SUR UN NOUVEL ET IMPORTANT THÉORÈME DE LA THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

J. L. W. V. JENSEN.

Monsieur le Professeur,

Lors de votre dernier séjour à Copenhague j'ai eu honneur de vous entretenir au sujet d'une intégrale définie appelée, si je ne me trompe, à jouer un rôle dans la théorie des fonctions analytiques. Comme il me parut que cette question vous interéssa vivement, je profiterai de cette occasion — l'envoi des deux petits mémoires[1] destinés à votre Journal — pour vous communiquer le développement détaillé de mon théorème.

Soit $z = re^{\theta i}$ une variable complexe, et α un nombre complexe différent de zéro, on a pour $r < |\alpha|$,

$$l\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu}$$

où l désigne la valeur principale du logarithme. En prenant les parties réelles des deux membres et en observant que l'on a $\Re(a) = \frac{1}{2}(a + \dot{a})$,[2] on trouve

$$(1) \qquad l\left|1 - \frac{z}{\alpha}\right| = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r^{\nu}}{2\nu}\left(\frac{e^{\nu\theta i}}{\alpha^{\nu}} + \frac{e^{-\nu\theta i}}{\dot{\alpha}^{\nu}}\right), \qquad r = |z| < |\alpha|.$$

[1] (1) *Sur les fonctions entières.*

(2) *Note sur une condition nécessaire et suffisante pour que tous les zéros d'une fonction entière soient réels.*

[2] Ici et dans la suite je désigne toujours par $\Re(a)$ la partie réelle et par $\dot{a}$ la valeur conjuguée de a.

Si $r > |\alpha|$, on a, par conséquent,

$$(2)\qquad l\left|1-\frac{z}{\alpha}\right| = l\frac{r}{|\alpha|} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu r^{\nu}}(\alpha^{\nu}e^{-\nu\theta i} + \dot{\alpha}^{\nu}e^{\nu\theta i}), \qquad r > |\alpha|.$$

Si l'on suppose que r soit constant, dans ces équations (1) et (2), les séries des seconds membres convergent uniformément pour toutes les valeurs de l'argument θ. Multiplions les deux membres de (1) et (2) par $\frac{1}{2\pi}e^{-k\theta i}d\theta$, où k désigne un nombre entier positif qui peut être nul, et intégrons de 0 à 2π; tous les termes s'évanouissent alors, à l'exception du terme constant. On trouve ainsi

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\left|1-\frac{z}{\alpha}\right|d\theta = \begin{cases} l\frac{r}{|\alpha|} & \text{pour } r > |\alpha|, \\ 0 & \text{pour } r < |\alpha|, \end{cases}$$

et

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\left|1-\frac{z}{\alpha}\right|e^{-k\theta i}d\theta = \begin{cases} -\frac{1}{2k}\left(\frac{\dot{\alpha}}{r}\right)^k & \text{pour } r > |\alpha|, \\ -\frac{1}{2k}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^k & \text{pour } r < |\alpha|. \end{cases}$$

Jusqu'ici nous avons laissé de côté le cas $r = |\alpha|$. Dans ce cas limite les séries en question se confondent et restent encore uniformément convergentes, pourvu que l'on ait soin d'exclure de l'intervalle $(0, 2\pi)$ de θ un intervalle $(\theta' - \varepsilon, \theta' + \varepsilon)$, θ' désignant l'argument de α. Après l'intégration, les séries, dans les deux cas $k = 0$ et $k > 0$, deviennent

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\sin\nu\varepsilon}{\nu^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'\,\frac{\sin(k-\nu)\varepsilon}{\nu(k-\nu)} + \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(k+\nu)\varepsilon}{\nu(k+\nu)} - \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\pi-2\varepsilon}{2k}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^k$$

respectivement, expressions qui tendent évidemment, pour $\lim\varepsilon = 0$, vers les limites respectives

$$0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2k}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^k.$$

D'autre part la fonction, sur laquelle porte l'intégration dans les premiers membres, devenant seulement logarithmiquement infinie dans le voisinage de $\theta = \theta'$, les intégrales correspondantes tendent, comme l'on sait, vers des limites déterminées. De la sorte les formules (3) et (4) restent encore valables dans le cas limite, mais les deux formes différentes des seconds membres se confondent en une seule.

