

SUR LES RÉSIDUS DES INTÉGRALES DOUBLES

PAR

H. POINCARÉ

à PARIS.

C'est à CAUCHY que revient la gloire d'avoir fondé la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires; cette théorie a pour ainsi dire doublé la puissance de l'analyse mathématique et a été le point de départ de tous les travaux qui ont suivi, dans tous les pays où on cultive les sciences exactes, et en particulier en Allemagne et en France.

Il semblait qu'il n'y avait plus qu'un pas à faire pour étendre cette théorie aux intégrales doubles et qu'on pouvait se promettre de cette extension d'aussi belles conquêtes que de la considération des intégrales simples. Il y avait là de quoi tenter l'ambition des géomètres et cependant, au bout de quarante ans, nous sommes à peine plus avancés qu'au premier jour.

La plupart des tentatives qui ont été faites n'ont été que des échecs ou des demi-succès.

On croit pourtant que JACOBI possédait à ce sujet plusieurs résultats importants; mais ces résultats n'ont pas été publiés et ont été perdus pour la science.

M. MAXIMILIEN MARIE a entrepris de résoudre la question et écrit, peu de temps après la découverte de CAUCHY, plusieurs mémoires qui ont été publiés longtemps après dans le 44^{me} Cahier du Journal de l'école polytechnique. Ses efforts néanmoins n'ont pas été heureux. Je ne parlerai pas ici de l'insuffisance de certains raisonnements fondés sur des considérations infinitésimales. Bien que toutes les démonstrations soient

à refaire, la formule à laquelle l'auteur parvient est exacte si on l'interprète convenablement, mais elle exigerait pour pouvoir être appliquée sans crainte d'erreur une discussion délicate que M. MARIE n'a pas faite.

Pour faire comprendre la nécessité de cette discussion, je ne citerai qu'un seul exemple. L'auteur donne (l. cit. p. 58) la formule suivante:

$$\frac{a^2}{2} \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{3} \pi a^3 \sqrt{-1}$$

Cette formule est manifestement fautive; car on a dans le premier membre a^2 et dans le second le facteur a^3 . En réalité l'intégrale du premier membre est nulle.

Comment la formule de M. MARIE se trouve-t-elle en défaut? Il est aisé de le voir; dans cette formule entre le volume limité par une surface qui, dans l'espace, a pour équation:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

C'est une sphère, et l'auteur écrit que ce volume est $\frac{4}{3} \pi a^3$. Mais pour appliquer correctement la formule, il aurait fallu regarder cette surface non comme une sphère, mais comme un tore dégénéré dont la section méridienne aurait son centre sur l'axe de révolution. Le volume aurait alors été nul, et on aurait trouvé:

$$\frac{a^2}{2} \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

On voit quels pièges aurait à redouter l'analyste inexpérimenté qui voudrait faire usage de la formule de M. MARIE.

Les premières recherches de M. PICARD présentent beaucoup plus d'intérêt, comme tout ce qui sort de la plume de cet auteur. Mais elles ne se rapportent qu'indirectement à la question.

Dans deux notes insérées aux Comptes Rendus le 29 Janvier 1883 et le 1^{er} Février 1886, M. PICARD étudie les intégrales définies comme il suit.

Soit $F(x, y)$ une fonction non uniforme de x et de y ; introduisons deux variables auxiliaires u et v , en posant:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Je supposerai que les fonctions φ et ψ sont uniformes et de plus que

$$F(x, y) = \Phi(u, v)$$

est une fonction uniforme de u et de v .

Cela posé, soient u_0, v_0 et u_1, v_1 deux systèmes de valeurs de u et de v . Imaginons que ces deux systèmes de valeurs correspondent à un même système de valeurs de x et de y .

L'intégrale envisagée par M. PICARD est alors:

$$\int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} dv \Phi(u, v) \left(\frac{d\varphi d\psi}{du dv} - \frac{d\varphi d\psi}{dv du} \right).$$

M. PICARD a donné à ces intégrales le nom de périodes; je ne saurais l'en blâmer puisque cette dénomination lui a permis d'exprimer dans un langage plus concis les intéressants résultats auxquels il est parvenu. Mais je crois qu'il serait fâcheux qu'elle s'introduisit définitivement dans la science et qu'elle serait propre à engendrer de nombreuses confusions.

Et cela pour deux raisons:

D'abord ces intégrales ne sont pas des constantes, comme le fait fort bien observer M. PICARD.

En second lieu, il y a une infinité de systèmes de variables auxiliaires u et v qui satisfont aux conditions énoncées. Chacun de ces systèmes donne pour l'intégrale une valeur différente. Il en résulterait que, si on voulait donner à cette intégrale le nom de période, cette période ne dépendrait pas uniquement de la fonction $F(x, y)$ à laquelle elle appartient, mais bien de ces variables soi-disant auxiliaires qui joueraient ainsi un rôle prépondérant.

M. STIELTJES a adressé à M. HERMITE un travail fort remarquable où il cherchait à généraliser diverses formules de CAUCHY et de LAGRANGE. Malheureusement quelques points restaient obscurs et l'auteur ne put les éclaircir de façon à se mettre à l'abri de toute objection. C'est ce qui le détermina à ne pas publier son mémoire, mais je tiens à lui rendre ici justice. Je chercherai plus loin à expliquer quels sont les points qui avaient arrêté M. STIELTJES et à montrer comment ses démonstrations peuvent être rendues parfaitement rigoureuses.

Le 25 Janvier 1886, j'eus l'honneur de communiquer à l'Académie des Sciences une note où j'étudiais à un point de vue nouveau les périodes des intégrales doubles, et en particulier celles qui sont analogues aux périodes polaires des intégrales simples. Ce sont les résultats de cette note que je veux développer dans le présent travail.

Peu de temps après, M. PICARD (Comptes Rendus, 15 et 26 Février 1886) se plaçant au même point de vue que moi a obtenu un grand nombre de résultats remarquables. Le savant géomètre emploie dans ces deux notes le mot de période avec la signification que nous lui donnerons dans la suite. Les périodes qu'il étudie n'ont donc aucun rapport avec les intégrales qu'il avait primitivement désignées sous ce nom. Je crois devoir insister sur ce point afin de rendre toute confusion impossible.

§ 1. *Modes de représentation.*

Les difficultés contre lesquelles les géomètres se sont heurtés si souvent dans la théorie qui nous occupe, n'ont rien d'essentiel et ne sont pour ainsi dire qu'une question de langage.

Dans l'étude des intégrales simples, on emploie un mode de représentation géométrique très commode et dont il semble qu'on pourrait difficilement se passer. On ne peut le transporter sans changement dans la théorie des intégrales doubles, pour une raison qu'il est aisé d'apercevoir.

Soient ξ et η deux variables complexes; si nous posons

$$\xi = x + iy, \quad \eta = z + it$$

en séparant les parties réelle et imaginaire, nous aurons quatre variables x , y , z et t . Nous ne pouvons les regarder comme les coordonnées d'un point dans l'espace, à moins de nous résigner à admettre un espace à quatre dimensions.

On se trouve donc en présence du dilemme suivant: il faut, ou renoncer à toute représentation, ou employer l'hypergéométrie; mais, dans ce dernier cas, on est exposé à rebuter la plupart des lecteurs, et de plus on ne possède que l'avantage d'un langage commode, mais incapable de parler aux sens.

Comme cette langue hypergéométrique répugne encore à beaucoup de bons esprits, je n'en ferai qu'un usage peu fréquent; je crois néanmoins nécessaire de préciser ici le sens des termes que je lui emprunterai.

Un point est un système de valeurs des quatre variables x, y, z et t .

L'ensemble des points qui satisfont à une seule relation entre x, y, z et t est une «multiplicité à trois dimensions» que l'on appelle *hypersurface*.

L'ensemble des points qui satisfont à deux relations simultanées est une «multiplicité à deux dimensions» que l'on appellera *surface*.

L'ensemble des points qui satisfont à trois relations simultanées est une «multiplicité à une dimension» à laquelle on conservera le nom de *ligne*.

Deux surfaces quelconques ont au point de vue analytique un certain nombre de points communs; mais il peut arriver que tous ces points deviennent imaginaires; comme nous ne considérons que des points réels, nous dirons alors que ces deux surfaces n'ont aucun point commun.

Une intégrale double doit être étendue à tous les points d'une surface. Nous aurons donc une *surface d'intégration* de même qu'on a, dans la théorie des intégrales simples, un chemin d'intégration.

De plus l'ensemble des points singuliers formera une surface.

Supposons en effet que la fonction sous le signe \iint soit le quotient de deux polynômes entiers $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$. Pour que cette fonction devienne infinie, il faut que

$$(1) \quad Q(\xi, \eta) = 0.$$

Mais on a en séparant les parties réelle et imaginaire

$$Q(\xi, \eta) = Q_1(x, y, z, t) + iQ_2(x, y, z, t)$$

de sorte que la relation (1) se décompose en deux:

$$Q_1(x, y, z, t) = 0$$

$$Q_2(x, y, z, t) = 0.$$

Elle représente donc une surface.

Il faudra alors que la surface d'intégration et les surfaces singulières n'aient aucun point commun.

Si la fonction sous le signe \iint est algébrique, les surfaces singulières seront algébriques. Au contraire la surface d'intégration étant purement arbitraire ne sera pas forcément algébrique; elle pourra être transcendante ou se composer de portions appartenant à diverses surfaces algébriques.

Je vais maintenant exposer les artifices à l'aide desquels je compte m'affranchir de la nécessité de considérations hypergéométriques.

Soient λ, μ, ν trois quantités que je regarderai comme les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et considérons une surface algébrique ou portion de surface algébrique S sur laquelle se trouve le point λ, μ, ν . Ecrivons:

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont des fonctions rationnelles de λ, μ, ν dont le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur réelle de ces variables. Il est clair que quand le point λ, μ, ν décrira dans l'espace ordinaire la surface ou portion de surface S , le point x, y, z, t décrira dans l'hyperespace une certaine surface ou portion de surface S' ; de telle sorte que la surface S' est définie par la surface S et par les quatre *fonctions fondamentales* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 .

Si la surface S est fermée, nous dirons aussi que la surface S' est fermée.

La notion des surfaces d'intégration fermées qui va jouer un si grand rôle dans ce qui va suivre se trouve ainsi nettement définie.

Le genre de la surface S (au point de vue de la géométrie de situation) sera aussi le même que le genre de la surface S' , à moins que le point x, y, z, t ne décrive deux ou plusieurs fois la surface S' , ce que nous ne supposons pas.

Lorsque l'on donnera à λ, μ, ν toutes les valeurs réelles possibles, le point λ, μ, ν décrira l'espace tout entier, et le point x, y, z, t décrira dans l'hyperespace une certaine hypersurface unicursale.

Tant donc que le point x, y, z, t restera sur cette hypersurface, nous pourrons le représenter par un point de l'espace ordinaire et nous serons affranchis de l'hypergéométrie.

Dans certaines questions nous n'envisagerons que des surfaces d'intégration situées sur une même hypersurface unicursale et nous pourrons nous servir de ce mode de représentation.

La plupart du temps nous supposons simplement:

$$x = \varphi_1 = \lambda, \quad y = \varphi_2 = \mu, \quad z = \varphi_3 = \nu, \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu) = \varphi_4(x, y, z).$$

Alors le point x, y, z, t sera représenté par le point de l'espace x, y, z et la quatrième coordonnée t sera une fonction rationnelle de x, y, z .

La surface d'intégration sera alors définie par une surface S située dans l'espace ordinaire (x, y, z) et par une fonction rationnelle φ_4 . On aura:

$$t = \frac{P(x, y, z)}{Q(x, y, z)}$$

P et Q étant deux polynômes entiers, et nous supposons qu'on n'a en aucun point réel de l'espace (x, y, z)

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Il est aisé de démontrer que toute surface d'intégration ou bien est susceptible de ce mode de représentation, ou bien diffère très peu d'une surface qui en est susceptible, ou bien enfin peut être décomposée en plusieurs autres qui diffèrent très peu de surfaces algébriques admettant ce mode de représentation.

Ce mode de représentation est donc suffisamment général pour s'appliquer à tous les cas; cependant il sera quelquefois plus commode de le modifier un peu.

Reprenons les quatre relations fondamentales

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

dont il a été question plus haut.

Nous avons supposé jusqu'ici que ces quatre fonctions étaient rationnelles; il nous suffit qu'elles soient uniformes et bien déterminées. Il peut même suffire que sans être uniformes dans tout l'espace, c'est à dire pour toutes les valeurs de λ, μ, ν , elles restent uniformes dans une certaine région de l'espace (λ, μ, ν) pourvu que notre surface S qui représente la surface d'intégration soit toute entière contenue dans cette région.

