs de r indéfiniment croissantes; cela résulte immédiatement du fait que le rapport des fonctions inverses $\frac{\omega}{\psi}$ est lui-même inférieur à $(\log x)^\varepsilon$ pour des valeurs de x indéfiniment croissantes (§ 12), puisque $\psi(x)$ reste compris entre deux puissances positives de x.

On peut, lorsque l'on y a intérêt, pousser plus loin l'approximation en faisant sur la fonction $\psi(x)$ une hypothèse plus précise. On pourra alors remplacer l'inégalité (19) par une égalité de la forme

(20) $$|G(z)| < e^{hr^p + h_1 n \log n \ldots \log_k n},$$

h et h_1 étant des constantes positives finies et k un entier quelconque. Le rapport $\frac{n}{n'}$ peut être alors, dans le cas le plus général, inférieur à $(\log_k n)^\varepsilon$.

23. Si ρ, au lieu d'être égal à p, était égal à $p+1$, on obtiendrait des résultats analogues. Ce serait alors l'intégrale

$$\int_n^\infty \frac{dx}{\psi^{p+1}}$$

qui fournirait une limite exceptionnellement élevée.

Supposons la fonction ψ choisie de telle sorte qu'il existe un nombre ρ_1 inférieur à $p + 1$ tel que le rapport

$$\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}} (\log x)^{\frac{1}{\rho_1}}}$$

soit croissant à partir d'une certaine valeur de x. On aura dans ce cas, l'inégalité (19). Il pourra être avantageux dans certains cas, de faire sur $\psi(x)$ une hypothèse plus précise. On pourra remplacer alors l'inégalité (19) par l'inégalité (20).

On comparera n et n' à l'aide des résultats du § 12. S'il existe un entier k et un nombre σ supérieur à $\frac{1}{p+1}$ tel que le rapport

$$\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}} \ldots (\log_k x)^{\sigma}}$$

surpasse tout nombre donné lorsque r est assez grand, on pourra faire coïncider n et n' pour des valeurs de x indéfiniment croissantes.

Lorsqu'il n'existe pas de tel entier k, nous ne savons pas quelle précision nous pouvons attendre de la méthode de sommation exposée au § 7. Dans ce cas, nous emploierons pour obtenir une limite supérieure de $|G(z)|$ le théorème [1] démontré en 1883 par M. Poincaré:

Quelque petit que soit le nombre α, on a à partir d'une certaine valeur de r

$$|G(z)| < e^{\alpha r^{p+1}}.$$

Dans le cas où nous nous plaçons maintenant, le rapport $\frac{\omega}{x^{\frac{1}{p+1}} \ldots (\log_k x)^{\frac{1+\varepsilon}{p+1}}}$ est, pour des valeurs de x indéfiniment croissantes, inférieur à un nombre fini (quelque petit que soit ε). On a donc, pour des valeurs de n' indéfiniment croissantes

$$r_{n'}^{p+1} < cn' (\log n') \ldots (\log_k n')^{1+\varepsilon}.$$

Il en résulte que si l'on adopte pour $\log|G(z)|$, la limite supérieure αr^{p+1}, le rapport de cette limite à $n'(\log n') \ldots (\log_k n')$ sera inférieur à $(\log_k n')^{\varepsilon}$ pour des valeurs de r indéfiniment croissantes.

[1] Bulletin de la Société Mathématique, 1883.

24. On voit combien le résultat est moins précis que celui auquel nous étions parvenus en supposant ρ non entier. Il nous est impossible maintenant de faire coïncider la limite supérieure et la limite inférieure du module maximum $M(r)$. On pourrait supposer que ces limites sont mauvaises. Il n'en est rien puisque nous connaissons des fonctions dont le module maximum reste très voisin soit de l'une soit de l'autre. Ainsi, pour reprendre l'exemple que je signalais en commençant, le module maximum de la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$ est, pour toute valeur de e, égal à $e^{hn \log n}$. Au contraire celui de $\sin \frac{\pi z}{2}$ est comparable à e^{hn}.

Pour les fonctions $\sin \frac{\pi z}{2}$ et $\frac{1}{\Gamma(z)}$ l'ordre est égal au genre (ici à l'unité). On peut très facilement former des fonctions de genre p et d'ordre $p+1$ qui présentent les mêmes particularités. Par exemple, si p est pair et si les zéros sont deux à deux égaux et de signes contraires $G(z)$ est une fonction de z^2 dont l'ordre n'est pas entier: on lui appliquera la proposition du § 14 et l'on pourra conserver, pour le module $|G(z)|$ la limite supérieure (12). Au contraire, si les zéros sont tous réels et positifs, l'intégrale $\int_n^\infty \frac{dx}{\psi^{p+1}}$ se rapproche beaucoup de la limite que nous lui avons assignée. Considérons par exemple la fonction de genre zéro qui a pour zéros les points réels $i(\log i)^2$, i prenant toutes les valeurs entières positives. Désignons par n le nombre des zéros dont le module est inférieur à $2r$. On aura pour z réel et négatif

$$\prod_1^n \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) > 1, \qquad \prod_{n+1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) > e^{hr \int_n^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}} > e^{h_1 n \log n},$$

h et h_1 étant des constantes finies. On sait en effet que si $\left|\frac{z}{a_i}\right|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, on peut poser[1]

$$\left(1 + \left|\frac{z}{a_i}\right|\right) = e^{g\left|\frac{z}{a_i}\right|},$$

g étant un nombre positif fini.

---

[1] On a, si $0 < a < \frac{1}{2}$, $\log(1+a) > a - \frac{a^2}{2}\frac{1}{1-a} > \frac{a}{2}$.

Nous reconnaissons ainsi que, lorsque l'ordre ρ est entier, les arguments des zéros peuvent avoir une influence appréciable sur la croissance de $G(z)$. La considération de ces arguments peut seule nous permettre de choisir entre la limite (12) et la limite (20). Il est vrai que la limite (20) donne déjà sur la croissance de $M(r)$ un renseignement assez précis; mais elle ne permet pas de répondre à une question que l'on semblait en droit de se poser: nous ne savons pas, jusqu'ici, si le mode de croissance d'une fonction entière suffit toujours à caractériser son genre.

Il ne faudrait pas croire cependant que l'intervention des arguments des zéros doive nous priver de toute proposition générale à l'endroit des fonctions d'ordre entier. Mais, pour approfondir cette question, il nous faut d'abord étudier un problème qui fut posé pour la première fois par M. Hadamard: ce problème a rapport au module minimum du produit de facteurs primaires $G(z)$ sur une infinité de cercles, de rayon indéfiniment croissants, ayant leur centre à l'origine.

25. M. Hadamard a comparé le module minimum de $G(z)$ à une exponentielle de la forme $e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$. Je me propose de préciser son théorème comme je l'ai fait plus haut pour d'autres propositions du même genre.

Considérons de nouveau la fonction $\psi(x)$ qui nous a déjà servi au § 14 et déterminons le nombre n par l'égalité

$$\eta r = \psi(n)$$

η étant un nombre fini supérieure à 2. On peut déterminer un nombre positif b tel que l'on ait pour $i > n$

$$\left|\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\dots+\frac{z^p}{pa_i^p}}\right| > e^{-b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{p+1}},$$

b étant un nombre fini. On en déduit, en raisonnant comme au § 14,

$$(21) \qquad \left|e^{z\sum_1^n\frac{1}{a_i}+\dots+\frac{z^p}{p}\sum_1^n\frac{1}{a_i^p}}\prod_{n+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\dots+\frac{z^p}{pa_i^p}}\right| > e^{-gr^p-r\int_m^n\frac{dx}{\psi(x)}\dots-br^{p+1}\int_n^{\infty}\frac{dx}{[\psi(n)]^{p+1}}},$$

g et m étant des nombres finis (m entier).

Si ρ n'est pas entier, le second membre de cette inégalité sera supérieur à

$$e^{-hn},$$

h étant un nombre fini.

Si ρ était entier nous choisirions la fonction $\psi(x)$ comme au § 18 et le second membre de (21) serait alors en tout cas supérieur à une expression de la forme

$$e^{-hr^p - h_1 n \log n \ldots \log_k n}$$

k étant un nombre entier, h et h_1 des constantes positives finies.

26. Il nous faut maintenant chercher une limite inférieure du produit

$$\prod_1^n \left(1 - \frac{z}{a_i}\right).$$

Ce produit est, en module, supérieur à

$$\prod_1^n \left|1 - \frac{r}{r_i}\right| \qquad (r_i = |a_i|).$$

Considérons d'abord les facteurs relatifs aux zéros pour lesquels on a

$$\text{soit } \frac{r}{r_i} > 1 + \alpha, \quad \text{soit } \frac{r}{r_i} < 1 - \alpha \qquad (\alpha \text{ positif}).$$

Leur produit est évidemment supérieur à $e^{n \log \alpha}$. Le produit des facteurs restants est de la forme

$$(22) \qquad \prod_m^{n'} \left|1 - \frac{r}{r_i}\right| \qquad (r_m < r < r_{n'}).$$

Pour étudier ce dernier produit, considérons sur une demi-droite issue de l'origine un segment égal à ηr, et marquons sur ce segment les points $r_1, r_2, \ldots, r_{n'}$. Décomposons notre segment en petits segments égaux en nombre supérieur à $4n'$, et soient $s_1, s_2, \ldots, s_{4n'}, \ldots$ les segments ainsi définis. Je vais marquer d'un signe convenu certains de ces segments en procédant de la manière suivante. Soit s_i un segment qui contient q points r_i: je marque s_i, puis les q segments qui suivent s_i vers la droite et les q segments qui le précèdent à gauche. Si l'un des segments ainsi marqués,

s_j, contient à son tour q' points r_i, je marquerai encore les q' segments qui suivent s_{i+q} et les q' segments qui précèdent s_{i-q}, et ainsi de suite.

Lorsque l'opération est achevée, le nombre des segments marqués est $3n'$ au plus. Il existe donc, en vertu des hypothèses faites, au moins n' segments non marqués. En particulier, il existe des segments non marqués dont les points sont à une distance de A et de B proportionnelle à r. Ainsi lorsque r' appartient à l'un de ces segments, on a bien

$$\text{pour } i < m \qquad \frac{r'}{r_i} > 1 + \alpha$$

$$\text{et pour } i > n' \qquad \frac{r'}{r_i} < 1 - \alpha' \qquad (\alpha \text{ et } \alpha' \text{ positif fini}).$$

Soit maintenant r_k le premier zéro situé à gauche du point r'. On aura

$$r_{k+1} - r' > \eta r \frac{1}{4n'}, \ \ldots r_{k+i} - r' > \eta r \frac{i}{4n'} \cdots,$$

$$r' - r_k > \eta r \frac{1}{4n'}, \ \ldots r' - r_{k-i+1} > \eta r \frac{i}{4n'} \cdots.$$

27. Il va être facile, maintenant, d'obtenir pour $r = r'$ une limite inférieure du produit (22). Soit en effet

$$n' = k + \nu.$$

On aura, évidemment

$$\prod_{i=1}^{i=\nu} \left(\frac{r_{k+i} - r'}{r'}\right) > e^{-g\nu - \nu \log n' + \sum\limits_{1}^{\nu-1} \log i},$$

g étant positif fini, ou

$$\prod_{i=1}^{i=\nu} \left(\frac{r_{k+i} - r'}{r'}\right) > e^{-g\nu - \nu \log n' + \int\limits_{1}^{\nu} (\log x)\, dx} > e^{-g_1\nu - \nu(\log n' - \log \nu)}.$$

Or, puisque $\nu < n'$, on a

$$\nu \log \frac{n'}{\nu} < n',$$

par suite

$$\prod_{i=1}^{i=\nu} \left(\frac{r_{k+i} - r'}{r'}\right) > e^{-hn'},$$

h étant un nombre positif. De même

$$\prod_{i=m}^{i=k}\left(1-\frac{r'}{r_i}\right) > e^{-gk-k\log n'+\int_1^k(\log x)\,dx} > e^{-h_1 n'}.$$

Finalement, on pourra poser

$$\prod_1^{n'}\left(1-\frac{r'}{r_i}\right) > e^{-hn'}$$

et h restera inférieur à un nombre fixe lorsque r augmentera indéfiniment.

Nous pourrons par suite énoncer le théorème suivant: *Si l'ordre ρ n'est pas entier, on a sur une infinité de cercles C de rayons indéfiniment croissants* [1]

$$(23) \qquad |G(z)| > e^{-hn},$$

n étant le nombre défini au § 21, et h restant inférieur à un nombre fixe.

[1] On pourrait déterminer avec plus de précision la situation des cercles C et se demander s'ils forment des couronnes de quelque épaisseur. Le raisonnement du § 26 prouverait que dans un cercle C de rayon r, les couronnes où l'inégalité (23) est satisfaite forment une portion finie de l'aire totale C. Mais il est facile d'aller beaucoup plus loin si l'on remplace h par une fonction croissante quelconque de n, par exemple par $\log n$. Considérons à part dans le produit (22) tous les facteurs pour lesquels la différence $r - r_i$ est, en module, supérieure à $\frac{r}{n}$. Le produit de ces facteurs est supérieur à

$$e^{-hn\log n}.$$

Les valeurs de r_i laissées de côté se trouvent toutes sur un segment $\overline{ss_1}$, proportionnel à $\frac{r}{n}$ qui sera infiniment petit par rapport à r, lorsque r augmentera indéfiniment. Le nombre ν des points r_i situés sur un tel segment sera donc infiniment petit par rapport à n, sauf peut-être pour un nombre négligeable de segments ss_1. Raisonnons alors sur le segment ss_1 comme au § 26, en remplaçant η par $\frac{\eta}{n}$. Nous le décomposerons en n parties et nous pouvons affirmer que le nombre des intervalles partiels dans lesquels on n'a pas

$$r_k - r' > \eta\frac{r}{n^2} \dots r_{k+i} - r' > \eta r\frac{i}{n^2}$$

est infiniment petit par rapport à ss_1 (puisque ce nombre est proportionnel à ν).

On en déduit que *dans le cercle C de rayon r, les couronnes où l'on n'a pas*

$$|G(z)| > e^{-hn\log n}$$

forment lorsque r augmente indéfiniment une aire infiniment petite par rapport à l'aire totale C.

Si ρ était entier, la limite inférieure de $|G(z)|$ serait, sur des cercles de rayons indéfiniments croissants, celle du second membre de (21).

Ce théorème fait pendant à celui du § 13. Nous pouvons en tirer le résultat suivant qui correspond au théorème de M. Poincaré:

Si $F(z)$ est une fonction entière quelconque de genre p il existe une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a

$$|F(z)| > e^{-\varepsilon r^{p+1}},$$

quelque petit que soit le nombre ε.

28. Le théorème précédent va nous permettre de compléter les résultats que nous avons obtenus sur la croissance des fonctions d'ordre entier.

La série $\sum \frac{1}{r_i^p}$ étant divergente, le nombre n' des zéros de module inférieur à r sera en général, pour une infinité de valeurs de r, supérieur à cr^p, c étant une constante finie. Le module maximum $M(r)$ sera alors, pour ces valeurs de r supérieur à

$$e^{hr^p} \qquad (h \text{ positif et fini}).$$

Cette propriété peut servir à caractériser les fonctions de genre égal ou supérieur à p. Nous savons, en effet, qu'elle ne peut pas appartenir à une fonction de genre $p-1$.

Mais il est possible, lorsque $\rho = p$, que les nombres n' et n restent, à partir d'une certaine valeur de r, inférieurs à εr^p, quelque petit que soit ε. Il en sera ainsi, par exemple, pour la fonction de genre 1 qui admet pour zéros les points $\log 1$, $2 \log 2$, $3 \log 3$, ... (on fera dans ce cas $\psi(x) = x \log x$).

Considérons une telle fonction. Elle sera, dans le cas le plus général, de la forme

$$F(z) = e^{Az^p + H(z)} G(z),$$

$G(z)$ étant un produit de facteurs primaires et $H(z)$ un polynôme de degré $p-1$; nous poserons

(24) $$F(z) = e^{H(z) + Az^p + z^p \sum_1^n \frac{1}{pa_i^p}} G_1(z),$$

n étant toujours le nombre défini au § 14.

Soit $\sum_1^n \frac{1}{pa_i^p} = B$. En général le nombre $A + B$ sera supérieur en module à un nombre positif fini h, pour des valeurs de n indéfiniment croissantes. Soit r la valeur de $|z|$ correspondant à l'une de ces valeurs de n. A l'intérieur de la couronne limitée par les cercles de rayons r et ηr (η nombre positif fini) ayant leur centre à l'origine, on aura dans certains angles

$$\left| e^{Az^p + \frac{z^p}{p}\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}} \right| > e^{hr^p}.$$

Appliquons, d'autre part, à la fonction $G_1(z)e^{H(z)}$ le théorème du § 27; nous pouvons affirmer, en conservant les notations de ce paragraphe, que l'on a sur une infinité de cercles compris dans la couronne

$$|G_1(z)e^{H(z)}| > e^{-h_1 n} \qquad (h_1 \text{ positif fini}).$$

Donc, puisque nous supposons ici que

$$n < \varepsilon r^p,$$

on aura en certains points de ces cercles

$$|F(z)| > e^{hr^p}.$$

Cette inégalité est satisfaite pour des valeurs de r indéfiniments croissants. C'est bien là encore une propriété caractéristique des fonctions de genre p.

29. Mais le raisonnement précédent serait en défaut si la somme $A + \sum_1^n \frac{1}{pa_i^p}$ était infiniment petite. Or cette circonstance peut se présenter. En disant que $F(z)$ est de genre p, nous avons supposé, sans doute, que la série $\sum \frac{1}{a_i^p}$ n'est pas absolument convergente: mais il peut arriver que cette série soit semi-convergente (les a_i étant rangés par ordre de modules croissants) et ait pour somme $-A$. Il se peut alors que l'on ait à partir d'une certaine valeur de n

$$A + \sum_1^n \frac{1}{pa_i^p} < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε.

D'ailleurs, en vertu de l'inégalité (12), on aura toujours, à partir d'une certaine valeur de r

$$|G_1(z)e^{H(z)}| < e^{hn} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

Si donc, comme nous continuons à le supposer, $F(z)$ est tel que l'on puisse choisir la fonction ψ de façon que

$$n < \varepsilon r^p$$

(à partir d'une certaine valeur de r, quelque petit que soit ε) l'inégalité $A + \sum_1^n \frac{1}{pa_i^p} < \varepsilon$ entraînera, (en vertu de (24)) à partir d'une certaine valeur de r

$$(25) \qquad |F(z)| < e^{\varepsilon r^p},$$

où ε est arbitrairement petit.

Dans ce cas exceptionnel *le module maximum de $F(z)$ perd tous les caractères qui distinguaient cette fonction de genre p des fonctions de genre inférieur.*

La fonction $F(z)$ peut croître moins vite que certaines fonctions de genre $p-1$. Supposons par exemple qu'elle soit un produit de facteurs primaires admettant pour zéros les points réels

$$a_i = \psi(i) = \pm i \log i \,.\, \log_2 i$$

(i prenant toutes les valeurs entières positives) $F(z)$ satisfera, dans ces conditions, à l'inégalité (12) du § 13 et l'on aura à partir d'une certaine valeur de r

$$|F(z)| < e^{hr(\log r)^{-1}(\log_2 r)^{-1}} \qquad (h \text{ fini}).$$

Or nous avons vu au § 24 que la fonction de genre zéro qui admet pour zéros les points $i(\log i)^2$ (i prenant toutes les valeurs entières positives) a son module maximum comparable à

$$e^{hn\log n},$$

n désignant le nombre des zéros de module inférieur à $2r$, c'est-à-dire à

$$e^{hr(\log r)^{-1}}.$$

Cette fonction de genre zéro croît donc plus vite que la fonction de genre un $F(z)$. Le cas exceptionnel qui vient d'être signalé présente par suite, au point de vue de la recherche du genre, des difficultés spéciales, et son étude va nous conduire à des résultats inattendus.

30. M. HADAMARD a, le premier, déterminé le genre d'une somme de deux fonctions entières, lorsque ces fonctions ne sont pas d'ordre entier. Il a démontré que, dans ce cas, *la somme de deux fonctions de genre p est, au plus, de genre p.* Cette proposition n'a pas pu, jusqu'ici, être étendue aux fonctions d'ordre entier. Cependant l'avis commun des auteurs qui ont écrit sur ce sujet, était que, suivant toute vraisemblance, elle devait subsister pour ces fonctions. Je vais montrer qu'il en est bien ainsi en général, mais que la proposition peut cependant être en défaut dans certains cas exceptionnels.

Soit $f_1(z)$ une fonction de genre p à laquelle nous ajoutons une fonction $f_2(z)$ de genre inférieur à p. Si $f_1(z)$ ne présente pas les anomalies signalées au § 29, on a sur une infinité de cercles

$$|f_1(z)| > e^{hr^p}, \qquad |f_2(z)| < e^{\varepsilon r^p},$$

h étant fini et ε arbitrairement petit, par suite

$$|f_1(z) + f_2(z)| > e^{hr^p},$$

ce qui prouve que la somme $f_1(z) + f_2(z)$ est de genre p.

$f_1(z)$ ne peut donc pas être la somme de deux fonctions de genre inférieur à p. Ce résultat équivaut à celui qu'a obtenu M. HADAMARD dans le cas des fonctions d'ordre non entier.

Mais les choses ne se passeront plus ainsi si $f_1(z)$ satisfait à l'inégalité (25). On aura, dans ce cas, à partir d'une certaine valeur de r

$$|f_1(z) + f_2(z)| < e^{\varepsilon r^p}, \tag{26}$$

ε étant arbitrairement petit, ce qui ne permet pas d'affirmer que la somme $f_1 + f_2$ est de genre p. Supposons que cette somme soit la fonction $F(z)$ du § 28, et appelons a_i ses zéros. L'inégalité (26) prouve que la série $\sum \frac{1}{a_i^p}$ est semi-convergente et a pour somme $-A$. Mais elle ne prouve pas que la série des modules $\sum \frac{1}{|a_i|^p}$ soit divergente. Or de ce que cette condition est satisfaite pour $f_1(z)$ il ne résulte pas qu'elle le soit pour $F(z)$.

En d'autres termes, si l'on ajoute, par exemple, à la fonction $F(z)$ définie au § 19 une fonction du genre zéro croissant plus vite que $F(z)$, rien ne paraît s'opposer à ce que la somme soit elle-même de genre zéro.

Il existe ainsi un cas exceptionnel où la somme de deux fonctions de genre p paraît se comporter comme une fonction de genre $p+1$. Je vais montrer par un exemple que cette circonstance se présente en effet.

31. Soit $f_1(z)$ un produit de facteurs primaires de genre zéro, ayant tous ses zéros a_i réels et positifs. On sait que $|f_1(z)|$ prend la même valeur lorsque l'on donne à la variable z deux valeurs imaginaires conjuguées. Cherchons comment se comporte $f_1(z)$ lorsque z est au-dessus de l'axe des quantités réelles, en supposant que a_i satisfasse, à partir d'une certaine valeur de i, à la double inégalité

$$i(\log i)^{1+\alpha-\gamma} < a_i \leqq i(\log i)^{1+\alpha},$$

α étant un nombre positif *plus petit que* un et γ arbitrairement petit. Nous supposerons par exemple que l'on ait

$$4\gamma < 1-\alpha.$$

Appelons $-\zeta$ la partie réelle de z et supposons-la d'abord négative. Déterminons ensuite le nombre n par l'égalité

$$n(\log n)^{1+\alpha} = \eta r, \tag{27}$$

η étant un nombre *plus grand que* 2. Nous avons, lorsque $\zeta > 0$

$$\left|\prod_1^n \left(1-\frac{z}{a_i}\right)\right| > 1 \quad \text{et} \quad \left|\prod_{n+1}^\infty \left(1-\frac{z}{a_i}\right)\right| > e^{k\zeta\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{a_i}}$$

(k étant un nombre positif), car on a $|z-a_i| \geqq \zeta + a_i$. Or

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{a_i} > \int_n^\infty \frac{dx}{x(\log x)^{1+\alpha}} = \frac{n\log n}{\alpha n(\log n)^{1+\alpha}}.$$

Posons $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$. On a $\zeta = -r\cos\theta$. Il en résulte que

$$\zeta\sum_{m'}^{\infty}\frac{1}{a_i} > k_1 n \log n\,|\cos\theta| \qquad (k_1 \text{ fini})$$

et l'on a

$$(28) \qquad |f_1(z)| > e^{hn\log n|\cos\theta|} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

Soit alors β un nombre arbitrairement petit supérieur à γ. Tant que l'on a

$$-\cos\theta > \frac{1}{(\log r)^{1-\beta}}$$

on a, en vertu de (27),

$$(29) \qquad |f_1(z)| > e^{hn(\log n)^\beta} > e^{h_1 r(\log r)^{-1-\alpha+\beta}}.$$

Supposons maintenant que la partie réelle $-\zeta$ de z soit positive. Posant encore $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$, montrons que tant que $\cos\theta$ satisfera à l'inégalité

$$\cos\theta > \frac{1}{(\log r)^{1-\beta}}$$

l'on aura

$$(30) \qquad |f_1(z)| < e^{-h'n(\log n)^\beta} < e^{-h'_1 r(\log r)^{-1-\alpha+\beta}},$$

h' et h'_1 étant des nombres positifs finis.

