SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DU PREMIER ORDRE.

Par

MICHEL GHERMANESCU

à TIMIŞOARA, Roumanie.

La relation simple, existant entre trois intégrales d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, ainsi que celle qui existe entre quatre intégrales de l'équation de *Riccati*, ont provoqué des recherches sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale peut s'exprimer à l'aide d'une constante arbitraire et d'un nombre déterminé d'intégrales particulières distinctes. Ces recherches montrent que le nombre des intégrales d'une équation du premier ordre, liées par une relation dépendant d'une constante arbitraire, est *quatre* au plus et que l'équation correspondante est réductible à une équation linéaire lorsque ce nombre est inférieur à quatre ou à celle de Riccati lorsqu'il est égal à quatre.

A notre connaisance, c'est LEO KÖNIGSBERGER qui, le premier[1], a abordé ce problème; viennent ensuite, dans l'ordre, MM. L. TCHAKALOFF[2] et G. MIHOC[3], qui, chacun, ignorant les recherches antérieures, sont parvenus, par des voies différentes — dont nous citerons l'élégante démonstration donnée par M. G. Mihoc à l'aide de la Théorie des groupes — aux conclusions citées.

Mais les méthodes de recherche employées dans tous les cas précédents exigent la *dérivabilité* des fonctions rencontrées dans les développements des démonstrations; d'autre part, je me suis aperçu que la même conclusion subsistait,

---

[1] Über die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten, *Acta mathematica*, t. 3, 1883, p. 1—48.

[2] Le equazioni di Riccati, *Giornale di Battaglini*, V. LXIII, serie 3, 1925. Signalons aussi E. PASCAL, Atti della R. Accademia delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli, vol. XVII, serie 2, n. 3, 1924.

[3] Asupra proprietăţilor generale ale variabilelor statistice interdependente, (en roumain), *Bull. Soc. roum. Math.* t. 37, 1935.

du moins dans quelques cas particuliers, pour les équations *fonctionnelles* du premier ordre. J'ai été amené ainsi à reprendre ce problème dans toute sa généralité, en imposant seulement la condition de *continuité* aux fonctions rencontrées dans les démonstrations qui, elles, sont différentes des précédentes, bien entendu, étant basées exclusivement sur la résolution de certaines équations fonctionnelles, se rattachant à des types que nous avons étudiés auparavant.[1]

Ajoutons aussi que notre raisonnement, par la nature-même de la question, est indépendant du fait qu'il s'agît d'une équation fonctionnelle ou différentielle, de sorte qu'il est valable aussi pour les équations différentielles du premier ordre.

Ce mémoire est divisé en trois parties: dans la première, nous étudions les équations du premier ordre dont deux ou trois intégrales sont *liées* par une relation dépendant d'une certaine fonction que nous nommons *itérative*; dans la deuxième, nous étudions les équations dont *quatre* intégrales sont liées par une relation de même nature et dans la dernière, nous étudions le cas d'un nombre supérieur à quatre d'intégrales reliées de la même manière.

Quelques équations fonctionnelles d'un type spécial sont rencontrées dans ce travail: elles constituent l'extension au cas de trois ou quatre variables des équations dont s'est occupé Poincaré dans ses célèbres travaux sur les fonctions automorphes et jouissent de la propriété remarquable d'admettre une solution *algébrique*, entre autres. Je pense qu'elles sauront intéresser les chercheurs.

Avant d'entrer dans les développements de notre travail, nous estimons indispensables quelques définitions et précisions.

On appelle équation *fonctionnelle* toute relation entre la fonction inconnue $F(z)$ et les expressions obtenues en y remplaçant la variable z par des fonctions connues, telles que $F(\varphi)$, $F(\psi)$, $F(\theta)$, φ, ψ, θ, etc étant des fonctions connues de z.

Intégrer ou résoudre une équation fonctionnelle donnée revient à déterminer la fonction la plus générale satisfaisant à l'équation donnée et telle que toute autre solution de la même équation s'en déduise comme un cas particulier, sauf les solutions *singulières*, qui existent pour certaines équations fonctionnelles, comme nous l'avons montré dans un autre travail.[2]

---

[1] Sur une classe d'équations fonctionnelles linéaires, *Bull. Soc. math. de France* t. 68, 1940, p. 109—128. Voir aussi »O clasă de ecuaţii funcţionale«, *Pozitiva*, v. I, 1940, p. 121—123 (en roumain).

[2] Sur une équation fonctionnelle, *Bull. de L'Ecole Polytechnique de Timişoara*, 1941, t. 10, fasc. 3—4, p. 258—272.

Nous disons qu'une équation fonctionnelle est *d'ordre* n, lorsqu'elle contient n opérateurs fonctionnels φ, ψ, θ, indépendants entre eux ou pouvant s'en déduire les uns des autres par *itération*, par exemple,

$$\varphi = \theta_2 = \theta(\theta), \ \psi = \theta(\varphi) = \theta_3, \ \ldots \ \theta_n = \theta(\theta_{n-1}).$$

Nous appelons *constante itérative* du premier degré par rapport à la fonction θ ou plus simplement *constante itérative* la fonction de z qui demeure invariante par la substitution $(z, \theta(z))$, contrairement à la dénomination de *fonction périodique*, donnée par M. C. Popovici[1], vu que la dernière a déjà une signification dans la Science, plus restreinte que celle que nous venons de lui assigner, car elle correspond au cas particulier $\theta(z) = z + a$, a étant une constante.