§ 2. Conditions d'intégrabilité.

On sait ce qu'on doit entendre par une intégrale simple:

$$\int(Xdx + Ydy + Zdz)$$

prise le long d'une courbe gauche quelconque dans l'espace (x, y, z) . On connaît également les conditions d'intégrabilité; c'est à dire les conditions pour que l'intégrale soit indépendante du chemin d'intégration et ne dépende que des deux points extrêmes de ce chemin. (On suppose bien entendu que X, Y et Z sont des fonctions données de x, y et z). Ces conditions sont:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Ces résultats s'étendent immédiatement, comme on le sait, au cas d'un espace d'un nombre quelconque de dimensions.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n, n variables indépendantes et soient X_1, X_2, \dots, X_n, n fonctions de ces n variables; il est aisé de définir l'intégrale simple:

$$(1) \quad \int(X_1dx_1 + X_2dx_2 + \dots + X_ndx_n).$$

En effet introduisons une variable auxiliaire et posons:

$$(2) \quad x_1 = \varphi_1(u), \quad x_2 = \varphi_2(u), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(u).$$

Ces équations (2) définiront le chemin d'intégration.

Nous ferons varier u depuis u_0 jusqu'à u_1 . Nous poserons:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \varphi_1(u_0), & \dots, & & x_n^0 &= \varphi_n(u_0) \\ x_1^1 &= \varphi_1(u_1), & \dots, & & x_n^1 &= \varphi_n(u_1). \end{aligned}$$

Les deux systèmes de valeurs $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ et $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ définiront les deux points extrêmes de ce chemin d'intégration.

Alors l'intégrale (1) prise le long du chemin d'intégration (2) depuis le point (x_1^0, \dots, x_n^0) jusqu'au point (x_1^1, \dots, x_n^1) ne sera autre chose que l'intégrale définie:

$$\int_{u_0}^{u_1} \left(X_1 \frac{dx_1}{du} + X_2 \frac{dx_2}{du} + \dots + X_n \frac{dx_n}{du} \right) du.$$

Nous cherchons les conditions d'intégrabilité, c'est à dire les conditions pour que cette intégrale soit indépendante du chemin d'intégration et ne dépende que des deux points extrêmes de ce chemin (x_1^0, \dots, x_n^0) et (x_1^1, \dots, x_n^1) .

Ces conditions sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$ et elles s'écrivent:

$$\frac{dX_i}{dx_k} = \frac{dX_k}{dx_i}.$$

Passons maintenant au cas des intégrales doubles, et d'abord dans l'espace ordinaire. Soit une intégrale double:

$$\iint (A dy dz + B dx dz + C dx dy)$$

A , B et C étant trois fonctions de x , y , z .

On sait ce qu'on doit entendre par là. La surface d'intégration peut n'être pas fermée, mais on peut toujours convenir de regarder l'un des côtés de la surface comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur.

Soient alors $d\omega$ un élément de cette surface et α , β , γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément dirigée vers l'extérieur.

L'intégrale sera alors:

$$\int (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\omega$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface.

On peut également la définir comme il suit, ce qui revient au même:

Exprimons x , y et z en fonctions de deux variables auxiliaires u et v

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v).$$

Ces équations définiront la surface d'intégration. L'intégrale ne sera alors autre chose que l'intégrale double ordinaire

$$\iint \left[A \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + B \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + C \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv.$$

Nous désignons suivant la coutume par la notation $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ le déterminant fonctionnel

$$\frac{dx dy}{du dv} - \frac{dx dy}{dv du}.$$

La condition d'intégrabilité (c'est à dire la condition pour que l'intégrale prise le long d'une surface fermée quelconque soit nulle) s'écrit alors:

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0.$$

Tous ces points sont trop connus pour que j'y insiste davantage.

Passons maintenant au cas général.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n , n variables indépendantes. Désignons maintenant par la notation:

$$(X_i, X_k)$$

diverses fonctions données de ces n variables. Nous supposons que l'on a:

$$(3) \quad (X_i, X_i) = 0, \quad (X_k, X_i) = - (X_i, X_k).$$

Nous allons envisager l'intégrale double:

$$J = \iint \sum (X_i, X_k) dx_i dx_k$$

où l'on fait entrer sous le signe \sum les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons de deux indices i et k .

Pour la définir, imaginons qu'on introduise deux variables auxiliaires u et v de telle sorte que

$$(4) \quad x_i = \varphi_i(u, v). \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Ces équations (4) définiront la surface d'intégration. Nous donnerons à u et à v toutes les valeurs qui satisfont à une certaine inégalité:

$$(5) \quad \phi(u, v) > 0$$

de sorte qu'en réalité la surface d'intégration sera complètement définie par les équations (4) d'une part et par l'inégalité (5) d'autre part. L'égalité:

$$\phi(u, v) = 0$$

définira alors la ligne qui servira de limite à la surface d'intégration.

L'intégrale proposée sera alors l'intégrale double ordinaire:

$$J = \iint \sum (X_i, X_k) \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)} du dv$$

qui devra être étendue à toutes les valeurs de u et de v satisfaisant à l'inégalité (5). Quant au signe \sum , il s'appliquera aux $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons des deux indices i et k .

Mais en tenant compte des relations (3), on peut écrire l'intégrale étudiée sous la forme:

$$J = \iint \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du dv.$$

Il est manifeste que si on permute les variables u et v , l'intégrale change de signe, mais cette opération est tout à fait analogue à ce que serait, dans l'étude des intégrales simples, un changement du sens de l'intégration.

A part ce changement de signe, l'intégrale est indépendante du choix des variables auxiliaires u et v .

Notre intégrale double étant ainsi complètement définie, il faut trouver les conditions d'intégrabilité. Je veux dire, les conditions pour que l'intégrale ne dépende pas de la surface d'intégration, mais seulement de la courbe qui limite cette surface; de même que les intégrales simples appliquées à des différentielles exactes, ne dépendaient pas du chemin d'intégration, mais seulement des extrémités de ce chemin.

Supposons que l'on remplace les équations (4) par les suivantes:

$$x = \varphi'_i(u, v)$$

la fonction φ'_i étant différente de la fonction φ_i . Alors on changera la surface d'intégration.

Mais supposons en même temps qu'on conserve l'inégalité (5) sans aucun changement, et que l'on ait:

$$\varphi'_i(u, v) = \varphi_i(u, v)$$

toutes les fois que l'on a:

$$\phi(u, v) = 0.$$

Alors la courbe qui limite la surface d'intégration n'a pas changé.

Si dans ces conditions l'intégrale n'a pas changé, nous dirons que l'expression sous le signe \iint est intégrable.

Imaginons que l'on pose

$$x_i = \varphi_i(u, v, w)$$

en introduisant une troisième variable auxiliaire w . Nous calculerons l'intégrale proposée J en l'étendant à toutes les valeurs de u et de v qui satisfont à l'inégalité (5) et en regardant w comme un paramètre arbitraire.

Je supposerai de plus que pour

$$\phi(u, v) = 0$$

les fonctions φ_i soient indépendantes de w . Alors la surface d'intégration dépendra de w , mais la courbe qui limite cette surface n'en dépendra pas.

J sera une fonction du paramètre w et nous cherchons les conditions pour que cette fonction soit une constante; ce seront les conditions d'intégrabilité.

Nous avons donc à écrire que:

$$\frac{dJ}{dw} = 0.$$

Nous avons:

$$J = \iint \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du dv$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dw} &= \iint \sum_i \sum_k \frac{d(X_i, X_k)}{dw} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du dv \\ &+ \iint \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \left(\frac{d^2 x_i}{du dw} \frac{dx_k}{dv} + \frac{d^2 x_k}{dv dw} \frac{dx_i}{du} \right) du dv. \end{aligned}$$

La première intégrale double du second membre peut s'écrire:

$$\iint \sum_i \sum_k \sum_h \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_h}{dw} du dv.$$

Cherchons à réduire la seconde. Pour cela, remarquons que l'on a:

$$(6) \quad \int F du = \iint \frac{dF}{dv} du dv.$$

l'intégrale double étant étendue à toute notre surface d'intégration et l'intégrale simple du premier membre au contour qui limite cette surface et qui est défini par l'équation:

$$\phi(u, v) = 0.$$

Faisons dans cette équation:

$$F = (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dw}.$$

Nous avons supposé que les fonctions φ_i , c'est à dire les x_i sont indépendants de w pour $\phi = 0$. On a donc, si ϕ est supposé nul

$$\frac{dx_k}{dw} = 0, \quad F = 0.$$

Il résulte de là que le premier membre de (6) est nul. On doit donc avoir:

$$(7) \quad \iint (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{d^2 x_k}{dv dw} du dv \\ = - \iint (X_i, X_k) \frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du dv} du dv - \iint \frac{d(X_i, X_k)}{dv} \frac{dx_k}{dw} \frac{dx_i}{du} du dv.$$

On peut écrire une seconde équation analogue à l'équation (6)

$$(6') \quad - \int F dv = \iint \frac{dF}{du} du dv$$

d'où l'on déduit de la même façon:

$$(7') \quad \iint (X_i, X_k) \frac{dx_k}{dv} \frac{d^2 x_i}{du dv} du dv \\ = - \iint (X_i, X_k) \frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du dv} du dv - \iint \frac{d(X_i, X_k)}{du} \frac{dx_i}{dw} \frac{dx_k}{dv} du dv.$$

Remarquons maintenant que:

$$\iint \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \left(\frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du dv} + \frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du dv} \right) du dv = 0.$$

En effet si on envisage l'expression suivante:

$$H = (X_i, X_k) \left(\frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du dv} + \frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du dv} \right)$$

on voit qu'elle se change en $-H$ quand on permute les indices i et k .

Dans l'emploi des relations (7) et (7') nous pourrions donc laisser de côté le premier terme du second membre. Il vient donc pour l'expression de $\frac{dJ}{dw}$

$$\iint \sum_i \sum_k \left[\frac{d(X_i, X_k)}{dw} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} - \frac{d(X_i, X_k)}{dv} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dw} - \frac{d(X_i, X_k)}{du} \frac{dx_i}{dw} \frac{dx_k}{dv} \right] du dv.$$

Observons maintenant que:

$$\frac{d(X_i, X_k)}{du} = \sum_h \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{dx_h}{du}$$

et que l'on a deux formules analogues pour:

$$\frac{d(X_i, X_k)}{dv} \quad \text{et} \quad \frac{d(X_i, X_k)}{dw}.$$

Ceci nous permet de transformer l'expression de $\frac{dJ}{dw}$ et de l'écrire:

$$\iint \sum_h \sum_i \sum_k \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \left[\frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_h}{dw} - \frac{dx_i}{du} \frac{dx_h}{dv} \frac{dx_k}{dw} - \frac{dx_h}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_i}{dw} \right] du dv.$$

Transformons-la encore en laissant de côté les termes où les indices i et k sont égaux entre eux, puisque nous savons que ces termes sont nuls. Réunissons de plus les termes en (X_i, X_k) et (X_k, X_i) en remarquant que

$$(X_i, X_k) = - (X_k, X_i).$$

Cela donnera

$$\iint \sum \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{\partial(x_i, x_k, x_h)}{\partial(u, v, w)} du dv.$$

Le signe \sum porte sur toutes les combinaisons (i, k, h) si l'on convient:
1° de laisser de côté les combinaisons où $i = k$.

2° de ne pas regarder comme différentes les deux combinaisons (i, k, h) et (k, i, h) .

Nous pouvons écrire aussi:

$$\frac{dJ}{dw} = \iint \sum \left[\frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} + \frac{d(X_k, X_h)}{dx_i} + \frac{d(X_h, X_i)}{dx_k} \right] \frac{\partial(x_i, x_k, x_h)}{\partial(u, v, w)} du dv.$$

Le signe \sum change alors de signification. Il porte sur toutes les combinaisons (i, k, h) si l'on ne considère pas comme différentes deux combinaisons qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres i, k, h .

Il est clair d'ailleurs qu'on peut laisser de côté les combinaisons où deux des lettres i, k, h sont égales entre elles, parce qu'elles donneraient un résultat nul.

L'expression de $\frac{dJ}{dw}$ doit être nulle quelles que soient les fonctions φ_i .

