SUR LES SÉRIES DE TAYLOR QUI ONT UNE INFINITÉ DE POINTS SINGULIERS

PAR

E. FABRY

à MONTPELLIER.

1. Une série, ordonnée suivant les puissances entières de la variable, définit une fonction analytique; s'il existe sur la circonférence de convergence des points non singuliers, la fonction est définie pour des points extérieurs au cercle de convergence par de nouvelles séries déduites de la première. Mais il y a des cas où ce prolongement analytique est impossible, c'est à dire où tous les points de la circonférence de convergence sont singuliers. M. FREDHOLM en a indiqué un exemple (C. R. 24 mars 1890). M. HADAMARD a montré (Journal de Liouville, 4ième série, t. 8) que la circonférence de convergence est une coupure pour la série $\Sigma a_\nu z^{c_\nu}$, où c_ν représente une suite de nombres entiers tels que $\frac{c_{\nu+1} - c_\nu}{c_\nu}$ reste supérieur à une quantité k fixe. M. BOREL a montré (C. R. 5 octobre 1896) que cela a lieu dans le cas plus général où $c_{\nu+1} - c_\nu > k\sqrt{c_\nu}$. Enfin j'ai démontré (Annales de l'Ecole normale, octobre 1896), qu'il en est de même toutes les fois que $c_{\nu+1} - c_\nu$ augmente indéfiniment, et même dans des cas plus généraux où la série peut être complète.

M. BOREL (C. R. 14 décembre 1896) considère comme les plus générales les séries dont les coefficients sont choisis arbitrairement, et indépendemment les uns des autres, et démontre que dans ce cas le prolongement analytique est impossible. J'ai donné (C. R. 18 janvier 1897) une nouvelle démonstration de ce théorème, en partant de considérations plus simples, qui permettent de présenter le résultat sous une forme plus générale. C'est cette démonstration qui sera développée dans la première partie de ce mémoire. Je donnerai ensuite, sous une forme nouvelle et plus générale, quelques-uns des théorèmes que j'ai déjà signalés (Annales de l'Ecole normale), et j'en déduirai des séries particulières ayant pour coupure une portion déterminée de la circonférence de convergence.

Pour étudier la nature d'un point de la circonférence de convergence, on peut, par un changement de variable, ramener le rayon de convergence à l'unité, et le point considéré à coïncider avec $z = 1$.

2. Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

une série dont le cercle de convergence a pour rayon 1, c'est à dire telle que la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{|a_n|}$ soit égale à 1; celle de $\frac{1}{n} L|a_n|$ est alors 0. ε étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, on peut trouver des valeurs de n supérieures à tout nombre donné, telles que $|a_n| > (1 - \varepsilon)^n$, et il existe un nombre tel que pour toute valeur de n supérieure on ait:

$$|a_n| < (1 + \varepsilon)^n.$$

Soit t une quantité réelle comprise entre 0 et 1:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(t)}{\underline{|n}} (z - t)^n$$

$$\frac{f^n(t)}{\underline{|n}} = a_n + a_{n+1} t \frac{n+1}{1} + \dots + a_{n+p} t^p \frac{(n+1)\dots(n+p)}{1.2\dots p} + \dots .$$

Si la limite supérieure de $\sqrt[n]{\frac{f^n(t)}{\underline{|n}}}$, pour $n = \infty$, est $\frac{1}{1-t}$, cette nouvelle série aura pour rayon de convergence $1 - t$, et $z = 1$ sera un point singulier de $f(z)$.

Pour calculer l'ordre de grandeur des coefficients, remarquons que l'expression

$$1 \cdot 2 \ldots n\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{k}{n}}$$

augmente avec n si $k \geqq \frac{1}{12}$, et diminue si $k = 0$; car les logarithmes de deux termes consécutifs ont pour différence:

$$1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) L\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{k}{n(n-1)} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{k - \dfrac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)}}{n^\nu}$$

expression qui reste négative si $k = 0$, et positive si $k \geqq \frac{1}{12}$. On en déduit:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} > \underline{|n} > \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\, e^{1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12n}} > \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{en}\ {}^{[1]}$$

et

$$e^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n+p}{np}} \left(\frac{n+p}{n}\right)^n \left(\frac{n+p}{p} t\right)^p < \frac{\underline{|(n+p)}}{\underline{|n}\,\underline{|p}} t^p < \sqrt{\frac{n+p}{np}} \left(\frac{n+p}{n}\right)^n \left(\frac{n+p}{p} t\right)^p.$$

D'autre part $|a_{n+p}| < (1+\varepsilon)^{n+p}$, ε étant aussi petit que l'on voudra, pourvu que n soit assez grand. Il en résulte que, dans $\dfrac{f^n(t)}{\underline{|n}}$, il est inutile de tenir compte des termes qui suivent a_{n+p}, p étant compris entre $n\dfrac{t+\lambda}{1-t}$ et $n\dfrac{t+\lambda}{1-t} - 1$. En effet:

$$\left|\sum_{\nu=p}^{\infty} a_{n+\nu} t^\nu \frac{\underline{|(n+\nu)}}{\underline{|n}\,\underline{|\nu}}\right| < (1+\varepsilon)^{n+p} \sqrt{\frac{n+p}{np}} \left(\frac{n+p}{n}\right)^n \left(\frac{n+p}{p} t\right)^p$$

$$\times \left[1 + (1+\varepsilon) t \frac{n+p+1}{p+1} + (1+\varepsilon)^2 t^2 \frac{(n+p+1)(n+p+2)}{(p+1)(p+2)} + \ldots\right].$$

Dans cette suite, le rapport de deux termes consécutifs est

$$(1+\varepsilon) t \frac{n+p+\nu}{p+\nu} \leqq (1+\varepsilon) t \frac{n+p+1}{p+1} < (1+\varepsilon) \frac{t+\lambda t}{t+\lambda} < 1$$

[1] la théorie des intégrales Eulériennes donne pour $\underline{|n}$ une valeur plus approchée, qui est ici inutile.

si ε est choisi assez petit, t et λ restant fixes. Alors

$$\frac{1}{n} L \left| \sum_{\nu=p}^{\infty} a_{n+\nu} t^{\nu} \frac{|(n+\nu)}{|n\,|\nu} \right| < \frac{1+\lambda}{1-t} L(1+\varepsilon) + L\frac{n+p}{n}$$

$$+ \frac{p}{n} L \frac{n+p}{p} t - \frac{1}{n} L\left(1 - (1+\varepsilon)\frac{t+\lambda t}{t+\lambda}\right)$$

expression qui diffère aussi peu que l'on voudra de

$$L\frac{1}{1-t} + \frac{1+\lambda}{1-t} L(1+\lambda) - \frac{t+\lambda}{1-t} L\left(1+\frac{\lambda}{t}\right) = L\frac{1-\theta}{1-t}$$

θ étant une quantité positive qui augmente avec λ. Soit θ' compris entre 0 et θ, si n est assez grand, on aura

$$\left| \sum_{\nu=p}^{\infty} a_{n+\nu} t^{\nu} \frac{|(n+\nu)}{|n\,|\nu} \right| < \left(\frac{1-\theta'}{1-t}\right)^{n}.$$

