# ÜBER ORTHOGONALE SUBSTITUTIONEN

VON

E. NETTO
in BERLIN.

Herr T. J. Stieltjes hat im sechsten Bande der Acta Mathematica, S. 319—320 ein Theorem über orthogonale Substitutionen für den Fall von zwei und von drei Variablen ausgesprochen und die Vermutung beigefügt, dasselbe gelte auch für vier Variable. Im Folgenden soll untersucht werden, wann dasselbe allgemein für $n$ Veränderliche gilt, ob es eine Erweiterung zulässt, und wie die in der Voraussetzung ausgesprochenen Bedingungen allgemein festgestellt werden können. Die Frage lautet: *Bedeuten* $a_{k\lambda}$, $A_{k\lambda}$ $(k, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$ *die Coefficienten zweier orthogonalen Substitutionen von der Determinante* $+1$, *und hat*

$$(1) \qquad | a_{k\lambda} + A_{k\lambda} | \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

*den Wert Null, wann verschwinden dann gleichzeitig alle Subdeterminanten der* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung von* (1)?

Nach den Angaben des Herrn Cayley können die Coefficienten $c_{k\lambda}$ einer orthogonalen Substitution folgendermassen dargestellt werden: Werden die Grössen $b_{k\lambda}$, welche endliche Werte haben sollen, den Bedingungen unterworfen, dass

$$b_{k\lambda} + b_{\lambda k} = 0 \qquad (k \gtrless \lambda)$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = \ldots = b_{nn} = \omega$$

sei, setzt man ferner

$$(2) \qquad | b_{k\lambda} | = d,$$

und bezeichnet mit $\beta_{k\lambda}$ die Adjuncte von $b_{k\lambda}$ in $d$, dann ist

$$c_{k\lambda} = \frac{2\omega\beta_{k\lambda}}{d} \qquad (k \gtrless \lambda)$$

$$c_{kk} = \frac{2\omega\beta_{kk}}{d} - 1$$

oder, mit Hülfe des bekannten KRONECKER'schen Zeichens zusammengefasst

$$(3) \qquad c_{k\lambda} = \frac{2\omega\beta_{k\lambda}}{d} - \varepsilon_{k\lambda}.$$

Wir betrachten nun die Determinante

$$(4) \qquad | c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda} | = \left| \frac{2\omega\beta_{k\lambda}}{d} \right|$$

sowie deren Subdeterminanten. Dann erkennt man sofort, dass die erstere den Wert

$$(5) \qquad \frac{2^n \omega^n}{d}$$

besitzt, sowie unter Anwendung eines bekannten JACOBI'schen Satzes dass jede Subdeterminante $(n-\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung auf die Form

$$(6) \qquad \frac{2^{n-\alpha}\omega^{n-\alpha}}{d} | c_{k'\lambda'} | \qquad \begin{pmatrix} k' = i_1, i_2, \ldots, i_\alpha \\ \lambda' = j_1, j_2, \ldots, j_\alpha \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann.

Weiter ist durch die schon erwähnten CAYLEY'schen Untersuchungen bekannt, dass $d$ nach Potenzen von $\omega$ entwickelt die Gestalt annimmt

$$(7) \qquad d = \omega^n + \omega^{n-2}\Sigma D_2 + \omega^{n-4}\Sigma D_4 + \ldots;$$

hierbei wird $\Sigma D_m$ für einen ungeraden Index $m$ verschwinden, für einen geraden gleich der Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten sein, also beispielsweise

$$(8) \qquad \Sigma D_2 = \Sigma b_{k\lambda}^2. \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \lambda = 2, 3, \ldots, n \\ k < \lambda \end{pmatrix}$$

Hieraus erkennt man, dass (4) nur für $\omega = 0$ und dafür auch wirklich verschwindet, sobald nicht sämtliche $b_{k\lambda}$ $(k < \lambda)$ gleich Null sind, in welchem Falle $c_{k\lambda} = 0$ $(k \gtrless \lambda)$, $c_{kk} = 1$, und jedes Element von (4) gleich Null wird. Es wird nämlich wegen (8) die Determinante $d$ höchstens durch $\omega^{n-2}$ teilbar; folglich behält (5), und für $\alpha = 1$ auch (6) sicher den Factor $\omega$ in Zähler. Im Allgemeinen, d. h. wenn nicht gleichzeitig die Quadratsummen $\Sigma D_4$, $\Sigma D_6$, ... Null werden, verschwinden auch noch die weiteren Subdeterminanten, und zwar bei einem geraden $n$, wobei $\Sigma D_n$ das letzte Glied von (7) wird, alle d. h. auch die einzelnen Elemente; bei einem ungeraden $n$ alle Subdeterminanten zweiter Ordnung, da das letzte Glied in (7) jetzt $\omega \Sigma D_{n-1}$ wird, und also $\omega^1$ sich im Zähler und Nenner hebt.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die beiden orthogonalen Substitutionen