L'intégrale générale d'une équation fonctionnelle d'ordre n dépend de n constantes itératives arbitraires. Réciproquement, toute fonction dépendant de n constantes itératives arbitraires satisfait à une équation fonctionnelle du n^e ordre, dont elle est, en général, l'intégrale générale.

I. Équations à trois intégrales.

1. — Considérons l'équation fonctionnelle du premier ordre

$$F(\theta) = \varphi[z, F(z)], \tag{I. 1}$$

dans laquelle la fonction $\theta(z)$ est donnée. Supposons qu'entre trois solutions absolument quelconques $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$ de cette équation il y ait une relation *unique* de la forme

$$\Phi(F_1, F_2, F_3) = u(z), \tag{I. 2}$$

$u(z)$ étant une constante itérative, c'est à dire, satisfaisant à

$$u[\theta(z)] = u(z). \tag{I. 3}$$

Si l'on change l'ordre des fonctions F_i, dans (I. 2), on obtient, par exemple,

$$\Phi(F_1, F_3, F_2) = v(z),$$

dans laquelle $v(z)$ est *nécessairement* une *constante itérative*, parce que les solutions F_i sont *quelconques*; comme la relation (I. 2) est unique, $v(z)$ dépend univoquement de $u(z)$, $v = \psi(u)$.

[1] Les équations fonctionnelles et leur parallélisme, etc, *Bull. des sc. math.* Juillet et Août, 1929.

Mais on passe de $\Phi(F_1, F_3, F_2)$ à $\Phi(F_1, F_2, F_3)$ de la même manière que de $\Phi(F_1, F_2, F_3)$ à $\Phi(F_1, F_3, F_2)$, c'est à dire, en permutant les deux dernières lettres F_2, F_3 entre elles; on a donc aussi $u = \psi(v)$. Comme u et v dépendent univoquement l'une de l'autre, on aura

$$a u v + b(u + v) + c = 0, \quad a, b, c = \text{const.} \tag{1.4}$$

En permutant les F_i de toutes les manières possibles, on trouve six formes de cette relation

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= u, & \Phi(x, z, y) &= u_1, \\ \Phi(z, y, x) &= u_2, & \Phi(z, x, y) &= u_3, \\ \Phi(y, x, z) &= u_4, & \Phi(y, z, x) &= u_5, \end{aligned} \tag{1.5}$$

qui doivent être toutes des conséquences d'une seule d'entre elles, autrement dit, les constantes itératives u_i doivent être liées par des relations de la forme (1.4).

Soit, par exemple, $u_1 = \lambda(u)$; on passe de u_2 à u_3 et de u_4 à u_5 comme de u à u_1, c'est à dire, en changeant les deux dernières lettres entre elles; on a donc

$$u_1 = \lambda(u), \quad u_3 = \lambda(u_2), \quad u_5 = \lambda(u_4). \tag{1.6}$$

En désignant par $\mu(u)$ l'opération qui permet le passage de u à u_2, c'est à dire, lorsque la deuxième lettre reste à sa place, et par $\nu(u)$ l'opération qui permet le passage de u à u_4, c'est à dire, lorsque la troisième lettre reste à sa place, on a les relations

$$u_2 = \mu(u), \quad u_4 = \mu(u_3), \quad u_5 = \mu(u_1), \tag{1.7}$$

$$u_4 = \nu(u), \quad u_5 = \nu(u_2), \quad u_3 = \nu(u_1). \tag{1.8}$$

2. — Détermination des fonctions λ, μ, ν. — Les expressions des fonctions λ, μ, ν se déduisent de (1.4); on aura

$$\lambda(u) = -\frac{b u + c}{a u + b}, \quad \mu(u) = -\frac{b' u + c'}{a' u + b'}, \quad \nu(u) = -\frac{b'' u + c''}{a'' u + b''}. \tag{1.9}$$

On ne peut pas avoir, par exemple, $\lambda(u) = \pm\,\mu(u)$, car les fonctions λ, μ, ν sont les mêmes pour toute équation fonctionnelle à trois intégrales, donc aussi pour l'équation linéaire, pour laquelle (1.2) est[1]

[1] Equations fonctionnelles linéaires du premier ordre, *Mathematica*, 1942, t. 18, p. 37—54.

$$\frac{F_1 - F_2}{F_1 - F_3} = u(z) \tag{I. 2'}$$

et pour laquelle $\lambda \neq \pm \mu$. On remarque ensuite qu'on a

$$\lambda(\mu) = \mu(\nu) = \nu(\lambda), \quad \lambda(\nu) = \nu(\mu) = \mu(\lambda), \tag{I. 10}$$

qui conduisent, avec (I. 9), à des identités, desquels on déduit les coéfficients a, b, c, etc. Nous ne donnerons pas ces calculs, élémentaires mais pénibles et dépourvus d'intérêt: nous en donnerons seulement les résultats, qui nous permettent de prendre pour les fonctions λ, μ, ν les expressions

$$\lambda(u) = \frac{1}{u}, \quad \mu(u) = 1 - u, \quad \nu(u) = \frac{u}{u - 1}. \tag{I. 11}$$