De même si p est compris entre $n\frac{t-\lambda}{1-t}$ et $n\frac{t-\lambda}{1-t} + 1$, $(\lambda < t)$, dans la somme $a_n + a_{n+1} t \frac{n+1}{1} + \ldots + a_{n+p} t^{p} \frac{|(n+p)}{|n\,|p}$, $t\frac{n+\nu}{\nu}$ reste plus grand que 1, et le module de cette somme est plus petit que

$$(p+1)(1+\varepsilon)^{n+p} \sqrt{\frac{n+p}{np}} \left(\frac{n+p}{n}\right)^{n} \left(\frac{n+p}{p} t\right)^{p};$$

il en résulte:

$$\frac{1}{n} L \left| \sum_{\nu=0}^{p} a_{n+\nu} t^{\nu} \frac{|(n+\nu)}{|n\,|\nu} \right| < \frac{1}{n} L(p+1) + \frac{n+p}{n} L(1+\varepsilon)$$

$$+ L\frac{n+p}{n} + \frac{p}{n} L\frac{n+p}{p} t$$

qui a la même limite que

$$L\frac{1}{1-t} + \frac{1-\lambda}{1-t} L(1-\lambda) - \frac{t-\lambda}{1-t} L\left(1-\frac{\lambda}{t}\right) <$$

$$L\frac{1}{1-t} + \frac{1+\lambda}{1-t} L(1+\lambda) - \frac{t+\lambda}{1-t} L\left(1+\frac{\lambda}{t}\right)$$

car la différence de ces deux expressions diminue, si λ augmente entre 0 et t.

Donc si, dans $\dfrac{f^n(t)}{\underline{|n}}$, on ne conserve que les termes tels que p reste compris entre $n\dfrac{t-\lambda}{1-t}$ et $n\dfrac{t+\lambda}{1-t}$, la somme des termes supprimés a un module plus petit que $2\left(\dfrac{1-\theta'}{1-t}\right)^n$. Si la racine $n^{\text{ième}}$ a pour limite supérieure $\dfrac{1}{1-t}$, après la suppression de ces termes, il existera une suite illimitée de valeurs de n telles que

$$\left|\frac{f^n(t)}{\underline{|n}}\right| > \left(\frac{1-\varepsilon}{1-t}\right)^n\left[1-2\left(\frac{1-\theta}{1-\varepsilon}\right)^n\right]$$

et $\sqrt[n]{\dfrac{f^n(t)}{\underline{|n}}}$ a aussi pour limite supérieure $\dfrac{1}{1-t}$.

D'autre part, si $\dfrac{p}{n}$ tend vers $\dfrac{t}{1-t}$, $\dfrac{n+p}{p}t$ tend vers 1, et

$$\frac{1}{n}L\left(\frac{\underline{|(n+p)}}{\underline{|n}\,\underline{|p}}t^p\right)$$

reste compris entre les deux quantités

$$\frac{p}{n}L\frac{n+p}{p}t + L\frac{n+p}{n} + \frac{1}{2n}L\frac{n+p}{np}$$

et

$$\frac{p}{n}L\frac{n+p}{p}t + L\frac{n+p}{n} + \frac{1}{2n}L\frac{n+p}{np} - \frac{3}{2n}$$

qui ont la même limite $L\dfrac{1}{1-t}$.

Mettons en facteur ce coefficient $\dfrac{\underline{|(n+p)}}{\underline{|n}\,\underline{|p}}t^p$, et posons $n+p=m$

$$\varphi_m(t) = a_m + a_{m+1}t\frac{m+1}{p+1} + \ldots + a_{m+\nu}t^\nu\frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)}$$
$$+ a_{m-1}\frac{1}{t}\frac{p}{m} + \ldots + a_{m-\nu}\frac{1}{t^\nu}\frac{p(p-1)\ldots(p-\nu+1)}{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}$$

où p augmente indéfiniment avec m, de façon que $\frac{p}{m}$ tende vers t, et $\nu \geqq \lambda m$, $0 < \lambda < t < 1$. On a

$$\frac{f^n(t)}{|\underline{n}} = \varphi_m(t) t^p \frac{|\underline{(n+p)}}{|\underline{n}\,|\underline{p}} + \psi(t)$$

ψ comprenant les termes $a_{n+\nu}$ où $\nu > p\left(1 + \lambda \frac{m}{p}\right)$, et ceux où $\nu < p\left(1 - \lambda \frac{m}{p}\right)$, qui sont ceux que nous avons supprimés. Si $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ a pour limite supérieure 1, pour $m = \infty$, on aura, pour une suite de valeurs de n:

$$\left|\frac{f^n(t)}{|\underline{n}}\right| > (1 - \varepsilon)^m \left(\frac{1-\varepsilon}{1-t}\right)^n - 2\left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n$$

ε tendant vers 0, et $\sqrt[n]{\left|\frac{f^n(t)}{|\underline{n}}\right|}$ aura pour limite supérieure $\frac{1}{1-t}$.

En posant $z = te^{\omega i}$, $t = 1$ correspond à $z = e^{\omega i}$, et l'on est conduit au théorème suivant:

Soit

$$\varphi_m(z) = \sum a_{m+\nu} z^\nu \frac{|\underline{(m+\nu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\nu)}\,|\underline{m}}$$

où ν prend toutes les valeurs entières comprises entre $-\lambda m$ et $+\lambda m$, $z = te^{\omega i}$, $\frac{p}{mt}$ tendant vers 1, et $0 < \lambda < t < 1$. Si $\sqrt[m]{|\varphi_m(z)|}$ a pour limite supérieure 1, pour $m = \infty$, $z = e^{\omega i}$ est un point singulier de $f(z)$.

t peut ici varier avec m, pourvu qu'il reste compris entre deux limites comprises entre 0 et 1, $\frac{p}{mt}$ tendant vers 1.

3. Laissant t fixe, donnons à ω les valeurs $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$. $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)\nu i}$ est égal à $ne^{\alpha\nu i}$ si ν est un multiple de n, et nul pour les autres valeurs entières de ν. Si $n > \lambda m$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_m\left(te^{\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)i}\right) = na_m.$$

Parmi les n arguments $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ il y en a donc au moins un tel que

$$|\varphi_m(te^{\omega i})| \geqq |a_m|$$

et il y a une infinité de valeurs de ω vérifiant cette inégalité.

Si $\sqrt[m]{|a_m|}$ ne tend pas regulièrement vers 1, on ne prendra dans φ_m que des valeurs de m telles que $\sqrt[m]{|a_m|}$ tende vers 1. Soit alors A_m une quantité positive plus petite que $|a_m|$, telle que $\sqrt[m]{A_m}$ tende vers 1. On pourra choisir $\sqrt[m]{A_m}$ tendant vers 1 aussi lentement que l'on voudra, et ne prendra que les valeurs de m telles que $|a_m| \geqq A_m$, ce qui est toujours possible. Posons alors

$$\varphi_m(te^{\omega i}) \geqq A_m$$

à chaque valeur de m correspondent une infinité de valeurs de ω qui vérifient cette inégalité.

Si un arc de la circonférence de convergence ne contient aucun point singulier, $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{\omega i})|}$ a une limite supérieure plus petite que 1 pour toutes les valeurs de ω correspondantes, et l'on peut trouver une quantité ε telle que

$$|\varphi_m(te^{\omega i})| < (1 - \varepsilon)^m < A_m$$

pour toute valeur assez grande de m. Aucun des arguments ω ne se trouvera alors sur cet arc, à partir d'une valeur déterminée de m.

Si les points singuliers de la circonférence de convergence sont en nombre limité, les valeurs de ω auront des limites déterminées en nombre fini, lorsque m augmente indéfiniment.