Pour établir cette inégalité, il suffit de remarquer que l'ordre de la fonction de $z^2\, f_1(z)f_1(-z)$ n'étant pas entier, on peut appliquer à cette fonction le théorème du § 14. On a donc

$$(31) \qquad |f_1(z)f_1(-z)| < e^{h_2 r(\log r)^{-1-\alpha+\gamma}} \qquad (h_2 \text{ positif fini}).$$

Or puisque $\gamma < \beta$, cette inégalité ne peut être compatible avec l'inégalité (29) que si l'on a au point $-z$ l'inégalité (30).

32. Désignons maintenant par $f_2(z)$ un produit de facteurs primaires ayant tous ses zéros b_i réels et négatifs, et supposons que l'on ait

$$i(\log i)^{1+\alpha'-\gamma'} < -b_i \leqq i(\log i)^{1+\alpha'}$$

α' étant un nombre positif *quelconque* et γ' un nombre arbitrairement petit inférieur à β. En raisonnant comme au paragraphe précédent, on constate que dans la région du plan où l'on a l'inégalité (29), on aura

$$(32) \qquad |f_2(z)| < e^{-gr(\log r)^{-1-\alpha'+\beta}} \qquad (g \text{ positif fini}).$$

De même on aura, en même temps que l'inégalité (28), l'inégalité

$$(33) \qquad |f_2(z)| > e^{gr(\log r)^{-\alpha'}|\cos\theta|};$$

on aura, par suite, dans les régions du plan, où l'inégalité (30) est vérifiée;

$$(34) \qquad |f_2(z)| > e^{gr(\log r)^{-1-\alpha'+\beta}} \qquad (g \text{ positif fini}).$$

Considérons alors la somme

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Elle ne peut s'annuler pour $|z| = r$ qu'à l'intérieur d'un angle dont la bissectrice est l'axe des quantités imaginaires et dont la moitié a un sinus inférieur à $\frac{1}{(\log r)^{1-\beta}}$. D'ailleurs les zéros de $F(z)$ ont deux à deux des valeurs imaginaires conjuguées. Désignons ces zéros par $c_1, c_2, \ldots.$ Je vais montrer que $F(z)$ est *une fonction du genre un.*

Séparant dans c_i la partie réelle de la partie imaginaire, posons

$$c_i = \gamma_i + \sqrt{-1}\,\delta_i.$$

Si nous supposons que $F(z)$ est de genre zéro, nous aurons

$$F(z) = \prod\left[1 - z\frac{2\gamma_i}{\gamma_i^2+\delta_i^2} + \frac{z^2}{\gamma_i^2+\delta_i^2}\right].$$

Appelant plus particulièrement α le plus petit des deux nombres α et α', nous obtiendrons le module maximum $M(r)$ de $F(z)$ en faisant $z = -r$. $f_1(z)$ satisfait alors à l'inégalité (28), où $\cos\theta = 1$, et $f_2(z)$ vérifie l'inégalité (32). On a, par suite

$$F(-r) > e^{hr(\log r)^{-\alpha}} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

D'ailleurs le théorème général du § 22, appliqué à $f_1(z)$ nous donne

$$F(-r) < e^{h'r(\log r)^{-\alpha+\gamma}} \qquad (h' \text{ positif fini})$$

d'où il résulte (§ 17) que l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > h'_1 i (\log i)^{\alpha-\gamma} \qquad (h'_1 \text{ positif fini}).$$

Cela posé, supposons que $F(z)$ soit de genre zéro, on aura certainement pour des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes

$$r_{n_1} = K\psi(n_1) \quad \text{avec} \quad \psi(i) = i(\log i)^{\alpha-\gamma} \quad \text{et} \quad K = (\log n_1)^{\gamma_1},$$

γ_1 étant égal ou inférieur à $1-\alpha+\gamma$, ce qui permet de prendre, par exemple $\gamma_1 > 5\gamma$ (puisque nous avons supposé que $4\gamma < 1-\alpha$).

Reprenons les notations du § 20, et faisons

$$r = K^{1-b}\psi(n_1) = \psi(n), \qquad \left(b < \frac{1}{2}\right).$$

Nous obtiendrons en nous reportant aux calculs du § 20 (où nous ferons $\lambda = \frac{1}{2}$, $\rho = 1$):

$$\left|\prod_1^{n_1}\left(1 - \frac{z}{c_i}\right)\right| < e^{2\sqrt{r}\sum\limits_1^{n_1}\frac{1}{\sqrt{r_i}}} < e^{hK^{-c}n} \qquad \left(c = \frac{1-b}{2} > \frac{1}{4},\ h \text{ positif fini}\right).$$

D'autre part, puisque

$$|\gamma_i| < \frac{r_i}{(\log r)^{1-\beta}},$$

nous aurons

$$\left|\prod_{n_1+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{c_i}\right)\right| < e^{2h_1 r(\log r)^{-1+\beta}\sum\limits_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i} + h_1 r^2 \sum\limits_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^2}} \qquad (h_1 \text{ positif fini}).$$

Pour évaluer la somme $r^2\sum\limits_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^2}$, nous procéderons comme nous avons fait au § 20 pour la somme $r^{p+1}\sum\limits_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}}$, (en faisant $p+1=2$, $\rho=1$). Nous obtenons

$$r^2\sum_{n_1+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^2} < K^{-c_1}n \qquad (c_1 = b > c).$$

D'autre part, puisque la série $\sum \frac{1}{r_i}$ est supposée convergente, nous avons

$$r(\log r)^{-1+\beta} \sum_{n_1+1}^{\infty} \frac{1}{r_i} < kr(\log r)^{-1+\beta} \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Nous aboutissons donc finalement à cette conclusion que $M(r)$ est inférieur à la plus grande des deux expressions

$$e^{r(\log r)^{-\alpha-\gamma_1 c+\gamma}} \quad (c \text{ positif fini}), \qquad e^{kr(\log r)^{-1+\beta}}.$$

D'ailleurs, puisque l'on a $c > \frac{1}{4}$ et $\gamma_1 > 5\gamma$, on a nécessairement $\gamma - \gamma_1 c < 0$ et, d'autre part on aura, lorsque $\frac{1}{r}$ et par suite β seront assez petits

$$\alpha < 1 - \beta.$$

Les inégalités précédentes se trouvent donc en contradiction avec les résultats obtenus plus haut sur le module maximum de $F(z)$.

On en conclut que l'hypothèse d'après laquelle $F(z)$ serait de genre zéro n'est pas admissible.

Nous aurions pu parvenir au même résultat en procédant un peu différemment. Le produit $F(z)F(-z)$, considéré comme fonction de z^2 est une fonction de genre zéro et d'ordre non entier. Or il résulte des inégalités obtenues aux §§ 31 et 32 que cette fonction a même module maximum (pour $|z| = r$) que le produit $F(z)$. On peut donc lui appliquer le théorème du § 21, qui conduit au résultat cherché. La méthode suivie plus haut semble cependant préférable, parce qu'elle manifeste mieux l'influence exercée par les arguments des zéros de $F(z)$ sur la croissance de son module.

Nous pouvons énoncer maintenant la proposition suivante:

Soit $f_1(z)$ une fonction de genre zéro ayant tous ses zéros réels et positifs et tels que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$i(\log i)^{1+\alpha-\gamma} < a_i \leqq i(\log i)^{1+\alpha},$$

α étant un nombre positif plus petit que un et γ arbitrairement petit. Soit

d'autre part $f_1(z)$ *une fonction dont tous les zéros sont réels et négatifs et tels que l'on ait à partir d'une certaine valeur de* i

$$i(\log i)^{1+\alpha'-\gamma'} < -b_i \leqq i(\log i)^{1+\alpha'},$$

α' *étant un nombre positif quelconque* (γ' *arbitrairement petit*). *La somme* $f_1(z) + f_2(z)$ *est une fonction de genre un.*

Un cas particulier intéressant est celui où $f_2(z) = f_1(-z)$. On voit que si $f_1(z)$ satisfait aux conditions indiquées plus haut, la somme $f_1(z) + f_1(-z)$ sera une fonction de genre un. M. E. LINDELÖF [1] vient de faire connaître un résultat équivalent qu'il a obtenu de son côté et qui rentre dans ce cas particulier. Posant

$$f(z) = \prod\left[1 + \frac{z}{n(\log n)^\alpha}\right] \quad \text{avec} \quad 1 < \alpha < 2$$

M. LINDELÖF établit directement que la somme $f(z) + f(-z)$ est de genre un.

Faisons une dernière remarque au sujet de la proposition qui vient d'être établie. Si elle s'applique à deux fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, elle s'appliquera également à la somme

$$f_1(z) + cf_2(z)$$

c étant une constante quelconque.

DEUXIÈME PARTIE.

Pour rendre applicables à l'étude des équations différentielles les résultats obtenus sur la croissance d'une fonction entière, il nous faut considérer maintenant la dérivée de la fonction et déterminer, en particulier, l'ordre de grandeur de cette dérivée par rapport à la fonction elle-même.

[1] Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 30 décembre 1901.

La dérivée logarithmique d'une fonction entière.

1. Les nouveaux résultats que j'ai en vue ne peuvent évidemment pas être des conséquences des inégalités obtenues plus haut: car on sait qu'en général on n'a pas le droit de dériver une égalité asymptotique. C'est en faisant de nouveau intervenir ici le fait que la fonction considérée, $F(z)$, est entière que je pourrai obtenir sur $F'(z)$ des renseignements beaucoup plus précis qu'on ne l'avait fait encore.[1]

L'étude de la dérivée logarithmique d'une fonction entière a déjà été tentée par Laguerre et avec plus de détails par M. Vivanti.[2] Mais aucune proposition complète n'a encore été démontrée à son sujet et, d'ailleurs, quelques-uns des résultats énoncés par M. Vivanti demandent à être précisés. C'est pourquoi certaines propositions tirées par lui de ses théorèmes ne se trouvent pas être entièrement exactes, entre autres celle-ci que *la somme de deux fonations entières de genre p est toujours de genre p au plus.* Nous avons vu plus haut que cette proposition comporte un cas d'exception.

---

[1] Dans son mémoire sur *les zéros des fonctions entières,* M. Borel a donné une limite supérieure du module de $F'(z)$. Posant

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$
$$M(r) = |a_0| + |a_1| r + \dots$$
$$M'(r) = |a_1| + 2|a_2| r + \dots$$

M. Borel a montré que l'on a, quel que soit ε, à partir d'une certaine valeur de r

$$M'(r) < [M(r)]^{1+\varepsilon}.$$

[2] Giornale di Baltaglini, 1884 et 1885, $F(z)$ étant une fonction de genre p, M. Vivanti dit que *dans certains angles le rapport* $\dfrac{|F'(z)|}{r^p |F(z)|}$ *tend vers zéro, tandis que le rapport* $\dfrac{|F'(z)|}{r^{p-1} |F(z)|}$ *augmente indéfiniment.* Mais pour que la première partie de cette proposition fût vraie il serait nécessaire de faire des hypothèses très particulières sur les arguments des zéros. Quant à la seconde partie, elle n'est en tout cas pas exacte, comme nous le constaterons un peu plus loin.

2. Soit $G(z)$ un produit de facteurs primaires de genre p

$$G(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^p}{p a_i^p}}.$$

On a

$$g(z) = \frac{G'(z)}{G(z)} = \sum \left[\frac{1}{z - a_i} + \frac{1}{a_i} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_i^p}\right] = \sum \frac{z^p}{a_i^p (z - a_i)}.$$

Étudier la variation du module $|g(z)|$, comme nous l'avons fait pour $|G(z)|$, lorsque le module $|z|$ augmente indéfiniment, semble une question dépourvue de sens, puisque la fonction $g(z)$ a à distance finie une infinité de pôles. Mais si l'on exclut du champ observé le voisinage des pôles, ce qui revient à considérer $g(z)$ dans certaines régions ou en certains points, on constatera que le module de croissance de $g(z)$ est bien, cependant, une propriété caractéristique de la fonction: il résulte, comme celui de $G(z)$, de la distribution des points a_i.

3. Proposons-nous, d'abord, de trouver, en certains points, une limite supérieure du module $|g(z)|$.

Je traiterai pour commencer, un cas particulier, celui qui donnera lieu aux résultats les plus complets. Je supposerai qu'il existe un angle γ ayant pour sommet l'origine et ne contenant aucun des points α_i.

Posons $|z| = r$, $|a_i| = r_i$, et désignons par z un point situé dans l'angle $\frac{\gamma}{2}$ de même bissectrice que γ. Je vais déterminer en ce point une limite supérieure de $\left|\sum \frac{z^p}{a_i^p (z - a_i)}\right|$.

Les formules élémentaires relatives au triangle oza_i donnent immédiatement

$$|z - a_i| > r \sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{et} \quad |z - a_i| > r_i \sin\frac{\gamma}{2}.$$

De là nous allons déduire la limite cherchée.

Considérons d'abord le cas général où l'ordre ρ de la fonction entière $G(z)$ n'est pas un nombre entier, et formons de nouveau la fonction $\psi(z)$

qui a été définie dans la première partie, au § 9. Elle est telle que l'on ait, pour $i > m$, $r_i \geqq \psi(i)$. Définissons, alors, le nombre n par l'égalité

$$\psi(n) = \eta r$$

η étant un nombre positif fini.

On a

$$r^p \left| \sum_1^n \frac{1}{a_i^p(z - a_i)} \right| < \frac{r^{p-1}}{\sin \gamma} \sum_1^n \frac{1}{r_i^p} < c r^{p-1} + \frac{r^{p-1}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \int_m^n \frac{dx}{[\psi(x)]^p},$$

c étant un nombre fini. L'intégrale définie qui figure dans le dernier membre, est d'ailleurs, comme on l'a vu plus haut,[1] inférieure à $\frac{c_1 n}{r^p}$ (c_1 fini).

On obtient donc, dans ce cas:

$$r^p \left| \sum_1^n \frac{1}{a_i^p(z - a_i)} \right| < h \frac{n}{r},$$

h restant inférieur à un nombre fixe.

D'autre part

$$r^p \left| \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{a_i^p(z - a_i)} \right| < \frac{r^p}{\sin \frac{\gamma}{2}} \int_n^\infty \frac{dx}{[\psi(x)]^{p+1}} < h_1 \frac{n}{r}, \qquad (h_1 \text{ fini})$$

puisque ρ est supposé différent de $p + 1$.

Nous avons donc, finalement

$$(1) \qquad |g(z)| < h \frac{n}{r} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

4. Cette inégalité peut être mise sous une autre forme. Désignons par $\varphi(r)$ la fonction inverse de $\psi(x)$. Cette fonction satisfait aux conditions énoncées au § 8 de la première partie: on a donc

$$\varphi'(r) = k \frac{\varphi(r)}{r} \qquad (k \text{ nombre positif fini}).$$

[1] Première partie, § 15.

Nous avons établi, plus haut, l'inégalité

$$\log |G(z)| < h\varphi(r).$$

Nous constatons, maintenant, qu'au point z, on a le droit de dériver cette inégalité; c'est-à-dire que l'on a

$$\left|\frac{G'(z)}{G(z)}\right| < h_1 \varphi'(r),$$

h_1 étant, de même que h inférieur à un nombre fixe.

On voit immédiatement que la proposition subsiste dans le cas où la fonction entière étudiée contient un facteur exponentiel $e^{H(z)}$, dont l'exposant est un polynôme de degré p au plus. Mais elle pourrait cesser d'être exacte, si l'ordre ρ du produit de facteurs primaires $G(z)$ était égal à p ou à $p+1$. On choisirait alors la fonction $\psi(x)$ comme il a été fait au § 22 ou au § 23 de la première partie et l'on remplacerait l'inégalité (1) par une inégalité de la forme [1]

$$(2) \qquad |g(z)| < hr^{p-1} + h_1 \frac{n \log n \ldots \log_k n}{r},$$

k étant dans cette inégalité un entier fini, et les nombres h, h_1 restant inférieurs à un nombre fixe lorsque r augmente indéfiniment.

D'ailleurs de l'inégalité

$$|g(z)| < hr^{p-1} \sum_1^n \frac{1}{r_i^p} + h_1 r^p \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{r_i^{p+1}}$$

il résulte immédiatement que l'on a nécessairement

$$(2') \qquad |g(z)| < \varepsilon r^p,$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

[1] On constaterait aisément que dans certains cas exceptionnels, bien que $G(z)$ soit de genre p, on pourra avoir dans l'angle γ à partir d'une certaine valeur de r une inégalité telle que

$$|g(z)| < \frac{r^{p-1}}{\log r}.$$

Au contraire on aura toujours, lorsque r est assez grand, l'inégalité (2').

5. Ces résultats font exactement pendant à ceux que nous avons obtenus relativement à $|G(z)|$. Nous les complèterons tout à l'heure en démontrant la réciproque de la proposition précédente. Mais il convient auparavant d'examiner le cas où il n'existerait pas d'angle γ satisfaisant à la condition énoncée plus haut.

Nous allons constater qu'il suffit, dans ce cas, de multiplier la limite (1) par le facteur $\log n$ pour être assuré que le module $|g(z)|$ lui reste inférieur, du moins en certains points ou sur certaines lignes.

Pour parvenir à ce résultat nous ferons appel à des considérations analogues à celles qui nous ont servi à étudier le module minimum d'une fonction entière.

Soit toujours γ un angle fini ayant pour sommet l'origine et dans lequel se trouve le point z. Nous supposerons plus particulièrement que z soit dans un angle γ' intérieur et proportionnel à γ, les côtés de γ' faisant avec ceux de γ des angles qui sont eux-mêmes proportionnels à γ. (Les rapports de γ à ces angles sont des nombres finis.)

La somme $\sum \frac{r^p}{r_i^p |z - a_i|}$ étendue à tous les pôles situés hors de l'angle γ a évidemment la même limite supérieure que dans le cas précédent. Parmi les pôles restants, considérons d'abord ceux pour lesquels on a

$$\frac{r}{r_i} > 1 + \delta \quad \text{ou} \quad \frac{r_i}{r} > 1 + \delta,$$

δ étant un nombre positif. De ces inégalités, il résulte, dans le premier cas

$$|z - a_i| > kr,$$

dans le second cas

$$|z - a_i| > k_1 r_i,$$

k et k_1 étant des nombres finis indépendants de r. La méthode du § 3 s'appliquera donc encore à la somme Σ relative à ces pôles, et cette somme sera inférieure à la limite (1), ou du moins (lorsque ρ est entier) à la limite (2).

6. Nous n'avons pas encore épuisé les termes de Σ. Pour obtenir une limite supérieure de la somme restante, je raisonnerai comme au § 26 de la première partie.

Soit ν le nombre des pôles que nous avons encore à considérer, et soit Γ l'arc intercepté par l'angle γ sur la circonférence de rayon r ayant pour centre l'origine. J'appellerai α_i le point où cet arc est rencontré par la droite Oa_i, les points α_i étant numérotés dans l'ordre où nous les rencontrons, lorsque nous parcourons Γ dans le sens positif.

Décomposons l'arc Γ en N arcs égaux, *N étant supérieur à $4n'$* (n' désigne le nombre total des pôles de module inférieur à r), et appelons $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ les arcs ainsi définis. En raisonnant comme dans la première partie (§ 26), je constaterai qu'il existe plus de $N - 3n'$ arcs β jouissant des propriétés suivantes: si z est un point de l'un d'eux, la distance de z aux deux extrémités de l'arc Γ sera du même ordre de grandeur que Γ; soient, d'autre part, α_k et α_{k+1} les points α situés de part et d'autre de z sur l'arc Γ; on aura

$$\text{arc } (\alpha_{k+1} - z) > \frac{\gamma r}{N} \ldots \text{ arc } (\alpha_{k+i} - z) \quad > \gamma r \frac{i}{N},$$

$$\text{arc } (z - \alpha_k) \quad > \frac{\gamma r}{N} \ldots \text{ arc } (\alpha_{k-i+1} - z) > \gamma r \frac{i}{N}.$$

On en déduit aisément les inégalités

$$\sum_1^\nu \frac{1}{\sin (z - \alpha_i)} < \frac{g}{\gamma} N \sum_1^\nu i^{-1} < \frac{g}{\gamma} N \log \nu,$$

g étant un nombre positif fini.

Nous pouvons alors calculer au point z une limite supérieure de la somme $\sum \frac{r^p}{r_i^p |z - a_i|}$ étendue aux points a_i considérés. Le rapport $\frac{r}{r_i}$ étant fini pour ces points, on aura

$$(3) \qquad \sum_1^\nu \frac{r^p}{r_i^p |z - a_i|} < \frac{g_1}{r} \sum_1^\nu \frac{1}{\sin (z - \alpha_i)} < \frac{h}{\gamma} \frac{N \log \nu}{r},$$

h étant inférieur à un nombre fixe.

En nous reportant maintenant aux résultats obtenus plus haut, nous constatons que l'on a au point z

$$|g(z)| < h\frac{n}{r} + \frac{h'n' \log n'}{r} \quad (h, h' \text{ nombre positifs finis}).$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Si l'ordre ρ n'est pas entier, il existe, quel que soit r, une infinité d'arguments θ tels que l'on ait

$$|g(re^{\theta\sqrt{-1}})| < \frac{hn \log n}{r},$$

h étant une constante finie et n le nombre défini au § 14 (*Première Partie*).

Si l'ordre ρ du produit $G(z)$ était entier, on choisirait la fonction ψ comme il a été fait aux §§ 22 ou 23 de la première partie, et on pourrait être amené à remplacer l'inégalité précédente par une inégalité de la forme

$$|g(re^{\theta\sqrt{-1}})| < hr^{p-1} + \frac{h_1 n \log n \ldots \log_k n}{r},$$

où k est un entier, h et h_1 des nombres positifs finis.

Dans tous les cas, on aura en vertu de (2')

$$|g(re^{\theta\sqrt{-1}})| < \frac{hn' \log n'}{r} + \varepsilon r^p,$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

7. Insistons un peu sur l'inégalité obtenue dans le cas où l'ordre ρ n'est pas entier. Il est clair que les arcs sur lesquels cette inégalité est vérifiée sont d'autant plus grands que la constante h est elle-même plus grande. Si l'on remplaçait h par une fonction croissante de n, par exemple $\log\log n$, on pourrait affirmer que *les arcs du cercle C de rayon r sur lesquels l'inégalité*

$$|g(z)| < \frac{n \log n \log_2 n}{r}$$

n'est pas vérifiée ont une somme infiniment petite par rapport à la longueur totale du cercle C.

Supposons en effet que l'angle γ considéré plus haut, au lieu d'être fini, ait pour sinus $\frac{1}{\log_2 n}$, et considérons d'abord tous les pôles situés en dehors de cet angle et tous ceux pour lesquels on a

$$\frac{r}{r_i} < 1 + \frac{1}{\log_2 n} \quad \text{ou} \quad \frac{r_i}{r} > 1 + \frac{1}{\log_2 n}.$$

La somme Σ relative à tous ces pôles est évidemment inférieur à la limite (4) puisque la seule modification apportée aux calculs des §§ 3 et 5 consiste à remplacer les constantes finies $\frac{1}{\sin\gamma}$, k et k_1 par des nombres proportionnels à $\log_2 n$. Faisons maintenant, au § 6, $N = n$. Il est clair que, quelle que soit la situation de l'arc Γ sur le cercle C, le nombre ν deviendra, lorsque r augmente, infiniment petit par rapport à N, excepté peut-être pour un nombre limité d'arcs Γ (c'est-à-dire d'angles γ) dont la somme est infiniment petite par rapport à la longueur totale du cercle C. D'autre part, si $\frac{\nu}{N}$ est très petit le rapport à Γ de la somme des arcs partiels β sur lesquels on a l'inégalité (3) tend vers l'unité. L'inégalité (3) équivalant maintenant (pour $\gamma = \frac{k}{\log_2 n}$, $N = n$) à l'inégalité (4), la proposition énoncée est bien établie.

8. On obtiendrait des résultats analogues si l'on posait le même problème d'une façon un peu différente.

Proposons-nous de déterminer une limite supérieure de $|g(z)|$ en tous les points de certaines circonférences ayant leur centre à l'origine.

On a, en posant $|a_i| = r_i$

$$\left|\sum \frac{z^p}{r_i^p(z - a_i)}\right| < \sum \frac{r^p}{r_i^p|r - r_i|}.$$

La somme Σ relative aux pôles pour lesquels $\frac{r}{r_i} > 1 + \delta$ ou $\frac{r_i}{r} > 1 + \delta$ se calcule comme au § 5.

Supposons d'autre part que r soit situé dans l'un des intervalles définis au § 26 de la première partie. On aura en conservant les notations de ce paragraphe, lorsque

$$r_k < r < r_{k+1}$$

les inégalités

$$\frac{1}{r_{k+1}-r} < \frac{N}{r} \cdots \frac{1}{r_{k+i}-r} < \frac{N}{ir},$$

$$\frac{1}{r-r_k} < \frac{N}{r} \cdots \frac{1}{r-r_{k-i+1}} < \frac{N}{ir}.$$

Si donc nous considérons tous les pôles (au nombre de ν) pour lesquels $\frac{r}{r_i} < 1 + \delta$ ou $\frac{r_i}{r} < 1 + \delta$, la somme Σ correspondante sera inférieure à

$$h\frac{N}{r}\log \nu,$$

h étant un nombre positif fini.