Cela ne peut avoir lieu que si l'on a:

$$(8) \quad \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} + \frac{d(X_k, X_h)}{dx_i} + \frac{d(X_h, X_i)}{dx_k} = 0.$$

Telles sont les conditions d'intégrabilité. Il faut prendre pour le système des trois nombres (i, k, h) toutes les combinaisons possibles, en excluant celles où deux des lettres seraient identiques et en ne regardant pas comme distinctes celles qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres. Les conditions d'intégrabilité sont donc au nombre de:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Considérons en particulier le cas de $n = 4$ et envisageons l'intégrale double:

$$\iint [(X, Y)dx dy + (X, Z)dx dz + (X, T)dx dt \\ + (Y, Z)dy dz + (Y, T)dy dt + (Z, T)dz dt].$$

Les conditions d'intégrabilité seront:

$$\frac{d(X, Y)}{dz} + \frac{d(Y, Z)}{dx} + \frac{d(Z, X)}{dy} = 0$$

$$\frac{d(X, Y)}{dt} + \frac{d(Y, T)}{dx} + \frac{d(T, X)}{dy} = 0$$

$$\frac{d(X, Z)}{dt} + \frac{d(Z, T)}{dx} + \frac{d(T, X)}{dz} = 0$$

$$\frac{d(Y, Z)}{dt} + \frac{d(Z, T)}{dy} + \frac{d(T, Y)}{dz} = 0.$$

Si l'on compare les conditions d'intégrabilité relatives aux intégrales simples

$$(9) \quad \frac{dX_i}{dx_n} - \frac{dX_n}{dx_i} = 0$$

avec les conditions (8) relatives aux intégrales doubles, il est impossible de n'être pas frappé d'un fait remarquable.

Dans les formules (9) on a alternativement le signe + et le signe —; dans les formules (8) on n'a que le signe +.

Qu'arrive-t-il si l'on passe aux intégrales d'ordre supérieur?

On trouvera des conditions tout à fait analogues aux conditions (8) et (9) et l'on rencontrera encore le fait que je viens de signaler. Pour les conditions relatives aux intégrales d'ordre pair, tous les termes seront précédés du signe +; pour les conditions relatives aux intégrales d'ordre impair, les termes seront alternativement précédés des signes + et —.

Soit par exemple l'intégrale triple:

$$\iiint \Sigma(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma$$

l'intégrale étant définie comme plus haut, et les fonctions $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ étant des fonctions analogues aux fonctions (X_i, X_k) et qui changent de

signe quand on permute deux des indices α, β, γ . Les conditions d'intégrabilité s'écriront alors:

$$\frac{d(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)}{dx_\delta} - \frac{d(X_\beta, X_\gamma, X_\delta)}{dx_\alpha} + \frac{d(X_\gamma, X_\delta, X_\alpha)}{dx_\beta} - \frac{d(X_\delta, X_\alpha, X_\beta)}{dx_\gamma} = 0$$

avec alternance des signes + et —.

Soit au contraire l'intégrale quadruple:

$$\iiint \Sigma(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta) dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma dx_\delta.$$

Les conditions d'intégrabilité s'écriront:

$$\begin{aligned} & \frac{d(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)}{dx_\varepsilon} + \frac{d(X_\beta, X_\gamma, X_\delta, X_\varepsilon)}{dx_\alpha} + \frac{d(X_\gamma, X_\delta, X_\varepsilon, X_\alpha)}{dx_\beta} \\ & + \frac{d(X_\delta, X_\varepsilon, X_\alpha, X_\beta)}{dx_\gamma} + \frac{d(X_\varepsilon, X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)}{dx_\delta} = 0 \end{aligned}$$

avec le signe + partout.

§ 3. Théorème fondamental.

Reprenons le mode de représentation du § 1. Soient donc λ, μ, ν les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et une surface ou portion de surface S . Posons ensuite:

$$(1) \quad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

les φ étant des fonctions rationnelles.

Envisageons une fonction des deux variables complexes

$$\xi = x + iy, \quad \eta = z + it$$

que j'appellerai

$$F(\xi, \eta)$$

ou bien encore

$$P + iQ,$$

en séparant les parties réelle et imaginaire. On aura alors:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= + \frac{dQ}{dy}, & \frac{dP}{dz} &= \frac{dQ}{dt}, \\ \frac{dP}{dy} &= - \frac{dQ}{dx}, & \frac{dP}{dt} &= - \frac{dQ}{dz}. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de définir ce qu'on doit entendre par l'intégrale double:

$$\iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

prise le long de la surface d'intégration définie par la surface S et par les équations fondamentales (1).

Il importe d'abord de définir le sens de l'intégration. Pour cela imaginons un observateur O , ayant les pieds sur la surface S et la tête dirigée soit vers l'extérieur de cette surface, soit vers l'intérieur. C'est la position de cet observateur O qui définira le sens d'intégration. Nous dirons que ce sens est positif si l'observateur a la tête vers l'extérieur et négatif dans le cas contraire.

Si la surface S n'est pas fermée, il n'y a plus à proprement parler d'extérieur et d'intérieur; mais nous pouvons toujours convenir de regarder l'un des côtés comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur. (Si la surface S n'avait qu'un seul côté, l'intégrale serait nulle.)

Envisageons maintenant l'expression:

$$\iint (P + iQ)(dx + idy)(dz + idt).$$

Cette expression n'a absolument aucune signification par elle même et ne pourra avoir que celle que nous conviendrons de lui donner. Effectuons néanmoins le produit sous le signe \iint d'après les règles ordinaires du calcul; ce ne sera là qu'une opération purement mécanique et destinée à nous servir de règle mnémonique. Il viendra:

$$\iint [(P + iQ)dx dz + (iP - Q)dx dt + (iP - Q)dy dz - (P + iQ)dy dt].$$

Imaginons maintenant qu'on puisse trouver deux variables auxiliaires u et v telles qu'en tous les points de la surface S les trois coordonnées λ, μ, ν soient des fonctions holomorphes de u et de v .

Alors l'intégrale cherchée sera l'intégrale double ordinaire:

$$\iint \left[(P + iQ) \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + (iP - Q) \frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)} \right. \\ \left. + (iP - Q) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - (P + iQ) \frac{\partial(y, t)}{\partial(u, v)} \right] dudv$$

étendue à tous les systèmes de valeurs de u et de v qui correspondent aux différents points de la surface S .

Si l'on ne pouvait trouver deux variables u et v satisfaisant à ces conditions, on décomposerait la surface S en plusieurs régions et (à la condition que ces régions soient assez petites) on pourrait toujours trouver dans chacune d'elles, deux variables u et v telles que λ, μ, ν soient fonctions holomorphes de u et de v , en tous les points de la région.

L'ordre des deux variables u et v n'est pas indifférent. Il est clair en effet que l'intégrale change de signe quand on permute ces deux variables. Voici donc la convention que nous ferons: imaginons que u et v représentent les coordonnées d'un point dans un plan. Imaginons que le point λ, μ, ν décrive sur la surface S un contour fermé très petit C autour des pieds de l'observateur O et que cet observateur voie ce point décrire ce contour C dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Le point correspondant (u, v) décrira dans son plan un autre contour fermé C' . Il faudra que ce second contour C' , soit décrit comme le premier dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre (en supposant que les axes des u et des v positifs soient disposés comme le sont d'ordinaire les axes des x et des y positifs).

Notre intégrale double est ainsi complètement définie et elle est analogue à celles que nous avons étudiées dans le paragraphe précédent. On a d'ailleurs:

$$(X, Y) = (Z, T) = 0$$

$$(X, Z) = (T, Y) = P + iQ$$

$$(X, T) = (Y, Z) = iP - Q.$$

Les quatre conditions d'intégrabilité s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \frac{d(iP - Q)}{dx} - \frac{d(P + iQ)}{dy} &= 0 \\ -\frac{d(P + iQ)}{dx} - \frac{d(iP - Q)}{dy} &= 0 \\ \frac{d(P + iQ)}{dt} - \frac{d(iP - Q)}{dz} &= 0 \\ \frac{d(iP - Q)}{dt} + \frac{d(P + iQ)}{dz} &= 0. \end{aligned}$$

Elles seront donc remplies en vertu des relations (2).

Il est aisé de tirer de là diverses conséquences.

Imaginons d'abord deux portions de surfaces S et S' limitées par un même contour C et que ces deux portions de surfaces soient situées toutes deux dans l'espace (λ, μ, ν) . Nous supposerons d'ailleurs que les deux surfaces d'intégration sont définies l'une par S , l'autre par S' , mais toutes deux par les mêmes équations fondamentales:

$$(1) \quad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu).$$

Si la surface S peut, par une déformation continue, arriver à se confondre avec S' , et si dans cette déformation continue il n'arrive à aucun moment que la fonction $F = P + iQ$ devienne infinie ou discontinue en un point de la surface d'intégration, à ces conditions, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S' .

Considérons maintenant les surfaces singulières, c'est à dire l'ensemble des points où la fonction F devient infinie ou discontinue. Soient:

$$\phi_1(x, y, z, t) = \phi_2(x, y, z, t) = 0$$

les équations de ces surfaces.

Remplaçons dans ϕ_1 et ϕ_2 , x, y, z, t par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 , les deux équations des surfaces singulières se réduiront à deux relations:

$$f_1(\lambda, \mu, \nu) = f_2(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

entre λ, μ et ν . Ces deux équations définissent certaines courbes appartenant à l'espace (λ, μ, ν) et que j'appellerai courbes singulières, parce

qu'elles sont le lieu des points qui appartiennent à l'espace (λ, μ, ν) et où la fonction sous le signe \iint devient infinie ou discontinue.

Nous pouvons donc énoncer le résultat précédent de la façon suivante:

Les deux portions de surface S et S' étant limitées au même contour C diviseront l'espace (λ, μ, ν) en deux régions, l'une intérieure et l'autre extérieure. Si dans cette région intérieure, il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S' .

Si la surface S est fermée, elle divisera l'espace (λ, μ, ν) en deux régions; si à l'intérieur de S il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera nulle.

Si la surface S' appartenant comme S à l'espace (λ, μ, ν) est fermée comme S et tout entière intérieure à S , et si dans l'espace compris entre S et S' , il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S est égale à l'intégrale prise le long de S' .

Si deux surfaces S et S' , toutes deux fermées et appartenant toutes deux à l'espace (λ, μ, ν) contiennent à leur intérieur les mêmes courbes singulières et les mêmes portions de courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S' .

Il faut toutefois avoir soin de prendre les deux intégrales dans le même sens. Nous avons défini le sens d'intégration à l'aide de l'observateur O . Nous supposons donc que cet observateur a la même position par rapport aux deux surfaces S et S' . S'il a la tête vers l'extérieur de la surface S , il devra avoir aussi la tête vers l'extérieur de la surface S' et inversement.

Il peut arriver que deux surfaces fermées S et S' tout en n'appartenant pas au même espace (λ, μ, ν) contiennent néanmoins à leur intérieur une même courbe singulière.

Soient en effet:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad t = f_2(x, y, z)$$

les équations d'une courbe singulière C .

Cette courbe C appartiendra à la fois à l'espace (λ, μ, ν) défini par les équations fondamentales:

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \nu, \quad t = f_2(\lambda, \mu, \nu)$$

et à l'espace (λ', μ', ν') défini par les équations:

$$x = \lambda', \quad y = \mu', \quad z = \nu', \quad t = f_1(\lambda', \mu', \nu') + f_2(\lambda', \mu', \nu').$$

Il pourra se faire alors qu'une surface fermée S appartenant à l'espace (λ, μ, ν) contienne à son intérieur la courbe singulière C et n'en contienne pas d'autre; et qu'une autre surface fermée S' appartenant à l'espace (λ', μ', ν') contienne à son intérieur la courbe singulière C et n'en contienne pas d'autre.

L'intégrale prise le long de S est alors égale à l'intégrale prise le long de S' . Il faudrait toutefois pour s'assurer que l'intégration a bien lieu dans le même sens, une discussion délicate que je réserverai pour le paragraphe suivant. Je me contenterai donc pour le moment de dire que les deux intégrales sont égales, ou égales et de signe contraire.

On peut résumer tout ce qui précède en disant que l'intégrale prise le long d'une surface fermée S ne dépend que des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de cette surface.

§ 4. *Résidus des fonctions rationnelles.*

Soit une fonction rationnelle

$$F(\xi, \eta).$$

Ecrivons-la en mettant en évidence le numérateur et le dénominateur et en décomposant le dénominateur en facteurs irréductibles. Supposons pour fixer les idées que ce dénominateur admette deux semblables facteurs.

Soit donc:

$$F(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)R(\xi, \eta)}$$

P , Q et R étant trois polynômes entiers dont les deux derniers sont irréductibles

Considérons un espace (λ, μ, ν) défini par les quatre équations:

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

et dans cet espace une surface fermée S .

Il s'agit de calculer l'intégrale double:

$$\iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

prise le long de S , l'observateur O étant dirigé vers l'extérieur.

Cette intégrale dépend comme nous l'avons vu des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de la surface S .