Considérons le cas général où les coefficients a sont donnés arbitrairement, c'est à dire indépendemment les uns des autres, avec la seule condition que $\frac{1}{n} L|a_n|$ ait pour limite supérieure 0. On peut former des fonctions φ_m n'ayant aucun terme a commun, en prenant pour m une suite de valeurs $m_1 m_2 \ldots m_\nu \ldots$ telles que $m_\nu\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^\nu$ augmente constamment, de sorte que $m_{\nu+1}(1 - \lambda) \geqq m_\nu(1 + \lambda)$. Cela a lieu, par exemple, si $|m_\nu - (1 + \lambda')^\nu|$ reste fini, $\lambda' > \frac{2\lambda}{1 - \lambda}$, pourvu que ν soit assez grand. On a ainsi une suite de valeurs de m, à chacune desquelles correspond au moins un argument ω_m; ces arguments se déduisent de coefficients a

distincts, et peuvent être choisis arbitrairement en même temps que les a correspondants. Au delà de toute valeur de m, il y aura des arguments ω_m sur un arc quelconque, et tout arc du cercle de convergence contiendra des points singuliers.

Si un point du cercle de convergence n'était pas singulier, il y aurait un arc, comprenant ce point, ne contenant aucun point singulier; et au delà d'une valeur déterminée de m il n'y aurait aucun argument ω_m sur cet arc, ce qui limite le choix des coefficients a correspondants.

A une suite illimitée quelconque de fonctions φ_m, telles que $\frac{1}{m} L|a_m|$ tende vers 0, correspond ainsi au moins un point singulier. Mais en général on pourra toujours en déduire une infinité. En effet, n étant un nombre entier fixe, posons:

$$\psi_m(te^{ai}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2k\mu}{n}\pi i} \varphi_m\left(te^{\left(a+\frac{2k}{n}\pi\right)i}\right) = \sum_h a_{m+\mu+hn} t^{\mu+hn} e^{a(\mu+hn)i} \frac{|\underline{(m+\mu+hn)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\mu+hn)}\,|\underline{m}}$$

on a

$$\frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} e^{-\frac{2k\mu}{n\nu}\pi i} \psi_m\left(te^{\left(a+\frac{2k}{n\nu}\pi\right)i}\right) = a_{m+\mu} t^{\mu} e^{\mu a i} \frac{|\underline{(m+\mu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\mu)}\,|\underline{m}}$$

si $n\nu > \lambda m + |\mu|$.

Si $\frac{\mu}{m}$ et $\frac{1}{m} L|a_{m+\mu}|$ tendent vers 0, $\frac{1}{m} L\left| a_{m+\mu} t^{\mu} \frac{|\underline{(m+\mu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\mu)}\,|\underline{m}} \right|$ tend aussi vers 0; et, si A_m est choisi assez petit, $\frac{1}{m} LA_m$ tendant vers 0, parmi les ν arguments $\alpha + \frac{2k}{n\nu}\pi$ il y en aura au moins un pour lequel $|\psi_m(te^{\alpha i})| > A_m$, et il existe au moins un nombre entier k tel que $\left|\varphi_m\left(te^{\left(\alpha+\frac{2k}{n}\pi\right)i}\right)\right| > A_m$.

Mais ψ_m ne contient que les coefficients a de la forme $a_{m+\mu+kn}$; en faisant varier μ, on peut former n expressions ψ n'ayant aucun terme commun, à chacune desquelles correspondent des arguments α, pourvu que $\frac{1}{m} L|a_{m+\mu}|$ tende vers 0, au moins pour un terme de chacune de ces n suites, où $\frac{\mu}{m}$ tend vers 0. Les coefficients a de φ_m sont ainsi décomposés en n suites, à chacune desquelles correspond en général au moins un argument α, et l'inégalité $|\varphi_m(te^{\omega i})| > A_m$ sera vérifiée pour l'une des valeurs $\omega = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$ de chacune de ces n suites. Les coefficients a étant arbitraires, ces n arguments α sont aussi indépendants, et en général les n séries de n termes $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ n'auront aucun terme commun; de sorte que l'on obtiendra ainsi au moins n valeurs distinctes de ω. Et comme n peut être aussi grand que l'on voudra, il y aura en général, pour chaque valeur de m, une infinité de valeurs de ω qui ne tendront pas vers une limite unique, mais donneront une infinité de points singuliers quelque soit la suite de fonctions φ_m considérée. On est ainsi conduit au théorème suivant:

Dans le cas général où les coefficients de la série $\Sigma a_n z^n$ sont supposés arbitraires et indépendants les uns des autres, la circonférence de convergence est une coupure.

4. Soit $a_n = a'_n + ia''_n$. Si les parties réelles a'_n des termes de φ_m sont de même signe, pour une suite illimitée de valeurs de m telles que $\frac{1}{m} L|a'_m|$ tende vers 0, $|\varphi_m(t)| > |a'_m|$ et le point $z = 1$ est singulier. On arrive à un résultat beaucoup plus général en considérant les changements de signes successifs de la suite a'_n.

Parmi les termes de φ_m, considérons ceux d'indices successifs m, $m + h_1$, $m + h_1 + h_2, \ldots, m + h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ et $m - h'_1 \ldots$, $m - h'_1 - h'_2 - \ldots - h'_{n'}$. Soit h le plus grand et h' le plus petit des nombres $h_1, h_2, \ldots, h_n, h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'}$. Supposons que h' augmente indéfiniment avec m, $\frac{h}{m}$ tendant vers 0, les derniers indices étant choisis de façon que

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = h'_1 + h'_2 + \ldots + h'_{n'} = H = Nh$$

où N est un nombre entier, et

$$\lambda m \leqq H < \lambda m + h.$$

Dans la suite des termes a' de $\varphi_m(t)$, considérons ceux qui changent de signe à partir de a'_m. Supposons qu'entre a'_m et a'_{m+h_1-1} le nombre des changements de signe soit au plus αh_1, entre a'_{m+h_1} et $a'_{m+h_1+h_2-1}$ au plus αh_2, et qu'en général entre $a'_{m+h_1+\ldots+h_{\nu-1}}$ et $a'_{m+h_1+\ldots+h_\nu-1}$ il y ait au plus αh_ν changements de signe, et $\alpha h'_\nu$ entre $a'_{m-h'_1-\dots-h'_{\nu-1}}$ et $a'_{m-h'_1-\dots-h'_\nu+1}$. Le nombre total des changements de signes entre a'_{m-H+1} et a'_{m+H-1} est ainsi au plus égal à $2\alpha H$.

Soit

$$\psi_m(t) = \sum_{k=-\mu}^{+\mu} A_k \varphi_m\left(te^{k\frac{\pi i}{H}}\right) = \sum_\nu a_{m+\nu} t^\nu \frac{|(m+\nu)\,|p}{|(p+\nu)\,|m} \sum_k A_k e^{k\frac{\nu\pi i}{H}}$$

où les coefficients A seront définis par l'identité

$$F(z) = z^\mu \sum_{k=-\mu}^{+\mu} A_k z^k = \left(ze^{-\frac{\nu_1\pi i}{2H}} - e^{\nu_1\frac{\pi i}{2H}}\right)\dots\left(ze^{-\nu_\mu\frac{\pi i}{2H}} - e^{\nu_\mu\frac{\pi i}{2H}}\right)$$

$$\times\left(ze^{\nu'_1\frac{\pi i}{2H}} - e^{-\nu'_1\frac{\pi i}{2H}}\right)\dots\left(ze^{\nu'_\mu\frac{\pi i}{2H}} - e^{-\nu'_\mu\frac{\pi i}{2H}}\right)$$

alors

$$\Sigma A_k e^{k\frac{\nu\pi i}{H}} = e^{-\mu\frac{\nu\pi i}{H}} F\left(e^{\nu\frac{\pi i}{H}}\right) = 4^\mu \sin\frac{\nu_1-\nu}{2H}\pi \sin\frac{\nu'_1+\nu}{2H}\pi \dots \sin\frac{\nu_\mu-\nu}{2H}\pi\sin\frac{\nu'_\mu+\nu}{2H}\pi;$$

ces quantités réelles s'annulent et changent de signe pour les valeurs $\nu = \nu_1, \nu_2, \dots \nu_\mu, -\nu'_1, -\nu_2 \dots -\nu'_\mu$, et ne s'annulent pour aucune autre valeur de ν comprise entre $-H$ et $+H$, si aucun de ces indices ν et ν' n'est supérieur à H.

