AUSZUG AUS EINEM BRIEFE DES HERRN BIEBERBACH AN DEN HERAUSGEBER.

Frankfurt am Main 11. Mai 1919.

Sehr geehrter Herr Kollege!

Im zweiten und dritten Bande der »Mathematische Zeitschrift», dieses im Kriege neu gegründeten Deutschen Journals, habe ich zwei Untersuchungen veröffentlicht, bei welchen Ihre $E_a(z)$-Funktionen eine wichtige Rolle spielen. Namentlich die zweite dieser Arbeiten dürfte Ihr Interesse finden. Gibt sie doch eine Vertiefung des berühmten PICARD'schen Satzes, zu dem die Mathematiker so vieler Nationen Beiträge geliefert haben. So möchte ich mir denn erlauben, Ihnen in den folgenden Zeilen in Kürze meine Ergebnisse darzulegen und meine Methode kurz skizzieren, zumal ich nicht weiss, inwieweit die mathematische Zeitschrift im Ausland zugänglich ist.

Wie PICARD im Jahre 1879 entdeckte, besitzen ganze transcendente Funktionen in jeder Umgebung des Unendlichen höchstens einen Ausnahmewert. Sie nehmen also alle Werte mit höchstens einer Ausnahme in jeder Umgebung des Unendlichen unendlich oft an. Ich habe nun gefunden, dass eine gleiche Aussage schon für Winkelräume gilt, deren Oeffnung eine gewisse von der Ordnung der Funktion abhängige Schranke überschreitet. So nimmt z. B. die Funktion e^z in der Halbebene $\Re(z) > 0$ keinen Wert vom Betrag Eins an, während sie in jedem diese Halbebene umfassenden Winkelraum nur noch den einen Ausnahmewert Null besitzt. Dies Beispiel illustriert meinen allgemeinen Satz:

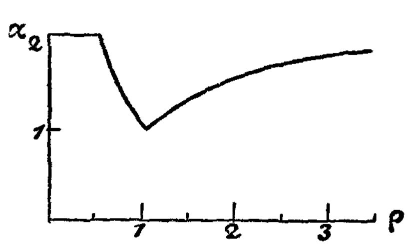
Jede ganze Funktion der Ordnung $\varrho \geqq 1$ besitzt in jedem Winkelraum, dessen Oeffnung $\pi \frac{2\varrho - 1}{\varrho}$ übersteigt, höchstens einen Ausnahmewert; ist ihre Ordnung zwischen $1/2$ und 1 gelegen $\left(\frac{1}{2} \leqq \varrho \leqq 1\right)$, so besitzt kein Winkelraum einer $\frac{1}{\varrho}\pi$ übersteigenden Oeffnung mehr als einen Ausnahmewert.

Die in diesem Satze enthaltenen Schranken für die Oeffnungen $\alpha\pi$ der Winkelräume in Abhängigkeit von ϱ habe ich in der beistehenden Figur veranschaulicht.

Hinsichtlich der Methode meiner Untersuchung möchte ich mich auf die folgenden Andeutungen beschränken. Ich stütze mich auf die scharfe Fassung, die P. Lévy[1] einem berühmten Schottky'schen Satz gegeben hat: Der Satz handelt von dem Wachstum einer analytischen Funktion, die in $|z| < 1$ regulär ist und die Werte Null und Eins auslässt. Durch eine einfache Abbildung ziehe ich daraus den Schluss, dass

$$|f(z)| = O\left(e^{|z|^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}\right) \text{ für jedes } \varepsilon > 0$$

ist, wenn $f(z)$ für $|\arg z| < \alpha\frac{\pi}{2}$ regulär ist und zwei Ausnahmewerte in diesem Winkelraum besitzt. Ein bekannter schon heute klassischer ausserordentlich fruchtbarer Satz von Phragmén und Lindelöf[2] erlaubt es, hieraus den vorhin angegebenen Satz zu erschliessen.



Ich habe weiter gezeigt, dass die aus der Figur und aus dem Wortlaut des Satzes ersichtlichen Schranken für alle Ordnungen die genauen sind. Namentlich mit Hülfe Ihrer $E_\alpha(z)$-Funktionen habe ich Beispiele gebildet, bei welchen gerade die angegebenen Winkelräume zwei Ausnahmewerte besitzen. Als Beispiel für die Halbebene erwähnte ich schon vorhin $E_1(z) = e^z$. Für $\varrho > 1$ lässt

$$E_{1/\varrho}(z) - 1$$

also eine Funktion der Ordnung ϱ in $|\arg z| \leqq \frac{2\varrho - 1}{2\varrho}\pi$ die beiden Werte Null und Eins aus. Für $\frac{1}{2} < \varrho \leqq 1$ besitzt

$$4E_{1/\varrho}(z)$$

die gleiche Eigenschaft in

$$|\arg z| \leqq \frac{1}{2\varrho}\pi.$$

---

[1] Bull. de la Soc. math. de France, Bd. 40.

[2] Vergl. diese Acta, Bd. 28, 31.