On a donc, compte tenu de (I. 6), (I. 7) et (I. 8),

$$u u_1 = 1, \quad u_2 u_3 = 1, \quad u_4 u_5 = 1, \tag{I. 12}$$

$$u + u_2 = 1, \quad u_3 + u_4 = 1, \quad u_5 + u_1 = 1, \tag{I. 13}$$

$$u + u_4 = u u_4, \quad u_2 + u_5 = u_2 u_5, \quad u_1 + u_3 = u_1 u_3, \tag{I. 14}$$

de sorte que, d'après (I. 5), la fonction $\Phi(x, y, z)$ est la solution commune du système d'équations fonctionnelles

$$\Phi(x, y, z)\, \Phi(x, z, y) = 1, \tag{I. 15}$$

$$\Phi(x, y, z) + \Phi(z, y, x) = 1, \tag{I. 16}$$

$$\Phi(x, y, z) + \Phi(y, x, z) = \Phi(x, y, z)\, \Phi(y, x, z), \tag{I. 17}$$

dont nous allons déterminer la solution continue la plus générale. Remarquons, d'abord, que les équations précédentes ne sont pas toutes distinctes, l'une étant la conséquence des deux autres. En effet, la deuxième, par exemple, devient, compte tenu de la première,

$$\Phi(x, y, z) + \frac{1}{\Phi(z, x, y)} = 1,$$

mais, d'après la deuxième-même, on a

$$\Phi(z, x, y) = 1 - \Phi(y, x, z),$$

de sorte que la relation précédente se réduit justement à (I. 17).

Nous avons ainsi à résoudre le système formé par les équations fonctionnelles (1. 15) et (1. 16). Remarquons, en premier lieu, que de (1. 15) on déduit

$$\Phi(x, s, s)\,\Phi(x, s, s) = 1,$$

donc $\Phi(x, s, s) = \pm 1$. Si $\Phi(x, y, z)$ est continue, il en est de même de $\Phi(x, s, s)$, donc cette dernière fonction ne peut prendre qu'une seule des valeurs ± 1, autrement elle est discontinue et $\Phi(x, y, z)$ aussi. Il est aussi à remarquer que, de (1. 16), on déduit encore

$$\Phi(s, s, x) = 0 \quad \text{ou} \quad \Phi(s, s, x) = 2, \tag{1. 18}$$

suivant la valeur de $\Phi(x, s, s)$.

Le système d'équations fonctionnelles (1. 15) et (1. 16) aura par conséquent deux solutions continues également générales, telles que $\Phi(x, s, s) = 1$ respectivement -1. En effet, il est facile de voir que, à toute solution Φ, telle que $\Phi(x, s, s) = 1$, il lui correspond une autre Ψ, telle que $\Psi(x, s, s) = -1$. Ces deux solutions — devant se déduire, l'une de l'autre, d'une manière univoque, autrement elles ne sont plus générales — sont liées par une relation homographique, facile à établir et qui y est

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\Phi(x, y, z) - 2}{2\,\Phi(x, y, z) - 1}. \tag{1. 19}$$

Nous pouvons déterminer donc la solution générale du système d'équations fonctionnelles (1. 15) et (1. 16), telle que $\Phi(x, s, s) = 1$, de laquelle nous déduirons celle pour laquelle $\Psi(x, s, s) = -1$, à l'aide de (1. 19).

3. — Nous pouvons commencer par résoudre l'équation fonctionnelle (1. 15), ce qui est très facile, ensuite, imposer à la solution trouvée la condition de satisfaire aussi à l'équation (1. 16). Ce procédé, suivi à la lettre, nous conduira difficilement au résultat, ainsi nous passerons par un état intermédiaire, en remarquant que toute solution commune aux équations données satisfait aussi à

$$\Phi(x, y, z)\,\Phi(y, z, x)\,\Phi(z, x, y) = -1, \tag{1. 20}$$

qu'on peut réduire à la suivante

$$\varphi(x, y, z) + \varphi(y, z, x) + \varphi(z, x, y) = 0, \tag{1. 21}$$

avec la substitution $\varphi = L(-\Phi)$, avec laquelle, (1. 15) se réduit aussi à

$$\varphi(x, y, z) + \varphi(x, z, y) = 0,$$

de sorte que $\varphi(x, y, z)$ est la solution de (I. 21), symétrique gauche par rapport au couple (y, z), solution donnée dans notre travail antérieur, loc. cit. I p. 194. Il s'ensuit, pour l'équation (I. 20),

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{u(x, y, z)}{u(y, z, x)}, \tag{I. 22}$$

dans laquelle $u(x, y, z)$ est une fonction arbitraire, symétrique par rapport au couple (x, z). Cette expression de Φ, introduite dans (I. 16), conduit à

$$u(x, y, z)\,u(y, x, z) + u(y, z, x)\,u(z, y, x) + u(y, z, x)\,u(y, x, z) = 0$$

ou, compte tenu de la symétrie de $u(x, y, z)$,

$$u(x, y, z)\,u(y, z, x) + u(y, z, x)\,u(z, x, y) + u(z, x, y)\,u(x, y, z) = 0$$

ou encore,

$$v(x, y, z) + v(y, z, x) + v(z, x, y) = 0$$

avec $v(x, y, z) = u(x, y, z)\,u(y, z, x)$. Comme $v(x, y, z) = v(x, z, y)$, d'après la symétrie de $u(x, y, z)$, il s'ensuit que $v(x, y, z)$ est la solution de l'équation fonctionnelle (I. 21), symétrique par rapport au couple (y, z), donnée (loc. cit. I p. 194)

$$v(x, y, z) = u(x, y, z)\,u(y, z, x) = A(x, y, z) - A(y, z, x), \tag{I. 23}$$

par dans laquelle $A(x, y, z)$ est une fonction arbitraire, symétrique gauche par rapport au couple (x, z). On en déduit