Prenons pour ces indices ν ceux des termes $a'_{m\pm\nu}$ qui changaient de signe, de façon que les parties réelles des coefficients de $\psi_m(t)$ soient toutes de même signe. On peut en outre prendre pour ν deux des indices successifs qui restent, ou ceux des termes extrêmes, de façon que dans chacun des $n+n'$ intervalles, $m+h_1+\dots+h_{\nu-1}$ à $m+h_1+\dots+h_\nu-1$, il y en ait un nombre compris entre $\alpha h_\nu - 2$ et $\alpha h_\nu + 2$, et que

$$\alpha H \geqq \mu > \alpha H - 1.$$

Alors

$$|\psi_m(t)| > |a'_m|\, \Sigma A_k$$

et il existe une valeur de k, comprise entre $-\alpha H$ et $+\alpha H$, telle que

$$\left|A_k\varphi_m\left(te^{k\frac{\pi i}{H}}\right)\right| > \frac{1}{2\mu+1}|\psi_m(t)| > \frac{|a'_m|\,\Sigma A_k}{2\alpha(\lambda m+h)+1}.$$

Mais on a:

$$\Sigma A_k = 4^\mu \sin\frac{\nu_1\pi}{2H}\sin\frac{\nu_1'\pi}{2H}\sin\frac{\nu_2\pi}{2H}\sin\frac{\nu_2'\pi}{2H}\ldots\sin\frac{\nu_\mu\pi}{2H}\sin\frac{\nu_\mu'\pi}{2H}$$

$$> 4^{aH-1}\left(\sin\frac{\pi}{2H}\sin\frac{2\pi}{2H}\ldots\sin\frac{}{2H}\right)^2\times\left(\sin\frac{\pi h_1}{2H}\right)^{ah_1+2}\times\left(\sin\pi\frac{h_1+h_2}{2H}\right)^{ah_2+2}$$

$$\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{2H}\right)^{ah_n+2}\times\left(\sin\frac{\pi h_1'}{2H}\right)^{ah'_1+2}$$

$$\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_1'+h_2'+\ldots+h_{n'}'}{2H}\right)^{ah'_{n'}+2}$$

$$> 4^{aH-1}\left(\frac{|h}{H^h}\right)^2\times\left[\sin\frac{\pi}{2H}\sin\frac{2\pi}{2H}\times\ldots\sin\frac{H\pi}{2H}\right]^{2a+\frac{4}{h'}}$$

$$= \left(\frac{|h}{H}\right)^2\times\frac{1}{4.2^{\frac{4H}{h'}}}(4H)^{a+\frac{2}{h'}} > \frac{eh}{4}\left(\frac{h}{eH}\right)^{2h}\frac{1}{2^{4\frac{\lambda m+h}{h'}}}(4\lambda m)^{a+\frac{2}{h'}}$$

et

$$\frac{1}{m}L\Sigma A_k > -\frac{2L2}{h'}\left(2\lambda+\frac{2h+h'}{m}\right)-\frac{2h}{m}\left(1+L\frac{m}{h}+L\left(\lambda+\frac{h}{m}\right)\right)$$

expression qui tend vers 0.

D'autre part

$$2\pi i A_k = \int_0^{2\pi} F(e^{\omega i})\frac{i\,d\omega}{e^{(k+\mu)\omega i}},$$

et $|A_k| < M$, M étant le maximum du module de $F(e^{\omega i})$.

$$F(e^{\omega i}) = e^{\mu\omega i}4^\mu\sin\left(\frac{\pi\nu_1}{2H}-\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\nu_1'}{2H}+\frac{\omega}{2}\right)\times\ldots$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi\nu_\mu}{2H}-\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\nu_\mu'}{2H}+\frac{\omega}{2}\right).$$

Les arcs $\pi\frac{h_1+h_2+\ldots+h_\nu}{H}$ et $-\pi\frac{h_1'+h_2'+\ldots+h_{\nu'}'}{H}$ divisent la circonférence en $n+n'$ parties comprises entre $\pi\frac{h'}{H}$ et $\pi\frac{h}{H}$. Changeons l'ordre des notations, et représentons, pour le moment, par $\pi\frac{h_0}{H}$ celle de ces parties sur la quelle tombe ω, par $\pi\frac{h_1}{H}, \pi\frac{h_2}{H}, \ldots, \pi\frac{h_n}{H}$ les arcs suivants, $\pi\frac{h_0+h_1+\ldots+h_n}{H}$ étant compris entre π et $\pi-\pi\frac{h}{H}$. De même $\frac{\pi h'_1}{H}$, $\frac{\pi h'_2}{H}, \ldots, \frac{\pi h'_{n'}}{H}$ seront les arcs qui précèdent ω, $\pi\frac{h_0+h'_1+\ldots+h'_{n'}}{H}$ étant aussi compris entre π et $\pi-\pi\frac{h}{H}$. On a alors:

$$\begin{aligned}
|F(e^{\omega i})| &< 4^{\mu}\left(\sin\frac{\pi h_0}{2H}\right)^{ah_0-2}\left(\sin\pi\frac{h_0+h_1}{2H}\right)^{ah_1-2}\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_0+h_1+\ldots+h_n}{2H}\right)^{ah_n-2}\\
&\quad\times\left(\sin\pi\frac{h_0+h'_1}{2H}\right)^{ah'_1-2}\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_0+h'_1+\ldots+h'_{n'}}{2H}\right)^{ah'_{n'}-2}\\
&< 4^{aH}\cdot\left[\left(\sin\frac{\pi h_0}{2H}\right)^{h_0}\left(\sin\pi\frac{h_0+h_1}{2H}\right)^{h_1}\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_0+h_1+\ldots+h_n}{2H}\right)^{h_n}\right.\\
&\quad\left.\times\left(\sin\pi\frac{h_0+h'_1}{2H}\right)^{h'_1}\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_0+h'_1+\ldots+h'_{n'}}{2H}\right)^{h'_{n'}}\right]^{a-\frac{2}{h'}}\\
&< 4^{aH}\left[\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\pi h}{2H}}}\sin\frac{2\pi h}{2H}\ldots\sin\frac{(N-1)\pi h}{2H}\right]^{2h\left(a-\frac{2}{h'}\right)}\\
&= 4^{\frac{2H}{h'}}\cdot\left(\frac{4N}{\left(\sin\frac{\pi}{2N}\right)^3}\right)^{h\left(a-\frac{2}{h'}\right)}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{m}LM<\frac{2}{h'}\left(\lambda+\frac{h}{m}\right)L4+\frac{2ah}{m}L2\left(\frac{\lambda m+h}{h}\right)^2,$$

expression qui tend vers 0, en même temps que $\frac{1}{h'}$ et $\frac{h}{m}$.