Le résultat subsistant tant que $N > 4n'$ et ν étant inférieur à n' et à n, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Si l'ordre ρ n'est pas entier, il existe une infinité de cercles ayant leur centre à l'origine et des rayons indéfiniments croissants tels que l'on ait en chacun de leurs points

$$|g(z)| < h\frac{n \log n}{r},$$

h étant une constante positive finie et n le nombre défini au § 14 de la première partie.

Si l'ordre ρ de $G(z)$ était entier on remplacerait, comme plus haut, l'inégalité précédente par

$$|g(z)| < hr^{\rho-1} + h_1\frac{n \log n \ldots \log_k n}{r}$$

(k entier, h, h_1 finis).

Nous bornant *au cas où ρ n'est pas entier* nous généraliserons la proposition précédente comme celle du § 6. Si nous considérons sur l'axe des r un segment de longueur r, nous pouvons affirmer que les points r' de ce segment tels que l'on n'ait pas sur tout le cercle de rayon r' l'inégalité

$$(4) \qquad |g(z)| < \frac{hn \log n \log_2 n}{r},$$

forment des segments dont la somme est infiniment petite par rapport au segment total.

Rapprochant ce résultat de celui du § 7, nous énoncerons la proposition suivante:

Soit une aire A proportionnelle à r^2, par exemple le cercle C de centre O et de rayon r. *Les régions de ce cercle où l'inégalité* (4) *n'est pas vérifiée forment une aire infiniment petite par rapport à l'aire totale* A.

9. Ainsi, si l'on prend la précaution d'exclure du champ de la variable le voisinage immédiat des pôles, on peut limiter le module de $g(z)$ exactement comme on a fait pour celui de la fonction entière $G(z)$.

On obtient d'ailleurs immédiatement une réciproque du théorème démontré au paragraphe précédent.

Supposons que le long d'une circonférence C de rayon r, on ait

$$|g(z)| < \varpi(r).$$

Soit n' le nombre des pôles de $g(z)$ dont le module est inférieur à r. On a

$$n' = \int_C g(z)dz,$$

d'où

$$\frac{n'}{r} < h\,\varpi(r), \tag{5}$$

h étant un nombre positif fini.

Si, quel que soit r, *il existe une circonférence de rayon* ηr (η *fini*) *jouissant de la propriété indiquée, on peut affirmer que l'inégalité* (5) *est vérifiée pour toute valeur de* r.

Les nombres n et n' qui figurent dans les inégalités (2), (4) et (5) sont ceux que nous avons déjà rencontrés dans la première partie. Nous avons vu que, lorsque l'ordre ρ n'est pas entier, ces nombres sont sûrement égaux pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes. Nous avons de plus défini au § 18 les cas où ils coïncident pour toute valeur de r. La comparaison de ces deux nombres, dans le cas où ρ est entier, a été faite aux §§ 22 et 23.

Le voisinage des pôles ayant été exclu du champ de la variable, comme il a été dit au § 8, désignons par $m(r)$ le module maximum (pour $|z|=r$)

de $g(z)$ dans les régions restantes. Nous déduirons en particulier du théorème du § 8 et de l'inégalité (5) que si, à partir d'une certaine valeur de r, *le rapport* $\frac{r_i^\rho}{i}$ *reste compris, quel que soit* i, *entre deux nombres finis, le rapport* $\frac{m(r)}{r^{\rho-1}}$ *sera supérieur à un nombre fixe et inférieur à* $\log r$.

Si l'on reprend l'expression employée pour les fonctions entières, on peut dire que, dans ce cas, la croissance de la fonction $g(z)$ est *parfaitement régulière.* Mais la fonction-type à laquelle on compare le module de $g(z)$ est, cette fois, une puissance finie de r, au lieu d'être une exponentielle.

Plus généralement, *si l'on a, à partir d'une certaine valeur de* i, *quelque petit que soit* ε,

$$i^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} < r_i < i^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon},$$

on aura, à partir d'une certaine valeur de r,

$$r^{\rho-1-\varepsilon'} < m(r) < r^{\rho-1+\varepsilon'},$$

ε' *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{r}$.

10. Il nous reste à démontrer un théorème correspondant à celui du § 20 de la première partie.

Supposons que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de r

$$m(r) = \frac{hn}{r} \qquad (h \text{ positif fini}),$$

n étant l'inverse de la fonction

$$r = \psi(n) = n^{\frac{1}{\rho}} (\log n)^{\frac{\sigma_1}{\rho}} \ldots (\log_k n)^{\frac{\sigma_k}{\rho}},$$

l'ordre ρ *n'étant pas entier.*

Je dis que l'on a, à partir d'une certaine valeur de i

$$h' < \frac{r_i}{\psi(i)} < h''(\log i)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (h', h'' \text{ positifs finis}).$$

Supposons, en effet, que l'on ait, pour des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes

$$r_{n_1} = K\psi(n_1)(\log n_1)^{\frac{1}{\rho}},$$

K dépassant, lorsque n_1 augmente indéfiniment, tout nombre assigné d'avance.

Faisons

$$r = K^{1-\beta}\psi(n_1)(\log n_1)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (\beta \text{ positif, inférieur à } 1).$$

On aura, d'après les calculs effectués au § 20 de la première partie

$$\sum_{m}^{n_1} \frac{r^{p-1}}{r_i^p} < K^{-c}(\log n_1)^{\frac{p}{\rho}}\frac{n}{r}, \qquad \sum_{n_1+1}^{\infty} \frac{r^p}{r_i^{p+1}} < K^{-c}(\log n_1)^{\frac{p}{\rho}}\frac{n}{r},$$

$$n_1 < (1+\alpha)K^{-\rho(1-\beta)}n,$$

c étant un nombre positif.

D'ailleurs le nombre n' des pôles de module inférieur à r est inférieur à n_1, et l'on a

$$n' \log n' < gK^{-\rho(1-\beta)}n.$$

On aura donc, dans les régions définies au §§ 7 et 8

$$|g(z)| < K^{-c_1}n \qquad (c_1 \text{ positif}),$$

ce qui est en contradiction avec les données. L'hypothèse faite sur r_{n_1} est donc inadmissible; ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, *si la croissance de $g(z)$ est parfaitement régulière,* c'est-à-dire si $m(r)$ est proportionnel à $r^{\rho-1}$, à partir d'une certaine valeur de r, *on aura, à partir d'une certaine valeur* de i

$$h' < \frac{r_i^\rho}{i} < h'' \log i \qquad (h', h'' \text{ positifs finis}).$$

11. L'étude de la fonction méromorphe $g(z)$ conduit, on le voit, à des résultats qui rappellent de très près ceux que nous avons obtenus relativement aux fonctions entières. Afin de mettre mieux encore cette connexion en lumière, je vais maintenant comparer la croissance de $g(z)$ à celle de la fonction entière $G(z)$.

Désignons par n' le nombre des points a_i dont le module est inférieur à ηr, η *étant lui-même inférieur à* $\frac{1}{2}$, *je dis qu'en une infinité de points* z *de modules indéfiniment croissants, on a simultanément les inégalités*

$$|G(z)| > e^{hn'}, \qquad |g(z)| > h_1 \frac{n'}{r},$$

h et h_1 étant des nombres positifs finis.

Posons comme au § 14 de la première partie

$$G(z) = G_1(z) \prod_1^{n'} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right).$$

On a, quel que soit z sur le cercle C de rayon r ayant son centre à l'origine,

$$(7) \qquad \prod_1^{n'} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) > e^{hn'} \qquad (h \text{ positif et fini}).$$

On calculera de même une limite inférieure de $\left|\sum_1^{n'} \frac{1}{z - a_i}\right|$. Par exemple si z est réel, et égal à ξ ($\xi = r$), on aura pour $i < n'$

$$R\left(\frac{1}{\xi - a_i}\right) < \frac{1 - \eta}{1 + \eta^2} \frac{1}{r}.$$

D'où

$$(8) \qquad R\left[\sum_1^{n'} \frac{1}{\xi - a_i}\right] > k \frac{n'}{\xi} \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Donnons maintenant à r une valeur particulière r_1. Quel que soit r_1, il existe sur le cercle C de rayon r_1 des arcs le long desquels la partie réelle

$$R[\log G_1(z)]$$

est positive. (Première partie § 17.) Parmi les rayons issus de l'origine et aboutissant aux divers points de ces arcs, il en est une infinité sur lesquels la fonction $R[\log G_1(z)]$ est continue ainsi que sa dérivée. Nous avons toujours le droit de supposer, après avoir fait, si cela est nécessaire, le changement de variable $z' = ze^{\theta\sqrt{-1}}$ que l'axe réelle est l'un de ces rayons, et nous aurons alors pour $z = \xi_1 = r_1$ l'inégalité

$$R[\log G_1(\xi_1)] > 0.$$

On peut d'ailleurs disposer de la nouvelle variable z' de façon que ξ_1 soit arbitrairement grand, et par suite, (si ξ_0 est un point donné de l'axe réelle ($\xi_0 < \xi_1$), et n'_0 la valeur correspondante de n'_1), de façon que l'on ait

$$k_1 n'_0 \log\frac{\xi_1}{\xi_0} > R[\log G_1(\xi_0)], \tag{9}$$

k_1 *étant un nombre inférieur à* k. Nous concluons de là qu'il existe entre ξ_0 et ξ_1 des points ξ tels que l'on ait

$$R\left[\frac{d\log G_1(\xi)}{d\xi}\right] > -k_1\frac{n'_0}{\xi}; \tag{10}$$

en effet, s'il n'en était pas ainsi, l'intégration du premier membre de ξ_0 à ξ_1 donnerait

$$R[\log G_1(\xi_1)] < R[\log G_1(\xi_0)] - k_1 n'_0 \log\frac{\xi_1}{\xi_0} < 0,$$

ce qui est contraire à nos hypothèses.

Nous pouvons affirmer en outre qu'il existe des points ξ où l'on a simultanément l'inégalité (10) et l'inégalité

$$R[\log G_1(\xi)] > 0.$$

Supposons en effet que cette dernière inégalité ne soit pas satisfaite aux points ξ définis plus haut; comme elle l'est au point ξ_1, il existera sûrement entre ξ et ξ_1 des points ξ'_0 où la fonction $R[\log G_1(\xi)]$ sera positive est croissante: l'inégalité (10) sera donc satisfaite en ces points, qu'il est loisible d'appeler ξ.

D'ailleurs les inégalités (7) et (8) sont toujours vérifiées en ξ, et l'on a $n'_0 \leqq n'$ (puisque $\xi > \xi_0$). Il en résulte que l'on a simultanément les inégalités

$$R[\log G(\xi)] > hn', \qquad R\left[\frac{d\log G(\xi)}{d\xi}\right] > (k-k_1)\frac{n'}{\xi}, \tag{11}$$

h et $k - k_1$ étant des nombres positifs finis, ce qu'il fallait démontrer.

12. En supposant l'ordre ρ de $G(\xi)$ non entier, nous pouvons compléter encore le résultat précédent. Nous avons vu que pour une infinité[1] de valeurs de r indéfiniment croissantes, on a

$$|G(\xi)| < e^{h_1 n'} \text{ et de même } |G_1(\xi)| < e^{h_1 n'} \qquad (h_1 \text{ potitif fini}),$$

n' ayant la même signification qu'au § 11.

Supposons, en particulier, ces inégalités satisfaites pour z réel est égal à ξ_0. Nous voyons alors qu'une condition suffisante pour que l'inégalité (9) soit vérifiée est que l'on ait

$$k_1 n'_0 \log \frac{\xi_1}{\xi_0} > h_1 n'_0,$$

ou

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} > e^{\frac{h_1}{k}},$$

ce qui laissera fini le rapport $\frac{\xi_1}{\xi_0}$.

Sachant que ce rapport est fini, nous constatons d'abord, (d'après le théorème fondamental démontré dans la première partie), qu'en tout point ξ compris entre ξ_0 et ξ_1 l'on a[2] comme en ξ_0

$$|G_1(\xi_1)| < e^{h_2 n'} \qquad (h_2 \text{ positif fini}).$$

D'autre part, nous savons (§ 8) que l'on a, dans une infinité d'intervalles partiels compris entre ξ_0 et ξ_1, l'inégalité

$$(12) \qquad R\left[\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right] < k_2 \frac{n' \log n'}{\xi} \qquad (k_2 \text{ positif fini}).$$

Je dis qu'*en une infinité de points ξ cette inégalité sera satisfaite en même temps que les inégalités* (11).

Supposons en effet qu'en un point ξ' ces dernières inégalités soient seules satisfaites, et donnons maintenant à n' une valeur fixe proportionnelle à n'_0. Appelons ξ'_1 la première valeur de ξ supérieure à ξ' pour laquelle

---

[1] pour toutes, si la croissance de $G(z)$ est régulière.

[2] pour $r = \xi$, comme pour $r = \xi_0$, le rapport de n' au nombre n du § 3 est fini.

on ait l'inégalité (12) (ξ_1' peut être cette fois plus grand que ξ_1, mais le rapport $\frac{\xi_1'}{\xi_0}$ est fini, en vertu du théorème du § 8). Au point ξ_1' l'on a

$$R\left[\frac{d \log G(\xi_1')}{d\xi}\right] = k_2 \frac{n' \log n'}{\xi_1'},$$

et en même temps

$$R[\log G(\xi_1')] > hn',$$

puisque la fonction $R[\log G(\xi)]$ n'a pas cessé de croître dans l'intervalle $\xi'\xi_1$. D'ailleurs, le rapport $\frac{\xi_1'}{\xi_0}$ étant fini, on aura toujours

$$|G(\xi_1')| < e^{h_2 n'}.$$

13. Si nous revenons maintenant à la variable z et si nous remplaçons ξ par sa valeur r, nous pourrons interpréter comme il suit les inégalités précédentes.

Si $G(z)$ est une fonction entière d'ordre non entier et *n' le nombre défini au* § 11, *on aura simultanément pour une infinité de valeurs de z s'éloignant indéfiniment de l'origine, l'égalité*

$$e^{ia} G(z) = e^{hn'}$$

(h étant un nombre positif fini et α un angle compris entre 0 et 2π) *et l'égalité*

$$R[e^{ia} G'(z)] = \mu \frac{n'}{r} e^{hn'},$$

μ étant un nombre positif supérieur à un nombre fini et inférieur à $\log n'$.

Cette proposition permet d'étudier la croissance de la fonction n' de r, lorsque le produit $G(z)$ est défini par une équation différentielle du premier ordre à laquelle il est supposé satisfaire. On substituera dans l'équation aux expressions $e^{ai} G(z)$ et $R[e^{ia} G'(z)]$ les valeurs qui viennent d'être données, et l'on calculera n' en égalant le résultat à zéro.

14. Les propositions précédentes ne fournissent, certes, que des renseignements très vagues sur l'allure générale de la fonction $g(z)$. Mais elles mettent en évidence l'existence de certaines régions qui offrent quelque intérêt au point de vue théorique. Dans ces régions l'influence perturbatrice exercée par les pôles sur la croissance de la fonction est la même

que si la distribution de ces pôles était uniforme: C'est ce qu'expriment les inégalités (3). Il existe par suite des portions étendues du plan (par rapport auxquelles toutes les autres seront négligeables si l'on se contente de l'inégalité (4)) où l'influence des pôles sur l'ordre de grandeur de la fonction est, elle aussi, négligeable. *Cet ordre de grandeur dépend uniquement de la nature de la singularité essentielle dont on s'approche,* exactement comme il arrivait pour les fonctions entières. On voit par là que le mode de croissance de $g(z)$ est bien un élément fondamental de cette fonction, indépendant de la situation particulière des pôles.

Des considérations de cette nature sont nécessaires pour justifier l'étude de la croissance lorsque l'on a à faire à des fonctions méromorphes. Elles s'appliquent en revanche à des classes de fonctions beaucoup plus étendues que celle des fonctions $g(z)$.

Considérons par exemple une fonction méromorphe qui n'ait que des pôles simples, *les résidus correspondants étant des nombres finis.* Il est facile d'étendre la notion de genre à de telles fonctions. Si l'on a une fonction de la forme

$$f(z) = \sum \frac{b_i z^p}{a_i^p (z - a_i)} + H(z), \tag{13}$$

$H(z)$ étant un polynôme de degré $p - 1$ au plus, et la somme Σ étant absolument convergente dans tout le plan, excepté aux points singuliers a_i, on pourra dire que la fonction [1] $f(z)$ est de genre p.

Les nombres b_i étant tous finis, il est clair que $f(z)$ satisfait, dans les mêmes conditions que $g(z)$, aux inégalités (1), (2) ou (4).

Si l'on voulait généraliser encore ce résultat, il faudrait supposer que b_i au lieu de rester fini est, comme a_i, une fonction croissante de l'entier i. La méthode des paragraphes précédents s'appliquerait encore à ce cas.

[1] Si l'on adopte, pour les fonctions méromorphes, cette définition du genre, les fonctions méromorphes de genre p ne seront qu'une catégorie très particulière de la classe des fonctions qui s'expriment par le quotient de deux fonctions entières de genre p. La plupart de ces dernières fonctions seront, à notre point de vue, de genre infini; car leurs résidus deviennent généralement infiniment grands avec r. On rencontre de graves difficultés lorsqu'on essaye de développer de telles fonctions sous la forme (13). Cette forme de développement a été étudiée par M. Borel dans un important mémoire publié en 1901 dans les Annales de l'École Normale Supérieure.

Les dérivées successives de $g(z)$.

15. Pour rendre les résultats précédents applicables à l'étude des équations différentielles algébriques d'ordre supérieur au premier, il faut étendre nos considérations aux dérivées successives de la fonction $g(z)$.

La proposition du § 3 se laisse aisément généraliser. On a

$$g'(z) = \sum \left[p \frac{z^{p-1}}{a_i^p (z - a_i)} - \frac{z^p}{a_i^p (z - a_i)^2} \right].$$

Nous bornant au cas où l'ordre ρ du produit infini $G(z)$ n'est pas entier, supposons qu'il existe un angle fini γ ayant son sommet à l'origine et ne contenant aucun des points a_i, on aura, lorsque z est dans l'angle $\frac{\gamma}{2}$ de même bissectrice:

$$|z - a_i|^2 > r|z - a_i| \sin\frac{\gamma}{2}$$

et par suite

$$r|g'(z)| < \left(p + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right) r^p \sum \frac{1}{r_i^p (z - a_i)}.$$

Or nous avons déterminé au § 3 une limite supérieure de la somme qui figure dans le second membre. Si nous introduisons de nouveau la fonction $\psi(x)$ de ce paragraphe, et si nous posons

$$\psi(n) = \eta r \qquad (\eta \text{ fini})$$

nous aurons

$$|g'(z)| < h \frac{n}{r^2} = h_1 \varphi''(r),$$

h et h_1 étant des nombres finis, et $\varphi(r)$ désignant comme au § 3 la fonction inverse de $\psi(i)$.

Le même raisonnement s'appliquant à une dérivée quelconque de $g(z)$, on aura

$$|g^{(q)}(z)| < h \frac{n}{r^{q+1}} = h_1 \varphi^{(q+1)}(z),$$

h et h_1 étant finis. En d'autres termes, on a le droit de dériver autant de fois qu'on le veut l'inégalité (1). Cela n'était, comme on sait, nullement évident à priori.

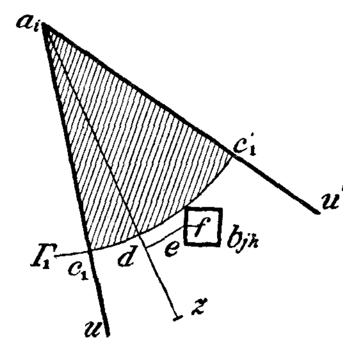
16. Ces résultats si simples ne subsistent malheureusement pas dans le cas général où il n'existe pas d'angle fini γ ne contenant aucun pôle de la fonction. Nous allons, pour étudier ce cas général, faire appel à des considérations analogues à celles du § 6. La difficulté du problème provient, ici encore, des pôles qui sont voisins du point z où l'on considère la fonction. Nous pouvons donc, pour un instant, faire abstraction des autres pôles.

Soit A une aire proportionnelle à H^2r^2 et contenant le point z. La forme de cette aire n'important pas ici, je supposerai qu'elle est un carré de côté égal à Hr. Soit ν le nombre des pôles de $g(z)$ contenus dans ce carré, et soit N un entier tel que l'on ait, par exemple $N^2 > 32\nu$. Décomposons le carré A en N^2 petits carrés tous égaux ayant leurs côtés parallèles. Nous désignerons ces carrés par

$$\begin{matrix} b_{12} \; \ldots\ldots \; b_{1N} \\ \ldots\ldots \; b_{jk} \; \ldots\ldots \\ b_{N1} \; \ldots\ldots \; b_{NN}. \end{matrix}$$

A chaque pôle a_i contenu dans A je vais faire correspondre un certain nombre de carrés b que j'exclurai du champ de la variable z. Cette correspondance satisfera à la condition suivante: si z est un point quelconque du champ conservé, l'un au moins des carrés correspondant à a_i aura tous ses points plus voisins du point z que n'en est a_i. Pour établir une telle correspondance entre les pôles a_i et les carrés b, je procèderai comme il suit, ombrant au fur et à mesure les carres choisis.

Soit a_i un pôle situé dans le carré b_{jk}: nous ombrerons, s'ils ne le sont pas déjà, le carré $b_{j_1k_1}$ et les huit carrés, $b'_1 \ldots b'_8$, qui l'entourent. Si quelques-uns de ces carrés, par exemple b'_1, b'_2, b'_3, sont déjà ombrés, nous ombrerons tous les carrés (en nombre inférieur à 16) qui touchent à la figure formée par $b_{j_1k_1}, b'_1, b'_2, b'_3$. Mais il se pourra que dans certaines directions les carrés qui avoisinent immédiatement cette figure soient eux-mêmes déjà ombrés: voici alors comment on opèrera. Menons par a_i les parallèles aux côtés du carré A, et divisons chacun des quatre angles droits ainsi formés en quatre angles égaux; nous formons ainsi seize angles dont je considérai l'un en particulier, l'angle $u a_i u'$ par exemple. Traçons ensuite des cercles Γ de centre a_i et de rayons croissants, et soit Γ_1 le premier de ces cercles qui touche, dans l'angle $u a_i u'$, à un carré non encore ombré. Γ_1 détermine dans l'angle $u a_i u'$ un secteur $c_1 a_i c_1'$ tout



entier extérieur au carré b_{jk}. Si alors z est un point quelconque situé dans une région non ombrée de l'angle $u a_i u'$, il est clair que tout point de b_{jk} est moins éloigné de z que le point a_i. Désignons en effet par R la distance de a_i à z, par r le rayon $a_i c_1$ et par ρ le côté de b_{jk}. f étant un point quelconque du carré b_{jk}, nous pouvons remplacer le chemin fz par un chemin, plus long, ainsi composé: un segment fe, parallèle à l'un des côtés de b_{jk}, dont la longueur est inférieur à ρ, un arc ed de la circonférence de centre a_i passant par e, arc dont la longueur est inférieure à $\frac{\pi r'}{8}$, $(r < r' < r + \rho)$, enfin un segment dz du rayon $a_i z$, égal à $R - r'$. Le chemin total est inférieur a

$$R - r\left(1 - \frac{\pi}{8}\right) + \rho$$

et par suite à R, du moins si $r > 2\rho$. Or lorsque $r < 2\rho$ nous retombons dans le cas simple traité plus haut où certains carrés avoisinant immédiatement soit $b_{j_1 k_1}$, soit les huit carrés qui l'entourent ne sont pas encore ombrés. Ecartant ce cas particulier, nous voyons que si dans chacun des seize angles qui entourent a_i, nous faisons correspondre à ce pôle un carré tel que b_{jk}, la correspondance ainsi établie satisfera bien aux conditions voulues.

Si plusieurs carrés jouissent de la même propriété que b_{jk}, on choisira l'un quelconque d'entre eux. Si a_i est un pôle multiple on recommencera l'opération précédente en supposant ombré le carré b_{jk}.

17. Cette suite d'opérations fait correspondre à chaque pôle a_i 16 carrés b au plus. Si donc $N^2 > 32\nu$, il restera finalement plus de $\frac{N^2}{2}$ carrés non ombrés. Il y en aura donc, parmi ceux-ci, dont tous les points seront à une distance du contour de l'aire A supérieur à ηHr, η étant un nombre fini. Soit z un point d'un tel carré. Ce point jouit des propriétés suivantes: les pôles les plus rapprochés de z en sont à une distance supérieure à $\frac{Hr}{N}$, et ils sont au nombre de 8 au plus; d'une manière générale, le nombre des pôles dont la distance à z est inférieure à $H\frac{jr}{N}$ est inférieur au nombre des carrés b dont les points sont à une distance de z égale ou plus petite; ce nombre est donc inférieur à $4j(j+1)$. Modifions alors la disposition ordinaire des indices des pôles situés dans l'aire A et classons ces pôles d'après leur éloignement du point z. Nous aurons

$$|z-a_1| > H\frac{r}{N} \dots |z-a_8| > H\frac{r}{N},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|z-a_{4j(j-1)+1}| > H\frac{jr}{N} \dots |z-a_{4j(j-1)+8j}| > H\frac{jr}{N},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

le nombre des pôles dont la distance à z est comparée à $H\frac{jr}{N}$ étant égal à $8j$. j croît de 1 à μ et l'on a $2\mu < \sqrt{\nu}$.