Les courbes singulières de l'espace (λ, μ, ν) sont de deux sortes:

Les unes ont pour équations:

$$Q[(\varphi_1(\lambda, \mu, \nu) + i\varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \varphi_3(\lambda, \mu, \nu) + i\varphi_4(\lambda, \mu, \nu))] = 0$$

les autres ont pour équations:

$$R[\varphi_1 + i\varphi_2, \varphi_3 + i\varphi_4] = 0.$$

D'ailleurs, celles de ces courbes qui seront contenues tout entières à l'intérieur de la surface fermée S , devront évidemment être des courbes fermées.

Supposons que la surface S contienne à son intérieur plusieurs courbes singulières fermées, par exemple deux que j'appellerai C et C' . Nous pourrons toujours construire dans l'espace (λ, μ, ν) deux surfaces fermées Σ et Σ' situées toutes deux à l'intérieur de S et contenant à leur intérieur, la première C et C' seulement, la seconde C' et C seulement; l'intégrale prise le long de S sera alors la somme de l'intégrale prise le long de Σ et de l'intégrale prise le long de Σ' , l'observateur O qui définit le sens d'intégration demeurant toujours dirigé vers l'extérieur.

Nous sommes ainsi ramenés au cas où la surface S ne contient à son intérieur qu'une seule courbe singulière C .

Toutes les surfaces S renfermant la courbe C conduiront à la même intégrale. Il n'est pas nécessaire pour cela que ces diverses surfaces S appartiennent au même espace (λ, μ, ν) .

Construisons donc un espace (λ', μ', ν') particulier contenant la courbe C et, dans cet espace, une surface fermée Σ renfermant cette courbe. Nous choisirons cet espace et cette surface de telle sorte que l'intégration soit facile et l'intégrale cherchée, c'est à dire l'intégrale prise le long de S , sera égale au signe près à l'intégrale prise le long de Σ .

Nous pourrions toujours mettre les équations de la courbe C sous la forme:

$$x = \phi_1(\omega), \quad y = \phi_2(\omega), \quad z = \phi_3(\omega), \quad t = \phi_4(\omega)$$

les ϕ étant des fonctions périodiques du paramètre ω , puisque cette courbe est fermée. Nous supposons que la période est égale à 2π .

Cela posé nous introduirons deux autres paramètres ρ et φ et nous écrirons:

$$\lambda' = \cos \omega(1 + \rho \cos \varphi), \quad \mu' = \sin \omega(1 + \rho \cos \varphi), \quad \nu' = \rho \sin \varphi.$$

$$x = \phi_1(\omega), \quad y = \phi_2(\omega), \quad z = \phi_3(\omega) + \rho \cos \varphi, \\ t = \phi_4(\omega) + \rho \sin \varphi.$$

Ainsi x, y, z et t sont définis en fonctions de ω, ρ et φ et par conséquent en fonctions de λ', μ', ν' . Mais il faut faire ici une remarque:

x, y, z et t sont des fonctions uniformes de ω, ρ et φ , mais non de λ', μ', ν' . Toutefois si l'on convient que ρ devra toujours être compris entre 0 et 1, à un système de valeurs λ', μ', ν' , correspondra un seul système de valeurs de $\rho, \cos \omega, \sin \omega, \cos \varphi, \sin \varphi$ et un seul système de valeurs de x, y, z, t ; grâce à cette restriction x, y, z et t deviennent donc des fonctions uniformes de λ', μ', ν' .

A un point de l'espace (λ', μ', ν') satisfaisant à la condition $\rho < 1$, c'est à dire situé à l'intérieur d'un certain tore, correspond donc un point et un seul de l'hypermètre.

Dans ce mode de représentation, la courbe C est représentée par le cercle ($\rho = 0$)

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1, \quad \nu' = 0.$$

Nous prendrons pour la surface Σ le tore dont l'équation est:

$$\rho = \rho_0, \quad 0 < \rho_0 < 1.$$

Ce tore enveloppe manifestement la courbe C . Nous allons voir que le calcul de l'intégrale

$$\iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

le long de cette surface Σ est particulièrement simple.

Décomposons en effet l'intégration en deux parties; intégrons d'abord par rapport à η , en regardant ξ comme un paramètre arbitraire. Nous avons:

$$z = \phi_3(\omega) + \rho_0 \cos \varphi, \quad t = \phi_4(\omega) + \rho_0 \sin \varphi.$$

Si ξ est regardé un instant comme une constante, ω sera aussi une constante; il en est de même de ρ_0 , φ étant la seule variable. On a alors:

$$\eta = \phi_3 + i\phi_4 + \rho_0 e^{i\varphi}$$

ce qui montre que le point η décrit dans le plan des η un cercle de rayon ρ_0 ayant pour centre le point $\phi_3 + i\phi_4$. L'intégrale simple

$$I = \int F(\xi, \eta) d\eta$$

est alors égale à $2i\pi$ multipliée par le résidu de la fonction $F(\xi, \eta)$ (regardée comme fonction de η seulement) par rapport au point $\phi_3 + i\phi_4$.

Imaginons pour fixer les idées que le long de la courbe C ce soit le premier facteur $Q(\xi, \eta)$ du dénominateur qui s'annule de telle sorte que

$$Q(\phi_1 + i\phi_2, \phi_3 + i\phi_4) = 0.$$

Le résidu en question est alors facile à calculer et on trouve pour l'intégrale simple:

$$I = \frac{2i\pi P(\xi, \eta)}{\frac{dQ}{d\eta} R(\xi, \eta)}$$

où

$$\xi = \phi_1(\omega) + i\phi_2(\omega), \quad \eta = \phi_3(\omega) + i\phi_4(\omega)$$

et où par conséquent

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Il faut maintenant intégrer par rapport à ξ en faisant varier ω de

0 à 2π , c'est à dire en suivant toute la courbe C . On est donc ramené à chercher l'intégrale simple:

$$J = \int \frac{2i\pi P d\xi}{R \frac{dQ}{d\eta}}$$

le long de la courbe C , η étant supposé lié à ξ par la relation algébrique

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Cette intégrale est donc une intégrale abélienne attachée à la courbe algébrique $Q = 0$.

Il suffit d'un peu d'attention pour vérifier que si l'on veut obtenir l'intégrale le long de Σ , l'observateur O étant dirigé vers l'extérieur, il faut en prenant l'intégrale J , suivre la courbe C dans le sens des ω croissants.

L'intégrale prise le long de S sera donc aussi égale à J ou à $-J$; car elle est égale au signe près à l'intégrale prise le long de Σ . Il reste à déterminer le signe.

Imaginons que l'on fasse varier d'une manière continue les quatre relations fondamentales:

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

et qu'en même temps on fasse varier également d'une manière continue la surface S , mais de telle sorte que la courbe C reste toujours dans l'espace (λ, μ, ν) et à l'intérieur de S .

L'intégrale ne variera pas tant que la surface S ne contiendra pas d'autre courbe singulière que C .

Cela posé envisageons les douze dérivées partielles de x, y, z, t par rapport à λ, μ, ν

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d\varphi_1}{d\lambda}, \quad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{d\varphi_2}{d\lambda}, \quad \dots$$

et d'autre part les quatre dérivées de x, y, z, t par rapport à ω , en supposant que le point x, y, z, t décrive la courbe C :

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{d\psi_1}{d\omega}, \quad \frac{dy}{d\omega} = \frac{d\psi_2}{d\omega}, \quad \dots$$

Envisageons ensuite le déterminant:

$$\begin{vmatrix} -\frac{dy}{d\omega} & \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{d\nu} \\ \frac{dx}{d\omega} & \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{d\nu} \\ -\frac{dt}{d\omega} & \frac{dz}{d\lambda} & \frac{dz}{d\mu} & \frac{dz}{d\nu} \\ \frac{dz}{d\omega} & \frac{dt}{d\lambda} & \frac{dt}{d\mu} & \frac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Je dis que si Δ s'annule en un point quelconque de C , il y aura à l'intérieur de S une autre courbe singulière que C (en négligeant certains cas exceptionnels qu'il serait d'ailleurs inutile d'envisager ici).

En effet, les courbes singulières ont pour équations:

$$Q(\varphi_1 + i\varphi_2, \varphi_3 + i\varphi_4) = 0.$$

Pour qu'une courbe gauche possède un point double, il suffit en général que le calcul des cosinus directeurs de la tangente conduise à une indétermination. Cherchons donc à déterminer la tangente à C ; l'équation des courbes singulières:

$$Q(\xi, \eta) = 0$$

peut se résoudre par rapport à η , d'où:

$$\eta = f(\xi)$$

d'où

$$\frac{d\eta}{d\xi} = A + Bi$$

A et B étant les parties réelle et imaginaire de la dérivée de $f(\xi)$.

Cela donne:

$$(1) \quad \begin{aligned} dz &= A dx - B dy \\ dt &= B dx + A dy. \end{aligned}$$

Nous devons chercher la tangente à C et pour cela, il faut déterminer les rapports des quatre différentielles dx , dy , dz , dt . Pour cela nous avons l'équation:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} dx & \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{d\nu} \\ dy & \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{d\nu} \\ dz & \frac{dz}{d\lambda} & \frac{dz}{d\mu} & \frac{dz}{d\nu} \\ dt & \frac{dt}{d\lambda} & \frac{dt}{d\mu} & \frac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = 0$$

qui jointe aux équations (1) suffit en général pour déterminer dx , dy , dz , dt . Mais comme dx , dy , dz , dt sont des différentielles se rapportant à C , elles doivent être proportionnelles à

$$\frac{dx}{d\omega}, \frac{dy}{d\omega}, \frac{dz}{d\omega}, \frac{dt}{d\omega}$$

de sorte qu'on a toujours:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\omega} & \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{d\nu} \\ \frac{dy}{d\omega} & \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{d\nu} \\ \frac{dz}{d\omega} & \frac{dz}{d\lambda} & \frac{dz}{d\mu} & \frac{dz}{d\nu} \\ \frac{dt}{d\omega} & \frac{dt}{d\lambda} & \frac{dt}{d\mu} & \frac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

On a toujours d'ailleurs:

$$\frac{dz}{d\omega} = A \frac{dx}{d\omega} - B \frac{dy}{d\omega}$$

$$\frac{dt}{d\omega} = A \frac{dy}{d\omega} + B \frac{dx}{d\omega}$$

ce qui montre que les différentielles

$$dx = \varepsilon \frac{dy}{d\omega}, \quad dy = \varepsilon \frac{dx}{d\omega}, \quad dz = \varepsilon \frac{dt}{d\omega}, \quad dt = \varepsilon \frac{dz}{d\omega}$$

(où ε est une quantité infiniment petite quelconque) satisfont toujours aux équations (1).

Si de plus on a $\Delta = 0$, elles satisferont également à l'équation (2). Mais alors ces équations (1) et (2) ne suffiront plus pour déterminer les quatre différentielles. La courbe C aura donc un point double.

Donc si en un point de la courbe C , Δ s'annule, ce point est un point double; ou bien encore nous pouvons dire que la surface S contient outre la courbe C une autre courbe singulière qui vient couper C . Une discussion plus approfondie montrerait qu'il y a des cas d'exception, mais que ces cas ne se présenteront pas si Δ s'annule en changeant de signe.

En conséquence, si la surface S ne contient pas d'autre courbe singulière que C , le déterminant Δ conservera le même signe tout le long de C . Imaginons maintenant que l'on fasse varier S et l'espace (λ, μ, ν) d'une façon continue comme nous l'avons dit plus haut. Tant que Δ ne changera pas de signe, l'intégrale ne variera pas.

Donc le signe de l'intégrale dépend du signe de Δ .

Voyons quel est ce signe pour l'intégrale prise le long de Σ .

On a alors:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{dy}{d\omega} & \frac{dx}{d\omega} & \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dx}{d\omega} & \frac{dy}{d\omega} & \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\varphi} \\ -\frac{dt}{d\omega} & \frac{dz}{d\omega} & \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\varphi} \\ \frac{dz}{d\omega} & \frac{dt}{d\omega} & \frac{dt}{d\rho} & \frac{dt}{d\varphi} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\frac{\partial(\lambda, \mu', \nu')}{\partial(\omega, \rho, \varphi)}}.$$

Il vient ensuite

$$\frac{\partial(\lambda, \mu', \nu')}{\partial(\omega, \rho, \varphi)} = -\rho(1 + \rho \cos \varphi) < 0;$$

Δ est donc de même signe que:

$$\begin{array}{|cccc} \frac{dx}{d\omega} & - \frac{dy}{d\omega} & \circ & \circ \\ \frac{dy}{d\omega} & \frac{dx}{d\omega} & \circ & \circ \\ \frac{dz}{d\omega} & - \frac{dt}{d\omega} & \cos \varphi & - \rho \sin \varphi \\ \frac{dt}{d\omega} & \frac{dz}{d\omega} & \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{array}$$

c'est à dire positif.