Quel que soit k, $\frac{1}{m}L\frac{\Sigma A_k}{A_k}$ reste supérieur à une quantité qui tend vers 0; et, si $\frac{1}{m}L|a'_m|$ tend vers 0, il y aura un arc ω compris entre $-\alpha\pi$ et $+\alpha\pi$, tel que $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{\omega i})|}$ ait pour limite supérieure 1, et il y aura un point singulier sur l'arc $\pm\alpha\pi$.

Dans le cas où les nombres h n'augmentent pas indéfiniment, on peut toujours réunir plusieurs groupes de termes, de façon à former de nouveaux groupes pour lesquels le nombre de termes devient infini avec m. On peut également poser $a_n = e^{\beta i}(a'_n + ia''_n)$, β pouvant varier avec m. On est ainsi conduit au résultat suivant:

Théorème. Soit β un arc variable avec m, et $a'_{m+\nu}$ la partie réelle de $a_{m+\nu}e^{-\beta i}$ (ν restant compris entre $-\lambda m$ et $+\lambda m$). La suite de ces termes étant divisée en parties contenant chacune $h_1, h_2, \ldots, h_n$ termes consécutifs, et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ changements de signes de la suite totale, telles que $\frac{p_\nu}{h_\nu}$ reste plus petit que α_m, toutes les quantités $\frac{h}{m}$ tendant vers o; si, pour des valeurs de m telles que $\frac{1}{m}L|a'_m|$ tende vers o, les quantités α_m ont une limite inférieure α, pour $m = \infty$, il y aura un point singulier sur l'arc compris entre $-\alpha\pi$ et $+\alpha\pi$.

5. Si les termes a' de $\varphi_m(t)$ ont q changements de signe, $\frac{q}{m}$ tendant vers o, on pourra diviser ces termes en n groupes de h termes, $\frac{q}{h}$ et $\frac{h}{m}$ tendant vers o, par exemple en choisissant h de façon que $\frac{h}{\sqrt{qm}}$ reste compris entre deux nombres fixes. Alors α tend vers o, et l'on peut énoncer le résultat suivant:

Théorème. Si les parties réelles a'_n de $a_n e^{-\beta i}$ ont, entre $n = m \pm \lambda m$, q changements de signes, $\frac{q}{m}$ tendant vers o pour des valeurs telles que $\frac{1}{m}L|a'_m|$ tende vers o, le point $z = 1$ est singulier.

Soit $a_n = \rho_n e^{\omega_n i}$. La partie réelle de $a_n e^{-\beta i}$ a le signe de $\cos(\omega_n - \beta)$. Formons les différences $\omega_{n+1} - \omega_n$ comprises entre $-\pi$ et $+\pi$ et $\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n|$ où n reste compris entre $m - \lambda m$ et $m + \lambda m$. Si, pour toutes les valeurs de β comprises entre β_0 et $\beta_0 + \gamma$, $\rho_n \cos(\omega_n - \beta)$ a, dans $\varphi_m(t)$, au moins q changements de signe, $\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n|$ sera supérieur ou égal à $q\gamma$, et si $\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n| < \varepsilon$ il y aura au moins une valeur de β pour laquelle le nombre des changements de signe est plus petit que $\frac{\varepsilon}{\gamma}$. Donc, si $\frac{1}{m}\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n|$ tend vers o, on peut déterminer

β de façon que $\frac{q}{m}$ tende vers o, sans que $\omega_m - \beta$ tende vers o, de sorte que $\frac{1}{m} L|\cos(\omega_m - \beta)|$ tend vers o; et si $\frac{L\rho_m}{m}$ et $\frac{1}{m}\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n|$ tendent vers o, le point $z = 1$ est singulier.

Si on pose $z = te^{-\omega i}$, $\omega_{n+1} - \omega_n$ est remplacé par $\omega_{n+1} - \omega_n - \omega$, ce qui conduit au résultat suivant:

Théorème. Si, pour une suite illimitée de valeurs de m, telles que $\frac{1}{m} L|a_m|$ tende vers o, les différences $\omega_{n+1} - \omega_n$ des termes n compris entre $m - \lambda m$ et $m + \lambda m$ tendent vers ω, sauf pour un nombre q de ces termes, $\frac{q}{m}$ tendant vers o, le point $z = e^{-\omega i}$ est singulier.

Cela peut avoir lieu pour plusieurs points, et même pour une infinité. Soit par exemple la série:

$$\Sigma z^n \rho_n e^{in\varphi(n)}$$

où $n[\varphi(n+1) - \varphi(n)]$ tend vers o, lorsque n devient infini. Alors

$$|\varphi(n+h) - \varphi(n)| < \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{h} |\varphi(n+\nu) - \varphi(n+\nu-1)|(n+\nu-1)$$

tend vers o, si $\frac{h}{n}$ reste fini; et $\omega_{m+\nu+1} - \omega_{m+\nu} - \varphi(m)$ tend vers o, pourvu que $\left|\frac{\nu}{m}\right|$ reste fini.

A toute suite de valeurs de n telles que $\frac{1}{n} L\rho_n$ tende vers o, correspondent des arcs $\varphi(n) - 2k\pi$, dont les limites donnent des points singuliers. Et si ces limites forment une suite continue, on obtiendra des arcs du cercle de convergence qui seront des coupures. Considérons, par exemple, la série:

$$\Sigma z^n \rho_n e^{in(Ln)^\theta}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$n[\overline{L(n+1)}^\theta - \overline{Ln}^\theta] < n\left[\left(Ln + \frac{1}{n}\right)^\theta - (Ln)^\theta\right] < \frac{\theta}{(Ln)^{1-\theta}}.$$

Soit k un nombre entier qui augmente indéfiniment, pendant que ε tend vers o, mais aussi lentement que l'on voudra, (par exemple $\varepsilon = \frac{1}{Lk}$), si

n reste compris entre $e^{(\alpha+2k\pi)^{\frac{1}{\theta}}-\varepsilon k^{\frac{1}{\theta}-1}}$ et $e^{(\alpha+2k\pi)^{\frac{1}{\theta}}+\varepsilon k^{\frac{1}{\theta}-1}}$, $(Ln)^\theta - 2k\pi$ a pour limite α. Il en résulte que la circonférence de convergence est une coupure, pourvu que $\frac{1}{n} L\rho_n$ tende vers 0, au moins pour une suite de valeurs de n correspondant à chaque valeur de α, ce qui a lieu, par exemple, si $\frac{1}{n} L\rho_n$ tend vers 0 pour des valeurs n_ν telles que $L\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}(Ln_\nu)^{\theta-1}$ tende vers 0; et en particulier si $\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}$ reste fini.

Pour la série $\sum z^n \rho_n e^{ian\sin\varphi(n)}$ où $n[\varphi(n+1)-\varphi(n)]$ tend vers 0, $\omega_{n+1}-\omega_n$ a la même limite que $\alpha\sin\varphi(n)$, qui reste compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Ainsi la série $\sum z^n \rho_n e^{ian\sin(Ln)^\theta}$, où ρ_n remplit les conditions précédentes, a comme coupure l'arc compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$. Mais il résulte du théorème général, que, si les modules ρ_n sont choisis arbitrairement, tout le cercle de convergence est une coupure. Il existe cependant des cas assez étendus où nous pourrons démontrer que la coupure est limitée à l'arc $\pm\alpha$.

