SUR QUELQUES INTÉGRALES AYANT RAPPORTS AVEC LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

M. LERCH

À FRIBOURG (SUISSE).

Dans un mémoire publié par l'académie de Prague[1] j'ai établi la formule

$$\int_0^\infty e^{-ux\cos\sigma\pi}\sin(s\sigma\pi - ux\sin\sigma\pi)\frac{x^{s-1}dx}{1+x^{\frac{1}{\sigma}}} = \pi\sigma e^{-u},$$

en me bornant aux hypothèses $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $u > 0$.

En multipliant les deux membres par $e^{-wu}du$ et en intégrant de $u = 0$ à $u = \infty$, j'en ai déduit la suivante

$$\int_0^\infty \frac{w\sin s\sigma\pi + x\sin(s-1)\sigma\pi}{w^2 + 2wx\cos\sigma\pi + x^2}\frac{x^{s-1}dx}{1+x^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\pi\sigma}{1+w},$$

de laquelle j'ai conclus que la fonction suivante

$$\overline{L}(w, s, \sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s dx}{(w^2 + 2wx\cos\sigma\pi + x^2)\left(1 + x^{\frac{1}{\sigma}}\right)}$$

---

[1] 2^{me} année, Mémoire N° 9; 1893.

jouit de cette propriété remarquable

$$w \sin s\sigma\pi . \overline{L}(w, s-1, \sigma) + \sin(s-1)\sigma\pi . \overline{L}(w, s, \sigma) = \frac{\pi\sigma}{1+w}.$$

J'ai promis de mettre en évidence ses relations avec les fonctions elliptiques et j'y suis revenu en effet l'année dernière[1] en introduisant la fonction

$$\text{(A)} \qquad L(w, s, \sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{\left(w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2\right)(1+x^\sigma)}$$

qui résulte de $\overline{L}$ en changeant σ en sa réciproque; celle-ci a par conséquent la proprété

$$\text{(B)} \qquad w \sin\frac{(s+1)\pi}{\sigma} L(w, s, \sigma) + \sin\frac{s\pi}{\sigma} L(w, s+1, \sigma) = \frac{\pi}{\sigma(w+1)};$$

j'ai établi une seconde en observant que la quantité

$$Q = L(w, s, \sigma) + L(w, s+\sigma, \sigma)$$

s'exprime par l'intégrale

$$Q = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2}$$

dont la valeur est

$$Q = \frac{\pi w^{s-1}\sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma}\sin s\pi}.$$

La seconde relation est donc la suivante

$$\text{(C)} \qquad L(w, s, \sigma) + L(w, s+\sigma, \sigma) = \frac{\pi w^{s-1}\sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma}\sin s\pi}.$$

---

[1] Rozpravy (de Prague), 5e année, N° 23, 1896.

Ces deux relations laissent espérer que notre transcendante, jouissant des propriétés assez simples relatives au parallélogramme des périodes 1 et σ, aura quelques relations avec des fonctions elliptiques. Pour le montrer, j'établirai d'abord son développement, en vérifiant les propriétés (B) et (C) sur la fonction définie par l'équation suivante

$$\text{(D)} \qquad \frac{\pi e^{\frac{s\pi i}{\sigma}}}{\sigma(1+w)} + \sin\frac{\pi}{\sigma} L(w, s, \sigma)$$

$$= 2\pi i \sin\frac{s\pi}{\sigma}\left[\sum_{\lambda} \frac{w^{s-1}e^{\lambda s\pi i}}{w^{\sigma}e^{\lambda\sigma\pi i}-1} - \frac{1}{\sigma}\sum_{\mu} \frac{e^{\frac{\mu s\pi i}{\sigma}}}{e^{\frac{\mu\pi i}{\sigma}}+w}\right],$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots; \mu = 2, 4, 6, 8, \ldots).$$

Le calcul étant facile, je me borne à indiquer le domaine d'existence des expressions qu'on vient de considérer. Je supposerai que w soit réel et positif. On voit d'abord que l'intégrale (A) n'existe pas, si la quantité σ est purement imaginaire; ensuite, puisque la relation (B) a été obtenue pour σ réel et positif, il faut admettre que la partie réelle de σ soit positive. Puis, pour que la fonction $\left(w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2\right)^{-1}$ reste finie pendant l'intégration, il faut que la partie réelle de $\frac{1}{\sigma}$ ne soit pas un entier impair, ce qui nous amène à introduire la condition que la partie réelle de $\frac{1}{\sigma}$ soit entre zéro et l'unité. Quant à la quantité s, la convergence de l'intégrale exige que sa partie réelle soit plus grande que -1 et moindre que celle de la quantité $\sigma + 1$. Dans la bande indéfinie parallèle à l'axe des imaginaires qui est remplie de ces points s, la fonction $L(w, s, \sigma)$ est analytique et régulière.

Passons maintenant aux séries (D). La convergence de la première série exige, la partie imaginaire de σ étant supposée positive, que la partie imaginaire de s soit également positive; au contraire, la convergence de la deuxième série exige que la partie imaginaire du quotient $\frac{s-1}{\sigma}$ soit positive. On satisfait à toutes ces conditions en supposant que s se trouve à l'intérieur d'une figure qui étant placée dans le demi-plan positif est limitée par le segment de l'axe $(-1\ldots 1)$, puis par la droite $(1\ldots\sigma+1)$ et par les deux lignes verticales aux points $s=-1$ et $s=\sigma+1$. Le domaine (s) que nous venons de fixer est assez étendu pourqu'on puisse y placer une infinité des parallélogrammes des périodes composés des côtés 1 et σ.