On déduit de là les inégalités

$$(14)\qquad \begin{cases} H\displaystyle\sum_1^{\nu}\frac{1}{|z-a_i|} < \sum_1^{\mu} 8j\frac{N}{jr} < 8\,\frac{N\mu}{r} < \frac{N^2}{r} & \\ H^2\displaystyle\sum_1^{\nu}\frac{1}{|z-a_i|^2} < \sum_1^{\mu} 8j\frac{N^2}{j^2r^2} < k\,\frac{N^2}{r^2}\log\mu & (k \text{ nombre fini}) \\ H^3\displaystyle\sum_1^{\nu}\frac{1}{|z-a_i|^3} < \sum_1^{\mu} 8j\frac{N^3}{j^3r^3} < k_1\,\frac{N^3}{r^3} & (k_1 \text{ nombre fini}) \end{cases}$$

et ainsi de suite.

On peut interpréter simplement ces inégalités en disant qu'au point z les sommes précédentes ne peuvent dépasser la valeur qu'elles prendraient si la distribution des pôles a_i était uniforme, c'est-à-dire si chacun des carrés b sauf ceux (au nombre de 9) qui avoisinent immédiatement z contenait un pôle et un seul.

18. Ces divers résultats étant acquis nous pouvons calculer au point z une limite supérieure des modules de $g'(z)$ et de ses dérivées.

Considérons la somme

$$\sum \frac{z^p}{a_i^p(z-a_i)^2}.$$

Lorsque a_i est dans l'aire A définie plus haut, le rapport $\left|\frac{z}{a_i}\right|$ est fini. La somme Σ correspondant aux pôles situés dans A est donc inférieure, en module, à

$$\frac{hN^2}{H^2r^2}\log\mu \qquad (h \text{ positif fini}).$$

n' étant le nombre défini au § 5, le rapport $\frac{N^2}{n'}$ sera sûrement inférieur à un nombre fixe, si l'on prend, par exemple, pour N^2 le plus petit carré de nombre entier supérieur à 32ν. Si alors nous supposons fini[1] le nombre H, le module de la somme Σ sera inférieur (puisque $2\mu < \sqrt{\nu}$) à

$$h_1\frac{n'\log n'}{r^2} \qquad (h_1 \text{ positif fini}).$$

Considérons maintenant les pôles restants et d'abord ceux (en nombre n_1') dont le module est inférieur à r. Pour chacun de ces pôles, on a

$$|z-a_i| > kr \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Par suite, si l'on suppose que l'ordre ρ du produit de facteurs primaires $G(z)$ n'est pas entier, on aura

$$r^p\sum_1^{n'_1}\frac{1}{r_i^p|z-a_i|^2} < \frac{r^{p-2}}{k^2}\sum_1^{n'_1}\frac{1}{r_i^p} < \frac{cn}{k^2r^2} \qquad (c \text{ positif fini}).$$

n étant toujours le nombre défini au § 3.

[1] On obtiendrait d'autres théorèmes si l'on supposait que le nombre H croît indéfiniment avec r. Cf. § 19 et § 26.

Pour les pôles de module supérieur à r, qui sont extérieurs à l'aire A, on aura

$$|z - a_i| > kr_i \qquad (k \text{ positif fini}).$$

La somme Σ correspondante sera donc inférieure, en module, à

$$\frac{r^{p-1}}{k^2}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}} \quad \text{ou à} \quad \frac{c_1 n}{k^2 r^2} \qquad (c_1 \text{ positif fini}).$$

Nous avons donc finalement

$$\left|\sum_1^{\infty}\frac{z^p}{a_i^p(z-a_i)^2}\right| < h\frac{n}{r^2} + h_1\frac{n'\log n'}{r^2} \quad (h, h_1 \text{ positifs finis}).$$

D'ailleurs la somme

$$\left|\sum_1^{\infty}\frac{z^{p-1}}{a_i^p(z-a_i)}\right|$$

égale à $\frac{|g(z)|}{r}$ est sûrement, au point z, inférieure au second membre de cette inégalité.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

Si l'ordre de $G(z)$ n'est pas entier, il existe une infinité d'aires indéfiniment éloignées de l'origine, où l'on a

$$(15) \qquad |g'(z)| < h\frac{n\log n}{r^2},$$

h restant inférieur à un nombre fixe, et n ayant la même signification qu'au § 3.

Si l'ordre ρ était entier, on déterminerait le nombre n comme au § 22 ou au § 23 de la première partie, et l'on remplacerait l'inégalité (15) par une inégalité de la forme

$$|g'(z)| < hr^{p-2} + \frac{h_1 n \log_k n}{r^2} \qquad (k \text{ entier}, h, h_1 \text{ positifs finis}).$$

On vérifie d'ailleurs aisément en se reportant aux sommations précédentes que l'on a dans tous les cas

$$|g'(z)| < h\frac{n' \log n'}{r^2} + \varepsilon r^{p-1},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

19. Insistons maintenant sur le cas où l'ordre ρ n'est pas entier. Il résulte de la démonstration du § 18 que si le rapport $\frac{N^2}{n}$ est fini, (nous avons vu qu'on peut prendre en tout cas N^2 proportionnel à 32ν), la somme des carrés partiels dans lesquels l'inégalité (15) est satisfaite est dans un rapport fini avec l'aire totale A. Si l'on remplaçait la constante h par une fonction croissante de n, par exemple par $\log\log n$, on pourrait aller plus loin. Considérons par exemple le cercle C de rayon r ayant son centre à l'origine. Je vais montrer que *les régions de l'aire C dans lesquelles l'inégalité*

$$(16) \qquad |g'(\alpha z)| < \frac{n \log n \,.\, \log_2 n}{r^2}$$

n'est pas vérifiée ont une somme infiniment petite par rapport à l'aire totale C.

Supposons en effet que le côté du carré A soit égal à αr, le nombre α étant arbitrairement petit avec $\frac{1}{r}$. Pour tout pôle a_i situé en dehors de l'aire A on aura les deux inégalités

$$|z - a_i| > \alpha k_1 r, \qquad |z - a_i| > \alpha k_1 r_i \qquad (k_1 \text{ positif fini}).$$

Si donc dans le paragraphe précédent on fait $k = \alpha k_1$, on constatera que la somme Σ correspondant à ces divers pôles est inférieure à $\frac{cn}{\alpha^2 r^2}$ (c positif fini). Faisons d'autre part au § 17 $N = n$, $H = \alpha$. La seconde inégalité (14) nous montre que l'on a dans certaines régions de A

$$\sum_1^{\nu} \frac{1}{|z - a_i|^2} < \frac{hn^2 \log \nu}{\alpha^2 r^2} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

On vérifie de même que, dans les régions considérées le rapport $\frac{|g(z)|}{r}$

est inférieur au second membre de cette inégalité. Il en est par suite de même[1] de $|g'(z)|$.

Faisons en particulier $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\log_2 n}}$; l'inégalité (16) se trouve satisfaite dans certaines régions de l'aire A. Or il est clair que quelle que soit la situation du carré A dans le cercle C, le nombre ν des pôles qu'il contient deviendra, lorsque r croîtra, infiniment petit par rapport à N: il ne pourra en être autrement que pour un nombre limité de carrés A dont la somme est elle-même infiniment petite (avec $\frac{1}{r}$) par rapport à l'aire totale du cercle C. D'autre part, si $\frac{\nu}{N}$ est très petit, le rapport à A de la somme des carrés partiels b où l'on a les inégalités (14) tend vers l'unité. C'est bien le résultat que j'avais annoncé.

20. Une méthode identique permettra d'étudier la fonction $g''(z)$ et ses dérivées successives. Nous pouvons donc, sans reprendre la suite des raisonnements précédents, énoncer les résultats suivants qui résultent des inégalités (14).

Il existe des aires indéfiniment éloignées de l'origine où l'on a, en même temps que l'inégalité (15) *les inégalités*

$$|g''(z)| < h_1 \frac{n\sqrt{n}}{r^3}, \qquad |g'''(z)| < h_2 \frac{n^2}{r^4} \dots \tag{17}$$

h_1 *et* h_2 *étant des constantes positives finies.*

De même, en raisonnant comme au § 19, on constatera que dans des régions du cercle C dont la somme a avec l'aire totale C un rapport tendant vers l'unité, on aura en même temps que l'inégalité (16) les inégalités

---

[1] Si l'ordre ρ était entier, il faudrait également diviser par a^2 la limite obtenue au § 18. On a, en tout cas, dans certaines régions du carré A de côté ar l'inégalité

$$|g'(z)| < \frac{hn^2 \log \nu}{a^2 r^2} + \frac{\varepsilon}{a^2} r^{p-1},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

$$(18)\qquad |g''(z)| < \frac{n^{\frac{3}{2}}(\log_2 n)^{\frac{3}{2}}}{r^3} \ldots |g'''(z)| < \frac{n^2(\log_2 n)^2}{r^2}$$

$\log_2 n$ peut d'ailleurs être remplacé par $\log_3 n$, ou par une fonction de n croissant moins vite encore.

La méthode qui vient d'être employée est susceptible d'autres applications encore. On peut l'employer pour déterminer une limite supérieure du module de la fonction $g(z)$ elle-même et l'on obtiendra ainsi une limite plus précise que celle à laquelle nous sommes parvenus plus haut, (dans des régions moins étendues il est vrai).

Il résulte en effet de la première inégalité (14) que *si l'ordre ρ du produit de facteurs primaires $G(z)$ n'est pas entier* l'on a en même temps que l'inégalité (15) l'inégalité

$$|g(z)| < h\frac{n}{r} \qquad (h \text{ positif fini}).$$

Cette limite est particulièrement intéressante lorsque la fonction $g(z)$ est à croissance régulière. Désignons par $m_1(r)$ le module maximum (pour $|z| = r$) de $g(z)$ dans les régions où l'on a l'inégalité (15). Nous pouvons compléter la proposition énoncée au § 10 en disant que si *le rapport $\frac{r_n^\rho}{n}$ reste, quel que soit r, inférieur à un nombre fini, il en sera de même du rapport $\frac{r^{\rho-1}}{m_1(r)}$*.

21. La notion de croissance régulière s'étend immédiatement à la fonction $g'(z)$ et à ses dérivées. Considérons par exemple, la fonction $g'(z)$. Appelons $m_2(r)$ son module maximum (pour $|z| = r$), dans les régions où les inégalités (17) sont satisfaites et supposons que le rapport $\frac{m_2(r)}{r^{\rho-2}}$ reste à partir d'une certaine valeur de r, compris entre deux nombres finis. On peut dire alors que la croissance de $g'(z)$ est parfaitement régulière.

Dans ce cas, nous démontrerons, en raisonnant comme au § 10, que l'on a à partir d'une certaine valeur de i

$$\frac{r_i^\rho}{i} < h' \log i \qquad (h' \text{ positif fini}).$$

22. Les divers résultats que nous venons d'obtenir s'étendraient immédiatement à des fonctions méromorphes plus générales que la fonction $g(z)$ et ses dérivées. Considérons comme au § 11 la fonction méromorphe que l'on pourrait appeler fonction de genre p

$$f(z) = \sum \frac{b_i z^p}{a_i^p (z - a_i)} + H(z),$$

$H(z)$ étant un polynôme de degré $p - 1$, et les b_i *étant tous des nombres finis*. Nous avons vu que le module $|f(z)|$ a même limite supérieure que $|g(z)|$. On constaterait de même que $|f'(z)|$, $|f''(z)|$, ... satisfont dans les mêmes conditions que $|g'(z)|$, $|g''(z)|$, ... aux inégalités (15) et (17) ou (16) et (18).

23. Le module des fonctions $g'(z)$, $g''(z)$, ... atteint-il effectivement la limite supérieure que nous lui avons assignée? Il est certain que ce module prendra des valeurs arbitrairement grandes si l'on approche suffisamment d'un pôle. Mais, si l'on entoure chaque pôle d'un petit cercle $|g'(z)|$ pourra-t-il atteindre sa limite supérieure en dehors des petites aires ainsi formées? Pour répondre à cette question, nous remarquerons que la proposition du § 9 se généralise très facilement.

On a

$$-g'(z) = \sum \left[\frac{1}{(z - a_i)^2} - \frac{1}{a_i^2} - \frac{2z}{a_i^3} - \cdots - \frac{(p-1) z^{p-2}}{a_i^{p-2}} \right].$$

Considérons alors l'intégrale définie

$$\int_C - z g'(z) \, dz,$$

en désignant par C le contour d'un cercle C de rayon r sur lequel la fonction $g'(z)$ est continue, et soit n' le nombre des pôles de $g(z)$ contenus dans ce cercle. Ces pôles sont aussi ceux de la fonction $-zg'(z)$ et les résidus correspondants sont égaux à l'unité. On a donc

$$\int_C - z g'(z) \, dz = n'.$$

D'où nous concluons qu'en certains points de la circonférence C on a

$$r^2 |g'(z)| > n'.$$

La même méthode s'appliquerait évidemment à une dérivée quelconque de $g(z)$. Ainsi, en considérant l'intégrale $\int\limits_C z^q g^{(q)}(z)dz$, on prouverait qu'en certains points du cercle C, on a

$$|g^{(q)}(z)| > \frac{n'}{r^{q+1}}.$$

Au lieu d'intégrer la fonction $-zg'(z)$ le long du cercle C, on pourrait l'intégrer le long d'un contour fermé quelconque sur lequel cette fonction est continue. Si la longueur du contour est ηr, le nombre des zéros enveloppés $\eta_1 n'$, η et η_1 étant des nombres finis, on aura en une infinité de points du contour considéré

$$(19) \qquad |g'(z)| > \frac{\eta_1}{\eta}\frac{n'}{r^2}.$$

Cette inégalité est satisfaite le long de lignes telles que tout contour satisfaisant aux conditions précédentes soit traversé par une infinité d'entre elles. Ces lignes ne peuvent donc pas être contenues tout entières à l'intérieur de petits cercles entourant les pôles. L'inégalité (19) est bien caractéristique de la fonction méromorphe $g'(z)$. L'application suivante va nous permettre d'ailleurs de nous en rendre mieux compte.

24. Posons

$$-g'(z) = y$$

et supposons que y satisfasse à une équation différentielle de la forme

$$\frac{y'^2}{2} = 2y^3 + u$$

u étant une fonction quelconque de z, connue ou inconnue, qui s'efface devant les deux premiers termes de l'équation lorsque z s'approche d'un pôle de y. En d'autres termes la fonction u est telle que le rapport $\frac{u}{y^3}$ tende vers zéro, lorsque z tend à se confondre avec l'un des pôles de y.

Je vais chercher à déterminer les rayons des cercles dont il faut entourer les pôles pour que la perturbation apportée par eux dans la croissance de y ne se fasse plus sentir en dehors de ces cercles, c'est-à-dire pour que les grandes valeurs de y ne dépendent plus, dans la région respectée, que des théorèmes généraux.

Étudions la fonction y au voisinage de l'un de ses pôles sans nous préoccuper d'ailleurs de savoir dans quelle mesure ce pôle est isolé. Excluant du domaine étudié l'entourage immédiat du pôle, désignons, d'une manière précise, par ϖ et λ deux nombres positifs (qui pourront, en même temps que r dépasser tout nombre donné), et tels que les inégalités

$$(20) \qquad |y| > \varpi \qquad \text{et} \qquad (21) \quad |y| < \varpi\lambda$$

entraînent autour[1] d'un point z_0 où elles sont satisfaites, l'inégalité

$$|u| < \varepsilon |y|^3,$$

ε étant un nombre positif donné, arbitrairement petit.

Considérons un chemin $z_0 z$, dont la longueur soit à un facteur fini près égale à $|z_0 - z|$, le long duquel les inégalités (20) et (21) seront supposées satisfaites. On a, le long de ce chemin

$$\frac{y'^2}{4y^3} = 1 + \delta \quad \text{avec} \quad |\delta| < \varepsilon.$$

D'où, par intégration

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y_0}} = (1 + \delta_1)(z - z_0) \qquad |\delta_1| < \varepsilon_1,$$

le rapport $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ étant fini.

Cela posé, étudions y au voisinage d'un point z_0 où l'on ait

$$y_0 = \varpi\lambda,$$

$|\lambda|$ étant compris entre un nombre fixe supérieur à 1 et un nombre croissant l_1 tel que le rapport $\frac{l_1}{l}$ devienne avec $\frac{1}{r}$ inférieur à tout nombre donné.

Faisons

$$z - z_0 = \frac{\tau}{2\sqrt{y_0}}$$

---

[1] c'est-à-dire le long d'un chemin quelconque issu de z_0, tant que les inégalités (20) et (21) seront satisfaites sur ce chemin.

et supposons que les inégalités (20) et (21) ne cessent pas d'être vérifiées le long du chemin $z_0 z$. On aura en z,

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{(1+\delta_1)\tau + 1}{\sqrt{y_0}}. \tag{22}$$

Le numérateur du second membre aura un module fini (non infiniment petit), si τ est, dans son plan, en dehors d'un cercle de rayon fini ayant son centre au point -1. Il faut pour cela que z soit en dehors d'un cercle γ qui a son centre au point $z_0 - \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$ et son rayon égal à $\frac{h}{\sqrt{\varpi|\lambda|}}$, ($h$ positif fini; par exemple $h < \frac{1}{2}$, de sorte que le point z_0 est en dehors du cercle γ).

Soit alors z en dehors de γ et à une distance de son centre égale à $\frac{k}{\sqrt{\varpi|\lambda|}}$ (k positif). On déduit de (22) les inégalités

$$\frac{1}{\sqrt{|y|}} > \frac{(1-\varepsilon_1)k}{\sqrt{\varpi|\lambda|}},$$

ou

$$|y| < \frac{\varpi|\lambda|}{(1-\varepsilon_1)^2 k^2} \tag{23}$$

et

$$|y| > \frac{\varpi|\lambda|}{(1+\varepsilon_1')^2 k^2} \qquad \left(\frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_1} \text{ fini}\right). \tag{24}$$

Pour que les inégalités (23) et (24) soient vérifiées le long d'un chemin ne traversant pas γ, il suffit que les inégalités (20) et (21) ne cessent pas d'être vérifiées le long de ce chemin. Or, d'après les hypothèses faites sur λ l'inégalité (23) entraîne nécessairement l'inégalité (21) lorsque r est assez grand. D'autre part, l'inégalité (20) est une conséquence de l'inégalité (24) tant que l'on a

$$(1+\varepsilon_1')^2 k^2 < |\lambda|.$$

Considérons alors un cercle σ de centre z_0 et de rayon égal à $\frac{1}{(1+\varepsilon_1')\sqrt{\varpi}}$. Le long d'un chemin $z_0 z$ (ne pénétrant pas dans γ) intérieur à σ, les inégalités (23) et (24) entraînent (20) et (21), et d'autre part ces inégalités, satisfaites en z_0, ne peuvent cesser d'être vérifiées avant (20) et (21). Elles sont donc satisfaites dans toute la portion du cercle σ extérieure au cercle γ.

Désignons maintenant par a un nombre positif qui croîtra indéfiniment avec r, mais moins vite que l_1 (c'est-à-dire tel que le rapport $\frac{l_1}{a}$ croisse aussi indéfiniment), et traçons à l'intérieur de σ un cercle concentrique à γ ayant pour rayon $\frac{1}{(1-\varepsilon_1)\sqrt{a\varpi}}$. Je remplacerai ce cercle, pour simplifier, par le plus petit cercle c de centre z_0 qui le contient, cercle dont le rayon[1] est manifestement supérieur à $\frac{1}{(1-\varepsilon_2)\sqrt{a\varpi}}$ ($\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ fini). Lorsque z est sur le contour du cercle c, on a

$$k \geqq \frac{1}{1-\varepsilon_1}\sqrt{\frac{|\lambda|}{a}}.$$

On aura par suite sur ce contour, en vertu de (23), *l'inégalité*

$$|y| < a\varpi. \tag{25}$$

Si maintenant nous sortons du cercle c pour nous rapprocher du contour de σ, le nombre k qui figure dans l'inégalité (23) continuera à croître, et l'inégalité (25) ne cessera pas d'être vérifiée. Elle est donc vérifiée dans toute la couronne comprise entre c et σ.

Cela posé, considérons la couronne D limitée par les cercles de rayon r_1 et ηr_1 (η nombre fini plus grand que 1, par exemple $\eta = 2$) ayant leur centre à l'origine. Je supposerai que l'on sache déjà (par exemple en vertu du théorème du § 18) que *l'on ne peut pas avoir dans toute la couronne D*

$$|y| > \varpi l_1.$$

Si l'inégalité (25) n'est pas satisfaite dans toute la couronne, on pourra sûrement trouver à son intérieur un point z_0 où l'on aura

$$a\varpi \leqq |y| < \varpi l_1.$$

A ce point correspondront un cercle γ_1, un cercle c_1, de rayon supérieur

[1] Le rayon de c deviendra infiniment petit par rapport au rayon de σ lorsque r et a augmenteront indéfiniment.

à $\frac{1}{\sqrt{a\varpi}}$, entourant z_0 et γ_1 et un cercle σ_1 entourant c_1. Sur le contour de c_1 on aura l'inégalité (25).

Supposons encore qu'en dehors du cercle c_1, l'inégalité (25) cesse d'être vérifiée en certains points de la couronne D. Joignons l'un de ces points, z_1, au contour de c_1 par un chemin (extérieur à c_1) sur lequel y est continu. Il existe nécessairement sur ce chemin un point z'_0 ou $|y|$ est compris entre $a\varpi$ et ϖl_1; nous construirons alors comme plus haut un cercle c_2 de rayon supérieur à $\frac{1}{\sqrt{a\varpi}}$ entourant z'_0, et sur le contour duquel on aura l'inégalité (25). *Ce cercle est tout entier extérieur au cercle* c_1; en effet, d'après ce qui précède, le point z'_0 ne peut se trouver à l'intérieur du cercle σ_1, concentrique à c_1; or le rapport du rayon de σ_1 à celui de c_1 augmente indéfiniment avec r.

Nous répéterons la même opération autant de fois qu'il sera nécessaire. S'il existe dans D, en dehors des cercles c déjà tracés, un point z_1 où l'on n'ait pas l'inégalité (25), nous on conclurons (en joignant z_1 au contour d'un cercle c) qu'il existe encore (dans D) en dehors des cercles c, un point où $|y|$ est compris entre $a\varpi$ et ϖl_1; nous entourerons alors ce point d'un nouveau cercle c, qui est extérieur à tous les autres, et sur le contour duquel on aura l'inégalité (25). Lorsque l'opération aura été répétée un certain nombre[1] fini de fois il n'existera certainement plus de point z_1 en dehors des cercles c; en effet nous avons une limite inférieure des rayons de ces cercles, et nous savons d'autre part, qu'ils sont tous intérieurs les uns aux autres; le nombre des cercles c que peut contenir la couronne D est donc nécessairement fini. Ainsi lorsque nous aurons achevé la construction des cercles c, nous pourrons affirmer que *l'inégalité* (25) *est satisfaite en tout point de la couronne D intérieur à ces cercles.*

Appliquons maintenant à la fonction y le théorème du § 23. Pour cela, traçons dans la couronne D une courbe fermée Γ entourant l'origine qui sera assujettie aux deux conditions suivantes: elle ne traversera aucun

---

[1] Tous ces cercles c_1 sont contenus à l'intérieur d'une aire égale à $\pi\eta'^2 r_1^2$ (η' fini), et l'aire de chacun d'eux est supérieure à $\frac{\pi}{a\varpi}$. Le nombre des cercles c est donc plus petit que $\eta'^2 a\varpi r_1^2$.

cercle c et sa longueur sera proportionnelle à r_1. Pour constituire la courbe Γ, nous tracerons par exemple un cercle C ayant son centre à l'origine et son rayon égal à $\eta_1 r_1$ $(1 < \eta_1 < \eta)$, et si ce cercle rencontre un cercle c_i aux points $a_i b_i$, nous substituerons à l'arc $a_i b_i$ de C le plus petit arc $a_i b_i$ de c_i. Les cercles c étant tous intérieurs les uns aux autres, la longueur du contour Γ ainsi formé sera inférieure à $\eta_1 \pi^2 r_1$.

D'après la proposition du § 23, on aura, en une infinité de points du contour Γ

$$|y| > \frac{1}{\eta_1 \pi^2} \frac{n'}{r_1^2}$$

n' désignant le nombre des pôles dont le module est inférieur à r_1. Nous en concluons que *l'on* a

$$n' < \eta_1 \pi^2 a r_1^2 \varpi$$

ce qui est le résultat que j'avais en vue.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que la couronne D contenait des points où $|y| > a\varpi$. S'il n'en était pas ainsi, c'est que l'on aurait l'inégalité (25) dans toute la couronne, et l'on arriverait alors immédiatement au résultat précédent.

Je vais appliquer ce résultat aux fonctions méromorphes récemment découvertes par M. Painlevé. La même méthode s'appliquerait évidemment à des équations différentielles plus compliquées que celle dont nous sommes partis. Elle consiste à distinguer parmi les grandes valeurs d'une intégrale celles qui s'expliquent par le voisinage d'un pôle et celles qui dépendent de la nature analytique de la fonction, caractérisée ici par son ordre.

Application aux fonctions entières de M. Painlevé.