6. Si $\sqrt[n]{\frac{|f_n(t)|}{|\underline{n}}}$ a une limite supérieure plus petite que $\frac{1}{1-t}$, le point $z=1$ n'est pas singulier. Mais

$$\frac{|f^n(t)|}{|\underline{n}} < |\varphi_m(t)|\, t^p \frac{|\underline{(n+p)}}{|\underline{n}\,|\underline{p}} + 2\left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n.$$

Pour chaque valeur de m choisissons p de façon que, $\frac{m}{p}$ tendant toujours vers t, $m-p$ prenne toutes les valeurs entières. Cela a lieu, par exemple, si $mt \geqq p > mt-1$. Alors, si $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ a une limite supérieure plus petite que 1, on peut choisir $\theta' > 0$ puis m assez grand pour que $|\varphi_m(t)| < (1-\theta')^m$ et, pour toute valeur assez grande de n, on aura

$$\left|\frac{f^n(t)}{|\underline{n}}\right| < (1-\theta')^m\left(\frac{1+\varepsilon}{1-t}\right)^n + 2\left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n$$

il en résulte que $\sqrt[n]{\left|\frac{f^{\ }(t)}{|\underline{n}}\right|}$ a une limite supérieure plus petite que $\frac{1}{1-t}$; par suite:

Théorème. Si, t et ω restant fixe, on forme $\varphi_m(te^{\omega i})$ en choisissant p de façon que $\frac{p}{m}$ tende vers t, $m-p$ prenant toutes les valeurs entières, et si $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{\omega i})|}$ a une limite supérieure plus petite que 1, pour $m=\infty$, $z=e^{\omega i}$ n'est pas un point singulier de $f(z)$.

Pour appliquer ce théorème, nous allons étudier l'ordre de grandeur de $\varphi_m(te^{\omega i})$ dans des cas particuliers.

Soit

$$f(z)=(1-z)^{-h-1}\underline{|h}=\sum\frac{\underline{|(h+n)}}{\underline{|n}}z^n$$

on a

$$f^n(z)=\underline{|(n+h)}\,(1-z)^{-h-n-1}$$

et

$$\varphi_m(z)=\frac{\underline{|p}}{\underline{|m}}z^{-p}f^n(z)=\frac{\underline{|p}\,\underline{|(n+h)}}{\underline{|m}}z^{-p}(1-z)^{-h-n-1}$$

où

$$a_{m+\nu}=(m+\nu+1)(m+\nu+2)\dots(m+\nu+h).$$

Représentons par $\varphi_{m,h}(z)$ ce que devient φ_m lorsque $a_{m+\nu}$ est remplacé par ν^h, ν variant de $-p$ à $+\infty$; c'est à dire:

$$\varphi_{m,h}(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^h z^\nu\frac{\underline{|(m+\nu)}\,\underline{|p}}{\underline{|(p+\nu)}\,\underline{|m}}+\sum_{\nu=1}^{p}(-\nu)^h z^{-\nu}\frac{\underline{|(m-\nu)}\,\underline{|p}}{\underline{|(p-\nu)}\,\underline{|m}},$$

on a

$$\frac{\underline{|p}\,\underline{|n}}{\underline{|m}}z^{-p}(1-z)^{-n-1}=\varphi_{m,0}$$

$$\frac{\underline{|p}\,\underline{|(n+1)}}{\underline{|m}}z^{-p}(1-z)^{-n-2}=\varphi_{m,1}+(m+1)\varphi_{m,0}$$

et en général

$$\frac{\underline{|p}\,\underline{|(n+h)}}{\underline{|m}}z^{-p}(1-z)^{-n-h-1}=\varphi_{m,h}+\varphi_{m,h-1}\Sigma_{h-1}+\dots+\varphi_{m,0}\Sigma_0$$

où $\Sigma_0\Sigma_1\dots\Sigma_{h-1}$ représentent les coefficients de $\nu^0,\nu,\nu^2,\dots,\nu^{h-1}$ dans le développement de $(\nu + m + 1)(\nu + m + 2)\dots(\nu + m + h)$. Et l'on en déduit

$$\varphi_{m,h} = \frac{|\underline{p}|\underline{n}}{|\underline{m}} z^{-p}(1 - z)^{-n-h-1}\psi_h(z)$$

où ψ_h est un polynôme en z de degré h. Posons $x = \frac{z}{1-z}$, $(1-z)^{-h}\psi_h(z)$ est un polynôme de degré h en x, et en supposant $|z|$ suffisamment petit, on aura

$$(1-z)^{-h}\psi_h(z) = \frac{(1-z)^{n+1}}{|\underline{n}} \sum_{\nu=-p}^{+\infty} \nu^h z^{p+\nu} \frac{|\underline{(m+\nu)}}{|\underline{(p+\nu)}} = \sum_{\nu=-p}^{+\infty} \nu^h \frac{|\underline{(m+\nu)}}{|\underline{(p+\nu)}|\underline{n}} x^{\nu+p}(1+x)^{-\nu-p-n-1}$$

$$= (-p)^h - \frac{n+1}{1} x[(-p)^h - (1-p)^h]$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2} x^2[(-p)^h - 2(1-p)^h + (2-p)^h] - \dots$$

$$+ (-x)^h \frac{(n+1)\dots(n+h)}{1\,.\,2\dots h}\left[(-p)^h - \frac{h}{1}(1-p)^h + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2}(2-p)^h - \dots\right]$$

et

$$\psi_h(z) = (z-1)^h p^h + \frac{n+1}{1}(z-1)^{h-1} z[p^h - (p-1)^h]$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}(z-1)^{h-2} z^2[p^h - 2(p-1)^h + (p-2)^h] + \dots$$

$$+ \frac{(n+1)\dots(n+h)}{1\,.\,2\dots h} z^h\left[p^h - \frac{h}{1}(p-1)^h + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2}(p-2)^h - \dots + (h-p)^h\right].$$

Le dernier coefficient

$$p^h - \frac{h}{1}(p-1)^h + \dots + (-p+h)^h = p\left[p^{h-1} - \frac{h-1}{1}(p-1)^{h-1} + \dots\right]$$

$$+ (h-p)\left[(p-1)^{h-1} - \frac{h-1}{1}(p-2)^{h-1} + \dots\right] = |\underline{h}$$

formule qui se démontre en donnant à h des valeurs entières successives. Et

$$p^h - \frac{\nu}{1}(p-1)^h + \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}(p-2)^h - \dots + (-1)^\nu(p-\nu)^h$$

$$= p\left[p^{h-1} - \frac{\nu}{1}(p-1)^{h-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}(p-2)^{h-1} - \dots\right]$$

$$+ \nu\left[(p-1)^{h-1} - \frac{\nu-1}{1}(p-2)^{h-1} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}(p-3)^{h-1} - \dots\right]$$

en donnant à h des valeurs croissantes, on en déduit que cette expression est nulle si $\nu > h$, et a une valeur positive plus petite que

$$h(h-1)\ldots(h-\nu+1)p^{h-\nu}$$

si $0 < \nu < h$. Par suite, pour toutes les valeurs $z = te^{\omega i}$, si $0 < t < 1$, on a:

$$|\psi_h(z)| < \overline{(1+t)p}^h + \frac{n+1}{1} ht\overline{(1+t)p}^{h-1}$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} h(h-1)t^2\overline{(1+t)p}^{h-2} + \ldots + \frac{|\underline{(n+h)}}{|\underline{n}} t^h < [(1+t)p + (n+h)t]^h$$

et

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < \frac{|\underline{p}\,|\underline{n}}{|\underline{m}} t^{-p}|1 - te^{\omega i}|^{-1-n-h}[(1+t)p + (n+h)t]^h$$

