ÜBER EIN THEOREM DES HERRN TISSERAND
AUS DER STÖRUNGSTHEORIE

VON

AND. LINDSTEDT
in STOCKHOLM.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung (Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, tome 18) hat Herr TISSERAND, beim Beweise des von mir gefundenen Satzes über die Darstellbarkeit der gegenseitigen Entfernungen im Probleme der drei Körper durch periodische Reihen mit vier Argumenten, einen zweiten Satz über die Form der Reihen für die rechtwinkligen Coordinaten hergeleitet. In Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen z-Axe senkrecht zur invariablen Ebene steht und dessen xy-Ebene eine gleichförmige Rotation ausführt, lassen sich nähmlich auch die rechtwinkligen Coordinaten der drei Massenpunkte, in der relativen Bewegung um einen derselben, mit Hülfe der vier Argumente darstellen. Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes für die Astronomie erlaube ich mir hier zu zeigen, wie man denselben mit Hülfe ähnlicher Betrachtungen, durch welche ich den zuerst genannten Satz bewiesen habe, ableiten kann.

Nachdem die gegenseitigen Entfernungen ermittelt worden sind, kann man die rechtwinkligen Coordinaten durch Integration des nach Einsetzung der Ausdrücke für r, r' und Δ linear gewordenen Systems

$$(1)\qquad \left|\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + x\left(\frac{M+m}{r^3} + \frac{m'}{\Delta^3}\right) = x'\left(\frac{m'}{\Delta^3} - \frac{m'}{r'^3}\right)\\ &\frac{d^2x'}{dt^2} + x'\left(\frac{M+m'}{r'^3} + \frac{m}{\Delta^3}\right) = x\left(\frac{m}{\Delta^3} - \frac{m}{r^3}\right)\end{aligned}\right.$$

u. s. w. für die übrigen Coordinaten, ermitteln. Die Funktionen, die in den Klammern stehen sind somit trigonometrische Reihen nach vier Argumenten.

Acta mathematica. 9. Imprimé le 6 Avril 1887.

Wendet man nun die Methode an, die ich in der Schrift *Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie* (Mémoires de l'Académie de S:t Pétersbourg, tome 31, N° 4) benutzt habe, so ergeben sich im Allgemeinen für ein lineares System wie (1) Integrale von der Form

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \xi\Sigma\mu_N\cos(mt+\pi+N) + \xi'\Sigma\nu_N\cos(m't+\pi'+N) \\ x' = \xi\Sigma\mu'_N\cos(mt+\pi+N) + \xi'\Sigma\nu'_N\cos(m't+\pi'+N) \end{cases}$$

wo N eine lineare Verbindung der vier Argumente bedeutet, und mt sowie $m't$ zwei neue Argumente sind. Die entsprechenden Formeln für y, y' und für z, z' würde man erhalten, wenn man die Integrationskonstanten ξ, ξ', π, π' durch η, η', ρ, ρ' und ζ, ζ', σ, σ' resp. ersetzt.

Diese Integrale müssen indessen der Bedingung genügen, dass wenn man mit ihrer Hülfe die Funktionen

$$(3)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2; \qquad x'^2+y'^2+z'^2=r'^2; \\ \Delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \end{cases}$$

berechnet, die neuen Argumente mt und $m't$ aus den Resultaten herausfallen. Hierbei werden noch die überzähligen Integrationskonstanten mit bestimmt.

Berechnet man nun mit dem so gewonnenen Ausdrücken für x, y, z die Funktion $x^2+y^2+z^2$, so findet man sofort, dass die Anzahl der Argumente, wenn m und m' von einander wesentlich, d. h. nicht bloss um lineare Funktionen der gegebenen vier Argumente, verschieden sind, nur dann 4 wird, wenn

$$\xi=\xi'=\eta=\eta'=\zeta=\zeta'=0$$

angenommen werden, dass also, mit anderen Worten, die durch Integration von (1) zu ermittelnden Reihen für x, y, ..., ausser den 4 gegebenen Argumenten, nur noch *ein* Argument enthalten können. Die in einem solchen Falle gewöhnlich auftretenden Glieder, welche t als Faktor haben, dürfen, wegen Erfüllung der Gleichungen (3), hier ebenfalls nicht vorkommen. Es bleibt somit für die Form der Integrale nur die folgende übrig:

$$x = \xi \Sigma \mu_N \cos(ht + \pi + N) + \xi' \Sigma \nu_N \cos(\pi' + N)$$

$$x' = \xi \Sigma \mu'_N \cos(ht + \pi + N) + \xi' \Sigma \nu'_N \cos(\pi' + N)$$

wo ht das neue, von den übrigen wesentlich verschiedene, Argument bezeichnet.

Für x, y, z erhalten wir somit, wenn wir die obigen Werthe etwas umformen, Ausdrücke von der Form

$$x = \cos ht . (aP - \alpha Q) - \sin ht . (aQ + \alpha P) + a'R + \alpha' S$$

$$y = \cos ht . (bP - \beta Q) - \sin ht . (bQ + \beta P) + b'R + \beta' S$$

$$z = \cos ht . (cP - \gamma Q) - \sin ht . (cQ + \gamma P) + c'R + \gamma' S$$

wo P, Q, R und S bloss von den vier ursprünglichen Argumenten abhängen, und a, b, ... Integrationskonstanten bedeuten.

Setzt man diese Werthe in $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ein, so findet man, als Bedingungen für das Verschwinden von ht, die Gleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = aa' + bb' + cc' = a'\alpha + \ldots = \alpha\alpha' + \ldots = a\alpha' + \ldots = 0.$$

Wir können somit, ohne die Allgemeinheit zu schaden, $\alpha' = a'$, $\beta' = b'$, $\gamma' = c'$ sowie (a, b, c) und (α, β, γ) gleich den Richtungscosinussen zweier zu einander rechtwinkligen Geraden setzen. Alsdann werden (a', b', c') die Richtungscosinusse für eine zu beiden senkrechte Gerade.

Werden diese drei Geraden als Axen eines Coordinatensystems genommen, so werden in diesem die Coordinaten der beiden Massenpunkte m und m' die Form annehmen

$$\begin{aligned}
\xi &= \quad P \cos ht - Q \sin ht \\
\eta &= - Q \cos ht - P \sin ht \\
\zeta &= \quad R \\
\xi' &= \quad P' \cos ht - Q' \sin ht \\
\eta' &= - Q' \cos ht - P' \sin ht \\
\zeta' &= \quad R'
\end{aligned}$$

wo die gestrichenen Buchstaben P', Q', R' ebenfalls Funktionen der vier Argumente sind.

In diesen Gleichungen ist das in Rede stehende Theorem des Herrn Tisserand enthalten. Dass übrigens die obigen Entwickelungen ohne Berücksichtigung der Konvergenzfrage gemacht worden sind und somit vorläufig bloss formale Bedeutung besitzen, braucht wohl kaum angedeutet zu werden.