25. M. Painlevé a déterminé récemment toutes les équations différentielles de la forme

$$y'' = f(y', y, x),$$

où f est rationnel en y', algébrique en x et y, qui ont leurs points critiques fixes. Parmi ces équations il en est de particulièrement intéressantes: ce sont celles dont les intégrales sont des fonctions *méromorphes* nouvelles qui ne sont réductibles à aucune transcendante connue. Une trausformation rationnelle en y et algébrique en x ramène ces équations à trois types canoniques très simples dont je considérai d'abord les deux premiers, réservant le dernier pour la troisième partie. Ces deux premiers types sont

$$y'' = 6y^2 + z \tag{26}$$

et

$$y'' = 2y^3 + zy + c.$$

M. Painlevé a démontré que les intégrales de ces équations sont des fonctions méromorphes: on les rattache très aisément à des fonctions entières vérifiant une équation différentielle du troisième ordre. On a en effet pour l'équation (25)

$$y = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}$$

u étant une fonction entière, et pour l'autre équation

$$y^2 = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}$$

où u est encore une fonction entière. Ces résultats étant acquis, l'étude complète des transcendantes nouvelles y et u doit commencer par la détermination de leur mode de croissance. De cette croissance dépendent en effet et l'approximation avec laquelle u sera donnée par un développement en série limitée, et la répartition des zéros et le genre de cette fonction.

Or les propositions générales que j'ai obtenues plus haut sur la fonction $g(z)$ vont faciliter l'étude de la croissance des fonctions y et u. Cette étude peut d'ailleurs être faite directement, comme l'a fait savoir M. Painlevé dans deux notes insérées aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

26. Considérons d'abord les intégrales de l'équation (26) et posons

$$y = -g'(z) + l(z) \tag{27}$$

$g(z)$ étant la dérivée logarithmique d'un produit de facteurs primaires $G(z)$ et $l(z)$ une fonction entière. Nous désignerons par n' le nombre des pôles de $g(z)$ dont le module est inférieur à r.

Je vais d'abord démontrer que l'on a à partir d'une certaine valeur de r

$$n' < r^{\frac{5}{2}}\theta(r) \tag{28}$$

$\theta(r)$ désignant une fonction croissante quelconque de r qui croîtra, par exemple, comme $\log_q r$ (q entier), ou moins vite encore.

L'équation (26) équivaut à la suivante

$$\frac{y'^2}{2} = 2y^3 + zy - f(z), \qquad f(z) = \int y\,dz. \tag{29}$$

Considérons z à l'intérieur de la couronne D comprise entre les cercles de rayons ηr_1 et r_1 ($\eta > 1$, par exemple $\eta = 2$) et désignons par μ un nombre qui sera fixe dans cette couronne, mais qui deviendra infiniment grand en même temps que r_1. Soit d'autre part ε un nombre donné, arbitrairement petit, inférieur par exemple à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

Si l'on a

$$|y| > \mu\sqrt{r_1}, \tag{30}$$

$$|f(z)| < \varepsilon\mu^3 r_1^{\frac{3}{2}} \tag{31}$$

l'équation (29) se présente sous la forme

$$\frac{y'^2}{4y^3} = 1 + \delta \quad \text{avec} \quad |\delta| < \varepsilon. \tag{32}$$

D'ailleurs, si en un point z_0 on a les inégalités

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\mu^3 r_1^{\frac{3}{2}} \tag{31'}$$

et

$$|y| < \frac{\varepsilon}{k}\mu^3\sqrt{r_1} \qquad (k \text{ positif}) \tag{33}$$

l'inégalité (31) sera satisfaite sur tout chemin continu issu de z_0 et de longueur inférieur à $\frac{k}{2}r_1$ le long duquel on a l'inégalité (33).

Appliquons alors à y les résultats du § 24, en y faisant

$$\varpi = \mu\sqrt{r_1}, \qquad l = \varepsilon\mu^2.$$

Nous appellerons a et l_1 deux nombres compris entre 1 et $\varepsilon\mu^2$, tels que les rapports $\frac{l_1}{a}$ et $\frac{\varepsilon\mu^2}{l_1}$, de même que a, croissent indéfiniment avec r_1.

Cela posé, admettons pour un instant qu'il existe dans la couronne D un point z_0 où l'on ait à la fois

$$a\mu\sqrt{r_1} \leqq |y| < l_1\mu\sqrt{r_1} \quad \text{et} \quad |f(z)| < kl_1\mu r_1^{\frac{3}{2}},$$

k étant un nombre positif fini, inférieur par exemple à l'expression $\frac{\varepsilon\mu^2}{3l_1}$ (qui augmente indéfiniment avec r_1).

Lorsqu'on s'éloigne de z_0, il suffit, pour que l'équation (29) conserve la forme (32) que les inégalités (30) et (31), par suite que les inégalités (30) et (33) restent satisfaites. Nous nous trouvons donc bien dans les conditions prévues au § 24, et nous pouvons entourer z_0 d'une cercle c_1 (dans lequel (30) et (33) sont partout vérifiées, sauf à l'intérieur d'un petit cercle γ que l'on peut toujours contourner), qui a son rayon proportionnel à $(a\mu)^{-\frac{1}{2}} r_1^{-\frac{1}{4}}$, et sur le contour duquel on aura

$$(34) \qquad |y| < a\mu\sqrt{r_1}.$$

En intégrant y à partir de z_0, on voit que l'on aura sur le même contour

$$|f(z)| < (k+1)l_1\mu r_1^{\frac{3}{2}},$$

car on peut joindre z_0 à un point quelconque de c_1 par un chemin de longueur inférieur à r_1.

Comme au § 24, on pourra entourer c_1 d'un cercle σ_1 concentrique de rayon m fois plus grand (m croissant indéfiniment avec r_1) sur le contour duquel on aura les mêmes inégalités.

Supposons construit le cercle c_1, et qu'il existe dans D, en dehors de c_1 un point où l'on ait les mêmes inégalités qu'en z_0 (k pouvant avoir une valeur plus grande qu'en z_0, mais toujours finie et inférieure, par exemple, à $\frac{\varepsilon\mu^2}{2l_1}$): nous entourons ce point d'un cercle c_2 *extérieur* à c_1 et de même grandeur sur le contour duquel on aura encore l'inégalité (34), et ainsi de suite. Nous avons vu au § 24 que le nombre des cercles c tous extérieurs les uns aux autres que l'on peut ainsi construire est nécessairement fini pour une valeur donnée de r_1 (bien entendu, ce nombre augmentera indéfiniment avec c_1). Imaginons alors que ces cercles soient tous construits: je dis que *l'inégalité* (34) *est satisfaite dans toute la portion de la couronne D extérieure aux cercles c.*

Supposons en effet qu'elle ne le soit pas en un point z_1; joignons z_1 au contour de c_1 par un chemin proportionnel[1] à r_1, *extérieur à tous les cercles c* et sur lequel y soit continu. Il existe nécessairement sur ce chemin des points où $|y|$ est compris entre $a\mu\sqrt{r_1}$ et $l_1\mu\sqrt{r_1}$. Soit z_0' le premier point rencontré (à partir du concour de c_1) où il en soit ainsi; $|y|$ ne cessant pas d'être inférieur à $l_1\mu\sqrt{r_1}$ entre le contour de c_1 et z_0', on a nécessairement en ce point

$$|f(z)| < k_1 l_1 \mu r_1^{\frac{3}{2}} \quad (k_1 \text{ positif fini, inférieur à } \frac{\varepsilon\mu^2}{2l_1}).$$

Or, par hypothèse, ces circonstances ne peuvent pas se présenter si z_0' est extérieur à tous les cercles c. Nous en conclurons que l'inégalité (34) est nécessairement vérifiée au point z_1, extérieur à ces cercles. Nous pouvons, par suite, appliquer à y les résultats du § 24, et nous constatons que l'on a

$$n' < ha\mu r_1^{\frac{5}{2}} \qquad (h \text{ positif fini})$$

c'est à dire l'inégalité (28), où l'on fait

$$\theta = ha\mu.$$

Pour établir ce résultat, j'ai admis qu'il existait, dans la couronne D, au moins un point z_0 où les inégalités

$$a\mu\sqrt{r_1} \leqq |y| < l_1\mu\sqrt{r_1} \quad \text{et} \quad |f(z)| < kl_1\mu r_1^{\frac{3}{2}}, \quad \left(k < \frac{\varepsilon\mu^2}{3l_1}\right)$$

étaient satisfaites en même temps. Je vais montrer qu'*il existe toujours un tel point z_0, à moins que l'on n'ait dans toute la couronne D*

$$|y| < a\mu\sqrt{r_1}.$$

---

[1] Il est toujours possible de construire un tel chemin contournant un nombre quelconque de cercles c; voir fin du § 24 et note de la page 180.

Il me suffira, pour cela, de reprendre le raisonnement précédent, en l'appliquant cette fois à tout le cercle C de rayon ηr_1, qui a son centre à l'origine.

Le cercle C peut être décomposé en une série de couronnes $D'_1, D'_2, \ldots$ concentriques à D. Si nous excluons de C un cercle fini entourant l'origine, les couronnes D' seront limitées par les cercles de rayons $r'_1, r'_2, \ldots, \eta r_1$, r'_1 ayant une valeur finie, et les nombres r'_2, r'_3, ... étant déterminés par les égalités

$$r'_2 = \eta r'_1, \qquad r'_3 = \eta r'_2\,, \quad \ldots$$

(η a la valeur fixe supérieure à 1, définie plus haut).

Soit, dans la couronne D'_i, un point où l'on ait

$$a\mu\sqrt{r} \leqq |y| < l_1\mu\sqrt{r}, \qquad |f(z)| < kl_1\mu r^{\frac{3}{2}}$$

($r = |z|$; a et μ ayant les valeurs définies plus haut par rapport à r_1).

On aura, a fortiori, en ce point

$$a\mu\sqrt{r'_i} \leqq |y| < l'_1\mu\sqrt{r'_i}, \qquad |f(z)| < kl'_1\mu r'^{\frac{3}{2}}_i$$

en posant

$$l'_1 = \eta^{\frac{3}{2}} l_1.$$

On pourra donc entourer z d'un cercle c' de rayon proportionnel à $(a\mu)^{-\frac{1}{2}} r'^{-\frac{1}{4}}_i$, sur le contour duquel on aura

$$|y| < a\mu\sqrt{r'_i}$$

et, a fortiori

$$|y| < a\mu\sqrt{r}.$$

En procédant alors dans chacune des couronnes D' comme nous l'avons fait dans la couronne D, nous pouvons construire dans C des cercles c' (en nombre fini pour une valeur donnée de r_1), extérieurs les uns aux autres, et tels que les inégalités

$$a\mu\sqrt{r} < |y| < l_1\mu\sqrt{r}, \qquad |f(z)| < kl_1\mu r^{\frac{3}{2}}$$

ne puissent être satisfaites en même temps en aucun point de C extérieur à ces cercles.

Cela posé, les nombres a et μ (qui croissent indéfiniment avec r_1) peuvent toujours être pris assez grands pour que l'on ait en un point fixe quelconque Z_0

$$|y| \leqq a\mu\sqrt{|Z_0|}, \qquad |f(z)| < a\mu |Z_0|^{\frac{3}{2}}.$$

Eloignons nous alors de l'origine, et considérons un chemin[1] $Z_0 z$ proportionnel à $r (= |z|)$ et, ne traversant aucun des cercles c'. Le raisonnement déjà employé plus haut nous montre que *l'on a nécessairement* en z

$$(34) \qquad |y| < a\mu\sqrt{r}.$$

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi nous appellerons Z le premier point du chemin considéré où l'inégalité (34) cesse d'être vérifiée; on a au point Z

$$|y| = a\mu\sqrt{r},$$

et par intégration de Z_0 à Z

$$|f(z)| < k_1 a\mu r^{\frac{3}{2}}, \qquad (k_1 \text{ positif fini}),$$

par suite, a fortiori, si r est assez grand

$$|f(z)| < l_1 \mu r^{\frac{3}{2}},$$

puisque le rapport $\frac{l_1}{a}$ est supposé croître indéfiniment avec r. Or par hypothèse ces circonstances ne peuvent pas se présenter si z est extérieur aux cercles c'. Nous en concluons que l'inégalité (34) est satisfaite au point z.

Ce résultat, appliqué bien à la couronne D nous conduit à la conclusion suivante: *ou l'inégalité* (34) *est satisfaite dans toute la couronne; ou il existe dans D des cercles c' et, par suite, des points z_0 répondant aux conditions énoncées.*

C'est bien là ce que j'avais annoncé et l'inégalité (28) est maintenant complètement établie.

---

[1] Pour construire ce chemin, on peut procéder comme à la fin du § 24. On mène la droite $Z_0 z$, et chaque fois que cette droite coupe un cercle c' aux points $a_i b_i$, on remplace la corde par la plus petit arc $a_i b_i$.

De l'inégalité (28) nous déduisons aisément que $l(z)$ se réduit à une constante. Tout d'abord la fonction entière $l(z)$ ne peut être qu'un polynôme. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait, en certains points du contour Γ défini au § 24,

$$|l(z)| > r_1^m, \text{ (}m\text{ pouvant dépasser tout nombre donné),}$$

en même temps que l'inégalité (34), ce qui entraînerait nécessairement

$$|g'(z)| > r_1^{m'},$$

où m' peut dépasser (avec r_1) tout nombre assigné d'avance.

Appliquons maintenant à $g'(z)$ le théorème du § 19 en donnant au nombre H du § 16 la valeur r^{-q} (q positif). Les côtés des petits carrés b définis au § 16 seront inférieurs à $\frac{r^{-q+1}}{\sqrt{32n'}}$, et il en résulte que l'on peut faire jouer aux cercles c le rôle des petites aires dont nous avions au § 16 entouré les pôles de la fonction $g'(z)$: en effet, dans l'un quelconque de ces cercles on ne peut rencontrer des pôles qu'à l'intérieur du cercle γ correspondant; les carrés b ombrés autour de ces pôles sont donc tous contenus dans un cercle concentrique à γ et de rayon inférieur à $\frac{kn'r^{-q+1}}{\sqrt{n'}}$ (k positif fini), cercle qui est certainement intérieur au cercle c si q est assez grand.

On déduit de là (§ 19), en tenant compte de la valeur de H, que l'on a l'inégalité

$$|g'(z)| < r_1^{m'}$$

en tout point de la couronne D extérieur aux cercles c. La fonction $l(z)$ est donc bien un polynôme.

Cela posé, le théorème du § 18 nous montre plus précisément que, pour des valeurs de r_1 indéfiniment croissantes, on aura en une infinité de points de la couronne D extérieurs aux cercles c l'inégalité

$$|g'(z)| < \frac{n'(\log n')^{1+\alpha}}{r_1^2} \quad \text{ou} \quad |g'(z)| < \sqrt{r_1}\,(\log r_1)^{1+\alpha}$$

(α positif arbitrairement petit avec $\frac{1}{r_1}$).

On voit que cette égalité n'est compatible avec l'inégalité (34) que si $l(z)$ *est une constante.*

27. $l(z)$ se réduisant à une constante, l'inégalité (28) exprime, par définition, que l'ordre de la fonction entière u est au plus égal à $\frac{5}{2}$. Il est aisé de vérifier que cet ordre est précisément $\frac{5}{2}$.

Il résulte du § 18 que l'on a dans une infinité de régions du plan de la variable z

$$|g'(z)| < h\frac{n'\log n'}{r^2}, \qquad |g'''(z)| < h\frac{n'^2}{r^4}$$

h étant un nombre positif fini. Le module $|y''-6y^2|$ sera donc inférieur (puisque $l(z)$ est une constante) à l'expression

$$h^2\frac{n'^2(\log n')^2}{r^4};$$

en d'autres termes, l'on aura

$$r < h^2\frac{n'^2(\log n')}{r^4} \quad \text{ou} \quad n' > kr^{\frac{5}{2}}(\log r)^{-1} \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Nous pouvons affirmer de plus, qu'à partir d'une certaine valeur de r cette inégalité est satisfaite quel que soit r. En effet il résulte des inégalités obtenues au § 20 que s'il n'en était pas ainsi, on aurait dans une infinité de régions du plan

$$|g'(z)| < \varepsilon r^{\frac{1}{2}}, \qquad |g'''(z)| < \varepsilon r$$

ε étant arbitrairement petit, inégalités incompatibles avec l'égalité (26).

28. On a donc, à partir d'une certaine valeur de r

$$kr^{\frac{5}{2}}(\log r)^{-1} < n' < r^{\frac{5}{2}}\theta(r)$$

où k est un nombre fini et $\theta(r)$ une fonction croissant aussi lentement que l'on veut.

Cette double inégalité montre que le module du $n^{\text{ième}}$ pôle de y ou du $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction entière u croît approximativement comme $n^{\frac{2}{5}}$.

L'ordre de la fonction u est $\frac{5}{2}$, son genre est 2. De plus le module maximum (pour $|z| = r$) $M(r)$ de u satisfait, à partir d'une certaine valeur de r à la double inégalité

$$e^{hr^{\frac{5}{2}}(\log r)^{-1}} < M(r) < e^{r^{\frac{5}{2}}\theta(r)}.$$

La fonction entière u est donc, si l'on adopte la terminologie de M. Borel, à *croissance régulière*.

29. L'étude du second type d'équations à intégrales méromorphes signalé par M. Painlevé conduira à des résultats analogues.

Considérons l'équation

$$y'' = 2y^3 + zy + c. \tag{36}$$

L'intégrale générale de cette équation satisfait, avons-nous dit, à l'égalité

$$y^2 = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}$$

où u est une fonction entière. On a donc

$$y^2 = -g'(z) + l(z)$$

$g(z)$ étant la dérivée logarithmique d'un produit de facteurs primaires $G(z)$ et $l(z)$ une fonction entière. n' désignant toujours le nombre des pôles de module inférieur à r, je vais d'abord démontrer que l'on a à partir d'une certaine valeur de r

$$n' < r^3\theta(r) \tag{37}$$

$\theta(r)$ désignant une fonction croissante quelconque de r.

L'équation (36) équivaut à la suivante

$$y'^2 = y^4 + 2cy + zy^2 - f(z), \qquad f(z) = \int y^2 dz. \tag{38}$$

Restant placés dans la couronne D définie au § 26, nous voyons que si l'on a simultanément les inégalités

$$|y^2| > \mu r_1, \tag{39}$$

$$|f(z)| < \varepsilon\mu^2 r_1^2 \tag{40}$$

(μ étant arbitrairement grand avec r_1, ε arbitrairement petit, comparable par exemple à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$), l'équation (38) se présentera sous la forme

$$\frac{y'^2}{y^4} = \frac{1}{4y^6}\left(\frac{dy^2}{dz}\right)^2 = 1 + \delta \quad \text{avec} \quad |\delta| < \varepsilon.$$

D'ailleurs, si en un point z_0 on a les inégalités

$$(40') \qquad |f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\mu^2 r_1^2$$

et

$$(41) \qquad |y^2| < \frac{\varepsilon}{k}\mu^2 r_1$$

l'inégalité (40) sera satisfaite sur tout chemin continu issu de z_0 et de longueur inférieur à $\frac{kr_1}{\varepsilon}$ le long duquel on a l'inégalité (41).

Appliquons à y^2 les résultats du § 24 en y faisant

$$\varpi = \mu r_1, \qquad l = \varepsilon\mu$$

et en appelant a et l_1 deux nombres, compris entre 1 et $\varepsilon\mu$, tels que les rapports $\frac{l_1}{a}$ et $\frac{\varepsilon\mu}{l_1}$, de même que a, croissent indéfiniment avec r_1.

Cela posé, tous les raisonnements faits sur la fonction y du § 24 s'appliquent ici à la fonction y^2, avec cette seule différence que $\sqrt{r_1}$ est remplacé par r_1.

S'il existe dans la couronne D des points z_0 où l'on ait à la fois

$$a\mu r_1 \leqq |y^2| < l_1\mu r_1 \quad \text{et} \quad |f(z)| < kl_1\mu r_1^2$$

$$\left(k \text{ positif fini, inférieur par exemple à } \frac{\varepsilon\mu}{3l_1}\right)$$

on les entourera de cercles de rayon proportionnel à $(a\mu r_1)^{-\frac{1}{2}}$ tous extérieurs les uns aux autres et en dehors desquels on aura

$$|y^2| < a\mu r_1.$$

On en conclura (§ 24) que l'on a

$$n' < ha\mu r_1^3.$$

Considérons d'autre part tout le cercle C de rayon ηr_1 qui a son centre à l'origine. Dans ce cercle nous pouvons construire des cercles c' (en nombre fini pour une valeur donnée de r_1), extérieurs les uns aux autres, et tels que les inégalités

$$a\mu r < |y^2| < l_1 \mu r, \qquad |f(z)| < kl_1 \mu r^2 \qquad (r = |z|)$$

ne puissent être satisfaites au même temps en aucun point de C extérieur à ces cercles. On en conclut qu'il existe nécessairement dans la couronne D des points z_0 satisfaisant aux conditions énoncées plus haut. L'inégalité (37) se trouve ainsi complètemant établie.

De l'inégalité (37) nous déduisons que la fonction entière $l(z)$ est un polynôme du premier degré au plus.

On vérifie en effet comme au § 26 que cette fonction ne peut être qu'un polynôme. D'autre part, le théorème du § 18 montre que pour des valeurs de r, indéfiniment croissantes, on a, en une infinité de points de la couronne D extérieur aux cercles C, l'inégalité

$$|g'(z)| < \frac{n' (\log n')^{1+\alpha}}{r_1^2} \quad \text{ou} \quad |g'(z)| < r_1 (\log r_1)^{1+\alpha}$$

(α positif arbitrairement petit).

Or cette inégalité n'est compatible avec l'inégalité

$$|y^2| < a\mu r_1,$$

satisfaite par hypothèse en dehors des cercles c, que si $l(z)$ est du premier degré au plus.

30. Les résultats du paragraphe précédent nous prouvent que l'ordre de la fonction entière u est au plus égal à 3. Nous allons maintenant constater que cet ordre est précisément 3 et, de plus, que le genre de u est 3.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Le polynôme $l(z)$ se réduira à une constante, et l'on aura pour des valeurs r_1 indéfiniment croissantes

$$n' \log n' < \frac{r^3}{\mu},$$

μ étant une fonction croissante de n', égale par exemple à $\log_2 n'$.

Donnons à r l'une de ces valeurs r_1, et considérons la couronne D définie plus haut. Cette couronne contient (§ 18), une infinité de points où l'on a simultanément les inégalités

$$|y^2| < \varepsilon_1 r, \qquad |f(z)| < \varepsilon_1 r_1^2,$$

ε_1 tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$ (je supposerai que $\varepsilon_1 > \frac{1}{\mu}$). Considérons plus particulièrement, dans D, un cercle quelconque σ de rayon αr_1, α étant un nombre tel que le rapport $\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$. Nous savons (§ 19, note) qu'il existe à l'intérieur de σ des régions où l'on a

$$(42) \qquad |y^2| < \frac{n' \log n'}{\alpha^2 r^2} + \frac{\varepsilon_1 r}{\alpha^2} < \varepsilon_1' r, \qquad |f(z)| < \varepsilon_1' r^2$$

(ε_1' tendent vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$).

Cela posé, soit $a_i = r_i e^{\theta_i \sqrt{-1}}$ un pôle situé dans D. Nous mènerons par a_i la droite L qui fait avec l'axe réel un angle égal à $\frac{\pi - \theta_i}{2}$, et nous prendrons pour cercle σ le cercle de rayon αr tangent à L au point a_i, et situé par rapport à L du côté où la partie réelle de z va en croissant.

Considérons dans ce cercle σ la région déterminée par l'angle droit de sommet a_i qui a pour bissectrice un diamètre. Nous pouvons toujours trouver dans cette région un point z_0 où l'on ait les inégalités (42). Suivons alors la fonction y le long de la droite $z_0 a_i$.

y satisfait par hypothèse à l'équation (38) qui donne pour y' une double valeur: je supposerai que l'on parte de z_0 avec la détermination[1]

$$(43) \qquad y' = y \sqrt{y^2 + \frac{c}{y} + z - \frac{f(z)}{y}}.$$

Je vais montrer que si nos hypothèses se trouvaient satisfaites, les fonctions y^2 et $f(z)$ vérifieraient entre z_0 et a_i des inégalités de la forme

$$(42') \qquad |y^2| < \varepsilon_2 r_1, \qquad |f(z)| < \varepsilon_2 r_1^2 \quad (\varepsilon_2 \text{ tendant vers o avec } \frac{1}{r_1})$$

[1] Pour appliquer le même raisonnement au cas où le radical serait précédé du signe —, il suffirait de prendre le cercle σ de l'autre côté de la droite L.

ce qui est manifestement absurde, puisque le point a_i est un pôle de ces fonctions.

Pour parvenir à ce résultat prenons ε supérieur à 2α et $\sqrt{2\varepsilon_1'}$ et appelons z_1 le premier point rencontré sur $z_0 a_i$ où l'on ait

$$|y^2| = \varepsilon r_1. \tag{44}$$

On a entre z_0 et z_1 $|y^2| < \varepsilon r_1$, et par suite (puisque la longueur du chemin $z_0 z_1$ est inférieure à αr_1)

$$|f(z_0)| < \varepsilon_1' r_1^2 + \alpha \varepsilon r_1^2 < \varepsilon^2 r_1^2.$$

On conclut de là qu'au point z_1 l'équation (43) se présente sous la forme

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{z_1}(1 + \delta) \qquad \big(|\delta| \text{ proportionnel à } \varepsilon\big). \tag{45}$$

Or il résulte de la position du cercle σ et du point z_0 dans σ que, si l'on désigne par dz l'accroissement de z suivant $z_0 a_i$, le segment $\sqrt{z_1}dz$ fait avec l'axe réel un angle compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. L'égalité (45) prouve donc qu'au point z_1 (dans la direction $z_1 a_i$), la partie réelle de $\log y$ est décroissante.