Cela étant, appelons $\Phi(s)\,.\sin\frac{s\pi}{\sigma}$ la différence des fonctions L définies, l'une par l'intégrale (A), l'autre par l'expression (D), et observons que la fonction $\sin\frac{s\pi}{\sigma}$ ne s'annulant que dans un point du parallélogramme, la fonction $\Phi(s)$ n'a d'autres singularités qu'un seule pôle du premier degré $s=\sigma$; elle satisfait ensuite aux équations déduites de (B) et (C)

$$\Phi(s+1)=-w\Phi(s),\qquad \Phi(s+\sigma)=\Phi(s)$$

qui font voir que la fonction est de la forme

$$\Phi(s)=a\,.\frac{\vartheta_2\left(\frac{s}{\sigma}+\frac{\log w}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{-1}{\sigma}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s}{\sigma}\,\middle|\,\frac{-1}{\sigma}\right)};$$

mais cette fonction-ci ayant aussi le pôle $s=\sigma-1$ où $\Phi(s)$ reste finie, on a nécessairement $a=0$, et les deux fonctions $L(w,s,\sigma)$, définies par les équations (A) et (D), sont égales. Ceci posé, prenons $s=\sigma$ dans l'équation (D); il vient

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\sigma}{1+x^\sigma}\,\frac{dx}{w^2+2wx\cos\frac{\pi}{\sigma}+x^2}=\frac{\pi}{\sigma\sin\frac{\pi}{\sigma}.(1+w)}.$$

Ensuite, différentions dans l'équation (D) par rapport à s et posons $s=\sigma$; nous aurons le développement

$$\frac{\sigma}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x^\sigma\log x}{1+x^\sigma}\,\frac{dx}{w^2+2wx\cos\frac{\pi}{\sigma}+x^2}$$

$$=\frac{2\pi i}{\sin\frac{\pi}{\sigma}}\left[\frac{1}{2\sigma(1+w)}+\sum_\lambda\frac{w^{\sigma-1}e^{\lambda\sigma\pi i}}{1-w^\sigma e^{\lambda\sigma\pi i}}+\frac{1}{\sigma}\sum_\mu\frac{1}{w+e^{\frac{\mu\pi i}{\sigma}}}\right].$$

Remplaçons la parenthèse dans le deuxième membre par son développement

$$\frac{1}{2\sigma(1+w)} + \sum_{\lambda,m} e^{\lambda m\sigma\pi i} w^{m\sigma-1} + \frac{1}{\sigma}\sum_{\mu,m}(-1)^{m-1} w^{m-1} e^{-\frac{\mu m\pi i}{\sigma}}; \quad \begin{pmatrix} m=1,2,3,\ldots \\ \mu=2,4,6,\ldots \\ \lambda=1,3,5,\ldots \end{pmatrix}$$

multiplions par dw et intégrons entre zéro et w; les séries qui en résultent

$$\frac{1}{2\sigma}\log(w+1) + \frac{1}{\sigma}\sum_{\lambda,m}\frac{w^{m\sigma}}{m} e^{\lambda m\sigma\pi i} + \frac{1}{\sigma}\sum_{\mu,m}(-1)^{m-1}\frac{w^m}{m} e^{-\frac{\mu m\pi i}{\sigma}}$$

s'expriment par des logarithmes et on obtient l'équation

$$\frac{\sigma^2}{2\pi^2 i}\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}\log x}{1+x^\sigma}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\cot\frac{\pi}{\sigma} + \frac{w}{x}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{\sigma}\right) + \frac{\pi}{\sigma} - \frac{\pi}{2}\right]dx$$

$$= \log\left\{\sqrt{1+w}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+we^{-\frac{2m\pi i}{\sigma}}}{1-w^\sigma e^{(2m-1)\sigma\pi i}}\right\}.$$

Elle fait voir que les transcendantes en σ

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+we^{-\frac{2m\pi i}{\sigma}}\right), \qquad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-w^\sigma e^{(2m-1)\sigma\pi i}\right)$$

qui ont l'axe des quantités réelles pour coupure, ont un quotient qui s'y comporte régulièrement. Cette relation qui nous paraît intéressante se simplifie en changeant w en $\frac{1}{w}$ et en ajoutant; on aura au deuxième membre l'expression

$$\log\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+we^{-\frac{2n\pi i}{\sigma}}\right)\left(1+\frac{1}{w}e^{-\frac{2n\pi i}{\sigma}}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-w^\sigma e^{(2n-1)\sigma\pi i}\right)\left(1-w^{-\sigma}e^{(2n-1)\sigma\pi i}\right)}$$

qu'on peut écrire d'après les définitions bien connues

$$\log\frac{e^{\frac{\pi i}{4\sigma}}\vartheta_2\left(\frac{\log w}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{-1}{\sigma}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\sigma\log w}{2\pi i}\,\middle|\,\sigma\right)},$$

ou en faisant usage de la formule de transformation,

$$\log\left\{\sqrt{\frac{\sigma}{i}}\, e^{\frac{\pi i}{4\sigma}-\frac{\sigma i}{4\pi}(\log w)^2}\right\}.$$

La formule dont il s'agit sera donc

$$\frac{\sigma^2}{2\pi^2 i}\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}\log x}{1+x^\sigma}\left\{\operatorname{arctg}\left(\cot\frac{\pi}{\sigma}+\frac{w}{x}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{\sigma}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\left(\cot\frac{\pi}{\sigma}+\frac{1}{wx}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{\sigma}\right)+\frac{2\pi}{\sigma}-\pi\right\}dx$$

$$=\log\left\{\sqrt{\frac{\sigma}{i}}\, e^{\frac{\pi i}{4\sigma}-\frac{\sigma i}{4\pi}(\log w)^2}\right\}.$$