$$u(y, z, x)\,u(z, x, y) = v(y, z, x),$$
$$u(z, x, y)\,u(x, y, z) = v(z, x, y),$$

donc

$$u^2(x, y, z)\,u^2(y, z, x)\,u^2(z, x, y) = v(x, y, z)\,v(y, z, x)\,v(z, x, y);$$

ensuite

$$u^2(x, y, z) = \frac{v(x, y, z)\,v(z, x, y)}{v(y, z, x)}, \quad u^2(y, z, x) = \frac{v(x, y, z)\,v(y, z, x)}{v(z, x, y)}$$

donc, d'après (I. 22),

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{u(x, y, z)}{u(y, z, x)} = \varepsilon\,\frac{v(z, x, y)}{v(y, z, x)}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Compte tenu de la symétrie de $v(x, y, z)$, cette fonction satisfait à l'équation (I. 16) lorsque $\varepsilon = -1$, de sorte que, eu égard aussi à (I. 23), on a

a. — *La solution générale continue du système d'équations fonctionnelles* (I. 15) *et* (I. 16), *telle que* $\Phi(x, s, s) = -1$, *est donnée par*

$$\Phi(x, y, z) = \frac{A(x, y, z) - A(z, x, y)}{A(y, z, x) - A(z, x, y)}, \tag{I. 24}$$

dans laquelle $A(x, y, z)$ *désigne une fonction continue arbitraire, symétrique gauche par rapport au couple* (x, z).

En posant

$$B(x, y, z) = A(x, y, z) - A(y, z, x)$$

et eu égard à (I. 19), on a aussi

b. — *La solution générale continue du système d'équations fonctionnelles* (I. 15) *et* (I. 16), *telle que* $\Phi(x, s, s) = +1$, *est donnée par*

$$\Phi(x, y, z) = \frac{B(x, y, z) - B(y, z, x)}{B(x, y, z) - B(z, x, y)}, \tag{I. 25}$$

dans laquelle $B(x, y, z)$ *désigne une fonction continue arbitraire, symétrique par rapport au couple* (y, z).

4. — Pour achever la détermination de la fonction Φ, nous remarquons que, de (I. 25), qu'on peut écrire

$$B(x, y, z) - B(y, z, x) = u[B(x, y, z) - B(z, x, y)], \tag{I. 25'}$$

on doit pouvoir déterminer z en fonction de x et de y, par exemple, d'une manière univoque, autrement les trois fonctions F_i sont liées par plusieurs relations distinctes. Vu que $u(z)$ est une constante itérative arbitraire, il s'ensuit que chaque membre de l'égalité précédente doit contenir un seul terme en x ou en y ou en z; abstraction faite d'une fonction $\bar{B}(x, y, z)$ qui satisfait à

$$\bar{B}(x, y, z) = \bar{B}(y, z, x),$$

la fonction $B(x, y, z)$ doit avoir, en première approximation, l'expression suivante

$$B(x, y, z) = A(x)[B(y) + B(z)] + C(y)C(z) + D(x) + E(y) + E(z),$$

qui donne

$$B(x, y, z) - B(y, z, x) = B(z)[A(x) - A(y)] + C(z)[C(y) - C(x)] + \\ + A(x)B(y) - A(y)B(x) + D(x) - E(x) - D(y) + E(y).$$

Comme on doit avoir un seul terme en z, il s'ensuit $C \equiv B$ et l'égalité precédente devient

$$B(x, y, z) - B(y, z, x) = B(z)[A(x) - B(x) - A(y) + B(y)] + \\ + A(x)B(y) - A(y)B(x) + D(x) - E(x) - D(y) + E(y),$$

dont la forme exige, pour les mêmes considérations, $B \equiv A$ et l'égalité précédente se réduit à

$$B(x, y, z) - B(y, z, x) = [D(x) - E(x)] - [D(y) - E(y)] = U(x) - U(y),$$

de sorte que (1. 25') devient

$$U(x) - U(y) = u[U(x) - U(z)], \tag{1. 26}$$

dans laquelle il suffit maintenant d'effectuer le changement de fonction $U(x) = X$, pour être ramené à une relation de la forme (1. 2'), qui *caractérise* les équations fonctionnelles linéaires (loc. cit. 7). Le même changement de fonction doit alors ramener l'équation fonctionnelle (1. 1) à une équation linéaire, de la forme

$$F(\theta) = A(z)F(z) + B(z), \tag{1. 27}$$

de sorte que nous avons le résultat général suivant

c. — *Si entre trois solutions absolument quelconques d'une équation fonctionnelle du premier ordre, telle que* (1. 1), *il y a une relation de la forme* (1. 2), *dépendant d'une constante itérative* $u(z)$, *alors la relation* (1. 2) *est nécéssairement de la forme* (1. 26), *où* $U(x)$ *est une fonction continue connue, c'est à dire, de la forme*

$$U(F_1) - U(F_2) = u[U(F_1) - U(F_3)], \tag{1. 26}$$

de sorte que le changement de fonction $U(F) = f$, *ramène l'équation* (1. 1) *à une équation fonctionnelle linéaire, telle que* (1. 27).

On en déduit un énoncé analogue pour les équations différentielles, en y remplaçant le mot *fonctionnelle* par *différentielle* et en y supprimant le mot *itérative*.