On en conclut que le module $|y^2|$ ne peut atteindre en z_1 la valeur (44); s'il l'atteignait, en effet, il devrait croître en ce point, ou du moins passer par un maximum, ce qui, comme on vient de voir, ne peut avoir lieu. Les inégalités (42') seront donc vérifiées entre z_0 et a_i. Cette conclusion étant absurde, nous reconnaissons que notre hypothèse initiale n'était pas légitime. La fonction entière u est donc bien de genre 3, ce qu'il fallait démontrer.

---

[1] L'argument de $\sqrt{z_1}$ est égal à $\frac{\theta_i + \alpha'}{2}$, α' étant proportionnel à α; l'argument de dz est compris entre $\frac{\pi - \theta_i}{2} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi - \theta_i}{2} + \frac{3\pi}{4}$. L'argument de $\sqrt{z_1}\,dz$ est donc compris entre $\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2}$ et $\frac{5\pi}{4} + \frac{\alpha'}{2}$.

TROISIÈME PARTIE.

Le module maximum d'une fonction de genre infini.

1. L'étude des fonctions entières les plus générales ne peut évidemment pas conduire à des résultats aussi précis que celle des fonctions de genre fini. Il n'est, cependant pas inutile de remarquer que les méthodes employées dans ce travail s'appliquent encore aux fonctions de genre infini. Nous constaterons ainsi, qu'on peut toujours déduire les propriétés fondamentales d'une fonction entière de son développement en produit infini. Ce développement se prête aussi bien à une étude systématique que le développement en série de puissances, qui, a été comme on sait, le principal objet des travaux de M. HADAMARD.

Soit $F(z)$ une fonction entière quelconque, r_i le module de son $i^{\text{ème}}$ zéro. Cherchons d'abord si l'on pourra, sans passer par l'intermédiaire du développement en série obtenir un résultat équivalant au théorème fondamental de M. HADAMARD sur la limite inférieure du module r_i. Le théorème de M. SCHOU et la proposition équivalente que j'ai établie au § 14 de la première partie s'appliquent aux fonctions de genre infini, mais donnent dans ce cas des limites beaucoup trop basses. Heureusement un procédé très simple va nous permettre de compléter les résultats obtenus dans la première partie.

2. Désignons par n' le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur à $\frac{r}{2+\alpha}$ (α positif). Nous avons démontré (première partie, § 17) que l'on a sur une infinité d'arcs du cercle C de rayon r ayant son centre à l'origine l'inégalité

$$(1) \qquad |F(z)| > e^{hn'}$$

h étant égal à $\log(1+\alpha)$. C'est cette proposition que je me propose de préciser.

Appliquons-la, dans ce but, à la fonction

$$F_1(z^2) = F(z)F(-z),$$

n'_1 désignant le nombre des zéros de $F_1(z^2)$ dont le module est inférieur à $\frac{r^2}{2+\alpha}$, c'est-à-dire le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inferieur à $\frac{r}{\sqrt{2+\alpha}}$, on aura

$$|F_1(z^2)| > e^{hn'_1}$$

pour une infinité de valeurs $r^2 e^{\theta\sqrt{-1}}$ de z^2. On a donc, lorsque z^2 prend l'une de ces valeurs l'une des deux inégalités

$$(2) \qquad |F(z)| > e^{\frac{h}{2}n'_1}, \qquad |F(-z)| > e^{\frac{h}{2}n'_1}$$

en d'autres termes, on a l'inégalité (2) sur une infinité d'arcs du cercle C.

Appliquons maintenant ce résultat à la fonction $F_1(z^2)$. Nous en déduisons pour $|F(z)|$ une nouvelle limite et ainsi de suite indéfiniment.

Nous constatons finalement que l'on a, quel que soit q, en une infinité de points du cercle C

$$(3) \qquad |F(z)| > e^{\frac{h}{2^q}n'_q}$$

n'_q désignant le nombre des zéros de $F(z)$ dont le module est inférieur à $r(2+\alpha)^{\frac{-1}{2^q}}$.

Soit β un nombre inférieur à 1. Quel que soit r, on peut trouver un entier q tel que l'on ait

$$2^q = kn'^{\beta}_q \qquad \left(\frac{1}{2} < k < 1\right),$$

et par suite

$$\frac{n'_q}{2^q} = \frac{1}{k} n'^{1-\beta}_q.$$

Désignons alors par $\varpi(r)$ le nombre des zéros de module inférieur à r: on pourra énoncer la proposition suivante:

On a, en une infinité de points du cercle de rayon r, l'inégalité

$$(4) \qquad |F(z)| > e^{hn_\varepsilon^{1-\beta}}, \qquad (h \text{ positif fini}),$$

n_ε *désignant le nombre des zéros de* $F(z)$ *dont le module est inférieur à* $r(1-\varepsilon)$ *et* ε *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{r}$ *plus vite que la fonction*

$$1-(2+\alpha)^{\frac{-1}{\left[\varpi\left(\frac{r}{2}\right)\right]^\beta}}.$$

On peut se débarrasser de l'exposant $1-\beta$ en posant $n_\varepsilon^{1-\beta} = n_{\varepsilon+\varepsilon_1}$, et le nombre ε_1 décroît alors d'autant plus rapidement que la croissance de la fonction $\varpi(r)$ est elle-même plus rapide. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$n_0 = \varpi(r) = e^{e^{e^r}}, \qquad \beta < \frac{1}{2}.$$

On aura

$$n_\varepsilon^{1-\beta} > e^{e^{-2\beta+e^{(1-\varepsilon)r}}} > e^{e^{e^{(1-\varepsilon)r+\log\left[1-\frac{2\beta}{e^{r(1-\varepsilon)}}\right]}}}$$

par suite

$$n_\varepsilon^{1-\beta} > n_{\varepsilon+\varepsilon_1}, \quad \text{si} \quad \varepsilon_1 = r^{-1}\log\left(1-2\beta e^{-r(1-\varepsilon)}\right).$$

Si n_ε croissait plus vite qu'une fonction formée d'un nombre quelconque d'exponentielles supérieures, il en serait de même de l'inverse de ε_1.

Nous voyons qu'il était indispensable de préciser ainsi la proposition établie dans la première partie. En effet, si $F(z)$ est de genre infini, le rapport de n_ε au nombre n' qui figurait dans la limite assignée aux fonctions de genre fini, peut dépasser tout nombre donné d'avance.

3. Abordons maintenant la question inverse et cherchons à déterminer une limite supérieure du module maximum (pour $|z| = r$) d'un produit de facteurs primaires de genre infini. Soit

$$G(z) = \prod \left(1-\frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i}+\dots+\frac{1}{\rho_i}\left(\frac{z}{a_i}\right)^{\rho_i}}$$

un tel produit, $M(r)$ son module maximum. L'étude de ce produit présente une difficulté. Si l'on se donne la suite de zéros a_i, on peut former d'une infinité de manières le produit convergent $G(z)$, puisque les ρ_i sont des entiers quelconques, choisis seulement de telle façon que la série

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$$

soit absolument convergente. Il est bien certain alors que la croissance de $G(z)$ pourra dépendre essentiellement du choix des nombres ρ_i au lieu d'être déterminée par la densité des zéros a_i, comme il arrivait pour les produits de genre fini. Mais est-il possible de choisir les nombres ρ_i de manière à obtenir une limite supérieure se rapprochant de la limite inférieure assignée à $M(r)$ au paragraphe précédent?

Dans son mémoire *sur les zéros des fonctions entières*, M. Borel a fait remarquer que la valeur i de ρ_i indiquée par Weierstrass était beaucoup trop élevée. Se proposant d'étudier les fonctions à *croissance très rapide*, fonctions telles que l'on ait pour une infinité de valeurs de i indéfiniment croissantes l'inégalité

$$r_i < \log_k i$$

quelque grand que soit le nombre k, M. Borel pose

$$\rho_i = (\log i)^2$$

puis déterminant le nombre n par l'égalité

$$r = r_n - \frac{1}{(\log n)^\alpha}$$

où α est un nombre plus petit que 1, il montre que le module maximum $M(r)$ est celui d'une fonction d'ordre ρ_n. En d'autres termes, l'on a

$$M(r) < e^{r^{(\log n)^2}}. \tag{5}$$

Le résultat subsisterait d'ailleurs si l'on remplaçait 2 par un autre nombre plus grand que 1.

Cette limite diffère de celle que nous avions obtenue pour les fonctions de genre fini. Il importe donc de se demander s'il n'est pas possible de l'en rapprocher. Mais pour parvenir à des inégalités un peu précises, j'éviterai de me placer dans le cas le plus général. J'insisterai au contraire sur les types de fonctions qui nous apparaissent comme les plus simples après les fonctions de genre fini; leur étude semble être en effet le point de départ naturel d'une théorie complète des fonctions entières de genre infini.

4. Les résultats que je viens de rappeler suggèrent une première remarque. En faisant $\rho_i = (\log i)^{1+\alpha}$, nous donnons encore à ρ_i une valeur

beaucoup plus grande qu'il n'est nécessaire pour assurer la convergence de la série $\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$. Il suffirait évidemment de prendre

$$\rho_i = (1 + \alpha)\frac{\log i}{\log r_i}.$$

Mais il ne faudrait pas conclure de là que le module maximum $M(r)$ croîtra moins vite si l'on donne à ρ_i cette valeur plutôt qu'une valeur plus élevée. C'est, chose curieuse, précisément le contraire qui arrivera. Mais, ici, une distinction s'impose entre les diverses fonctions de genre infini.

Considérons tout d'abord la classe des fonctions entières définies par la propriété suivante: il existe un nombre positif σ tel que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > (\log i)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{6}$$

Cette classe de fonctions est celle qui se rapproche le plus de la classe des fonctions de genre fini, et elle mérite une étude spéciale; nous la rencontrerons tout à l'heure dans une application. J'appellerai fonctions de *type exponentiel simple* les fonctions pour lesquelles l'inégalité (6) est satisfaite, et je dirai que σ est l'ordre exponentiel de la fonction, en supposant que le nombre σ ait été pris aussi petit que possible.

5. Cela posé, désignons par N le nombre des zéros de $G(z)$ dont le module est inférieur à $r(1 + k)$, (k positif fini).

P_{ρ_i} représentant le facteur primaire relatif au zéro a_i on sait, d'après Weierstrass, que l'on a, pour $i > N$

$$|P_{\rho_i}| < e^{b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}} \qquad (b \text{ positif fini}).$$

Lorsque $i < N$, on a, si $r_i > r$

$$|P_{\rho_i}| < e^{2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\rho_i}} < e^{b \log \rho_i}, \qquad (b \text{ positif fini}),$$

et, si $r_i < r$

$$|P_{\rho_i}| < e^{b\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} \log \rho_i}.$$

Il résulte de là que

$$M(r) < e^{b \log \rho_N \sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} + b \sum_1^n \log \rho_i}, \qquad r_n \leqq r. \tag{7}$$

Si donc l'on a l'inégalité (6) en même temps que

$$\rho_i < (\log i)^{1+\alpha}$$

$\log \rho_i$ sera inférieure à $\sigma(1 + \alpha) \log r_i$, et l'on aura évidemment, à partir d'une certaine valeur de r, l'inégalité

$$M(r) < e^{h\left[\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}\right] \log r}, \qquad (h \text{ positif fini}).$$

6. Si $G(z)$ est un produit de type exponentiel simple et d'ordre exponentiel σ, je prendrai pour ρ_i *l'entier le plus voisin* de $\sigma \log i$. Nous allons constater que ce choix est particulièrement favorable. Supposons que r_i satisfasse à partir d'une certaine valeur m de i à l'inégalité

$$r_i > \lambda (\log i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

λ et σ étant des nombres positifs.

Nous aurons

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \Sigma \chi(i)$$

en posant

$$\chi(i) = e^{\sigma \log i \left(\log \frac{r}{\lambda} - \frac{1}{\sigma} \log_2 i\right)}.$$

Déterminons alors les nombres n_1 et n_2 par les égalités

$$\log \frac{r}{\lambda} - \frac{1}{\sigma} \log_2 n_1 = \frac{\alpha}{\sigma},$$

$$\log \frac{r}{\lambda} - \frac{1}{\sigma} \log_2 n_2 = -\frac{\alpha'}{\sigma}$$

α et α' étant des nombres positifs d'ailleurs arbitrairement petits.

Lorsque $i > n_2$, on a

$$\frac{\chi'(i)}{\chi(i)} = \frac{1}{i} \left(\sigma \log \frac{r}{\lambda} - \log_2 i - 1\right) < -\frac{1 + \alpha'}{i}.$$

D'ou $\alpha'\chi(i) < -[\chi(i) + i\chi'(i)]$

$$\int_{n_2}^{\infty} \chi(x)dx < \frac{1}{\alpha'} n_2 \chi(n_2) = \frac{n_2^{1-\alpha'}}{\alpha'}.$$

D'autre part, si $i < n_1$, on a à partir d'une certaine valeur m de i

$$\frac{\chi'(i)}{\chi(i)} > -\frac{1-\alpha}{i}.$$

D'où $\alpha\chi(i) < \chi(i) + i\chi'(i)$

$$\int_{m}^{n_1} \chi(x)dx < \frac{1}{\alpha} n_1 \chi(n_1) = \frac{n_1^{1+\alpha}}{\alpha}.$$

Les valeurs de i comprises entre n_1 et n_2 sont en nombre inférieur à n_2 et pour ces valeurs de i, l'on a

$$\chi(i) < \chi(n_1).$$

Nous aurons donc finalement, en supposant α et α' du même ordre de grandeur

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \frac{h}{\alpha} n_2 \chi(n_1)$$

où h est un nombre positif fini. n_1 et n_2 auront une signification très simple si r_i croît précisément comme $\lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}$. On a dans ce cas

$$\log r - \log r_{n_1} = \frac{\alpha}{\sigma}, \qquad \log r - \log r_{n_2} = -\frac{\alpha'}{\sigma};$$

n_1 représente donc le nombre des zéros a_i dont le module est inférieur à $e^{-\frac{\alpha}{\sigma}} r$, n_2 le nombre des zéros de module inférieur à $e^{\frac{\alpha'}{\sigma}} r$, α et α' étant arbitrairement petits.

Dans le cas général, on aura

$$n_2 = e^{e^{\alpha'} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}}, \qquad \chi(n_1) = n_1^{\alpha} = e^{\alpha e^{-\alpha} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}}.$$

Or il est manifeste que, quelque petit que soit ε, on peut toujours déterminer deux nombres α et α', égaux ou du même ordre de grandeur, tels que l'on ait

$$e^{\alpha'} + \alpha e^{-\alpha} - \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{\sigma} \log \alpha < 1 + \varepsilon$$

à partir d'une certaine valeur de r. On peut dès lors énoncer la proposition suivante: [1]

Quelque petit que soit le nombre ε, on a, à partir d'une certaine valeur de r

$$M(r) < e^{e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}}}. \tag{8}$$

7. En suivant la méthode employée dans la première partie, on peut généraliser encore cette proposition. Soit $\psi(i)$ une fonction holomorphe, réelle et positive telle que le rapport $\frac{\psi(i)}{(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}}$ soit croissant à partir d'une certaine valeur de i et telle que l'on ait

$$r_i > \lambda\psi(i).$$

On posera

$$\chi(i) = \left[\frac{r}{\lambda\psi(i)}\right]^{\sigma \log i}$$

et l'on déterminera les nombres n_1 et n_2 par les égalités

$$\log\frac{r}{\lambda} - \log\psi(n_1) = \frac{\alpha}{\sigma},$$

$$\log\frac{r}{\lambda} - \log\psi(n_2) = -\frac{\alpha'}{\sigma}.$$

---

[1] Si l'on avait donné à ρ_i une valeur moins élevée, par exemple la valeur $(1+\beta)\frac{\log i}{\log r_i}$, qui suffit à assurer la convergence de la série $\sum\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$, la valeur de i à partir de la quelle cette série eût décrir aussi vite que $\Sigma i^{-1-\alpha'}$ eût été très supérieure à n_2, et la limite supérieure de cette série se fût trouvée augmentée.

On obtiendra alors, comme au paragraphe précédent, les inégalités

$$\sum\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < hn_2\chi(n_1), \qquad M(r) < e^{\frac{h}{a}[n_2\chi(n_1)]^{1+\varepsilon}}.$$

8. Nous allons maintenant compléter la proposition du § 6, en démontrant un théorème analogue à celui du § 20 de la première partie.

Considérons le produit $G(z)$ du § 5, pour lequel on a

$$r_i > \lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Je dis que si l'on a

$$M(r) > e^{e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}}} \tag{9}$$

on a, à partir d'une certaine valeur de r

$$r_i < (1+\varepsilon)\lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{10}$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Posons en effet

$$\psi(i) = \lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

et supposons que l'on ait, pour des valeurs n_1 de i indéfiniment croissantes

$$r_{n_1} = K\psi(n_1), \qquad K > 1.$$

Nous poserons

$$r = \psi(n) = K^{1-\beta}\psi(n_1), \qquad 0 < \beta < 1$$

et

$$\psi(n_2) = K\psi(n_1).$$

Si l'on se reporte aux calculs du § 4, on voit, qu'il suffit, pour que r et n_2 prennent ces valeurs, que l'on ait fait

$$\alpha = (1-\beta)\sigma\log K, \qquad \alpha' = \beta\sigma\log K.$$

D'ailleurs

$$n = n_1^{K^{(1-\beta)\sigma}}, \qquad n_2 = n^{K^{\beta\sigma}}.$$

On a, par suite, les inégalités suivantes:

$$\sum_{m}^{n_1} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \frac{n_1^{1+\alpha}}{\alpha} < \frac{\eta}{\alpha} n^{(1+\alpha)e^{-\alpha}}, \qquad (\eta \text{ fini})$$

$$\sum_{n_2+1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \frac{n_2^{1-\alpha'}}{\alpha^2} < \frac{\eta'}{\alpha'} n^{(1-\alpha')e^{\alpha'}}, \qquad (\eta_1 \text{ fini})$$

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \sum_{n_1+1}^{n_2} i^{\sigma \log\left(\frac{r}{r_{n_1}}\right)} < \eta_2 \frac{n^{(1-\alpha')e^{\alpha'}}}{1-\alpha'}, \qquad (\eta_2 \text{ fini}),$$

puisque $\sigma \log \dfrac{r}{r_{n_1}} = \alpha'$.

Or on vérifie sans peine que, quelque petits que soient α et α', on peut trouver un nombre positif ε tel que les seconds membres de ces inégalités soient tous trois inférieurs à $n^{1-\varepsilon}$, à partir d'une certaine valeur de n; l'inégalité (7) du § 5 nous montre alors que l'inégalité (9) ne peut plus être satisfaite. Ainsi l'hypothèse faite sur r_n conduit bien à une contradiction, ce qu'il fallait démontrer.

9. Les fonctions de type exponentiel simple ne constituent encore qu'une classe très particulière parmi les fonctions de genre infini. Mais la méthode précédente permettra d'étudier tout aussi aisément des fonctions croissant de plus en plus rapidement.

Sans insister sur les cas intermédiaires supposons qu'il existe un nombre fini σ tel que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > (\log_2 i)^{\frac{1}{\sigma}}$$

et prenons pour ρ_i l'entier le plus voisin de $\log i \log_2 i$. Posant, cette fois

$$\chi(i) = e^{\sigma \log i \log_2 i \left(\log r - \frac{1}{\sigma} \log_3 i\right)}$$

nous aurons encore

$$M(r) < e^{\left[\Sigma\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}\right]^{1+\varepsilon}}, \quad (\varepsilon \text{ tendant vers zéro avec } \tfrac{1}{r})$$

et

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \Sigma \chi(i).$$

Nous déterminerons les nombres n_1 et n_2 par les égalités

$$(1 + \log_2 n_1)\left(\log r - \frac{1}{\sigma}\log_3 n_1\right) = \frac{\alpha}{\sigma},$$
$$(1 + \log_2 n_2)\left(\log r - \frac{1}{\sigma}\log_3 n_2\right) = -\frac{\alpha'}{\sigma}$$

α et α' étant deux nombres arbitrairement petits, du même ordre de grandeur.

On a lorsque $i > n_2$

$$\frac{\chi'(i)}{\chi(i)} = \frac{1 + \log_2 i}{i}(\sigma \log r - \log_3 i) - \frac{1}{i} < -\frac{1 + \alpha'}{i},$$

$$\int_{n_2}^{\infty} \chi(i)\,di < \frac{1}{\alpha'} n_2 \chi(n_2).$$

De même

$$\int_{m}^{n_1} \chi(i)\,di < \frac{1}{\alpha} n_1 \chi(n_1).$$

Nous aurons donc finalement

$$\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i} < \frac{h}{a} n_2 \chi(n_1)$$

h étant un nombre positif fini. Or on a

$$n_2 = e^{e^{r^\sigma e^{\alpha'(1+\log_2 n_2)^{-1}}}}, \qquad n_1 = e^{e^{r^\sigma e^{-\alpha(1+\log_2 n_1)^{-1}}}}.$$

On déduit aisément de là que le module maximum $M(r)$ satisfait à l'inégalité

$$M(r) < e^{e^{e^{(1+\varepsilon)r^\sigma}}}$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Ainsi la méthode de sommation qui vient d'être exposée a une portée générale et elle permet d'étudier la série $\sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}$, par suite le module $M(r)$, quelque lentement que croisse le module r_i du zéro de rang i.

La dérivée logarithmique d'une fonction de genre infini.

10. La dérivée logarithmique du produit infini $G(z)$ défini plus haut a pour expression

$$g(z) = \sum \left(\frac{z}{a_i}\right)^{p_i} \frac{1}{z - a_i}.$$

Proposons-nous d'étudier le module maximum de $g(z)$ dans des régions convenablement choisies du plan de la variable z.

Si l'on désigne par n' le nombre des points a_i dont le module est inférieur à r, on peut affirmer que l'on a sur une infinité d'arcs du cercle C de rayon r

$$|g(z)| > \frac{n'}{r}, \qquad |g'(z)| > \frac{n'}{r^2}, \quad \ldots .$$

La démonstration qui nous avait permis d'établir ces inégalités dans le cas des fonctions de genre fini subsiste ici, en effet sans modification. Les conséquences que nous avions tirées de ces inégalités (au § 24) resteront vraies également.

11. Cherchons maintenant à limiter la croissance de $g(z)$, en supposant que $G(z)$ soit de type exponentiel simple. Considérons dans ce but une aire proportionnelle à r^2, par exemple [1] un carré A de côté Hr. A l'intérieur de ce carré se trouvent une infinité de régions (Deuxième Partie § 17) par exemple des cercles de rayon proportionnel à $\frac{Hr}{\sqrt{n'}}$, dans lesquels on a

$$\left|\sum \left(\frac{z}{a_i}\right)^{p_i} \frac{1}{z - a_i}\right| < \frac{hn'}{Hr}, \qquad (h \text{ positif fini}),$$

la somme $\sum$ étant étendue aux divers pôles contenus dans l'aire A. D'ailleurs la somme des régions en question est avec l'aire totale A dans un rapport fini.

Dans les mêmes conditions, la somme

$$\sum \frac{1}{|z - a_i|^2} \left|\frac{z}{a_i}\right|^{p_i}$$

---

[1] La forme de l'aire A n'importe pas ici. Remarquons qu'elle peut être contenue tout entière à l'intérieur d'un angle fini ω ayant pour sommet l'origine.

étendue aux pôles contenus dans A est inférieur à $\frac{hn' \log n'}{H^2 r^2}$, la somme

$$\sum \frac{1}{|z - a_i|^3} \left| \frac{z}{a_i} \right|^{\rho_i}$$

est inférieure à $\frac{hn' \sqrt{n'}}{H^3 r^3}$, et ainsi de suite.

Ces divers résultats, obtenus dans la seconde partie, s'appliquent en effet à la dérivée logarithmique d'une fonction entière quelconque, de genre fini ou infini.

Soit maintenant a_i l'un quelconque des pôles de $g(z)$ situés en dehors du carré A: on aura

$$|z - a_i| > k \frac{r}{H} \qquad (k \text{ positif fini}).$$

Le module de la somme $\sum$ relative à ces divers pôles est donc, pour la dérivée logarithmique, inférieur à

$$\frac{k}{Hr} \sum \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\rho_i}.$$

Cette série est celle dont nous avons évalué la somme aux paragraphes précédents. Sa limite supérieure sera

$$\frac{h\varphi(r)}{Hr} \qquad (h \text{ positif fini})$$

si l'on désigne par $e^{\varphi(r)}$ la limite assignée au module maximum $M(r)$ de $G(z)$.