$$(9)\qquad \begin{aligned} x_k &= a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \ldots + a_{kn}y_n \\ \xi_k &= A_{k1}y_1 + A_{k2}y_2 + \ldots + A_{kn}y_n \end{aligned} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

$$\Sigma x_k^2 = \Sigma \xi_k^2 = \Sigma y_k^2,$$

aus denen nach Jacobi folgt

$$y_k = A_{1k}\xi_1 + A_{2k}\xi_2 + \ldots + A_{nk}\xi_n,$$

und folglich, wenn wir zur Abkürzung

$$(10)\qquad \sum_\lambda a_{k\lambda}A_{\mu\lambda} = c_{k\mu} \qquad (k, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

setzen, die weitere orthogonale Substitution

$$(11)\qquad x_k = c_{k1}\xi_1 + c_{k2}\xi_2 + \ldots + c_{kn}\xi_n.$$

*Wir nehmen nun an,* dass diese $c_{k\lambda}$ durch die Formeln (3) dargestellt werden können, und untersuchen das Gleichungssystem

$$(12)\qquad x_k + \xi_k = c_{k1}\xi_1 + c_{k2}\xi_2 + \ldots + (c_{kk} + 1)\xi_k + \ldots + c_{kn}\xi_n,$$

dessen Determinante durch (4) dargestellt ist. Wir können dann die oben abgeleiteten Sätze hier verwenden; verschwindet die Determinante von

(12), dann ist $\omega = 0$, und sicher sind auch alle Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $|c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}|$ gleichfalls Null; im Allgemeinen werden sogar bei geradem $n$ alle Elemente $c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}$ verschwinden, bei ungeradem $n$ alle Determinanten zweiter Ordnung, welche aus diesen Elementen gebildet werden können. Wir nehmen an, dass die Subdeterminanten der $(n-\alpha)^{\text{ten}}$ Ordnung die ersten seien, bei wachsendem $\alpha$, die nicht sämtlich verschwinden; dann ist das System der $x_k + \xi_k$ nach KRONECKER'scher Ausdrucksweise vom »Range» $(n - \alpha)$, und zwar ist das System $\alpha$-fach unbestimmt. Es können somit $\alpha$ der Grössen $x_k + \xi_k$ linear durch die übrigen $(n - \alpha)$ ausgedrückt werden.

Nun folgt weiter aus den beiden ersten Gleichungen von (9)

$$(13) \qquad x_k + \xi_k = (a_{k1} + A_{k1})y_1 + (a_{k2} + A_{k2})y_2 + \ldots + (a_{kn} + A_{kn})y_n,$$

und wenn nun die Determinante (1) der rechten Seite verschwindet, dann ist das System der $x_k + \xi_k$ mindestens einfach unbestimmt; also ist die Determinante (4) von (12) gleich Null; *wenn also das System* $\sum\limits_{\lambda} a_{k\lambda} A_{\mu\lambda}$ *durch die CAYLEY'schen Formeln darstellbar ist, dann sind die Subdeterminanten der* $(n-\alpha)^{\text{ten}}$ *Ordnung von* (1) *die ersten, welche nicht sämtlich verschwinden; dabei ist* $\alpha$ *mindestens zwei. Im Allgemeinen werden dann für ein gerades* $n$ *sämtliche Elemente* $a_{k\lambda} + A_{k\lambda}$ *verschwinden, für ein ungerades* $n$ *sämtliche aus diesen Elementen gebildeten Subdeterminanten zweiter Ordnung.*

Wenn bei geradem $n$ der Wert $A_{k\lambda} = - a_{k\lambda}$ ist, dann werden die beiden Substitutionen (9) sich nur durch die Vorzeichen von einander unterscheiden, und also nur in diesem trivialen Falle kann die Voraussetzung unseres Satzes sich erfüllen.

Bei ungeradem $n$ und $|c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}| = 0$ muss sein

$$\begin{vmatrix} a_{11} + A_{11}, & a_{1k} + A_{1k} \\ a_{\lambda 1} + A_{\lambda 1}, & a_{\lambda k} + A_{\lambda k} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{a_{\lambda 1} + A_{\lambda 1}}{a_{11} + A_{11}} = \frac{a_{\lambda 2} + A_{\lambda 2}}{a_{12} + A_{12}} = \ldots = \frac{a_{\lambda n} + A_{\lambda n}}{a_{1n} + A_{1n}} = \rho_\lambda$$

$$a_{\lambda 1} + A_{\lambda 1} = \rho_\lambda(a_{11} + A_{11}), \quad \ldots, \quad a_{\lambda n} + A_{\lambda n} = \rho_\lambda(a_{1n} + A_{1n})$$

$$(14) \quad A_{\lambda 1} = \rho_\lambda(a_{11} + A_{11}) - a_{\lambda 1}, \quad \ldots, \quad A_{\lambda n} = \rho_\lambda(a_{1n} + A_{1n}) - a_{\lambda n},$$