$\sqrt[m]{\frac{|\underline{p}\,|\underline{n}}{|\underline{m}} t^{-p}(1-t)^{-n-1}}$ tend vers 1, $\left|\frac{1-t}{1-te^{\omega i}}\right|^{\frac{n}{m}}$ a pour limite

$$\left|\frac{(1-t)^2}{(1-t)^2 + 4t\sin^2\frac{\omega}{2}}\right|^{\frac{1-t}{2}}.$$

Soit α un arc fixe aussi petit que l'on voudra, supposons que ω ne prenne que des valeurs comprises entre α et $2\pi - \alpha$, et soit θ une quantité positive fixe plus petite que $1 - \left(\frac{(1-t)^2}{1+t^2-2t\cos\alpha}\right)^{\frac{1-t}{2}}$. Pourvu que m soit assez grand, on aura

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < (1-\theta)^m\left(\frac{(1+t)p + (n+h)t}{1-t}\right)^h$$

et si l'on suppose $mt - 1 < p \leqq mt$

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < (1-\theta)^m\left(t\frac{2m+h}{1-t}\right)^h.$$

Si, dans $\varphi_{m,h}$ on ne conserve que les termes où $|\nu| < \lambda m$, soit μ le plus petit nombre entier supérieur à λm; on supprime des termes dont la somme a un module plus petit que

$$\sum_{\nu=\mu}^{p} \nu^h t^{-\nu} \frac{|\underline{(m-\nu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p-\nu)}\,|\underline{m}} + \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \nu^h t^{\nu} \frac{|\underline{(m+\nu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\nu)}\,|\underline{m}}.$$

Si $\nu > \frac{h + mt}{1 - t}$, le rapport de deux termes consécutifs est

$$\left(\frac{\nu}{\nu - 1}\right)^h \frac{m + \nu}{p + \nu} t < \frac{\nu}{\nu - h} t \frac{m + \nu}{p + \nu} < \frac{h + mt}{h + mt + p(1 - t)}.$$

Il en résulte que la somme des termes supprimés est plus petite que

$$p^h t^{-\mu} \frac{|\underline{(m-\mu)}\, |\underline{p}}{|\underline{(p-\mu)}\, |\underline{m}} p + t^\mu \frac{|\underline{(m+\mu)}\, |\underline{p}}{|\underline{(p+\mu)}\, |\underline{m}} \left(\frac{h + mt}{1 - t}\right)^h \left[\frac{h + mt}{1 - t} + \frac{h + mt + p(1 - t)}{p(1 - t)}\right]$$

$$< ep^{h+1} \sqrt{\frac{m - \mu}{m} \frac{p}{p - \mu}} \left(\frac{p}{p - \mu}\right)^p \left(\frac{m - \mu}{m}\right)^m \left(\frac{p - \mu}{(m - \mu)t}\right)^\mu$$

$$+ e \sqrt{\frac{m + \mu}{m} \frac{p}{p + \mu}} \left(\frac{m + \mu}{p + \mu} t\right)^\mu \left(\frac{m + \mu}{m}\right)^m \left(\frac{p}{p + \mu}\right)^p \left(\frac{h + mt}{1 - t}\right)^{h+1} \left(1 + \frac{2 - t}{p}\right).$$

Mais

$$\frac{\mu}{m} L\left(\frac{m + \mu}{p + \mu} t\right) + L\frac{m + \mu}{m} + \frac{p}{m} L\frac{p}{p + \mu}$$

a pour limite $(1 + \lambda)L(1 + \lambda) - (t + \lambda)L\left(1 + \frac{\lambda}{t}\right) < 0$ et il existe une quantité fixe θ telle que

$$\left(\frac{m + \mu}{p + \mu} t\right)^\mu \left(\frac{m + \mu}{m}\right)^m \left(\frac{p}{p + \mu}\right)^p < (1 - \theta)^m$$

il en est de même pour $\left(\frac{m - \mu}{m}\right)^m \left(\frac{p}{p - \mu}\right)^p \left(\frac{p - \mu}{(m - \mu)t}\right)^\mu$ et l'on peut trouver une quantité fixe θ telle que pour toute valeur assez grande de m, l'ensemble des termes que nous supprimons ait une somme plus petite que $(1 - \theta)^m\left[(mt)^h + \left(\frac{h + mt}{1 - t}\right)^{h+1}\right]$, θ étant très petit en même temps que λ; si dans $\varphi_{m,h}$ on suppose $|\nu| < \lambda m$, λ, t et ω restant fixes, $\omega \gtrless 0$, on peut trouver une quantité θ telle que, pour toute valeur de m dépassant un nombre déterminé

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < (1 - \theta)^m\left[\left(t\frac{2m + h}{1 - t}\right)^h + \left(\frac{mt + h}{1 - t}\right)^{h+1}\right].$$

Si l'on suppose $h < \lambda m$, on peut écrire de même

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < (1 - \theta)^m\left(t\frac{2 + \lambda}{1 - t} m\right)^h.$$

7. Supposons maintenant que la série $f(z)$ soit telle qu'à chaque valeur de m corresponde un arc α, $a_{m+\nu}e^{\nu a i}$ étant une fonction continue de ν, développable en série convergente, pourvu que $|\lambda| < Rm$. C'est à dire que tous les coefficients de φ_m pourront se mettre sous la forme

$$a_{m+\nu} = e^{-\nu a i}\sum_{h=0}^{\infty} A_h\left(\frac{\nu}{m}\right)^h = e^{-\nu a i}F\left(\frac{\nu}{m}\right)$$

la série F étant supposée convergente si $\left|\frac{\nu}{m}\right| \leqq R$, cette quantité R restant fixe. Soit M le maximum du module de $F(Re^{\omega i})$, on a

$$2\pi i A_h = \int_0^{2\pi} \frac{F(Re^{\omega i})}{R^h e^{h\omega i}} i d\omega, \qquad |A_h| < \frac{M}{R^h}.$$

Soit $z = te^{(\alpha+\omega)i}$, ω étant arbitraire, mais sans être nul, de façon que $|\omega|$ reste toujours supérieur à un arc fixe. On a alors

$$\varphi_m(te^{(\alpha+\omega)i}) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A_h}{m^h}\varphi_{m,h}(te^{\omega i})$$

Si l'on sépare les termes pour lesquels $h > \lambda m$, en supposant $\lambda < R$, on a:

$$\left|\sum_{h>\lambda m} A_h\left(\frac{\nu}{m}\right)^h\right| < 2\pi M\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\lambda m}\frac{R}{R-\lambda}$$

et

$$|\varphi_m(te^{(\alpha+\omega)i})| < (1-\theta)^m M \sum_{h<\lambda m}\left(\frac{t}{R}\,\frac{2+\lambda}{1-t}\right)^h$$
$$+ M\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\lambda m}\frac{R}{R-\lambda}\,\frac{\underline{|p}\,|n}{\underline{|m}}\,\frac{t^{-p}}{(1-t)^{n+1}}.$$

Si t et λ sont assez petits, et m assez grand, cette expression peut se mettre sous la forme $(1-\theta)^m M$, où θ reste supérieure à une quantité fixe, quand m devient infini. De sorte que, si $\frac{LM}{m}$ tend vers 0, $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{(\alpha+\omega)i})|}$ aura une limite supérieure plus petite que 1. Et il n'y a pas d'autres points singuliers que ceux provenant des limites des arcs α. Si un arc de la circonférence de convergence est tel que, pourvu que m dépasse un nombre déterminé, α ne se trouve jamais sur cet arc, il ne contiendra aucun point singulier.