Si $\varphi(r)$ croît plus vite qu'une puissance quelconque de r on peut prendre comme aire A un carré de côté $\frac{r}{r_m}$ (m étant arbitrairement grand, lorsque r est lui-même assez grand). Tous les points situés dans ce carré sont à une distance de l'origine compris entre r et $r(1 + \varepsilon)$, et l'on a

$$\frac{n'}{Hr} < n'^{1+\varepsilon'}$$

ε et ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Supposons alors, en particulier, que $G(z)$ soit de type exponentiel simple et que l'on ait à partir d'une certaine valeur de i

$$r_i > \lambda(\log i)^{\frac{1}{\sigma}} \qquad (\lambda \text{ et } \sigma \text{ positifs finis});$$

nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Quelque petit que soit ε, on a, dans une infinité de régions s'éloignant indéfiniment de l'origine

$$|g(z)| < e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^\sigma};$$

on constaterait de même que l'on a, dans les mêmes régions

$$|g'(z)| < e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^\sigma},$$

$$|g''(z)| < e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^\sigma} + \mu\frac{n'\sqrt{n'}}{r^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

μ étant un nombre positif *proportionnel à r^m* (m fini).

Nous ajouterons qu'un angle quelconque ω dont le sinus est comparable à $\frac{1}{r^m}$, en d'autres termes un angle arbitrairement petit contient une infinité de régions jouissant des propriétés énoncées.

12. On peut compléter cette proposition comme nous l'avons fait au § 8 pour celle du § 6.

Désignons par $m(r)$ le module maximum de $g(z)$ dans les régions définies plus haut. *L'inégalité*

$$m(r) > e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^\sigma}$$

entraîne, à partir d'une certaine valeur de r

$$n' > e^{(1-\varepsilon)\left(\frac{r}{\lambda}\right)^\sigma}$$

quelque petit que soit ε.

En d'autres termes, nous pouvons affirmer que si cette dernière inégalité cessait d'être vérifié pour des valeurs indéfiniment croissantes de r, on aurait dans des régions indéfiniment éloignées

$$m(r) < e^{(1-\varepsilon')\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\sigma}}, \qquad (\varepsilon' > 0).$$

On peut aussi agrandir les régions où les résultats précédents sont valables en multipliant les limites supérieures assignées à $|g(z)|$, $|g'(z)|$, ... par une fonction croissante de n', par exemple, par $\log n'$ ou $\log\log n'$. Les nouvelles régions seraient alors telles que le rapport de leur somme à l'aire totale A tende vers l'unité quand r augmente indéfiniment.

Ajoutons enfin que l'on obtiendrait les mêmes limites supérieures si l'on remplaçait la fonction $g(z)$ et ses dérivées par une fonction méromorphe d'un type plus général:

$$F(z) = \sum \frac{b_i}{(z - a_i)^k} \left(\frac{z}{a_i}\right)^{\rho_i} + H(z),$$

les nombres b_i étant tous finis ainsi que l'entier k, et $H(z)$ étant une fonction entière dont le module maximum est supposé ne pas croître plus vite que le module de la somme Σ.

13. Ces divers propositions donneront lieu aux mêmes applications que celles de la seconde partie. Ils vont nous servir à étudier le troisième type d'équations différentielles à intégrales méromorphes qu'a signalé M. Painlevé. Ce type est le suivant

$$(11) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} + e^z(\alpha y^2 + \beta) + e^{2z}\left(\gamma y^3 + \frac{\delta}{y}\right)$$

les constantes α, β, α, δ ayant les valeurs

$$\begin{array}{llll}
\gamma = -1, & \delta = 1, & & \alpha,\ \beta \text{ quelconques,} \\
\text{ou } \gamma = -1, & \delta = 0, & \beta = 1, & \alpha \text{ quelconques,} \\
\text{ou } \gamma = 0, & \delta = 0, & \alpha = -1, & \beta = 1.
\end{array}$$

M. Painlevé a démontré que les intégrales de l'équation (11) sont des fonctions méromorphes dans tout le plan. La transcendante y s'exprime par le quotient $\frac{v}{u}$ de deux fonctions entières v et u vérifiant les équations simultanées

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{u^2} &= -\frac{ve^z}{u}\left(\frac{\gamma e^z v}{u} + \alpha\right), \\ \frac{v''}{v} - \frac{v'^2}{v^2} &= \quad \frac{ue^z}{v}\left(\frac{\delta e^z u}{v} + \beta\right). \end{aligned}$$

14. Pour étudier les intégrales de l'équation (11) je ferai le changement de variable

$$y = e^{-z}\zeta.$$

L'équation (11) devient

$$e^{-z}(\zeta'' - 2\zeta' + \zeta) = e^{-z}\frac{(\zeta' - \zeta)^2}{\zeta} + e^z(\alpha e^{-2z}\zeta^2 + \beta) + e^{2z}\left(\gamma e^{-3z}\zeta^3 + \frac{\delta e_z}{\zeta}\right)$$

ou

$$(13)\qquad \zeta\zeta'' = \zeta'^2 + \alpha\zeta^3 + \gamma\zeta^4 + \beta\zeta e^{2z} + \delta e^{4z}.$$

L'avantage de cette nouvelle équation est qu'elle met en évidence la façon dont se comporte la fonction méromorphe ζ au voisinage de l'un de ses pôles.

Si $\gamma = 0$, $\alpha = -1$, les termes prépondérants au voisinage d'un pôle quelconque situé à distance finie sont

$$\zeta\zeta'' - \zeta'^2 - \zeta^3$$

et il est aisé alors de vérifier que tous les pôles sont du second ordre et tous les résidus égaux à 2.

Si au contraire $\gamma = -1$, $\zeta\zeta''$ devient infini comme $\zeta'^2 - \zeta^4$, et il en résulte que les pôles sont du premier ordre, le résidu correspondant étant égal à $\pm\sqrt{-1}$.

D'ailleurs, si nous désignons par $f(z)$ la dérivée logarithmique de la fonction entière u, la première équation (12) deviendra

$$(12')\qquad f'(z) = -\gamma\zeta^2 - \alpha\zeta.$$

Nous sommes ainsi amenés à distinguer deux cas suivant la valeur de la constante γ.

Considérons d'abord le cas où $\gamma = 0$. On a alors, avons-nous dit $\delta = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et l'équation (13) devient

$$\zeta\zeta'' = \zeta'^2 - \zeta^3 + \zeta e^{2z}, \qquad \zeta = f'(z). \tag{14}$$

Proposons-nous d'étudier la croissance des intégrales méromorphes de cette équation.

15. Nous poserons

$$\zeta' = 2g'(z) + H(z)$$

$g(z)$ étant la dérivée logarithmique d'un produit de facteurs primaires, et $H(z)$ une fonction entière. Nous désignerons par n' le nombre des pôles de $g(z)$ dont le module est inférieur à r, par ν' le nombre des zéros de $H(z)$ de module inférieur à ηr en supposant que $\eta < \frac{1}{e+1}$.

Un calcul analogue à celui de § 24 de la seconde partie va nous donner d'abord une limite supérieure de n'.

Remarquons d'abord que toute intégrale de (14) satisfait aux équations suivantes

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} + \zeta + \frac{e^{2z}}{\zeta} - 2\int \frac{e^{2z}}{\zeta} = 0, \tag{15}$$

$$\int \frac{e^{2z}}{\zeta}\, dz = \int \zeta dz + \frac{\zeta'}{\zeta}, \tag{16}$$

obtenues en multipliant les deux membres de (14) soit par $\frac{\zeta'}{\zeta^3}$, soit par $\frac{1}{\zeta^2}$, et en intégrant: on a par suite aussi

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} - 2\frac{\zeta'}{\zeta} + \zeta + \frac{e^{2z}}{\zeta} - 2\int^z \zeta dz = 0. \tag{17}$$

Cela posé, plaçons-nous à l'intérieur du cercle C de rayon r_1 ayant son centre à l'origine, et désignons par μ un nombre[1] qui croîtra indéfiniment avec r_1, d'ailleurs arbitrairement lentement.

---

[1] μ a, dans les calculs qui suivent, une valeur fixe dépendant de r_1.

Je dis d'abord qu'en tout pôle a_i de module r_i situé dans C, on a l'inégalité

$$(18)\qquad |I(z)| = \left|\int \frac{e^{2z}}{\zeta}\,dz\right| < 2e^{r+\mu}.$$

Suivons en effet le rayon Oa_i à partir d'un point fixe z_0. Je dis que l'on ne peut avoir simultanément en aucun point de $z_0 a_i$:

$$(19)\qquad |\zeta| = e^r, \qquad |I(z)| > 2e^{r+\mu}.$$

On peut toujours prendre μ assez grand pour que cette condition soit satisfaite en z_0. Supposons alors qu'elle cesse de l'être en un point z_2: je vais montrer que l'on aura en ce point

$$(20)\qquad |f(z_2)| < \left|\int^{z_2} \zeta\,dz\right| < e^{r_2+\mu}.$$

L'égalité (17), où l'on fait $|\zeta| = |\zeta_2| = e^{r_2}$, donnera par suite pour $\left|\frac{\zeta_2'}{\zeta_2}\right|$ une limite supérieure proportionnelle à $e^{\frac{1}{2}(r_2+\mu)}$, et l'on en conclura que l'inégalité (18) est vérifiée au point z_2, ce qui nous conduit à une contradiction.

Pour calculer une limite supérieure de $|f(z)|$ le long de z_0z_2, observons d'abord que dans les intervalles partiels où $|\zeta| < e^{r+\mu}$, la variation de $|f(z)|$ est plus petite que celle de $e^{r+\mu}$. Soit maintenant z' un point où $|\zeta| = e^{r'+\mu}$. Puisque, d'après nos hypothèses, les relations (19) ne sont jamais satisfaites pour $r_0 < r < r_2$, l'inégalité (18) sera nécessairement vérifiée au voisinage de z', tant que $|\zeta| > e^r$. L'équation (15) donnera alors, pour $|\zeta| > e^r$

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta^{\frac{3}{2}}}\right| < (2+\alpha)e^{\frac{\mu}{2}} \quad (\alpha > 0, \text{ arbitrairement petit avec } \tfrac{1}{\mu}).$$

Donc

$$\frac{1}{2\sqrt{|\zeta|}} < \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(r'+\mu)} + (2+\alpha)e^{\frac{\mu}{2}}(r - r').$$

On en conclut que l'inégalité $|\zeta| > e^r$ est satisfaite, autour de r', dans un intervalle r_3r_4 supérieur à $he^{-\frac{1}{2}(r'+\mu)}$, ($h$ positif fini). Or, dans cet intervalle, la variation de $|I(z)|$ est plus petite que celles de e^r, la variation de $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\right|$ est elle-même inférieure,[1] (d'après (15)) à

$$(2+\varepsilon)e^{\frac{r'}{r}} + 2(e^{r_4} - e^{r_3})$$

et, par suite,[2] (si l'on tient compte de la valeur de $r_4 - r_3$) à $h_1 e^{\frac{\mu}{2}}[e^r]_{r_3}^{r_4}$, ($h_1$ inférieur à un nombre fixe). Nous obtenons donc finalement, (d'après (16)), pour la variation $\left[|I(z)|\right]_{z_3}^{z_4}$, la limite supérieure $(h_1+1)\left[e^{r+\frac{\mu}{2}}\right]_{r_3}^{r_4}$. On voit ainsi que l'on peut toujours prendre μ assez grand pour que l'on ait en z_2 l'inégalité (20) et, par suite, l'inégalité (18).

Ce point établi, appelons z_2' le point de Oa_i le plus voisin du pôle a_i, où l'on ait $|\zeta| = e^r$. Entre z_2' et a_i, $|I(z)|$ croît moins vite que e^r; l'inégalité (18) ne peut donc cesser d'être vérifiée, ce qu'il fallait démontrer.

16. Partons maintenant du pôle a_i, et éloignons-nous en sur un chemin de longueur finie: tant que z sera assez près de a_i pour que l'on ait

(21) $$|\zeta| > e^{r_1+\mu_1} \qquad (\mu_1 > \mu),$$

on aura certainement l'égalité (18), et l'équation (15) se présentera sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^3} + 1 + \delta = 0, \qquad |\delta| < \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ comparable à } e^{\mu-\mu_1}).$$

D'où, par intégration

(22) $$\frac{1}{\sqrt{|\zeta|}} = \sqrt{2}\,|1+\delta_1|\,|z-a_i|, \qquad |\delta_1| < \varepsilon_1 \qquad \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \text{ fini}\right).$$

Faisons alors

$$z - a_i = \frac{\tau}{\sqrt{2e^{r_1+\theta}}},$$

---

[1] On a, en effet, l'inégalité

$$\left[\left|\frac{\zeta'^2}{\zeta^2}\right|\right]_{z_3}^{z_4} < (4+\varepsilon)e^{r'} + 4\left[|I(z)|\right]_{z_3}^{z_4}$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{\mu}$. La variation de $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\right|$ est inférieur à la racine carré du second membre.

[2] $$e^{\frac{r'}{2}} < h_2 e^{r_3} e^{-\frac{r'}{2}} < h' e^{\frac{\mu}{2}} e^{r_3}(r_4 - r_3) < h' e^{\frac{\mu}{2}} e^{r_3}(e^{r_4-r_3} - 1).$$

$|\tau|$ étant compris entre deux nombres finis, et $\frac{\theta}{\mu}$ augmentant indéfiniment avec r_1. En portant cette valeur dans l'égalité (22), nous constatons d'abord que l'on a

$$|\zeta| > \frac{1}{(1+\varepsilon_1)^2} \frac{e^{r_1+\theta}}{|\tau^2|};$$

cette inégalité entraînera, si r_1 est assez grand, l'inégalité (21), ce qui montre que les calculs effectués sont bien legitimes entre a_i et z.

D'autre part, nous constatons que, lorsque $|\tau|$ augmente à partir de o, $|\zeta|$ va en diminuant: lorsque τ dépassera un certain nombre fini k_1 on aura en z

$$(23) \qquad |\zeta| < k_1 e^{r_1+\theta} \qquad (k_1 \text{ positif fini}).$$

Nous en concluons que *l'on peut entourer chaque pôle a_i d'un cercle c_i de rayon proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{e^{r_1+\theta}}}$ ne contenant aucun autre pôle, et sur le contour duquel on aura l'inégalité* (23).

Il serait d'ailleurs possible d'entourer a_i d'un rayon η fois plus grand (η arbitrairement grand) jouissant de la même propriété, et l'on en conclut comme dans la seconde partie que tous les cercles c_i sont extérieurs les uns aux autres. Des lors le cercle C de rayon r_1, ayant son centre à l'origine, ne peut contenir plus de $r_1^2 e^{r_1+\theta}$ cercles c_i, et par conséquent plus de $r_1^2 e^{r_1+\theta}$ pôles.

Il en résulte que *l'on aura, à partir d'une certaine valeur de r*

$$(24) \qquad n' < e^{r+\theta(r)+2\log r}$$

$\theta(r)$ étant une fonction croissante de r, croissant aussi lentement que l'on veut.

D'ailleurs, puisque chacun des cercles c_i ne contient qu'un pôle a_i, on voit que ces cercles constituent précisément les petites aires proportionnelles à $\frac{r_1^2}{n'}$ que nous devrions d'après le § 9 exclure du cercle C, pour y pouvoir limiter le module de $g(z)$ et de ses dérivées successives. Construisons alors la couronne D limitée par le cercle C et par un cercle concentrique de rayon $\eta' r_1$ (nous ferons $\eta < \eta' < 1$, η étant toujours inférieur à $\frac{1}{e+1}$. *Nous pouvons affirmer que l'on a,*[1] *dans toutes les portions de la couronne D extérieure aux cercles c_i*

$$(25) \qquad |g'(z)| < e^{(1+\varepsilon_1)r_1}, \qquad |g''(z)| < e^{\frac{3}{2}(1+\varepsilon_1)r_1}, \qquad |g'''(z)| < e^{2(1+\varepsilon_1)r_1}, \quad \ldots$$

ε_1 tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$.

17. Je dis maintenant que l'on a, à partir d'une certaine valeur de r

$$(26) \qquad \nu' < (1+\varepsilon)r_1.$$

En effet s'il n'en était pas ainsi, nous constaterions (en raisonnant comme au § 24 de la seconde partie), que l'on peut tracer dans la couronne D une courbe fermée Γ entourant l'origine et ne rencontrant aucun cercle c_i telle que l'on ait en une infinité de ses points

$$(27) \qquad H(z) > he^{\nu'} > e^{(1+\varepsilon_1)r_1}.$$

On aura d'ailleurs

$$|H'(z)| < |H(z)|^{1+\alpha}, \qquad |H''(z)| < |H(z)|^{1+\alpha}$$

α tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Dès lors, si l'inégalité (27) était satisfaite en même temps que les inégalités (25), le terme ζ^3 ne pourrait être détruit par aucun autre dans l'équation (14), quand r_1 dépasserait un certain nombre. On a donc bien l'inégalité (26) à partir d'une certaine valeur de r.

18. Cherchons maintenant des limites inférieures de n' et v'. Nous considérons dans ce but un angle ω ayant pour sommet l'origine et contenant l'axe réel, ω pouvant décroître avec $\frac{1}{r}$ plus vite qu'une puissance quelconque $\frac{1}{r^m}$ de $\frac{1}{r}$. Supposons que l'on ait pour des valeurs de r indéfiniment croissantes l'inégalité

$$(28) \qquad n' < e^{r(1-\alpha)}, \qquad \alpha > 0.$$

[1] On a, en particulier, les inégalités (25) dans certaines portions de la couronne D_1 limitée par les cercles de rayons r_1 et $r_1(1-\varepsilon)$, ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$.

Nous pourrons alors appliquer le théorème du § 12 dans les portions de l'angle ω intérieures à des couronnes D_1 s'éloignant indéfiniment de l'origine, et limitées respectivement par des cercles de rayon r_1, $r_1(1 - \varepsilon)$, (ε tendant vers zéro comme ω).

Dans l'une quelconque A_1 de ces portions d'angles, il existe des cercles d de rayon supérieur à $\frac{1}{\sqrt{e^{r_1+\lambda}}}$ (λ fonction décroissante *quelconque* de r_1), où l'on a[1]

$$(28') \qquad |g'(z)| < e^{r_1(1-\alpha_1)}, \qquad |g'''(z)| < e^{2r_1(1-\alpha_1)},$$

α_1 étant un nombre positif, par rapport auquel λ devient infiniment petit lorsque r_1 augmente indéfiniment.

Je dis que pour la valeur r_1 de r considérée, le module maximum $M(r)$ de la fonction $H(z)$ satisfait nécessairement à l'inégalité

$$(29) \qquad M(r) > e^{r_1(1-\varepsilon')},$$

ε' devenant (avec $\frac{1}{r}$) infiniment petit par rapport à α.

En effet, on peut choisir λ de manière que les cercles d couvrent par exemple, plus de la moitié de la région A. Il existe alors (Seconde Partie, § 8) dans A_1, des cercles d où l'on a

$$\left|\frac{H'(z)}{H(s)}\right| < e^{\varepsilon_1 r_1}, \qquad \left|\frac{H''(z)}{H(z)}\right| < e^{\varepsilon_1 r_1},$$

ε_1 tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$. Dès lors, si $|H(z)|$ n'était pas, dans un tel cercle d, supérieur à la limite (29), on y aurait évidemment

$$(29') \qquad |\zeta| < e^{r_1(1-\alpha_1)}, \qquad |\zeta''| < e^{2r_1(1-\alpha_1)};$$

$\zeta\zeta''$ et ζ^3 se trouveraient être négligeable par rapport à ζe^{2z}, et l'équation (14) se présenterait sous la forme

$$\zeta'^2 + (1 + \delta)\zeta e^{2z} = 0,$$

---

[1] En se reportant au § 8, on voit que si l'inégalité (28) est vérifiée pour $r = r_2$, les inégalités (28') seront satisfaites pour $r = r_1 = x_2(1 + a)^{-b}$, $(a > 0,\ b > 0)$.

$|\delta|$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$. Or on constate aisément que l'on ne saurait avoir cette équation dans tout un cercle d; supposons en effet qu'elle soit satisfaite dans un tel cercle le long d'une droite $z_0 z$ joignant deux points de distance égale à $e^{-\frac{1}{2}(r_1+\lambda)}$, les inégalités (29') étant satisfaites en z_0; l'expression

$$\left|\sqrt{\zeta(z)} - \sqrt{\zeta(z_0)}\right|$$

serait proportionnelle à $e^{r_1 - \frac{1}{2}(r_1+\lambda)}$, ce qui ne peut avoir lieu, puisque la première inégalité (29') est par hypothèse satisfaite en z.

L'hypothèse faite sur $M(r)$ était donc inadmissible: ou n'est, pour $r = r_1$, supérieur à la limite (28), ou l'on a l'inégalité (29).

19. Des divers résultats qui précédent, nous pouvons tirer les conséquences suivantes:

Considérons le module maximum $m(r)$ de la fonction méromorphe ζ dans le champ défini au § 10, (les pôles a_i étant entourés de petites aires b_i que l'on a exclues de ce champ): *$m(r)$ satisfera dans les régions restantes à la double inégalité*

$$e^{(1-\varepsilon)r} < m(r) < e^{(1+\varepsilon)r}.$$

Les modules maxima de $f(z)$ et de $\log u = \int f(z)dz$ satisferont dans les mêmes régions aux mêmes inégalités.

Considérons maintenant la fonction entière

$$u = G(z)e^{K(z)}.$$

Si on a l'inégalité (28) pour une valeur r_2 de r les inégalités (28') et (29) seront satisfaites pour $r = r_1 = r_2(1+\alpha)^{-b}$, $(b > 0)$. Il en résulte, puisque $H = K''$, que le module maximum [1] $M_1(r)$ de $K(z)$ est, lui-même, supérieur, dans la couronne D_1 à $e^{r_1(1-\varepsilon'')}$. Désignons alors par $A(r)$ la plus grande valeur positive de la partie réelle de K pour $r = r_1$, et soit

---

[1] D'après les théorèmes de la seconde partie, on peut toujours tracer dans la couronne D_1 un cercle sur lequel on a

$$\left|\frac{H(z)}{K(z)}\right| < e^{\gamma r} \qquad \gamma \text{ tendant vers zéro avec } \frac{1}{r_1}.$$

$r_1' = r_2(1+\alpha)^{-b'} = r_1 - \rho$, $(b' > 0,\ \rho > 0)$. Il résulte d'un théorème de M. Borel[1] que l'on a, (quel que soit ρ), à partir d'une certaine valeur de r_1

$$M_1(r_1') < \frac{8r_1' A(r_1)}{\rho}.$$

Si nous faisons, par exemple, $\rho = \frac{1}{r^q}$, (q arbitrairement grand, on voit que l'on aura certainement à partir d'une certaine valeur de r_1

$$8A(r_1) > e^{r_1(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\rho}{r_1}\right) - \log\frac{1}{\rho} - \log r'_1} > e^{r_1(1-\varepsilon)}.$$

Cette inégalité, jointe au théorème du § 2, nous montre que le module maximum de u satisfera, lorsque r sera assez grand

$$e^{e^{(1-\varepsilon)r}} < \mathsf{M}(r) < e^{e^{(1+\varepsilon)r}},$$

quelque petit que soit ε.

20. Il n'est pas nécessaire d'insister pour montrer que la méthode précédente s'applique, tout aussi aisément, au cas laissé de côté où la constante γ de l'équation (13) est différente de zéro. On a alors, avons-nous dit l'une des deux équations

$$\zeta\zeta'' = \zeta'^2 + \alpha\zeta^3 - \zeta^4 + \beta\zeta e^{2z} + e^{4z}, \tag{31}$$

$$\zeta\zeta'' = \zeta'^2 + \alpha\zeta^3 - \zeta^4 + \zeta e^{2z} \tag{32}$$

avec

$$\zeta^2 - \alpha\zeta = f'(z) \tag{33}$$

$f(z)$ étant, en vertu de l'équation (12′), la dérivée logarithmique d'une fonction entière. Nous poserons comme plus haut

$$f(z) = g(z) + H(z)$$

$g(z)$ étant la dérivée logarithmique d'un produit de facteurs primaires.

---

[1] *Sur les zéros des fonctions entières*, p. 365.

21. Toute intégrale de (31) satisfait aux deux équations

$$(33)\qquad \frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} = \alpha\zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \beta\frac{e^{2z}}{\zeta} - \frac{e^{4z}}{2\zeta^2} + 2\int\left(\frac{\beta e^{2z}}{\zeta} + \frac{e^{4z}}{\zeta^2}\right)dz,$$

$$(34)\qquad \frac{\zeta'}{\zeta} = \int(\alpha\zeta - \zeta^2)dz + \int\left(\frac{\beta e^{2z}}{\zeta} + \frac{e^{4z}}{\zeta^2}\right)dz.$$

μ étant un nombre qui croît indéfiniment avec r_1, je dis d'abord qu'en tout pôle a_i, $(|a_i| = r_i)$ contenu dans le cercle C de rayon r_1, on a l'inégalité

$$(35)\qquad |I(z)| = \left|\int^z\left(\frac{\beta e^{2z}}{\zeta} + \frac{e^{4z}}{\zeta^2}\right)dz\right| < 2e^{2r+\mu}.$$

Pour le démontrer, on établira d'abord que l'on ne peut avoir simultanément en aucun point de Oa_i

$$(36)\qquad |\zeta^2| = e^{2r}, \qquad |I(z)| > 2e^{2r+\mu}.$$

Supposons, en effet que cette condition, satisfaite en z_0, cesse de l'être en z_2. On vérifiera alors, en raisonnant comme au § 15, que l'on a en z_2

$$|f(z_2)| = < \left|\int^{z_2}(\zeta^2 - \alpha\zeta)dz\right| < e^{2r_2+\mu}.$$

D'ailleurs on aura, (en combinant (33) et (34))

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta_2'^2}{\zeta_2^2} - 2\frac{\zeta_2'}{\zeta_2} = \alpha\zeta_2 - \frac{\zeta_2}{2} - \beta\frac{e^{2z}}{\zeta_2} - \frac{e^{4z}}{2\zeta_2} + 2f_1(z_2)$$

et l'on en conclura, (d'après (34)), que l'inégalité (35) est satisfaite au point z_2 et, par suite, au pôle a_i.