En résumé:

L'intégrale double prise le long de S est égale à l'intégrale simple abélienne:

$$J = \int \frac{2i\pi P d\xi}{R \frac{dQ}{d\eta}}$$

prise le long de la courbe C , et on doit parcourir cette courbe dans le sens des ω croissants si Δ est positif et des ω décroissants si Δ est négatif.

Ainsi les périodes de l'intégrale double:

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{RQ}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne:

$$J = \int \frac{2i\pi P d\xi}{R \frac{dQ}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique $Q = \circ$ et aussi que celles de l'intégrale simple abélienne

$$J' = \int \frac{2i\pi P d\xi}{Q \frac{dR}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique $R = \circ$.

Nous savons qu'une intégrale abélienne possède deux sortes de périodes, les périodes cycliques et les périodes polaires. Les intégrales de 1^{ère} et de 2^{de} espèces ne présentent que des périodes cycliques.

Étudions d'abord les périodes cycliques. Si la courbe $Q = 0$ est de genre g , l'intégrale J admettra $2g$ périodes cycliques. Si la courbe $R = 0$ est de genre r , l'intégrale J' admettra $2r$ périodes cycliques. L'intégrale double aura donc en tout $2g + 2r$ périodes cycliques.

Quelle est la condition pour que cette intégrale n'ait que des périodes cycliques. Il faut que les intégrales J et J' soient de 1^{ère} ou de 2^{me} espèce. Pour cela il faut et il suffit que la courbe $P = 0$ passe par tous les points doubles des deux courbes $R = 0$, $Q = 0$, ainsi que par les points d'intersection de ces deux courbes, à l'exception toutefois des points où ces deux courbes se touchent.

Passons maintenant aux périodes polaires. Les pôles de l'intégrale J sont les points d'intersection des deux courbes:

$$R = 0, \quad Q = 0$$

et les points doubles de la courbe

$$Q = 0.$$

Pour les premiers, le résidu est facile à calculer. On trouve que la période est égale à:

$$- 4\pi^2 \frac{P}{\frac{dQ}{d\eta} \frac{dR}{d\xi} - \frac{dQ}{d\xi} \frac{dR}{d\eta}}$$

où ξ , η sont remplacés par les coordonnées du point d'intersection considéré.

Si l'on considère ce même point d'intersection comme un pôle de l'intégrale J' , on est conduit au même résultat, au signe près.

Pour les points doubles de $Q = 0$, on trouve:

$$- 4\pi^2 \frac{P}{R \sqrt{\left(\frac{d^2 Q}{d\xi d\eta}\right)^2 - \frac{d^2 Q}{d\xi^2} \frac{d^2 Q}{d\eta^2}}}$$

où ξ et η sont remplacés par les coordonnées du point double.

En envisageant l'intégrale J et les points doubles de $R = 0$, on serait conduit à des périodes de la forme:

$$-4\pi^2 \frac{P}{Q \sqrt{\left(\frac{d^2 R}{d\xi d\eta}\right)^2 - \frac{d^2 R}{d\xi^2} \frac{d^2 R}{d\eta^2}}}.$$

En résumé si les deux courbes $Q = 0$, $R = 0$ sont respectivement d'ordre m et n avec h et k points doubles, on aura:

$$q = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h, \quad r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - k$$

et l'intégrale double admettra les périodes suivantes:

1° les

$$2q + 2r = (m-1)(m-2) + (n-1)(n-2) - 2(h+k)$$

périodes cycliques.

2° les mn périodes relatives aux mn points d'intersection des deux courbes.

3° les h périodes relatives aux h points doubles de $Q = 0$.

4° les k périodes relatives aux k points doubles de $R = 0$.

Il y aura donc en tout

$$m^2 + mn + n^2 - 3(m+n) + 4 - h - k$$

périodes.

Si l'on considère les deux courbes $Q = 0$, $R = 0$ comme n'en formant qu'une seule qui a pour équation:

$$QR = 0$$

elle sera de degré $p = m + n$ et aura:

$$d = mn + h + k$$

points doubles.

Le nombre des périodes auquel on est conduit est alors:

$$p^2 - 3p + 4 - d.$$

Si on avait eu au dénominateur un polynôme indécomposable Q , que ce polynôme eût été de degré p , et que la courbe:

$$Q = 0$$

eût eu d points doubles, on aurait trouvé pour le nombre des périodes, en appliquant les formules précédentes:

$$p^2 - 3p + 2 - d.$$

Voici donc ce que nous pourrions dire en général:

Soit p le degré du dénominateur, ν le nombre de ses facteurs irréductibles, d le nombre des points doubles. Le nombre des périodes sera:

$$p^2 - 3p + 2\nu - d.$$

Ce nombre peut se réduire dans certains cas particuliers.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que du cas où tous les facteurs du dénominateur sont distincts. Il nous reste à examiner ceux où deux ou plusieurs de ces facteurs se confondent, ce qui arrivera par exemple si le dénominateur est un carré parfait.

Il faudrait donc étudier les périodes de l'intégrale double:

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{Q^\alpha R^\beta S^\gamma}$$

où Q , R et S sont des polynômes entiers irréductibles, et où α , β , γ sont des exposants entiers.

Il nous suffira, pour faire comprendre la marche à suivre, de considérer le cas particulier de l'intégrale

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{Q^2}.$$

Les courbes singulières ont alors pour équations:

$$Q = 0.$$

Pour calculer l'intégrale, il faut employer le procédé de la différentiation sous le signe \iint .

Considérons l'intégrale double:

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{Q - a}.$$

Nous avons vu qu'elle est égale à l'intégrale simple abélienne:

$$J = 2i\pi \int \frac{P d\xi}{\frac{dQ}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique:

$$Q = a.$$

C'est une fonction de a dont la dérivée par rapport à a est égale à

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{(Q - a)^2}.$$

Différentions de même l'intégrale simple J par rapport à a ; nous trouvons:

$$\frac{d}{da} \left\{ \frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}} \right\} = \frac{d}{d\eta} \left\{ \frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}} \right\} \frac{d\eta}{da}.$$

On a:

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ \frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}} \right\} = \frac{\frac{dP}{d\eta} \frac{dQ}{d\eta} - P \frac{d^2 Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta} \right)^2}.$$

De plus η nous est donné en fonction de ξ et de a par l'égalité:

$$Q = a.$$

En la différentiant par rapport à a on trouve:

$$\frac{dQ}{d\eta} \frac{d\eta}{da} = 1.$$

Il vient donc:

$$\frac{dJ}{da} = 2i\pi \int \frac{\frac{dP}{d\eta} \frac{dQ}{d\eta} - P \frac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^3} d\xi.$$

D'où l'on conclut que les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{Q^2}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne:

$$2i\pi \int \frac{\frac{dP}{d\eta} \frac{dQ}{d\eta} - P \frac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^3} d\xi$$

relative à la courbe algébrique $Q = 0$.

Un cas particulier intéressant est celui des périodes polaires. Soit par exemple à calculer celle des périodes polaires de l'intégrale double

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{RQ^2}$$

qui se rapporte au point d'intersection:

$$\xi = a, \quad \eta = b$$

des deux courbes

$$R = 0, \quad Q = 0.$$

On pourrait faire le calcul à l'aide de la formule précédente, mais il est plus simple d'opérer comme il suit:

Considérons les périodes polaires de l'intégrale:

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{R(Q - a)}$$

et en particulier celle qui se rapporte au point d'intersection:

$$\xi = a', \quad \eta = b'$$

des deux courbes

$$R = 0, \quad Q = a.$$

Je suppose, bien entendu, que a' et b' se réduisent à a et b quand α s'annule. Cette période est égale à :

$$- 4\pi^2 \frac{P(a', b')}{\Delta(a', b')}$$

Δ désignant le déterminant fonctionnel de R et de Q .

Nous n'avons plus qu'à différentier cette expression par rapport à α .

Appelons φ la fonction

$$- 4\pi^2 \frac{P}{\Delta}.$$

Appelons $D(\xi, \eta)$ le déterminant fonctionnel

$$\frac{d\varphi}{d\xi} \frac{dR}{d\eta} - \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{dR}{d\xi}.$$

Nous trouverons que la période de l'intégrale double

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{RQ^2}$$

est égale à

$$\pm \frac{D(a, b)}{\Delta(a, b)}.$$

On voit aisément comment on opérerait si l'exposant de Q était plus grand que 2.

En particulier, l'intégrale double

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{(\xi - a)^n (\eta - b)^p}$$

n'a qu'une seule période qui a pour expression

$$\frac{4\pi^2 P'(a, b)}{(n-1)(p-1)}$$

où l'on a posé :

$$P'(\xi, \eta) = \frac{d^{n+p-2} P}{d^{n-1} \xi d^{p-1} \eta}.$$

De même l'intégrale

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{(a\xi + \beta\eta)^n (\gamma\xi + \delta\eta)^p}$$

a une seule période dont l'expression est:

$$\frac{4\pi^2 P'(\circ, \circ)}{(a\delta - \beta\gamma)^{n+p} |n-1| |p-1|}$$

Pour définir ici la fonction $P'(\xi, \eta)$ qui n'a plus la même signification que plus haut, nous supposons qu'on ait changé de variables en faisant:

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta$$

$$\eta' = \gamma\xi + \delta\eta$$

et nous poserons:

$$P'(\xi, \eta) = \frac{d^{n+p-2} P}{d^{n-1}\xi d^{p-1}\eta'}$$

§ 5. Méthode de M. Stieltjes.

Monsieur STIELTJES a découvert il y a quelques années une remarquable généralisation de la série de LAGRANGE. Considérant l'intégrale double:

$$\iint \frac{P d\xi d\eta}{QR}$$

qui a fait l'objet du paragraphe précédent, et l'intégrant le long d'une surface particulière, il découvrait l'une de ses périodes, qui a pour expression:

$$(1) \quad \frac{4\pi^2 P}{\frac{dQ}{d\xi} \frac{dR}{d\eta} - \frac{dQ}{d\eta} \frac{dR}{d\xi}}$$

ξ et η étant remplacées par les coordonnées d'un des points d'intersection des deux courbes:

$$Q = 0, \quad R = 0.$$

On n'a plus qu'à faire dans cette formule:

$$(2) \quad \begin{aligned} Q &= \xi - hf(\xi, \eta) \\ R &= \eta - k\varphi(\xi, \eta) \end{aligned}$$

$$P = F(\xi, \eta) \left[1 - h \frac{df}{d\xi} - k \frac{d\varphi}{d\eta} + hk \left(\frac{df}{d\xi} \frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{df}{d\eta} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \right]$$

(h et k étant deux quantités très petites, f , φ et F trois polynômes quelconques en ξ , η) pour retomber sur une généralisation de la formule de LAGRANGE.

M. STIELTJES ne publia pas toutefois sa découverte et se borna à la communiquer à quelques amis; mais de graves objections lui furent faites et le déterminèrent à ne pas publier ses résultats.

Était-il certain que la fonction sous le signe \iint ne devenait pas infinie en quelques points de la surface d'intégration?

Comment se faisait-il, puisque rien ne distingue Q de R , qu'on changeait le signe de l'expression (1) en permutant Q et R ?

La discussion du paragraphe précédent, nous met aujourd'hui en mesure de répondre à toutes ces objections.

Commençons par introduire les quatre relations fondamentales qui définissent l'espace (λ, μ, ν) ; nous écrirons:

$$x = \frac{\rho(k^2 - 1)}{k^2 + 1}, \quad y = \frac{2\lambda\rho}{k^2 + 1}, \quad z = \frac{2\mu\rho}{k^2 + 1}, \quad t = \frac{2\nu\rho}{k^2 + 1}$$

où l'on a posé pour abrégé

$$k^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Les deux équations

$$\xi = 0 \quad \text{et} \quad \eta = 0$$

représenteront respectivement dans l'espace (λ, μ, ν) le cercle

$$(3) \quad \lambda = 0, \quad \mu^2 + \nu^2 = 1$$

et l'axe des λ

$$\mu = 0, \quad \nu = 0.$$

Si h et k sont assez petits les deux équations:

$$Q = 0 \quad \text{et} \quad R = 0$$

ou ce qui revient au même:

$$\xi = hf \quad \text{et} \quad \eta = k\varphi$$

représenteront respectivement dans l'espace (λ, μ, ν) une courbe fermée très peu différente du cercle (3) et une autre courbe fermée se rapprochant beaucoup de l'axe des λ dans tous les points situés à distance finie.

Il importe de remarquer que ces deux courbes sont entrelacées l'une dans l'autre. Je veux dire par là qu'il serait impossible de construire une portion de surface simplement connexe limitée à l'une des deux courbes fermées et qui ne coupe pas l'autre courbe fermée.