Cela posé, nous allons faire une très intéressante application de ces formules à la théorie des fonctions. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans une partie du plan qui contient à son intérieur le point $z = 0$, point où la fonction ne devra être ni nulle ni infinie. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tous les zéros et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ tous les pôles de la fonction situés *à l'intérieur ou sur la circonférence d'un cercle* $|z| = r$ compris tout entier à l'intérieur du domaine donné. Nous supposons, bien entendu, que les zéros et les pôles sont chacun d'eux comptés autant de fois que l'indiquent leurs degrés de multiplicité. Nous aurons donc

$$f(z) = f(0)\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{m}\left(1 - \frac{z}{\beta_\nu}\right)} f_1(z), \tag{5}$$

où $f_1(z)$ désigne une fonction de z qui reste méromorphe à l'intérieur du domaine donné et qui est holomorphe à l'intérieur et sur la circonférence du cercle $|z| = r$. Nous voyons, par suite, que l'on a

$$f_1(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu z^\nu,$$

au moins pour $|z| < R$, R désignant un certain nombre positif plus grand que r. Nous pouvons aussi écrire

$$f_1(z) = e^{f_2(z)}$$

où

$$f_2(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu z^\nu, \tag{6}$$

pour $|z| < R'$, R' désignant la valeur absolue de l'affixe du plus petit zéro ou pôle situé *à l'extérieur* du cercle $|z| = r$. Prenons maintenant la partie réelle du logarithme des deux membres de (5), nous obtenons alors par l'intégration en appliquant la formule (3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\,|f(re^{\theta i})|\,d\theta = l\,|f(0)| + l\,\frac{r^{n-m}|\beta_1|\cdot|\beta_2|\ldots|\beta_m|}{|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\ldots|\alpha_n|}, \tag{7}$$

car l'intégrale correspondante relative à $f_1(z)$ est nulle, d'après la formule (6) où manque de terme constant.

C'est en cette formule (7) que consiste le nouvel et important théorème que j'avais en vue. D'après les développements précédents il est évident que le théorème subsiste même lorsque $re^{\theta i}$ passe par un nombre quelconque de zéros ou de pôles. Dans le cas spécial où $f(z)$ est une fonction entière, on peut prendre r aussi grand que l'on veut; la formule (7) se réduit alors à la suivante

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\,|f(re^{\theta i})|\,d\theta = l\,|f(0)| + l\,\frac{r^n}{|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\ldots|\alpha_n|}. \tag{8}$$

Avant de procéder à quelques-unes des nombreuses applications du théorème, il ne sera pas inutile de jeter un coup d'oeil sur le second membre de (8). Il est évident que cette expression est une fonction *continue* du nombre positif r, et cela malgré qu'elle dépende du nombre des zéros compris à l'intérieur du cercle $|z| = r$. On voit aussi, du reste, que la fonction est *continuellement croissante avec* r. Dans le cas où la fonction entière n'a pas de zéros situés à l'intérieur du cercle, le second membre de (8) se réduit à son premier terme, qui est constant. Ce fait nous met en possession d'un *critère précieux qui nous renseigne sur l'absence des racines à l'intérieur d'un cercle.* Il est évident aussi que le théorème fondamental de l'Algèbre est un corollaire immédiat de ce que nous venons de démontrer.

Pour montrer avec quelle facilité ce théorème se prête aussi aux recherches de la théorie des fonctions transcendantes entières, soit $f(z)$ une telle fonction, préalablement débarassée par division de toute racine zéro. Soit $e^{\varphi(r)}$ la valeur maxima de $|f(z)|$ sur la circonférence $|z| = r$; il est évident alors que $\varphi(r)$ est une limite supérieure pour $l\,|f(re^{\theta i})|$, et on trouve, par conséquent

$$\varphi(r) > K + l\,\frac{r^n}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{9}$$