Si maintenant nous nous éloignons du pôle a_i, on voit que tant que l'on aura

$$|\zeta^2| > e^{2r+\mu_1} \qquad (\mu_1 > \mu),$$

l'équation (33) se présentera sous la forme

$$\frac{\zeta'^2}{\zeta^4} + 1 + \delta = 0 \quad \left(|\delta| \text{ tendant vers zero avec } \frac{1}{r} \text{ et } \frac{1}{\mu_1 - \mu}\right)$$

ou encore sous la forme

$$\frac{1}{4}\frac{w'^2}{w^3} + 1 + \delta = 0, \qquad w = \zeta^2.$$

On en conclut (comme au § 16) que à l'intérieur du cercle C on peut entourer les pôles a_i de cercles de rayon proportionnel à $e^{-\frac{1}{2}(2r_1+\theta)}$, $(\theta > \mu_1)$, ne contenant chacun qu'un pôle, tous extérieurs les uns aux autres, et sur le contour desquels on a l'inégalité

$$|w| < ke^{2r_1+\theta}.$$

On constate alors, — en désignant par ν' le nombre des zéros de $H(z)$ dont le module est inférieur à ηr $\left(\eta < \frac{1}{e+1}\right)$, — que l'on a, à partir d'une certaine valeur de r, les inégalités

$$n' < e^{2r+\theta(r)+2\log r}, \qquad \nu' < 2r(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

22. Soit d'autre part $M(r)$ le module maximum de $H(z)$ pour $|z| = r$. Si l'inégalité

$$n' < e^{2r(1-\alpha)} \qquad \alpha > 0$$

se trouve vérifiée pour des valeurs r_1 de r indéfiniment croissantes, on aura dans certaines régions de la partie commune à la couronne D_1 et à l'angle ω définis au § 18

$$|g'(z)| < e^{2r_1(1-\alpha_1)}, \qquad |g'''(z)| < e^{4r_1(1-\alpha_1)}, \qquad (\alpha_1 > 0).$$

On constate alors que dans la couronne D_1, $M(r)$ est supérieur à $e^{2r_1(1-\varepsilon)}$, ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$; car, s'il n'en était pas ainsi l'équation (31) donnerait dans un cercle de rayon proportionnel à $e^{-\frac{1}{2}(2r_1+\lambda)}$ l'égalité

$$\frac{1}{2}w'^2 + (1+\delta)we^{4z} = 0, \qquad (w = \zeta^2),$$

$|\delta|$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{r_1}$, ce qui conduit à une contradiction (§ 18).

Si l'on pose

$$u = G(z)e^{K(z)},$$

le module maximum de $K(z)$ satisfait dans la couronne D_1 à la même inégalité que $M(r)$, et l'on en conclut, en désignant par $\mathsf{M}(r)$ le module maximum de u que

$$e^{e^{2r(1-\varepsilon)}} < \mathsf{M}(r) < e^{e^{2r(1+\varepsilon)}},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

23. Toute intégrale de l'équation (32) satisfait aux deux équations

$$\frac{1}{2}\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} = \alpha\zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \frac{e^{2z}}{\zeta} + 2\int\frac{e^{2z}}{\zeta}dz, \tag{37}$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta^2} = \int(\alpha\zeta - \zeta^2)dz + \int\frac{e^{2z}}{\zeta}dz. \tag{38}$$

μ étant un nombre qui croît indéfiniment avec r_1, on constate que l'on a en tout point pôle a_i contenu dans le cercle C de rayon r_1, l'inégalité

$$\left|\int_z \frac{e^{2z}}{\zeta}dz\right| < 2e^{\frac{4}{3}r+\mu}, \qquad (r = |z|).$$

On voit alors qu'au voisinage d'un pôle a_i, tant que l'on a

$$|\zeta| > e^{\frac{2}{3}r+\mu_1}, \qquad (\mu_1 > \mu),$$

l'équation (37) se présente sous la forme

$$\frac{\zeta'^2}{\zeta^2} + (1+\delta)\zeta^2 = 0 \qquad |\delta| < \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Conservant toutes les notations du paragraphe précédent, nous déduirons de là les inégalités

$$n' < e^{\frac{4}{3}r+\theta(r)+2\log r}, \qquad \nu' < \frac{4}{3}r(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, et $\theta(r)$ croissant arbitrairement lentement.

D'autre part, on a à partir d'une certaine valeur de r l'une au moins des deux inégalités

$$n' > e^{\frac{4}{3}r(1-\varepsilon)}, \qquad M(r) > e^{\frac{4}{3}r(1-\varepsilon)}$$

On en conclut que le module maximum de la fonction entière, satisfait aux inégalités

$$e^{e^{\frac{4}{3}r(1-\varepsilon)}} < \mathrm{M}(r) < e^{e^{\frac{4}{3}r(1+\varepsilon)}},$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

QUATRIÈME PARTIE.

1. Les résultats qui m'ont permis plus haut d'étudier les fonctions entières découvertes par M. PAINLEVÉ ont une portée générale: on pourra les appliquer à l'étude d'une fonction entière quelconque satisfaisant à une équation différentielle donnée. On ne connaît encore, il est vrai, que très peu d'équations dont les intégrales soient entières. Mais il est probable que les profondes méthodes de M. PAINLEVÉ, appliquées aux ordres supérieures, permettront bientôt d'en former de nouvelles. On saura alors vraisemblablement étudier leur croissance et évaluer leur ordre de grandeur.

Il est naturel de se demander si, dans les recherches de ce genre, l'hypothèse d'après laquelle l'intégrale étudiée est une fonction entière est une condition indispensable de la précision des résultats. En fait, si l'on est en présence de certaines classes simples d'équations, on saura étudier la croissance de leurs intégrales, sans faire aucune hypothèse sur la nature de ces intégrales. Il convient d'examiner jusqu'où peut conduire une semblable méthode.

Je me bornerai ici aux équations algébriques du premier ordre. Elles ont été étudiées au point de vue de la croissance par M. BOREL, et, après lui, par M. LINDELÖF.[1]

[1] BOREL, *Mémoire sur les séries divergentes* (Ann. Ec. Norm. Sup. 1899). LINDELÖF, Bull. de la Soc. math. de France 1899.

Considérons une intégrale réelle que nous supposons continue lorsque x est réel et varie de o à $+\infty$. M. Borel a démontré que *l'intégrale y est à partir d'une certaine valeur de x, inférieure à e^{e^x}*. Précisant ce résultat, M. Lindelöf désigne par m le degré de l'équation par rapport à x, et il montre que l'on a, à partir d'une valeur x_1 de x

$$|y| < e^{Cx^{m+1}}$$

C étant une constante finie.

Il pourra arriver cependant que $|y|$ reste très inférieur à cette limite, comme le montre la proposition suivante à laquelle est parvenu M. Lindelöf:

Ou bien l'intégrale y est du type exponentiel et reste comparable à une fonction croissante de la forme e^{x^c} (c nombre fini); ou bien y reste compris, à partir d'une certaine valeur de x entre e^{-x^ε} et e^{x^ε}, quelque petit que soit ε.

Les recherches de M. Lindelöf nous ont ainsi révélé l'existence de deux types d'intégrales fort différents. Mais elles ne nous ont pas appris à reconnaître si une équation donnée admet des intégrales de l'un ou de l'autre type. D'autre part la méthode de M. Lindelöf qui repose sur une application du théorème de Rolle suppose x réel. Elle exige de plus que y soit continu sur tout l'axe réel: or nous ne savons pas reconnaître, a priori, si cette condition est réalisée, et l'étude de la croissance de y devrait précisément avoir pour premier but de nous renseigner sur ce point.

C'est pourquoi je n'ai pas cru inutile de revenir sur le même problème, en prenant pour point de comparaison la théorie des fonctions entières. On va voir que le problème comporte une solution assez précise.

2. Les résultats obtenus dans la seconde partie de ce travail nous montrent immédiatement quelle doit être la forme d'une équation algébrique du premier ordre pour qu'elle puisse admettre une ou plusieurs intégrales entières (de genre fini). Il faut que cette équation contienne *plusieurs* termes de degré supérieur par rapport à y et y'. En effet, lorsque le terme de plus haut degré en y et y' est unique, il suffit de se reporter aux inégalités du § 13 de la seconde partie, pour voir qu'il ne pourrait être détruit par aucun autre, si y était une fonction entière. Dans ce cas, si y est une fonction uniforme ayant une singularité essentielle à

l'infini, elle sera nécessairement, au voisinage de cette singularité, une fonction méromorphe semblable à celles que j'ai étudiées dans la seconde partie de ce travail; elle restera comparable, (si l'on exclut du champ de la variable le voisinage immédiat de ses pôles) à une puissance finie de x.

Nous sommes ainsi conduits à répartir les équations algébriques entre deux classes, suivant qu'elles contiennent ou ne contiennent pas deux ou plusieurs termes de degré supérieur par rapport à y et à y'. Cette distinction va nous permettre de compléter les résultats de M. LINDELÖF.

3. Considérons, pour commencer, une équation résolue par rapport à y'

$$y'Q(x, y) - P(x, y) = 0 \tag{1}$$

P et Q étant des polynômes en x et y.

Je dis que si cette équation est de la seconde classe, toutes ses intégrales appartiennent au second type signalé par M. LINDELÖF. Plus précisément, si l'on suppose encore que l'intégrale y est réelle, continue et croissante sur l'axe réel, *cette intégrale croîtra moins vite qu'une puissance finie de la variable x.*

Il suffit, pour le vérifier, de reprendre le raisonnement employé par M. BOREL dans son mémoire *Sur les séries divergentes,* en y apportant une légère modification.

y étant une fonction quelconque de ξ satisfaisant aux conditions qui viennent d'être énoncées, M. BOREL a montré que si l'on ne peut pas trouver de nombre ξ_0 tel que l'on ait, pour $\xi > \xi_0$

$$y < e^{e^{\xi}}$$

il existe sûrement des valeurs indéfiniment croissantes de ξ pour lesquelles on a à la fois

$$y > e^{e^{\xi}}, \qquad y' > \frac{1}{2} e^{\xi} y.$$

De plus, parmi ces valeurs, il en est d'aussi grandes que l'on veut pour lesquelles on a, en même temps que les inégalités précédentes, l'inégalité

$$y' \leqq y^{1+\varepsilon}.$$

Il est clair que ces résultats subsistent si l'on remplace ξ par la fonction croissante de x $\log\log\varphi(x)$. Supposons alors que $\varphi(x)$ croisse moins vite qu'une puissance[1] finie de x. Nous pouvons affirmer que si l'on n'a pas, à partir d'une certaine valeur de x, l'inégalité

$$y < \varphi(x),$$

on aura simultanément, pour des valeurs x_1 de x indéfiniment croissantes

$$y > \varphi(x), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\,.\,\log\varphi} > \frac{2}{2}\frac{\varphi'}{\varphi}y > \frac{s_1 y}{2x} \quad (s_1 \text{ positif fini})$$

et

$$\frac{dy}{dx} \leqq \frac{sy^{1+\varepsilon}}{x}.$$

Ces inégalités limitent la croissance de l'intégrale y. Désignons en particulier par m un nombre supérieur aux degrés par rapport à x des polynômes P et Q. Nous constatons que $\varphi(x)$ sera nécessairement inférieur à x^m *si la différence des degrés p et q de P et de Q par rapport à y n'est pas égale à l'unité.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, tous les termes de l'équation (1) seraient, pour $x = x_1$, négligeables par rapport au terme en y^p ou au terme en $y'y^q$: le premier membre de l'équation ne pourrait donc s'annuler.

Ainsi, si $p - q$ est différent de 1, comme nous le supposons ici, on aura, à partir d'une certaine valeur de x

$$(2) \qquad y < x^{m'}.$$

Le résultat serait le même si l'équation étudiée n'était pas résolue par rapport à y': soit dans ce cas

$$A(x)y^\alpha y'^\beta$$

le terme de degré supérieur en y et y', terme qui est supposé unique: si l'on avait par l'inégalité (2), ce terme ne pourrait être détruit par aucun autre (pour certaines valeurs x_1 de x).

---

[1] Je suppose qu'il existe des nombres s, s_1 tels que les rapports $\frac{x^s}{\varphi}$ et $\frac{\varphi}{x^{s_1}}$ soient croissants à partir d'une certaine valeur de x. On a alors $\frac{s_1}{x} < \frac{\varphi'}{\varphi} < \frac{s}{x}$.

Considérons maintenant le cas où $p - q = 1$. L'équation (1) prend alors la forme

$$y'(a_1 + a_2 y + \ldots + a_p y^{p-1}) = b_0 + \ldots + b_p y^p \tag{3}$$

les a et les b étant des polynômes en x.

Deux cas sont encore à distinguer suivant que le degré de a_p est supérieur, ou au contraire inférieur ou égal à celui de b_p.

Lorsque le degré de a_p est supérieur à celui de b_p, l'intégrale y (supposée réelle, continue et croissante) satisfait, à partir d'une certaine valeur de x à l'inégalité (2). En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait pour certaines valeurs de x

$$y > x^m \quad (m \text{ arbitraire grand}) \text{ et } \quad y' > \frac{hy}{x} \quad (h \text{ positif fini}),$$

et le terme $a_p y' y^{p-1}$ de l'équation (3) ne pourrait alors être détruit par aucun autre.

Ainsi se trouvent définies deux classes d'équations (1), dont les intégrales satisfont, à partir d'une certaine valeur de x, à l'inégalité (2). On voit que ces intégrales ne peuvent pas croître comme des exponentielles, mais restent comparables à une puissance finie de la variable x. Elles appartiennent au second type signalé par M. Lindelöf.

Lorsque y est complexe, on doit former les équations auxquelles satisfont sa partie réelle d'une part, sa partie imaginaire d'autre part, et étudier ces équations séparément. Mais pour parvenir à des résultats pratiquement utilisables, il faudrait savoir déterminer les lignes sur lesquelles le module de y est croissant. Or cette détermination semble présenter de grandes difficultés.

4. Si nous considérons au contraire les équations (3) pour lesquelles le *degré de a_p est inférieur ou égal à celui de b_p*, nous pourrons faire une étude descriptive assez précise de leurs intégrales. On peut observer que dans le cas où nous nous plaçons ($p - q = 1$), les intégrales de l'équation (1) sont à un certain point de vue comparables à des fonctions entières. Ces intégrales ne peuvent en effet devenir infinies en aucun point non singulier essentiel. Supposons en effet que y devienne infini comme x^m ($m > 0$). On aurait au voisinage du point singulier

$$\frac{|y'|^m}{|y|^{m+1}} > c \qquad (c \text{ fini}),$$

inégalité que ne peut vérifier aucune intégrale de (1) en un point non singulier pour les coefficients. Nous allons voir se poursuivre l'analogie entre les fonctions entières et les intégrales des équations (3) considérées, en étudiant la croissance du module $|y|$ lorsque x approche du point singulier transcendant situé à l'infini.

5. Posons
$$y = uv$$
et faisons
$$u = e^{\int \frac{b_p}{a_p} dx}.$$
Nous supposerons que le degré de b_p surpasse celui de a_p de μ unités. Plaçons-nous en dehors d'un cercle contenant les zéros de b_p et ceux de a_p. Sur une infinité de rayons R issus de l'origine et situés dans $\mu + 1$ angles égaux à $(1 - \alpha)\frac{\pi}{\mu + 1}$ (α étant un nombre positif fini, arbitrairement petit), u est comparable à $e^{k|x|^{\mu+1}}$, k étant un nombre positif fini.

D'autre part, on a
$$v' = \frac{b_0 + \ldots + b_{p-1} u^{p-1} v^{p-1} - u'(a_1 v + \ldots + a_{p-1} u^{p-2} v^{p-1})}{a_1 u + \ldots + a_p u^p v^{p-1}}. \tag{4}$$
Cherchons une limite supérieure du module $|v'|$ sur un rayon R. [1]

Désignons dans ce but par σ un nombre supérieur aux dégrés de tous les polynômes a. Si l'on a, à partir d'une certaine valeur de $|x|$
$$|uv| > h|x|^{\sigma}, \tag{5}$$
h étant un nombre fixe, tous les termes du dénominateur s'effaceront devant le dernier, lorsque $|x|$ croîtra; en particulier, si $|x|$ dépasse un certain nombre r_0, ce dénominateur sera, en module, supérieur à
$$h_1 |a_p u^p v^{p-1}| \qquad (h_1 \text{ positif fini}).$$

---

[1] Je me contente de dire que les nombres σ, σ_1, σ_2 sont finis, n'ayant pas besoin de plus de précision. Mais on pourrait facilement les calculer. Ainsi, désignons par τ et τ_1 les degrés de a_{p-1} et de b_{p-1}. σ est le plus grand des nombres τ_1 et $\mu\tau$.

D'autre part le module du numérateur de v' est inférieur à

$$h_2 \left| u^{p-1} v^{p-1} x^{\sigma_1} \right|, \qquad (h_2 \text{ et } \sigma_1 \text{ nombres finis}).$$

On a, par suite sur le rayon R considéré

$$(6) \qquad |v'| < h_3 \frac{|x|^{\sigma_2}}{|u|} \qquad (h_3, \sigma_2 \text{ positifs finis}).$$

Posons alors $|x| = r$, et soit v_0 la valeur que prend v (sur le rayon R) au point de module r_0. Nous pouvons, avons-nous dit, trouver un nombre positif k tel que l'on ait, sur le rayon R considéré (pour $r > r_0$)

$$|u| > e^{kr^{\mu+1}}.$$

Nous aurons évidemment à partir d'une certaine valeur de r

$$|v - v_0| < \int_{r_0}^{r} e^{-k_1 r^{\mu+1}} dr,$$

k_1 étant un nombre positif inférieur à k.

Il en résulte que[1]

$$|v| < c \qquad (c \text{ inférieur à un nombre fixe})$$

et

$$|v| > |v_0| - e^{-k_1 r_0^{\mu+1}}.$$

Si donc la valeur initiale $|v_0|$ satisfait à l'inégalité

$$(7) \qquad |v_0| - e^{-k_1 r_0^{\mu+1}} > c_1$$

la valeur de $|v|$ en x sera elle-même finie et supérieure à c_1.

Pour parvenir à ce résultat, nous avons dû supposer que l'inégalité (5) était vérifiée pour $r > r_0$. Cette supposition est sans conséquences si l'inégalité (7) est satisfaite au point x_0. Imaginons en effet que l'inégalité

---

[1] On a en effet

$$\int_{r_0}^{r} e^{k_1 r^{\mu+1}} dr < \int_{r_0}^{r} (\mu + 1) k_1 r^{\mu} e^{-k_1 r^{\mu+1}}$$
$$< e^{-k_1 r_0^{\mu+1}} - e^{-k_1 r^{\mu+1}},$$

(5) vérifiée pour $r_0 < r < r_1$ cesse de l'être au point r_1: il faudra que l'inégalité

$$|v| > c_1 \tag{8}$$

cesse elle-même d'être satisfaite en un point r_2 situé entre r_0 et r_1: conclusion absurde, puisque nous avons démontré que l'inégalité (5) satisfaite pour $r_0 < r \leqq r_1$ entraîne l'inégalité (8) dans tout l'intervalle $r_0 r_1$.

Nous constatons ainsi que l'inégalité (7) entraîne l'inégalité (8) le long du rayon R. Il en serait évidemment de même le long d'une droite quelconque sur laquelle $|x|$ croît comme ηr (η fini), et, par suite, dans tout l'angle A ayant pour sommet l'origine dans lequel on a

$$|u| > e^{kr^{\mu+1}}$$

Dans tout cet angle (pour $|x| > r_0$*), y ne présente ni zéros ni pôles, et l'on a*

$$|y| = e^{\lambda |x|^{\mu+1}},$$

λ étant compris entre deux nombres positifs fixes.

On peut interpréter comme il suit ce résultat: il est possible de mettre l'intégrale y de l'équation (3) sous la forme

$$y = Cu + \varphi(x, C), \tag{9}$$

C étant une constante arbitraire, de telle façon que le second terme de l'égalité (9) s'efface devant le premier dans l'angle A, à moins que C n'approche de la valeur particulière *zéro*. *Cu* est alors une valeur principale de y dans l'angle A.

On obtiendrait les mêmes résultats dans les $\mu + 1$ angles où le module de u est croissant. Supposons en particulier que le quotient $\frac{b_p}{a_p}$ se réduise à une constante. C'est alors dans tout un demi-plan que $|y|$ serait comparable à $e^{\lambda |x|}$, $(\lambda > 0)$.

6. Pour parvenir à ce résultat, il n'est pas nécessaire de supposer que dans l'équation (3) les fonctions de x, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... sont des polynômes. Supposons que sur un rayon R issu de l'origine, tous les a et b soient à partir d'une certaine valeur r_0 de r inférieurs à une puis-

sance finie de r, r^σ; supposons de plus que sur ce rayon, l'on ait, pour $r > r_0$

$$|u| > e^{kr^{\mu+1}},$$

et

$$|u'| < r^\rho |u|,$$

k et ρ étant des nombres positifs finis. Tous les résultats du paragraphe précédent s'appliqueront sur le rayon R au produit $y = uv$.

Les fonctions a_1, a_2, ..., b_1, b_2 pourront être par exemple, des fonctions méromorphes semblables à celles que j'ai étudiées dans la seconde partie de ce travail, ou des fonctions algébriques. La méthode précédente permettra d'étudier tous ces cas en détail, quoique leur diversité nous empêche d'énoncer à leur sujet des propositions générales.

7. L'étude des intégrales de l'équation (3) conduit donc, au point de vue de la croissance, à des résultats particulièrement intéressants. Dans les $\mu + 1$ angles définis plus haut, nous savons évaluer le module d'une intégrale: ce module croît comme celui d'une fonction entière de genre fini.

Les résultats précédents permettront encore d'étudier l'équation (1), dans le cas considéré au § 4, où elle contient un seul terme de degré supérieur par rapport à y et y'. Désignons en effet par ζ une intégrale particulière de l'équation (1), et posons

$$Y = \frac{1}{y - \zeta}.$$

La fonction Y satisfera à une équation de la forme (3). Pour s'en rendre compte, il suffirait de remarquer qu'une intégrale y, différente de ζ, ne peut être égale à ζ en aucun point non transcendant pour l'équation; dans le cas contraire, en effet, on aurait en même temps, $y' = \zeta'$, et les deux intégrales coïncideraient dans tout le plan. La fonction Y ne présente donc, en dehors des points singuliers transcendants de l'équation, aucune singularité polaire. Elle est de même nature que celle qui a été étudiée dans les paragraphes précédents.

Supposons en particulier que l'équation (1) admette une integrale rationnelle qui sera celle que nous appelons ζ. Dans l'équation (3) à laquelle satisfait Y, les fonctions a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... seront alors des polynômes, et l'on pourra appliquer à la fonction Y les résultats du § 5 si le degré de a_p est inférieur ou égal à celui de b_p. Nous constatons alors que dans les $\mu + 1$ angles définis plus haut, *l'intégrale générale y se rapproche indéfiniment, lorsque $|x|$ croît, de l'intégrale rationnelle ζ.* La différence $y - \zeta$ est égale, d'après ce qui précède, à $e^{-\lambda r^{\mu+1}}$, λ restant compris entre deux nombres positifs fixes.

On pourrait chercher à généraliser ces résultats en étudiant des équations plus compliquées. Ils peuvent sans doute donner lieu à diverses applications pratiques, puisque la méthode qui vient d'être développée ne permet pas seulement de limiter le module d'une intégrale, mais aussi d'évaluer ce module dans des régions étendues du plan.

Mais il n'est nécessaire de multiplier les exemples précédents pour conclure que la croissance de certains types fort généraux de fonctions obéit à des lois très simples et très précises. Il serait intéressant de rechercher dans quelle mesure la grandeur d'une fonction en est une propriété caractéristique et, jusqu'à quel point la connaissance de sa croissance renseigne sur la nature analytique de la fonction. On a vu que l'ordre de grandeur d'une fonction entière dépend étroitement de la densité de ses zéros; c'est dire qu'il est déterminé par la grandeur des éléments composant l'ensemble des déterminations de la fonction inverse. Mise sous cette forme, la proposition est susceptible d'être étendue à des classes de fonctions beaucoup plus vastes que celle des fonctions entières, et il est très vraisemblable qu'elle peut l'être.

Ainsi la relation que nous avons observée dans le cas des fonctions entières n'est peut-être que la manifestation d'une propriété appartenant à des fonctions plus générales. C'est pourquoi il n'était peut-être pas inutile de la mettre en lumière, comme je me suis proposé de le faire dans ce travail.