und sonach wird

$$(15) \qquad |A_{k\lambda}| = \begin{vmatrix} A_{11} & , A_{12} & , \dots \\ \rho_2(a_{11}+A_{11})-a_{21}, & \rho_2(a_{12}+A_{12})-a_{22}, & \dots \\ \rho_3(a_{11}+A_{11})-a_{31}, & \rho_3(a_{12}+A_{12})-a_{32}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Wir wollen nun die Bedingungen für $\rho_2$, $\rho_3$, ... aufsuchen, dafür dass die rechte Seite in (15) eine orthogonale Determinante wird. Man findet leicht, dass

$$(16) \qquad \rho_\lambda = \frac{a_{\lambda 1}A_{11} + a_{\lambda 2}A_{12} + \dots + a_{\lambda n}A_{1n}}{1 + a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}} \qquad (\lambda = 2, 3, \dots, n)$$

die einzigen Bedingungen, sobald die Determinante $|a_{k\lambda}|$ orthogonal giebt, und die Bedingung erfüllt ist

$$(17) \qquad A_{11}^2 + A_{12}^2 + \dots + A_{1n}^2 = 1.$$

Es fragt sich jetzt lediglich noch, ob die Determinante (15) den Wert $+1$ oder den Wert $-1$ besitzt. Durch einfache Umformung von (15) kommt man auf den mit $(-1)^{n-1}$ multiplicirten Wert von $|a_{k\lambda}|$ zurück, so dass also, wie zu erwarten stand, für ein ungerades $n$ die Determinante den Wert $+1$, für ein gerades $n$ dagegen den Wert $-1$ besitzt. Es sind also für ungerade $n$ wirklich alle Bedingungen erfüllt. —

Nach den Angaben des Herrn Cayley (Crelle's Journal 32, p. 120), denen z. B. auch Herr Baltzer (*Determinanten,* 4. Aufl., p. 175) gefolgt ist, könnte es scheinen, als ob die Annahme, dass die $c_{k\lambda}$ durch die Formeln (3) darstellbar sind, stets erfüllt sei, d. h. als ob dieselben eine allgemeine Darstellung der orthogonalen Systeme von der Determinante $+1$ gäben. Dies ist aber, wie ich einer gütigen Mitteilung des Herrn L. Kronecker entnehme, nicht der Fall. Denn wie man sofort ersieht, kann man in einem durch (3) erlangten Systeme die Vorzeichen einer geraden Anzahl von Zeilen ändern, ohne dass seine wesentlichen Eigenschaften verloren gehen, und ohne dass es möglich wäre, dieses neue System durch endliche Werte von $b_{k\lambda}$ mittels (3) zu erreichen.

*Nehmen wir an*, dass in den ersten $2m$ Zeilen die Zeichen geandert seien, dann wird in diesen zwar $c_{kk} - \varepsilon_{kk}$ aber nicht $c_{kk} + \varepsilon_{kk}$ durch $\omega$ teilbar; deshalb enthält $d$ nur den Factor $\omega^{n-2m}$, und die Subdeterminanten der Ordnung $n - \alpha$ haben nur den Factor $\omega^{n-2m-\alpha}$. Setzt man $(\omega:d)^n$ aus $|c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}|$ heraus, entwickelt nach Potenzen von $d:\omega$ und wendet die Sätze über Subdeterminanten conjugirter Systeme an, so findet sich als Erweiterung eines, mir von Herrn KRONECKER mitgeteilten Satzes, die Gleichung

$$(4\text{a}) \qquad |c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}| = \frac{2^n \omega^{n-2m}}{d} |(1 - \varepsilon_{\mu\nu}) b_{\mu\nu}|. \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, 2m)$$

Hieraus folgt für $n = 3$, $m = 1$, dass ein $b_{\mu\nu} = 0$ sei, und dadurch die Richtigkeit des STIELTJES'schen Theorems; für $n = 4$, $m = 2$ oder $4$, dass bei

$$|(1 - \varepsilon_{\mu\nu}) b_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \text{ oder } 1, 2, 3, 4)$$

$|c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}|$ verschwinden kann, ohne dass die Subdeterminanten dritter Ordnung es tun.

Wenn man aber in diesem allgemeinen Falle in die ersten $2m$ Zeilen $c_{kk} - \varepsilon_{kk}$ setzt, dann gilt wieder (3), (4); ändert man also in den entsprechenden Zeilen von (12) das Vorzeichen von $\xi_k$, dann ergiebt sich wie auf Seite 4 der allgemeine Satz: *In der Determinante* $|a_{k\lambda} + \delta_k A_{k\lambda}|$ *kann* $\delta_k = +1$ *oder* $= -1$ *so gewählt werden, dass sie bei geradem* $n$ *nur verschwinden kann, wenn alle Elemente, bei ungeradem* $n$, *wenn alle Subdeterminanten zweiter Ordnung gleich Null sind.*

Berlin im Dezember 1886.