Pour donner un exemple, considérons l'équation

$$F(z)F(\theta) + A(z)F(\theta) + B(z)F(z) = 0; \tag{1. 28}$$

on constate facilement que trois solutions absolument quelconques de cette équation fonctionnelle sont liées par la relation

$$\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_2}=u\left[\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_3}\right],\quad u(\theta)=u(z),$$

de sorte que le changement de fonction $Ff=1$ ramène cette équation à (1. 27).

Il n'est pas besoin de considérer aussi le cas de la relation (1. 24), vu que celle-ci se ramène facilement à (1. 25) par le changement de fonction (1. 19).

D'ailleurs, c'est de la forme (1. 25) qu'est la relation (1. 2') correspondant aux équations linéaires, de sorte que nous la prendrons comme telle pour toutes.

5. — D'après (1. 1), (1. 2) et (1. 3), la fonction Φ est une solution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(w)]=\Phi(u,v,w), \tag{1. 29}$$

dans laquelle z joue le rôle de *paramètre.* C'est une équation d'une généralité évidente, qui pourra faire l'objet d'une étude spéciale. Signalons-en cependant, quelques résultats immédiats:

Si $\Phi'(u)$ est solution de l'équation à une variable

$$\Phi'[\varphi(u)]=\Phi'(u), \tag{1. 30}$$

toute fonction de la forme $\Phi[\Phi'(u),\ \Phi'(v),\ \Phi'(w)]$ est une solution de l'équation à trois variables (1. 29).

En particulier

L'équation fonctionnelle

$$\Phi(Au+B,\ Av+B,\ Aw+B)=\Phi(u,v,w) \tag{1. 31}$$

admet la solution

$$\Phi(u,v,w)=\frac{u-v}{u-w}, \tag{1. 32}$$

quelles que soient A et B, constantes ou fonctions d'un paramètre z.

L'équation fonctionnelle

$$\Phi\left(\frac{Au}{u+B},\ \frac{Av}{v+B},\ \frac{Aw}{w+B}\right)=\Phi(u,v,w) \tag{1. 33}$$

admet la solution

$$\Phi(u, v, w) = \frac{w(v-u)}{v(w-u)}, \tag{1.34}$$

quels que soient A et B.

II. Équations à quatre intégrales.

6. — Considérons de nouveau une équation fonctionnelle du premier ordre, telle que (1. 1), mais supposons maintenant qu'il y ait entre *quatre* intégrales absolument quelconques $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, $F_4(z)$ une relation unique de la forme

$$\Phi(F_1, F_2, F_3, F_4) = u(z), \tag{2.1}$$

$u(z)$ étant toujours une constante itérative, c'est à dire, satisfaisant à l'équation fonctionnelle (1. 3).

Si l'on change l'ordre des fonctions F_i, de toutes les manières possibles, on obtient vingt-quatre expressions, qui sont toutes des fonctions biunivoques de l'une d'entre elles.

Posons

$$\begin{array}{ll}
\Phi(x, y, z, t) = u, & \Phi(y, z, t, x) = v, \\
\Phi(x, z, y, t) = u_1, & \Phi(y, t, z, x) = v_1, \\
\Phi(x, t, z, y) = u_2, & \Phi(y, x, t, z) = v_2, \\
\Phi(x, y, t, z) = u_3, & \Phi(y, z, x, t) = v_3, \\
\Phi(x, z, t, y) = u_4, & \Phi(y, t, x, z) = v_4, \\
\Phi(x, t, y, z) = u_5, & \Phi(y, x, z, t) = v_5, \\
\Phi(z, t, x, y) = w, & \Phi(t, x, y, z) = s, \\
\Phi(z, x, t, y) = w_1, & \Phi(t, y, x, z) = s_1, \\
\Phi(z, y, x, t) = w_2, & \Phi(t, z, y, x) = s_2, \\
\Phi(z, t, y, x) = w_3, & \Phi(t, x, z, y) = s_3, \\
\Phi(z, x, y, t) = w_4, & \Phi(t, y, z, x) = s_4, \\
\Phi(z, y, t, x) = w_5, & \Phi(t, z, x, y) = s_5
\end{array} \tag{2.2}$$

et soient

$$u_1 = \alpha(u),\ u_2 = \beta(u),\ u_3 = \gamma(u),\ u_4 = \lambda(u),\ u_5 = \mu(u); \tag{2.3}$$

on remarque facilement qu'on a aussi

$$\begin{aligned} &v_1 = \alpha(v), \quad v_2 = \beta(v), \quad v_3 = \gamma(v), \quad v_4 = \lambda(v), \quad v_5 = \mu(v), \\ (2.\ 4) \qquad &w_1 = \alpha(w), \ w_2 = \beta(w), \ w_3 = \gamma(w), \ w_4 = \lambda(w), \ w_5 = \mu(w), \\ &s_1 = \alpha(s), \quad s_2 = \beta(s), \quad s_3 = \gamma(s), \quad s_4 = \lambda(s), \quad s_5 = \mu(s). \end{aligned}$$

Nous allons déterminer les fonctions α, β, γ, λ, μ. A cette fin, remarquons, par exemple, qu'on passe de u à u_1 et vice-versa en changeant les deuxième et troisième lettre entre elles; c'est de la même manière qu'on passe de u_3 à u_5 et de u_2 à u_4 et vice-versa; on a ainsi

$$u_4 = \alpha(u_2), \ u_5 = \alpha(u_3), \ u_2 = \alpha(u_4), \ u_3 = \alpha(u_5),$$

qui montrent qu'on a $\alpha\alpha(u) = u$ et, d'après (2. 3),

$$(2.\ 5) \qquad \lambda(u) = \alpha\beta(u), \ \mu(u) = \alpha\gamma(u), \ \beta(u) = \alpha\lambda(u), \ \gamma(u) = \alpha\mu(u),$$

$\alpha\beta$ désignant le produit des deux transformations α et β.