La surface d'intégration considérée par M. STIELTJES est définie comme il suit: on fait décrire à ξ dans son plan, un cercle ayant pour centre l'origine, pendant que η décrit de son côté dans son plan un autre cercle ayant aussi pour centre l'origine.

Les équations de la surface d'intégration sont donc:

$$x^2 + y^2 = \rho_1^2, \quad z^2 + t^2 = \rho_2^2.$$

Si nous revenons à notre mode de représentation, il faut que nous supposions:

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho^2.$$

La surface d'intégration sera alors représentée dans l'espace (λ, μ, ν) par la surface:

$$(k^2 + 1)^2 \rho_2^2 = 4\rho^2(\mu^2 + \nu^2).$$

Cette surface est un tore; le cercle

$$\xi = 0$$

et par conséquent si h est très petit, la courbe fermée

$$\xi = hf$$

se trouvent entièrement à l'intérieur de ce tore.

Au contraire l'axe des λ

$$\eta = 0$$

et par conséquent si k est très petit, la courbe fermée

$$\eta = k\varphi$$

se trouvent entièrement à l'extérieur de ce tore.

On voit tout de suite que la première objection faite à M. STIELTJES est levée, puisque le tore ne coupe en aucun point les courbes singulières.

Nous définirons le sens d'intégration comme nous l'avons fait jusqu'ici, par un observateur placé sur le tore; je supposerai par exemple que cet observateur est dirigé vers l'extérieur.

La seule courbe singulière située à l'intérieur de la surface d'intégration est la courbe:

$$\xi = hf.$$

L'intégrale cherchée se ramène donc à une intégrale abélienne simple relative à cette courbe. Il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître, en appliquant les règles du paragraphe précédent, que cette période est une période polaire et qu'elle est égale à:

$$\frac{4\pi^2 P}{\frac{dQ}{d\xi} \frac{dR}{d\eta} - \frac{dQ}{d\eta} \frac{dR}{d\xi}}$$

Il nous est facile de voir maintenant comment tombe d'elle-même la seconde objection qui avait été opposée à M. STIELTJES. Il n'est pas vrai que rien ne distingue Q de R . La courbe $Q = 0$ ou $\xi = hf$ est à l'intérieur du tore qui nous sert de surface d'intégration; la courbe $R = 0$ ou $\eta = k\varphi$ est au contraire à l'extérieur. Si donc nous considérons l'observateur qui définit le sens de l'intégration, nous verrons qu'il est dirigé vers l'extérieur du tore, c'est à dire du même côté que la courbe $R = 0$, et du côté opposé à la courbe $Q = 0$. Ces deux courbes jouent donc des rôles différents.

La seconde partie de l'analyse de M. STIELTJES ne soulevait pas d'objection analogue à celles que nous venons de discuter. Néanmoins comme elle n'a pas encore été publiée et qu'elle est fort courte, je vais l'exposer ici en quelques mots.

Si nous donnons à P , Q et R leurs valeurs (2), il est aisé de voir que notre intégrale sera égale à

$$4\pi^2 F(\xi_0, \eta_0)$$

ξ_0 et η_0 étant les valeurs de ξ et de η très voisines de 0 qui satisfont aux deux équations:

$$\xi = hf, \quad \eta = k\varphi.$$

D'autre part si h et k sont assez petits pour qu'on ait en tous les points de notre tore:

$$\left| \frac{hf}{\xi} \right| < 1, \quad \left| \frac{k\varphi}{\eta} \right| < 1$$

l'intégrale pourra se développer en série comme il suit:

$$\begin{aligned} & \sum h^n k^p \iint \frac{F f^n \varphi^p d\xi d\eta}{\xi^{n+1} \eta^{p+1}} - \sum h^n k^p \iint \frac{F \frac{df}{d\xi} f^{n-1} \varphi^p d\xi d\eta}{\xi^n \eta^{p+1}} \\ & - \sum h^n k^p \iint \frac{F \frac{d\varphi}{d\eta} f^n \varphi^{p-1} d\xi d\eta}{\xi^{n+1} \eta^p} + \sum h^n k^p \iint \frac{F \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)} f^{n-1} \varphi^{p-1} d\xi d\eta}{\xi^n \eta^p}. \end{aligned}$$

Ce qui donne, d'après les principes du paragraphe précédent:

$$\begin{aligned} F(\xi_0, \eta_0) = \sum h^n k^p \left[\frac{D_{n,p}(F f^n \varphi^p)}{\underline{n} \mid p} - \frac{D_{n-1,p}\left(F \frac{df}{d\xi} f^{n-1} \varphi^p\right)}{\underline{n-1} \mid p} - \frac{D_{n,p-1}\left(F \frac{d\varphi}{d\eta} f^n \varphi^{p-1}\right)}{\underline{n} \mid p-1} \right. \\ \left. + \frac{D_{n-1,p-1}\left(F \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)} f^{n-1} \varphi^{p-1}\right)}{\underline{n-1} \mid p-1} \right]. \end{aligned}$$

Dans le second membre ξ et η sont supposés remplacés par 0 et 0. Quant à la notation $D_{n,p}$, on a écrit pour abrégé:

$$D_{n,p}(u) = \frac{d^{n+p} u}{d\xi^n d\eta^p}.$$

En réduisant, il reste pour la partie entre crochets:

$$\frac{1}{[n][p]} \left\{ D_{n,1}(F f^n \varphi^p) - D_{n-1,p} \left(F \frac{d f^n}{d \xi} \varphi^p \right) - D_{n,p-1} \left(F f^n \frac{d \varphi^p}{d \eta} \right) + D_{n-1,p-1} \left[F \frac{\partial (f^n, \varphi^p)}{\partial (\xi, \eta)} \right] \right\}$$

ou bien:

$$\frac{1}{[n][p]} D_{n-1,p-1} \left[D_{1,1}(F f^n \varphi^p) - D_{0,1} \left(F \frac{d f^n}{d \xi} \varphi^p \right) - D_{1,0} \left(F f^n \frac{d \varphi^p}{d \eta} \right) + F \frac{\partial (f^n, \varphi^p)}{\partial (\xi, \eta)} \right]$$

ou enfin en réduisant encore:

$$\frac{1}{[n][p]} D_{n-1,p-1} \left[\frac{d^2 F}{d \xi d \eta} f^n \varphi^p + \frac{d F}{d \xi} \frac{d (f^n)}{d \eta} \varphi^p + \frac{d F}{d \eta} \frac{d (\varphi^p)}{d \xi} f^n \right].$$

On est ainsi conduit à une généralisation de la formule de LAGRANGE.

§ 6. *Seconde application.*

Il n'est pas douteux qu'on ne puisse tirer des principes qui précèdent une foule d'applications différentes. Je me bornerai à exposer ici la suivante.

Il est aisé de démontrer qu'une fonction entière d'une variable, dont le module reste inférieur à une quantité donnée, se réduit à une constante. Ce résultat s'étend immédiatement aux fonctions de deux variables. On peut d'ailleurs l'énoncer comme il suit:

Une fonction entière de deux variables ξ et η qui tend vers une limite finie et déterminée quand ξ et η tendent vers l'infini, et quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini, se réduit à une constante.

La théorie actuelle nous permet de faire un pas de plus.

Il n'est pas nécessaire, pour que la fonction se réduise à une constante, qu'elle tende vers une limite finie et déterminée quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini.

Supposons, pour préciser davantage, que l'on pose:

$$\xi = (\alpha + i\beta)\rho, \quad \eta = (\gamma + i\delta)\rho$$

avec la condition

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Faisons ensuite croître ρ indéfiniment, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ restant constants.

Les théories anciennes nous permettent d'affirmer ce qui suit:

Si quels que soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, la fonction entière, $F(\xi, \eta)$ tend vers une limite finie et déterminée, cette fonction est une constante. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que cette limite soit la même pour toutes les valeurs des quatre quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; il suffit qu'elle soit toujours finie.

Grâce à la théorie actuelle, nous pouvons affirmer quelque chose de plus.

La fonction entière F sera une constante, non seulement pourvu qu'elle tende vers une limite finie pour toutes les valeurs possibles de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, mais encore pourvu qu'elle tende vers une limite finie pour toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qui satisfont non seulement à la relation (1), mais à une autre relation convenablement choisie.

Reprenons les quatre relations fondamentales du paragraphe précédent:

$$x = \frac{\rho(k^2 - 1)}{k^2 + 1}, \quad y = \frac{2\lambda\rho}{k^2 + 1}, \quad z = \frac{2\mu\rho}{k^2 + 1}, \quad t = \frac{2\nu\rho}{k^2 + 1}$$

$$k^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Nous avons vu que les équations

$$\xi = 0 \quad \text{et} \quad \eta = 0$$

étaient respectivement représentées dans l'espace (λ, μ, ν) par le cercle

$$\lambda = 0, \quad \mu^2 + \nu^2 = 1$$

et par la droite:

$$\mu = \nu = 0.$$

Nous avons vu en outre que l'équation

$$\text{mod}^2 \gamma = \rho_2^2$$

était représentée par le tore:

$$(k^2 + 1)^2 \rho_2^2 = 4\rho^2(\mu^2 + \nu^2).$$

Ces tores sont de révolution autour de l'axe des λ et on peut les définir géométriquement en disant qu'ils sont le lieu des points M tels

que le rapport de la plus grande et de la plus petite distance de M au cercle $\xi = 0$ soit constant.

Venons maintenant à l'équation:

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0$$

où α et β sont des coefficients imaginaires quelconques. Elle représentera aussi un cercle. De plus ce cercle devra se trouver tout entier sur le tore:

$$|\eta|^2 = \frac{|\alpha|^2 \rho^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}.$$

Ce ne peut d'ailleurs être ni un des cercles méridiens qui ont pour équation

$$\eta = \text{const.}$$

ni un des cercles parallèles qui ont pour équation

$$\xi = \text{const.}$$

Mais on sait que si l'on coupe le tore par un plan bitangent, l'intersection se décompose en deux cercles. Le cercle:

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0$$

sera donc l'un de ces deux cercles.

Si les axes sont placés comme ils le sont d'ordinaire, ce sera celui des deux cercles qui est situé à gauche d'un observateur placé suivant l'axe des λ et regardant la partie des deux cercles qui est dirigée vers sa tête.

En faisant varier les deux coefficients α et β on obtiendra donc une famille de cercles que j'appellerai les cercles C .

Ces cercles seront toujours réels et leur rayon ne pourra s'annuler.

Ce qu'il importe de remarquer, c'est que deux quelconques des cercles C sont entrelacés, dans le sens donné à ce mot au paragraphe précédent.

En effet les cercles

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0, \quad \gamma\xi + \delta\eta = 0$$

sont évidemment entrelacés si

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

Faisons ensuite varier d'une manière continue les quatre coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et voyons si les deux cercles peuvent cesser d'être entrelacés. Ils ne pourraient cesser de l'être que s'ils arrivaient d'abord à se couper. Or s'ils se coupaient, on aurait un point d'intersection:

$$\xi = \eta = 0$$

ce qui est impossible, puisque les formules (2) conduisent à la relation:

$$|\xi|^2 + |\eta|^2 = \rho^2.$$

Pour faire comprendre l'importance de cet entrelacement, considérons l'équation plus générale

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma.$$

Cette équation représentera encore une famille de cercles, les cercles C' , dont les cercles C ne sont que des cas particuliers.

Deux cercles C''

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$$

$$\alpha'\xi + \beta'\eta = \gamma'$$

peuvent être ou n'être pas entrelacés. Ils le seront si:

$$|\alpha\gamma' - \alpha'\gamma|^2 + |\beta\gamma' - \beta'\gamma|^2 < \rho^2 |\alpha\beta' - \alpha'\beta|^2.$$

Ils ne le seront pas dans le cas contraire.

L'intégrale double

$$\iint \frac{F(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta - \gamma)(\alpha'\xi + \beta'\eta - \gamma')}$$

prise le long d'une surface qui enveloppe le cercle:

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$$

en laissant en dehors le cercle

$$\alpha'\xi + \beta'\eta = \gamma'$$

sera égale tantôt à 0, tantôt à

$$\frac{4\pi^2}{a\beta' - a'\beta} F(\xi_0, \eta_0)$$

où ξ_0 et η_0 satisfont aux équations simultanées

$$\alpha\xi_0 + \beta\eta_0 = \gamma, \quad \alpha'\xi_0 + \beta'\eta_0 = \gamma'.$$

Elle sera égale à 0 si les deux cercles ne sont pas entrelacés et à

$$\frac{4\pi^2}{a\beta' - a'\beta} F(\xi_0, \eta_0)$$

s'ils sont entrelacés.