Man möchte wohl nun erwarten, dass für $\varrho \leqq \frac{1}{2}$ die Funktionen

$$E_{1/\varrho}(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\varrho}\nu\right)}$$

deren Ordnung ja dann $\frac{1}{2}$ nicht übertrifft, in der durch die negative reelle Achse begrenzten Ebene zwei Ausnahmewerte besitzen. In der Tat sieht man leicht, dass

$$E_2(z) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}\right)$$

nur auf der negativen reellen Achse Werte zwischen Null und Eins (diese Grenzen eingeschlossen) annimmt. Und weiter hat WIMAN in seiner Arbeit[1] über die Nullstellen der $E_{\alpha}(z)$-Funktionen mitgeteilt, dass für $\alpha > 2$ alle Nullstellen von $E_{\alpha}(z)$ auf der negativen reellen Achse liegen. Es wäre interessant, wenn sich wirklich zeigen liesse, dass dies und meine weitergehende Vermutung zuträfe. Ich habe die dazu nötigen mühsamen Betrachtungen nicht ausgeführt, habe vielmehr mit Hülfe der HARDY'schen P-Funktionen[2] die erwünschten Beispiele gewonnen. Setzt man für $\sigma > 2$

$$P_{\sigma}(z) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n^{\sigma}}\right)$$

so ist dies eine Funktion der Ordnung $\frac{1}{\sigma}$. Man kann leicht sehen, dass man die Zahl μ so wählen kann, dass die sämtlichen Null- und Einsstellen von

$$1 + \mu P_{\sigma}(z)$$

auf der negativen reellen Achse liegen. Setzt man weiter

$$P_{\infty}(z) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{e^{n}}\right)$$

so hat man bei passend gewähltem μ in

$$1 + \mu P_{\infty}(z)$$

---

[1] Diese Acta, Bd. 29.

[2] The quarterly journal, Bd. 37.

eine Funktion nullter Ordnung, deren sämtliche Null- und Einsstellen negativ reell sind. Mit Hülfe der von Ihnen und anderen angegebenen Funktionen unendlicher Ordnung, welche auf allen Geraden der Ebene mit eventueller Ausnahme der negativen reellen Achse den Konvergenzwert Null haben, kann man weiter Beispiele von Funktionen unendlicher Ordnung bilden, die in beliebig grossen Winkelräumen zwei Ausnahmewerte besitzen. Das gilt z. B. für die LINDELÖF'sche Funktion

$$F_\beta(z) = \sum_0^\infty \left(\frac{-z}{\log(n+\beta)}\right)^n \qquad (\beta > 2),$$

deren Nullstellen sich nach LINDELÖF asymptotisch der negativen reellen Achse nähern. Man kann beliebig grosse Winkelräume angeben, in welchen die Funktion die Ausnahmewerte Null und Eins besitzt. (Vergl. LINDELÖF, Calcul des résidus S. 121.) (Vergl. auch den Schluss dieses Briefes.)

Die Familie der Funktionen, welche in einem Bereiche die Werte Null und Eins auslassen, gehört zu den von MONTEL sogenannten normalen Familien. Eine weitere neuerdings viel untersuchte normale Familie ist die, deren Glieder einen gegebenen Bereich schlicht abbilden, die also darin keinen Wert mehr als einmal annehmen. Besitzen schon alle normalen Familien viele verwandte Eigenschaften, so ist die Analogie gerade zwischen den beiden eben genannten Familien sehr gross. So habe ich denn auch in der schon eingangs erwähnten Arbeit im zweiten Bande der mathematischen Zeitschrift für die schlichte Abbildung von Winkelräumen ganz ähnliche Sätze gewonnen. An die Stelle der LÉVY'schen Formulierung des SCHOTTKY'schen Satzes tritt hier für die in $|z| < 1$ schlichte Funktion $f(z)$ die PICK'sche Verzerrungsformel

$$|f(z)| \leqq |f'(0)| \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \qquad (f(0) = 0),$$

die schon PLEMELJ auf der Wiener Versammlung von 1913 ohne die Exponentenbestimmung angegeben hat. Auch PICK gibt in den Leipziger Berichten von 1915 noch keine Exponentenbestimmung. Dieselbe habe ich selbst erst in den Berliner Berichten von 1916 gegeben. Ohne Beweis gibt fast gleichzeitig GRONWALL dieselbe Verzerrungsformel in den Pariser Comptes rendus von 1916 an. Man kann aus dieser Formel schliessen, dass eine Funktion $f(z)$, die in $|\arg z| < \frac{\alpha}{2}\pi$ regulär ist und diesen Winkel schlicht abbildet für jedes $\varepsilon > 0$ der Bedingung

$$|f(z)| = O\left(|z|^{\frac{2}{\alpha}+\varepsilon}\right)$$

genügen muss. Die Verwendung des PHRAGMÉN—LINDELÖF'schen Satzes führt dann wieder zu dem folgenden Ergebnis: Eine jede ganze Funktion der Ordnung ϱ nimmt in jedem Winkelraum, dessen Oeffnung $\frac{2\varrho-1}{\varrho}\pi$ übersteigt, einzelne Werte mehrfach an. Die Funktionen

$$z + E_{1/\varrho}(z)$$

aber bilden für $\varrho > \frac{1}{2}$ einen passend gewählten Winkel der Oeffnung $\frac{2\varrho-1}{\varrho}\pi$ schlicht ab. Nur für Funktionen einer $\frac{1}{2}$ übertreffenden Ordnung kann es also schlicht abbildbare Winkelräume geben. Alle Funktionen, deren Ordnung $\frac{1}{2}$ nicht übertrifft, nehmen in jedem Winkelraum einzelne Werte mehrfach an.

Im Gebiete der Funktionen unendlicher Ordnung gibt es Funktionen, die beliebige Winkelräume einer an 2π nicht heranreichenden Oeffnung schlicht abbilden. Nach LINDELÖF (Calcul des résidus S. 121) gehört nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl M_ε derart, dass im Winkelraum $|\arg z| < \pi - \varepsilon$

$$|F_3(z)| < M_\varepsilon$$

gilt. Daher bildet

$$z + F_3(z)$$

den Winkelraum $|\arg(z - M_\varepsilon)| < \pi - \varepsilon$ schlicht ab, und nimmt überdies, wenn man nur $M_\varepsilon > 1$ wählt, in demselben weder den Wert Null noch den Wert Eins an.

Bieberbach.