On trouve, de la même manière, les relations

$$u_5 = \beta(u_1), \ u_4 = \beta(u_3), \ u_1 = \beta(u_5), \ u_3 = \beta(u_4),$$

qui donnent $\beta\beta(u) = u$ et

$$(2.\ 6) \qquad \mu(u) = \beta\alpha(u), \ \lambda(u) = \beta\gamma(u), \ \alpha(u) = \beta\mu(u), \ \gamma(u) = \beta\lambda(u),$$

ainsi que

$$u_4 = \gamma(u_1), \quad u_5 = \gamma(u_2), \quad u_1 = \gamma(u_4), \quad u_2 = \gamma(u_5),$$

qui donnent $\gamma\gamma(u) = u$ et

$$(2.\ 7) \qquad \lambda(u) = \gamma\alpha(u), \quad \mu(u) = \gamma\beta(u), \quad \alpha(u) = \gamma\lambda(u), \quad \beta(u) = \gamma\mu(u).$$

Les relations $\alpha\alpha(u) = \beta\beta(u) = \gamma\gamma(u) = u$ montrent qu'on doit choisir pour les fonctions α, β, γ, parmi celles données par (1. 11). En premier lieu, les fonctions α, β, γ, λ, μ, sont différentes entre elles, deux à deux, car en supposant, par exemple, $\alpha = \beta$, la première relation (2. 5) donne $\mu = \alpha\alpha = u$, ensuite, les deux premières relations (2. 7) donnent $\lambda = \mu = u$ et on parvient ainsi à

$$u = u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5,$$

donc $\Phi(x, y, z, t)$ est symétrique par rapport aux variables y, z, t, prises deux à deux et, en faisant le même raisonnement pour les v_i, on en conclut que $\Phi(x, y, z, t)$ doit être symétrique par rapport à toutes les variables x, y, z, t prises deux à deux, ce qui n'est pas le cas général, comme nous allons le montrer plus loin. En second lieu, aucune des fonctions précédentes ne coïncide avec $\pm u$. Si, par exemple, $\alpha = u$, on retombe sur le cas précédent.

En définitive, on peut prendre pour les fonctions α, β, γ, les expressions

$$k - u, \quad \frac{k'}{u}, \quad \frac{u + k_1}{k_2 u - 1},$$

dans un ordre quelconque. Si l'on prend, par exemple,

$$\alpha(u) = k - u, \quad \beta(u) = \frac{k'}{u}, \quad \gamma(u) = \frac{u + k_1}{k_2 u - 1},$$

les conditions (2. 5), (2. 6) et (2. 7) exigent

$$(2.\ 8) \qquad \alpha(u) = 1 - u, \quad \beta(u) = \frac{1}{u}, \quad \gamma(u) = \frac{u}{u - 1}, \quad \lambda(u) = \frac{u - 1}{u}, \quad \mu(u) = \frac{1}{1 - u}.$$

Si l'on prend les expressions des α, β, γ dans un autre ordre, on trouve les mêmes expressions pour λ et μ. Nous conservons alors les expressions (2. 8).

Les relations (2. 2), (2. 3) et (2. 8) montrent ainsi que la fonction $\Phi(x, y, z, t)$ doit satisfaire aux équations fonctionnelles suivantes

$$(2.\ 9) \qquad \Phi(x, y, z, t) + \Phi(x, z, y, t) = 1,$$

$$(2.\ 10) \qquad \Phi(x, y, z, t)\,\Phi(x, t, z, y) = 1,$$

$$(2.\ 11) \qquad \Phi(x, y, z, t) + \Phi(x, y, t, z) = \Phi(x, y, z, t)\,\Phi(x, y, t, z),$$

$$(2.\ 12) \qquad 1 + \Phi(x, y, z, t)\,\Phi(x, z, t, y) = \Phi(x, y, z, t),$$

$$(2.\ 13) \qquad 1 + \Phi(x, y, z, t)\,\Phi(x, t, y, z) = \Phi(x, t, y, z).$$

On obtient encore trois groupes analogues de cinq équations fonctionnelles auxquelles doit satisfaire la fonction $\Phi(x, y, z, t)$ en considérant les v_i, w_i, s_i, ce que nous faisons plus loin.

Remarquons, pour ce qui suit, que les équations (2. 11), (2. 12) et (2. 13) sont des conséquences de (2. 9) et (2. 10). En effet, on déduit de (2. 9), compte tenu de (2 10),

$$\Phi(x, y, z, t) + \frac{1}{\Phi(x, t, y, z)} = 1,$$

qui n'est autre que (2. 13); on a ensuite, de (2. 10),

$$\Phi(x, t, y, z) = 1 - \Phi(x, y, t, z)$$

et on retrouve ainsi (2. 11).

Pour obtenir (2. 12), on déduit de (2. 9)

$$\Phi(x, z, t, y) = 1 - \Phi(x, t, z, y),$$

qui devient (2. 12), compte tenu de (2. 10).

On a ainsi à résoudre le système formé par les équations fonctionnelles (2. 9) et (2. 10).