Dans le cas des cercles C , comme il y a toujours entrelacement, on aura:

$$\iint \frac{F d\xi d\eta}{(a\xi + \beta\eta)(a'\xi + \beta'\eta)} = \frac{4\pi^2}{a\beta' - a'\beta} F(0, 0).$$

De même l'intégrale:

$$\iint \frac{F d\xi d\eta}{(a\xi + \beta\eta)^m (a'\xi + \beta'\eta)^p}$$

s'exprimera très simplement à l'aide des dérivées d'ordre $m + p$ de F , ou plutôt des valeurs de ces dérivées pour $\xi = \eta = 0$. L'expression sera linéaire et les coefficients dépendront de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$. (Voir la fin du § 4.)

Cela posé voyons comment chaque point de l'espace (λ, μ, ν) , représente une manière pour ξ et η de tendre vers l'infini.

Imaginons que λ, μ, ν conservant la même valeur, ρ croisse indéfiniment. x, y, z et t croîtront indéfiniment et de façon que leurs rapports demeurent constants. Lors donc que x, y, z, t croissent au delà de toute limite, mais de telle façon que leurs rapports tendent vers des limites finies et déterminées, cette manière de tendre vers l'infini sera représentée par un point de l'espace (λ, μ, ν) .

Une surface S appartenant à cet espace représentera donc un ensemble de manières de tendre vers l'infini.

Imaginons qu'une surface S soit telle que le cercle:

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0$$

soit tout entier à son intérieur et le cercle

$$a'\xi + \beta'\eta = 0$$

tout entier à l'extérieur.

Supposons que, quand ξ et η tendent vers l'infini de l'une des manières représentées par les divers points de cette surface S , la fonction entière F tende vers une limite finie et déterminée.

A cette condition, F se réduira à une constante. En effet l'intégrale:

$$\iint \frac{F d\xi d\eta}{(a\xi + \beta\eta)^m (a'\xi + \beta'\eta)^p}$$

prise le long de S , tendra vers 0 quand ρ croitra indéfiniment, (à moins que $m = p = 1$). Elle est donc nulle.

Donc toutes les dérivées de F s'annulent pour $\xi = \eta = 0$.

Donc F est une constante.

En résumé, si on sait démontrer que F tend vers une limite finie quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini, F est une constante; voilà ce qu'on savait déjà.

Supposons maintenant qu'on sache démontrer seulement que F tend vers une limite finie quand ξ et η tendent vers l'infini d'une certaine manière. L'espace (λ, μ, ν) dont les points représentent les différentes façons de tendre vers l'infini, sera alors partagée en diverses régions. Pour les unes, on saura démontrer que F tend vers une limite finie; pour les autres, on ne saura rien.

Si par exemple il y a une région de l'espace qui contienne l'un des cercles C tout entier et en tous les points de laquelle la limite F soit finie, on sera certain que F est une constante.

Ou bien encore supposons que l'espace se divise en trois régions R_1, R_2 et R_3 , de telle façon que l'on ne puisse passer de R_1 à R_3 sans traverser R_2 . Imaginons que R_1 contienne un des cercles C tout entiers; que R_3 contienne un autre cercle C tout entier et qu'en tous les points de R_2 la limite de F soit finie. Nous serons encore certains dans ce cas que F est une constante.

§ 7. *Périodes variables.*

J'arrive à un autre ordre de considérations où l'on verra la principale différence qui éloigne la théorie actuelle de celle des intégrales simples.

Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction sous le signe \iint ne devenait infinie en aucun des points de la surface d'intégration.

Cette hypothèse n'est pas nécessaire comme elle l'était dans le cas des intégrales simples. Il arrive en effet, comme nous allons le voir, que l'intégrale reste finie bien que la fonction sous le signe \iint devienne infinie.

Soit S la surface d'intégration appartenant à l'espace (λ, μ, ν) et dans ce même espace, une courbe singulière C en tous les points de laquelle la fonction $F(\xi, \eta)$ devienne infinie. Supposons que cette courbe C coupe la surface S de telle sorte que l'une des portions de C soit à l'intérieur de S et l'autre à l'extérieur.

Prenons maintenant l'intégrale:

$$\iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

le long de la surface S . La fonction F sera infinie aux points où C coupe S , mais en général elle sera infinie de 1^{er} ordre seulement. L'intégrale restera alors finie.

Nous savons en effet qu'une intégrale multiple d'ordre n reste finie quand la fonction sous les n signes \int devient infinie en un point isolé, pourvu toutefois qu'elle soit infinie d'ordre inférieur à n .

Pour évaluer cette intégrale double, on peut opérer absolument de la même façon que dans le § 4. Posons alors

$$F(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)}.$$

Nous supposerons que P ne devient pas infini à l'intérieur de S , et que Q ne devient infini que le long de la courbe C . Cela suppose que S ne contient pas d'autre courbe singulière que C ; mais cette hypothèse est toujours permise, car s'il en était autrement, on remplacerait la surface S par plusieurs autres ne contenant chacune qu'une courbe singulière.

L'intégrale double sera égale alors à l'intégrale simple

$$\int \frac{2i\pi P d\xi}{\frac{dQ}{d\eta}}.$$

Cette intégrale au lieu d'être prise tout le long de C , sera prise seulement le long d'une partie de cette courbe, puisqu'une partie seulement de cette courbe est intérieure à S .

Si P est rationnel et si Q est un polynôme entier, cette intégrale simple est encore une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Mais ce n'est plus une période de cette intégrale, c'est une intégrale prise entre deux points quelconques de la courbe $Q = 0$.

Quant au sens dans lequel on doit suivre la courbe C , on le déterminerait par la règle du § 4.

Nous pouvons donner aux intégrales doubles de cette forme le nom de périodes, puisqu'elles sont prises le long de surfaces fermées. Mais elles diffèrent beaucoup des périodes que nous avons envisagées jusqu'ici.

Si en effet, nous déformons d'une façon continue la surface d'intégration S , l'arc de C qui sera à l'intérieur de S variera aussi d'une façon continue. Il en sera donc de même de la période.

Ces périodes ne sont donc pas des constantes. Ce sont des *périodes variables*. Il importe d'ailleurs de ne pas les confondre avec les intégrales auxquelles M. PICARD avait donné ce nom dans ses notes du 29 Janvier 1883 et du 1^{er} Février 1886.

Je rappelle que dans l'introduction nous sommes convenus de ne pas le leur conserver afin d'éviter toute confusion.

§ 8. Applications aux fonctions θ .

Je vais reprendre les notations dont j'ai fait usage dans mon mémoire *sur les fonctions Abéliennes* (American Journal of Mathematics Vol. VIII, N° 4).

J'envisagerai une fonction abélienne, de deux variables ξ et η et j'appellerai les quatre périodes fondamentales:

$$(1) \quad \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ pour } \xi \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \text{ pour } \eta. \end{array}$$

J'envisagerai une fonction intermédiaire Φ jouissant des propriétés suivantes:

Elle est entière et de plus elle a pour une quelconque des 4 périodes

$$\Phi(\xi + a_i, \eta + b_i) = \Phi(\xi, \eta) e^{\alpha_i \xi + \beta_i \eta + \gamma_i}.$$

Je poserai ensuite:

$$M_{ik} = \alpha_k a_i + \beta_k b_i - \alpha_i a_k - \beta_i b_k.$$

M_{ik} sera égal à un entier multiplié par $2\pi \sqrt{-1}$.

Si les périodes (1) sont des périodes normales, on aura:

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0.$$

Si les périodes (1) ne sont pas normales, on aura une relation analogue

$$(2) \quad \sum N_{ik} a_i b_k = 0$$

où

$$N_{ii} = 0, \quad N_{ik} = -N_{ki}.$$

Les N seront des entiers dont le déterminant est égal à 1.

En d'autres termes le premier membre de l'équation (2) est une forme bilinéaire de discriminant 1.

On aura d'ailleurs:

$$M_{ik} = 2m\pi \sqrt{-1} N_{ik}$$

m étant l'ordre de la fonction intermédiaire Φ .

On sait que les fonctions θ ne sont que des cas particuliers des fonctions intermédiaires qui s'y ramènent d'ailleurs aisément.

Nous allons maintenant définir notre espace λ, μ, ν .

Distinguons les parties réelles et imaginaires des périodes, en faisant:

$$a_i = a'_i + a''_i \sqrt{-1}, \quad b_i = b'_i + b''_i \sqrt{-1}.$$

Posons ensuite:

$$\begin{aligned} x &= a'_1 \lambda + a'_2 \mu + a'_3 \nu \\ y &= a''_1 \lambda + a''_2 \mu + a''_3 \nu \\ z &= b'_1 \lambda + b'_2 \mu + b'_3 \nu \\ t &= b''_1 \lambda + b''_2 \mu + b''_3 \nu. \end{aligned}$$

Nous étendrons nos intégrations à la surface totale du cube dont les 6 faces ont pour équation:

$$\lambda \text{ ou } \mu \text{ ou } \nu = 0 \text{ ou } 1.$$

Les courbes singulières que nous considérerons auront toutes pour équation:

$$\Phi = 0.$$

A l'intérieur de notre cube, il pourra se trouver plusieurs branches de la courbe singulière $\Phi = 0$, mais parmi ces branches, nous devons distinguer les branches fermées et les branches ouvertes limitées à chacune de leurs deux extrémités par l'une des faces du cube. Les points qui doivent surtout attirer notre attention sont les extrémités des branches ouvertes, c'est à dire les points où la courbe $\Phi = 0$ coupe les faces du cube.

Mais nous distinguerons ces points en deux catégories. Supposons que dans le voisinage d'un de ces points, les équations de $\Phi = 0$ puissent se mettre sous la forme:

$$x = \phi_1(\omega), \quad y = \phi_2(\omega), \quad z = \phi_3(\omega), \quad t = \phi_4(\omega)$$

ainsi qu'il est dit au § 4.

Nous formerons le déterminant Δ du § 4 qui s'écrira ici:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{dy}{d\omega} & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ \frac{dx}{d\omega} & a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ -\frac{dt}{d\omega} & b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ \frac{dz}{d\omega} & b''_1 & b''_2 & b''_3 \end{vmatrix}.$$

Nous avons vu que si ce déterminant est positif, il faut, dans les intégrations, suivre la courbe $\Phi = 0$ dans le sens des ω croissants, et qu'il faut la suivre au contraire dans le sens des ω décroissants si Δ est négatif.

Comme ω reste arbitraire dans une large mesure, on peut toujours choisir cette variable de telle sorte que Δ soit positif et que par conséquent on ait toujours à suivre la courbe dans le sens des ω croissants.

Cela posé si nous considérons un des points d'intersection P de la courbe $\Phi = 0$ avec une des faces du cube, et que dans le voisinage de ce point, on suive cette courbe dans le sens des ω croissants, il pourra se présenter deux cas. Ou bien on passera de l'extérieur du cube à l'intérieur, ou inversement.

Nous distinguerons donc deux sortes de points P ; le point P sera positif si l'on passe de l'extérieur du cube à l'intérieur et négatif dans le cas contraire.

Pour reconnaître le signe d'un de ces points, imaginons que ce point appartienne à la face $\lambda = 0$, et que dans le voisinage de ce point, on ait pour l'équation de $\Phi = 0$

$$\xi = f(\eta).$$

Il viendra alors:

$$d\xi = (\alpha + i\beta)d\eta$$

ou

$$\alpha + i\beta = \frac{df}{d\eta} = -\frac{\frac{d\Phi}{d\eta}}{\frac{d\xi}{d\eta}}$$

en remplaçant $d\xi$ et $d\eta$ par leurs valeurs et séparant les parties réelle et imaginaire, il vient:

$$(3) \quad \begin{aligned} &(a'_1 - ab'_1 + \beta b'_1)d\lambda + (a'_2 - ab'_2 + \beta b'_2)d\mu + (a'_3 - ab'_3 + \beta b'_3)d\nu = 0 \\ &(a''_1 - ab''_1 + \beta b''_1)d\lambda + (a''_2 - ab''_2 + \beta b''_2)d\mu + (a''_3 - ab''_3 + \beta b''_3)d\nu = 0. \end{aligned}$$

Ce sera en étudiant les coefficients des équations (3) qu'on reconnaîtra si le point P est positif ou négatif.

Si l'on fait varier ces coefficients d'une manière continue, le passage des points P positifs aux points P négatifs se fera au moment où $d\lambda$ est nul, c'est à dire où :

$$(4) \quad (a'_2 - ab'_2 + \beta b'_2')(a'_3 - ab'_3 - \beta b'_3) - (a'_3 - ab'_3 + \beta b'_3')(a'_2 - ab'_2 - \beta b'_2) = 0.$$

Tout dépend donc du signe du premier membre de l'équation (4).