Considérons la série

$$\Sigma b_n e^{in\varphi(n)} z^n$$

où $\varphi(n)$ est réel, $\varphi(z)$ étant une fonction analytique de la variable z, qui n'a aucun point singulier à distance finie, pour les valeurs $z = \rho e^{\omega i}$ où $|\omega|$ reste plus petit qu'une quantité donnée, et où ρ reste plus grand qu'un module déterminé. Supposons en outre que $\varphi(n + n\rho e^{\omega i}) - \varphi(n)$ tende vers o, lorsque n augmente indéfiniment quelque soit ω, pourvu que $\rho < \lambda$. Et soit $b_n = \psi(n)$, $\psi(z)$ étant une fonction analytique, qui n'a aucun point singulier à distance finie, pour les valeurs $z = \rho e^{\omega i}$ où $|\omega|$ et $\frac{1}{\rho}$ restent plus petits que des quantités données, $\frac{1}{R} L|\psi(Re^{\omega i})|$ tendant vers o, lorsque R devient infini, pour toutes les valeurs de ω telles que $|\omega|$ ne dépasse pas un arc donné. Alors

$$a_{m+\nu} e^{-i\nu\varphi(m)} = e^{im\varphi(m)}.\psi(m+\nu).e^{i(m+\nu)[\varphi(m+\nu)-\varphi(m)]}$$

pourra se développer suivant les puissances de ν, si $\left|\frac{\nu}{m}\right| < \lambda$, pourvu que λ soit choisi assez petit. Et, si $\left|\frac{\nu}{m}\right| < \lambda$

$$\frac{LM}{m} < \frac{L|\psi(m+\nu)|}{m} + \frac{|m+\nu|}{m}|\varphi(m+\nu) - \varphi(m)|$$

qui tend vers o.

Il ne peut donc y avoir, sur la circonférence de convergence, aucun point singulier en dehors de ceux donnés par les limites de $e^{-i\varphi(n)}$.

Si $\frac{1}{n} L|b_n|$ tend vers o, pour toutes les valeurs infinies de n, il résulte du théorème général, démontré au n° 3, que l'on obtiendra les points singuliers de la circonférence de convergence en cherchant les limites de $e^{-i\varphi(n)}$, pour $n = \infty$. Si pour une suite de valeurs de n, $\varphi(n) - 2k\pi$ tend vers α, $e^{-\alpha i}$ est un point singulier de la série.

Par exemple la série

$$\Sigma \psi(n) z^n e^{ian \sin (Ln)^\theta}$$

où $0 < \alpha < \pi$, $0 < \theta < 1$, $\psi(n)$ étant une fraction rationnelle, où même une fonction algébrique continue de n, admet comme coupure l'arc compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$, et n'a pas d'autres points singuliers sur la circonférence de convergence.

8. Si une série contient des termes tels que $\frac{L|a_n|}{n}$ ait une limite supérieure plus petite que 1, on peut les supprimer sans changer les points singuliers situés sur la circonférence de rayon 1. Supposons la suite des indices $m + \nu$ de φ_m (ν restant compris entre $-\lambda m$ et $+\lambda m$) divisée en parties égales successivement à $h_1, h_2, \ldots, h_n$, telles que parmi h_ν termes consécutifs d'un groupe, il n'en reste que p_ν, les $h_\nu - p_\nu$ autres ayant été supprimés; et soit α_m le plus grand des rapports $\frac{p_1}{h_1}, \frac{p_2}{h_2}, \ldots, \frac{p_n}{h_n}$, toutes les quantités $\frac{h}{m}$ tendant vers 0. Soit une suite de valeurs de m telles que $\frac{L|a_m|}{m}$ tende vers 0, et α la limite inférieure de α_m pour cette suite. En appliquant à la série $\Sigma a_n z^n e^{n\omega i}$ le théorème du n° 4, on voit qu'elle a un point singulier sur l'arc $\pm \alpha\pi$, et la série $\Sigma a_n z^n$ a un point singulier sur l'arc compris entre $\omega - \alpha\pi$ et $\omega + \alpha\pi$, c'est à dire sur tout arc de la circonférence de convergence égal à $2\alpha\pi$.

Si entre $a_{m\pm\lambda m}$ il ne reste que q termes, $\frac{q}{m}$ tendant vers 0 en même temps que $\frac{L|a_m|}{m}$, le théorème du n° 5 montre de même que tous les points de la circonférence de convergence sont singuliers.

Si $\frac{q}{m}$ a pour limite inférieure 0, considérons les termes $a_{m+\nu}$ pour des valeurs de m telles que $\frac{q}{m}$ tende vers 0, ν restant compris entre $-\lambda' m$ et $+\lambda' m$ ($\lambda' < \lambda$). Si $\frac{L|a_{m+\nu}|}{m}$ a, pour cette suite de termes, 0 comme limite supérieure, pour $m = \infty$, le cercle de convergence est une coupure, car on peut remplacer λ par $\lambda - \lambda'$, et il existera des termes tels que $\frac{L|a_{m+\nu}|}{m+\nu}$ et $\frac{q}{m}$ tendent vers 0. Si au contraire $\frac{L|a_{m+\nu}|}{m}$ a, pour tous ces termes, une limite supérieure plus petite que 0, on peut les supprimer sans changer les points singuliers de la circonférence de convergence.

Mais cela n'indique rien sur le nombre des points singuliers, ainsi que le montre l'exemple suivant:

$$f(z) = \sum z^n \psi(n) . e^{n[-1+\cos(Ln)^\theta]}$$

$0 < \theta < 1$, $\psi(z)$ remplissant les mêmes conditions que dans les exemples précédents, et pouvant être une fonction rationnelle ou algébrique. $a_{m+\nu}$ est alors développable suivant les puissances de ν pourvu que $\left|\frac{\nu}{m}\right| < \lambda$, et $\frac{LM}{m}$ a pour limite supérieure 0, de sorte que cette fonction n'a qu'un point singulier, $z = 1$, sur la circonférence de convergence. Mais si n reste compris entre $e^{(2k\pi+\alpha)^{\frac{1}{\theta}}}$ et $e^{(2k\pi+2\pi-\alpha)^{\frac{1}{\theta}}}$ où le nombre entier k augmente indéfiniment, $\frac{L|a_n|}{n}$ a pour limite supérieure, pour $n = \infty$, $-1 + \cos\alpha$, et l'on peut supprimer tous ces termes sans que la série ait, sur la circonférence de convergence, d'autre point singulier que $z = 1$. Il ne reste alors que les termes pour lesquels n est compris entre $e^{(2k\pi-\alpha)^{\frac{1}{\theta}}}$ et $e^{(2k\pi+\alpha)^{\frac{1}{\theta}}}$. Mais

$$e^{(2k\pi+2\pi-\alpha)^{\frac{1}{\theta}} - (2k\pi+\alpha)^{\frac{1}{\theta}}} > e^{2\frac{\pi-\alpha}{\theta}(2k\pi+\alpha)^{\frac{1}{\theta}-1}}$$

augmente indéfiniment avec k. Parmi les groupes de termes consécutifs qui restent on peut donc en supprimer un nombre quelconque, ce qui supprime les fonctions φ_m correspondantes et ne change pas les autres. On a ainsi une série, n'ayant sur la circonférence de convergence qu'un seul point singulier, et dans laquelle il peut manquer un nombre quelconque de termes consécutifs, pour $m = \infty$.

Montpellier le 13 mai 1897.