7. — Pour achever la détermination de la fonction $\Phi(x, y, z, t)$, il faut trouver la relation de passage des u_i aux v_i, etc. Remarquons qu'on passe de u à v par une permutation circulaire des variables, de même que de v à w et de w à s, etc. Désignons alors par a la transformation homographique qui réalise ce passage; on aura

$$(2.\ 14)\qquad \begin{aligned}
&v = a(u), && w = a(v), && s = a(w), && u = a(s);\\
&w_5 = a(u_1), && v_4 = a(w_5), && s_3 = a(v_4), && u_1 = a(s_3);\\
&s_2 = a(u), && w_2 = a(s_2), && v_2 = a(w_2), && u_2 = a(v_2);\\
&v_1 = a(u_3), && s_5 = a(v_1), && w_4 = a(s_5), && u_3 = a(w_4);\\
&w_3 = a(u_4), && s_1 = a(w_3), && v_5 = a(s_1), && u_4 = a(v_5);\\
&s_4 = a(u_5), && v_3 = a(s_4), && w_1 = a(v_3), && u_5 = a(w_1).
\end{aligned}$$

On déduit de ces relations

$$(2.\ 15)\qquad \begin{aligned}
&a\,\alpha(u) = \mu\, a a(u), && a\,\beta(u) = \beta\, a a a(u), && a\,\gamma(u) = \alpha\, a(u),\\
&a\,\lambda(u) = \gamma\, a a(u), && a\,\mu(u) = \lambda\, a a a(u), && a a a a(u) = u,
\end{aligned}$$

à l'aide desquelles nous déterminons la fonction

$$a(u) = \frac{m u + n}{p u + q}.$$

Nous allons donner les détails des calculs nécessaires pour cette détermination.

La relation $a\,\gamma(u) = \alpha\, a(u)$ devient

$$\frac{(m + n)u - n}{(p + q)u - q} = \frac{(p - m)u + q - n}{p u + q}$$

d'où

$$q(q - 2n) = 0, \quad p(2m + n - p) = q(p - m).$$

Si $q = 0$, on doit avoir $p = 0$ ou $p = 2m + n$. Comme $p \neq 0$, autrement $a(u) = \infty$, il nous reste

$$q = 0, \quad p = 2m + n.$$

Si $q = 2n$, on aura $(p + n)(p - 2m) = 0$, donc $p = -n$ ou $p = 2m$.

De même, la relation $a\alpha(u) = \mu a a(u)$ devient

$$\frac{-mu + m + n}{-pu + p + q} = \frac{p(m + q)u + pn + q^2}{(pm + pq - m^2 - pn)u + pn + q^2 - mn - mq}$$

d'où

$$\begin{aligned} &m(pm + pq - m^2 - pn) = p^2(m + q), \\ (2.\ 16) \quad &-m(pn + q^2 - mn - nq) + (m + n)(pm + pq - m^2 - pn) = \\ &\qquad = -p(pn + q^2) + p(p + q)(m + q), \\ &(m + n)(pn + q^2 - mn - nq) = (p + q)(pn + q^2). \end{aligned}$$

Ces relations deviennent, pour $q = 0$,

$$\begin{aligned} &m(pm - m^2 - pn) = p^2 m, \\ (2.\ 17) \quad &-mn(p - m) + (m + n)(pm - m^2 - pn) = p^2(m - n), \\ &n(m + n)(p - m) = p^2 n. \end{aligned}$$

On ne peut pas avoir $n = 0$, autrement $a(u) = \text{const}$. Comme $p = 2m + n$, on a $m + n = p - m$ et la dernière relation devient $(p - m)^2 = p^2$, donc $p - m = \pm p$, d'où $m = 0$ ou $m = 2p$.

Si $m = 0$, on a $p = n$ et

$$(2.\ 18) \qquad a(u) = \frac{1}{u} = \beta(u).$$

Si $m = 2p$, on a $n = -3p$ et la deuxième des relations (2. 17) conduit à $2p^2 = 0$, $p = 0$ ce qui est inadmissible, comme nous l'avons déjà montré.

Supposons alors $q = 2n$; les relations (2. 16) deviennent

$$\begin{aligned} &p(m + n)(m - p) = m^3 + np^2, \\ (2.\ 19) \quad &(m + n)(pm - m^2 - p^2) = mn(3p - m + 2n), \\ &n(m + n)(p + 2n - m) = n(p + 2n)(p + 4n). \end{aligned}$$

On ne peut pas avoir $n = 0$, autrement $q = 0$ et $a(u) = \text{const}$; si $p = -n$, la première de ces relations devient

$$-n(m + n)^2 = m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2),$$

qui exige, ou bien $m + n = 0$, donc

$$a(u) = \frac{u - 1}{u - 2},$$

fonction qui ne satisfait pas à la condition $aaaa(u) = u$, ou bien

$$- n(m + n) = m^2 - mn + n^2,$$

qui entraîne $m^2 + 2n^2 = 0$, relation impossible.

Si $p = 2m$, la troisième des relations (2. 19) devient

$$n(m + n)(m + 2n) = 0;$$

Comme $n \neq 0$, on doit avoir $m = -n$ ou $m = -2n$. Si $m = -n$, on a $a(u) = \frac{1}{2}$; si $m = -2n$, on a aussi $a(u) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que la seule forme possible pour la fonction $a(u)$ est celle donnée par (2. 18), avec laquelle toutes les autres relations (2. 16) se trouvent aussi être vérifiées.