Nous n'avons encore rien supposé au sujet de la fonction Φ qui égalée à 0 définira la courbe singulière; nous choisirons plus tard pour Φ une fonction intermédiaire, mais dans ce qui a été dit jusqu'ici, rien ne préjuge ce choix.

Faisons en particulier:

$$\Phi = \xi - \xi_0.$$

Alors on aura

$$\alpha = \beta = 0$$

et le premier membre de (4) se réduira à:

$$a'_2 a'_3 - a'_3 a'_2.$$

C'est la partie imaginaire du produit:

$$\bar{a}_2 a_3$$

en désignant par \bar{a}_2 la quantité imaginaire conjuguée de a_2 .

Prenons le cas particulier où

$$a_2 = 1, \quad a_3 = i.$$

Alors le premier membre de (4) se réduit à 1 et est par conséquent positif. Nous pouvons supposer en même temps $a_1 = 0$. Les équations (3) se réduisent alors à

$$d\mu = d\nu = 0.$$

On en conclut que

$$dx = dy = 0$$

$$dz = b'_1 d\lambda, \quad dt = b'_1 d\lambda.$$

Le déterminant Δ se réduit à

$$-\frac{d\lambda}{d\omega}(b_1'^2 + b_1''^2)$$

il est donc négatif.

Donc quand le premier membre de (4) est positif, le point P est négatif et inversement.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les points P situés sur la face du cube qui a pour équation $\lambda = 0$. On raisonnerait de même pour les cinq autres faces et on arriverait aux conclusions suivantes:

Posons

$$\alpha + i\beta = -\frac{\frac{d\phi}{d\xi}}{\frac{d\eta}{d\xi}} = h.$$

Posons ensuite:

$$c_i = a_i - hb_i$$

et soit \bar{c}_i la quantité imaginaire conjuguée de c_i .

Soit enfin $I(u) =$ partie imaginaire de u .

Les points P seront positifs

$$\begin{array}{ll} \text{pour la face } \lambda = 0 & \text{si } I(c_2 \bar{c}_3) > 0 \\ \text{» } \lambda = 1 & \text{si } I(c_2 \bar{c}_3) < 0 \\ \text{» } \mu = 0 & \text{si } I(c_3 \bar{c}_1) > 0 \\ \text{» } \mu = 1 & \text{si } I(c_3 \bar{c}_1) < 0 \\ \text{» } \nu = 0 & \text{si } I(c_1 \bar{c}_2) > 0 \\ \text{» } \nu = 1 & \text{si } I(c_1 \bar{c}_2) < 0. \end{array}$$

Nous devons remarquer que si nous avons sur la face $\lambda = 0$ un point P dont les coordonnées soient $(0, \mu, \nu)$, nous aurons sur la face opposée $\lambda = 1$ un point P' dont les coordonnées seront $(1, \mu, \nu)$. De plus les points P et P' seront de signe contraire.

De même à tout point P situé sur l'une des faces $\mu = 0, \nu = 0$, correspondra un autre point P de signe contraire situé sur la face opposée.

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\iint \frac{\frac{d\Phi}{d\eta} d\xi d\eta}{\Phi}$$

et étendons-la à toute la surface de notre cube.

Soient N_1 et N_2 les nombres des points P positifs et négatifs situés sur la face $\lambda = 0$. Soient de même N'_1 et N'_2 , N''_1 et N''_2 les nombres des points P positifs et négatifs situés sur la face $\mu = 0$ et sur la face $\nu = 0$.

L'intégrale double se ramène alors à l'intégrale simple:

$$\int 2i\pi d\xi$$

prise le long des diverses courbes $\Phi = 0$. Celle-ci est évidemment égale à:

$$2i\pi(\sum \xi_1 - \sum \xi_2).$$

$\sum \xi_1$ représente la somme des ξ relatifs aux divers points P positifs, $\sum \xi_2$ la somme des ξ relatifs aux divers points P négatifs.

Or à chacun des N_1 points P positifs de la face $\lambda = 0$, correspondent N_1 points P négatifs appartenant à la face $\lambda = 1$. La différence des ξ est égale à a_1 .

L'intégrale est donc égale à:

$$(5) \quad 2i\pi[(N_1 - N_2)a_1 + (N'_1 - N'_2)a_2 + (N''_1 - N''_2)a_3]$$

D'autre part considérons deux points correspondants des deux faces opposées $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Soient ψ_1 et ψ_0 les valeurs de $\frac{d\Phi}{\Phi d\eta}$ en ces deux points, on aura:

$$\psi_1 - \psi_0 = \beta_1$$

de sorte que l'intégrale double étendue aux deux faces $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, se ramène à l'intégrale double:

$$\beta_1 \iint d\xi d\eta$$

étendue à la face $\lambda = 0$ toute seule.

Cette intégrale est alors égale à

$$\beta_1(a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

On trouverait des expressions analogues pour les autres faces de telle sorte que l'intégrale totale est égale au déterminant:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est donc égal à l'expression (5).
D'une façon plus générale, posons:

$$\begin{aligned} \xi &= a_i \lambda + a_k \mu \\ \eta &= b_i \lambda + b_k \mu \end{aligned}$$

et envisageons alors l'équation:

$$\Phi(a_i \lambda + a_k \mu, b_i \lambda + b_k \mu) = 0.$$

On pourra satisfaire à cette équation d'un certain nombre de manières par des valeurs de λ et de μ réelles et comprises entre 0 et 1. Parmi ces solutions qui correspondent à divers points P , distinguons celles pour lesquelles la partie imaginaire de $c_i \bar{c}_k$ est positive, de celles pour lesquelles cette partie imaginaire est négative. Soit ensuite P_{ik} l'excès du nombre des solutions de la première sorte sur le nombre des solutions de la deuxième sorte. D'après cette définition, on aura:

$$\begin{aligned} P_{ik} &= -P_{ki}, & P_{ii} &= 0, \\ P_{23} &= N_1 - N_2, & P_{31} &= N'_1 - N'_2, & P_{12} &= N''_1 - N''_2. \end{aligned}$$

Remarquons de plus que la partie imaginaire de $c_i \bar{c}_k$ peut se mettre sous une autre forme:

$$I(c_i \bar{c}_k) = \left| \frac{d\Phi}{d\xi} \right|^2 I \left[\frac{d\Phi \overline{d\Phi}}{d\lambda d\mu} \right].$$

Elle est donc de même signe que la partie imaginaire de

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} \frac{d\bar{\Phi}}{d\mu}.$$

De plus nous pouvons écrire:

$$2i\pi(a_1 P_{23} + a_2 P_{31} + a_3 P_{12}) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

On aurait de même par symétrie:

$$2i\pi(a_2 P_{34} + a_3 P_{42} + a_4 P_{23}) = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$2i\pi(a_3 P_{41} + a_4 P_{13} + a_1 P_{34}) = \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 \\ a_3 & a_4 & a_1 \\ b_3 & b_4 & b_1 \end{vmatrix}$$

et une quatrième équation analogue.

On peut réunir ces quatre équations en une seule, en écrivant symboliquement:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 2i\pi \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 & \bar{\omega}_3 & \bar{\omega}_4 \end{vmatrix}.$$

Dans cette identité x_1, x_2, x_3, x_4 sont des quantités quelconques. Quant aux ω et aux $\bar{\omega}$ ce sont des quantités qui ont un sens symbolique. Nous convenons de remplacer dans le développement du second membre:

$$\omega_i \bar{\omega}_k - \omega_k \bar{\omega}_i$$

par

$$P_{ik}.$$

Comme rien ne distingue ξ de γ nous pouvons écrire de même:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 2i\pi \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 & \bar{\omega}_3 & \bar{\omega}_4 \end{vmatrix}$$

Nous écrirons plus simplement encore les équations symboliques (6) et (7) de la façon suivante en écrivant les déterminants sous une forme abrégée:

$$(6') \quad (x\beta ab) = 2i\pi(xa\omega\bar{\omega})$$

$$(7') \quad (x\alpha ba) = 2i\pi(xb\omega\bar{\omega}).$$

Posons

$$P_{ik} = h(\alpha_i a_k - \alpha_k a_i) + k(\beta_i \beta_k - \beta_k \beta_i)$$

et cherchons à déterminer h et k par les équations (6) et (7). Il vient:

$$(xa\omega\bar{\omega}) = h(xa\alpha a) + k(xa\beta b) = -k(x\beta ab)$$

$$(xb\omega\bar{\omega}) = h(xb\alpha a) + k(xb\beta b) = -h(x\alpha ba)$$

de sorte que les équations (6) et (7) donnent:

$$h = k = -\frac{1}{2i\pi}$$

d'où

$$P_{ik} = \frac{M_{ik}}{2i\pi} = m N_{ik}.$$

Nous avons donc une solution des équations (6) et (7). Je dis qu'il n'y en a pas d'autres, du moins en nombres entiers.

En effet s'il y en avait deux, on pourrait trouver des nombres entiers P'_{ik} satisfaisant aux huit équations:

$$a_i P'_{ki} + a_k P'_{ii} + a_i P'_{ik} = 0$$

$$b_i P'_{ki} + b_k P'_{ii} + b_i P'_{ik} = 0.$$

En d'autres termes si l'on pose symboliquement:

$$P'_{ik} = \omega'_i \bar{\omega}'_k - \omega_k \bar{\omega}'_i$$

et que l'on envisage la forme bilinéaire:

$$(xy\omega'\bar{\omega}')$$

cette forme bilinéaire s'annulera identiquement quand on y fera soit:

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \quad y_3 = a_3, \quad y_4 = a_4$$

soit:

$$y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \quad y_3 = b_3, \quad y_4 = b_4.$$

Faisons subir à x et à y , en même temps qu'à a et à b un changement linéaire de variable en faisant:

$$x_i = \sum q_{ik}x'_k, \quad y_i = \sum q_{ik}y'_k, \quad a_i = \sum q_{ik}a'_k, \quad b_i = \sum q_{ik}b'_k.$$

Nous choisirons ce changement de variables (où les q sont des entiers) de façon à réduire la forme bilinéaire $(xy\omega'\bar{\omega}')$ qui s'écrira alors:

$$A(x'_1y'_2 - x'_2y'_1) + B(x'_3y'_4 - x'_4y'_3).$$

On devrait donc avoir identiquement:

$$\begin{aligned} A(x'_1a'_2 - x'_2a'_1) + B(x'_3a'_4 - x'_4a'_3) &= 0 \\ A(x'_1b'_2 - x'_2b'_1) + B(x'_3b'_4 - x'_4b'_3) &= 0. \end{aligned}$$

Cela ne peut avoir lieu que si A et B sont nuls; (mais alors la forme bilinéaire est identiquement nulle et par conséquent tous les P'_{ik} sont nuls C. Q. F. D.) ou encore si un seul des coefficients A et B s'annule, A par exemple, mais alors il faut encore que:

$$a'_3 = a'_4 = b'_3 = b'_4 = 0.$$

La fonction abélienne n'aurait plus alors que deux périodes; la seconde hypothèse est donc inadmissible.

On doit donc conclure de cette discussion que l'unique solution des équations (6) et (7) c'est:

$$P_{ik} = mN_{ik}.$$

Dans le cas particulier où la fonction Φ se réduit à une fonction θ d'ordre m , et où l'on a:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2i\pi, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_4 &= b_3, \\ b_1 &= 0, & b_2 &= 2i\pi, & \dots & \\ \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 &= m, & \alpha_4 &= 0 \\ \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= 0, & \beta_3 &= 0, & \beta_4 &= m \end{aligned}$$

tous les N_{ik} sont nuls, excepté N_{31} et N_{42} qui sont égaux à 1.

Tous les P_{ik} sont donc nuls excepté P_{31} et P_{42} qui sont égaux à m .

Si nous reprenons les notations N_1, N_2, N'_1, N'_2 etc. de telle sorte que:

$$P_{23} = N_1 - N_2, \quad P_{31} = N'_1 - N'_2, \quad \dots$$

nous aurons

$$N_1 = N_2$$

et

$$N'_2 - N'_1 = m.$$

On pourrait trouver plus intéressant de connaître le nombre $N'_1 + N'_2$, c'est à dire le nombre total des P , au lieu d'avoir seulement l'excès du nombre des points P positifs sur celui du nombre des points P négatifs.

Nous avons toutefois un renseignement sur ce nombre $N'_1 + N'_2$. Il est plus grand que m et de même parité que m , car il est clair que:

$$N'_2 + N'_1 > N_2 - N_1; \quad N'_2 + N'_1 \equiv N_2 - N_1 \pmod{2}.$$

On pourrait arriver à tous les résultats qui précèdent par l'emploi des différentielles totales, cela serait même plus simple; mais je n'ai voulu donner ici qu'une application de la théorie des intégrales doubles.

Paris, 24 Décembre 1886.