K désignant une constante réelle et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs absolues des zéros, rangées par ordre de grandeurs non décroissante, les zéros étant comptés, comme il a été dit précédemment, avec leurs degrés de multiplicité respectifs. Il est évident que, dans la formule (9), nous pouvons *à fortiori* remplacer n par un entier qui lui est inférieur; de la sorte n ne désignera plus le nombre exact des zéros à l'intérieur où sur la circonférence du cercle $|z| = r$, mais un entier quelconque plus petit que ce nombre. Si nous supposons, bien entendu, que $f(z)$ ait une infinité de zéros, nous pourrons fixer n arbitrairement, et prendre une valeur $r = xa_n$ correspondante, x désignant une constante positive > 1, mais d'ailleurs arbitraire. Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\varphi(xa_n) &> K + l\frac{a_n^n}{a_1 \ldots a_n} + nlx \\ &> K + nlx.\end{aligned}$$

Donc, si l'on suppose que $\varphi(r) < r^\omega$, ω désignant une constante positive, on a sur le champ

$$a_n^\omega > \frac{K}{x^\omega} + n\frac{lx}{x^\omega},$$

ce qui fait voir que la série $\Sigma a_n^{-\omega-\varepsilon}$ est convergente pour ε positif. Nous avons ainsi trouvé une limite inférieure de a_n regardé comme fonction de n. On peut aussi procéder inversement et employer (9) pour la détermination d'une limite inférieure de $\varphi(r)$, en supposant a_n donné. Je vous renverrai pour plus de détails à mon mémoire *Sur les fonctions entières* où je traite cette question d'une manière tout à fait élémentaire à l'aide des premiers principes de la théorie des séries et sans employer le calcul intégral.

Reprenons maintenant la formule (5) et prenons comme auparavant la partie réelle du logarithme des deux membres, mais en multipliant cette fois avant l'intégration par $\frac{1}{2\pi}e^{-k\theta i}$; nous trouvons alors en appliquant les formules (4) et (6)

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l|f(re^{\theta i})|e^{-k\theta i}d\theta = \frac{1}{2k}\left[\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{\beta_\nu}{r}\right)^k - \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\alpha_\nu}{r}\right)^k\right] + \frac{r^k}{2}B_k.$$

Nous avons de la sorte calculé le coefficient de z^k dans $f_2(z)$, ce qui permet de déterminer le facteur exponentiel dans les fonctions entières, (*voir* la méthode analogue dans mon mémoire précité).

Avant de terminer cette lettre, je prendrai la liberté de vous rappeler quelques recherches de la théorie analytique des nombres, dont je vous ai parlé il y a plusieurs années. Si je puis trouver le loisir nécessaire, j'espère pouvoir cette année terminer la rédaction de mon mémoire sur les fonctions numériques. Ces recherches ont beaucoup de rapport avec le théorème que je viens d'exposer.

Vous savez, Monsieur, que le problème relatif au nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée attend encore sa solution rigoureuse, et cela, parceque l'on n'a pu jusqu'ici démontrer que les zéros de la fonction transcendante entière $\xi(t)$ de RIEMANN sont tous réels. Or, à l'aide de recherches subséquentes sur les séries de DIRICHLET, pour lesquelles en 1884[1] déjà j'ai démontré deux théorèmes fondamentaux, et en employant le critère donné plus haut, je suis parvenu à démontrer rigoureusement que $\xi(t)$ n'a pas de zéros à l'intérieur du cercle $|t - ri| = r$. C'est, en d'autres termes, affirmer que toutes les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont réelles. L'on a surmonté de la sorte le dernier et le plus difficile des obstacles qui s'opposaient à la solution du problème, et il est maintenant aisé de démontrer (comme je le ferai voir dans le mémoire que je prépare) que le nombre des nombres premiers inférieurs à n est

$$\vartheta(n) = \sum_{2}^{n} \frac{1}{l\nu} + \rho_n,$$

où, pour $\lim n = \infty$, $\dfrac{|\rho_n|}{(\sqrt{n})^{1+\varepsilon}}$ tend vers zéro, ε désignant une quantité fixe positive aussi petite que l'on veut. D'autre part on démontre très aisément que ρ_n n'est pas d'un ordre plus petit que $\sqrt{n}$, c'est à dire, pour parler d'une manière plus précise, qu'on peut toujours trouver une suite infinie de nombres n, pour lesquels

$$|\rho_n| > (\sqrt{n})^{1-\varepsilon}.$$

[1] Voir Tidskrift for Mathematik, Copenhague 1884, p. 70 et 83 et Comptes Rendus, t. 106, p. 834.