La fonction $\Phi(x, y, z, t)$ satisfait donc, en plus, à l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x, y, z, t)\,\Phi(y, z, t, x) = 1, \tag{2. 20}$$

qui conduit à

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(z, t, x, y). \tag{2. 21}$$

Les équations fonctionnelles (2. 10) et (2. 20) montrent que la fonction $\Phi(x, y, z, t)$ satisfait, en tout, aux équations fonctionnelles

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(y, x, t, z) = \Phi(z, t, x, y) = \Phi(t, z, y, x), \tag{2. 22}$$

propriété dont jouit aussi le rapport anharmonique de quatre nombres.

8. — **Système d'équations à quatre variables.** — Nous allons déterminer la solution générale continue du système d'équations fonctionnelles

$$\Phi(x, y, z, t) + \Phi(x, z, y, t) = 1, \tag{2. 9}$$

$$\Phi(x, y, z, t)\;\Phi(x, t, z, y) = 1, \tag{2. 10}$$

$$\Phi(x, y, z, t)\,\Phi(y, z, t, x) = 1. \tag{2. 20}$$

Comme, dans les deux premières équations fonctionnelles précédentes, x garde la même place, ces équations coïncident avec (1. 15), respectivement (1. 16), par rapport aux variables y, z, t. La solution générale continue du système formé par ces deux équations sera analogue à (1. 24) ou à (1. 25), suivant que $\Phi(x, s, z, s) = 1$ ou -1. En considérant la solution qui donne $\Phi(x, s, z, s) = 1$, on aura donc

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{B(x, y, z, t) - B(x, y, t, z)}{B(x, t, z, y) - B(x, t, y, z)} = \frac{C(x, y, z, t)}{C(x, t, z, y)}, \tag{2. 23}$$

avec

$$C(x, y, z, t) = B(x, y, z, t) - B(x, y, t, z), \tag{2. 24}$$

$B(x, y, z, t)$ étant symétrique par rapport au couple (y, t). On voit facilement que $C(x, y, z, t)$ est symétrique gauche par rapport au couple (z, t).

Nous allons déterminer la fonction $B(x, y, z, t)$ de manière que $\Phi(x, y, z, t)$, donnée par (2. 23), satisfasse aussi à l'équation fonctionnelle (2. 20).

Remarquons, en premier lieu, qu'on a, à cause de (2. 9),

$$C(x, y, z, t) = C(x, z, y, t) + C(x, t, z, y), \tag{2. 25}$$

équation satisfaite par $C(x, y, z, t)$, donnée par (2. 24).

En second lieu, l'équation (2. 20) donne

$$\frac{C(x, y, z, t)}{C(x, t, z, y)} = \frac{C(y, x, t, z)}{C(y, z, t, x)}$$

ou, grâce à (2. 25),

$$\frac{C(x, z, y, t)}{C(x, t, z, y)} = \frac{C(y, t, x, z)}{C(y, z, t, x)}$$

ou encore

$$\frac{C(x, t, z, y)}{C(y, z, t, x)} = \frac{C(x, z, y, t)}{C(y, t, x, z)} = \varphi(x, y, z, t), \tag{2. 26}$$

$\varphi(x, y, z, t)$ étant une fonction symétrique par rapport au couple (z, t), comme le montre l'égalité formée par les deux rapports précédents.

On a, d'une part, de la dernière égalité (2. 26),

$$C(x, y, z, t) = \varphi(x, z, y, t)\, C(z, t, x, y), \tag{2. 27}$$

donc $\varphi(x, y, z, t)$ satisfait à

$$\varphi(x, y, z, t)\, \varphi(y, x, t, z) = 1. \tag{2. 28}$$

D'autre part, remplaçons, dans (2. 25), $C(x, t, z, y)$ et $C(x, z, y, t)$ par les expressions tirées de (2. 26); nous avons

$$C(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t)[C(y, z, t, x) + C(y, t, z, x)] \tag{2. 29}$$
$$= -\varphi(x, y, z, t)\, C(y, x, z, t),$$

d'après (2. 25) elle-même.

On déduit sans peine $\varphi \equiv 1$ et (2. 29) devient

$$C(x, y, z, t) = -C(y, x, z, t),$$

donc $C(x, y, z, t)$ est symétrique gauche aussi par rapport au couple (x, y). Dès lors, il reste à déterminer la fonction $B(x, y, z, t)$, symétrique par rapport au couple (y, t), de manière que la différence [égalité (2. 24)]

$$C(x, y, z, t) = B(x, y, z, t) - B(x, y, t, z)$$

soit symétrique gauche aussi par rapport au couple (x, y). Cela revient à déterminer les fonctions $B(x, y, z, t)$, symétriques par rapport au couple (y, t), telles que

$$B(x, y, z, t) - B(x, y, t, z) + B(y, x, z, t) - B(y, x, t, z) = 0. \tag{2. 30}$$

On en déduit

$$B(x, y, z, t) + B(y, x, z, t) = B(x, y, t, z) + B(y, x, t, z) = u(x, y, z, t) \tag{2. 31}$$

et ces égalités montrent que $u(x, y, z, t)$ est symétrique par rapport aux couples (x, y) et (z, t). On a, ensuite,

$$B(x, y, z, t) + B(t, x, z, y) = u(x, t, z, y),$$

donc

$$B(y, x, z, t) - B(t, x, z, y) = u(x, y, z, t) - u(x, t, z, y)$$

ou

$$B(y, x, z, t) + u(x, t, z, y) = B(t, x, z, y) + u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t), \tag{2. 32}$$

où $v(x, y, z, t)$ est symétrique par rapport aux couples (x, y) et (x, t). On a, ensuite,

$$B(x, y, z, t) + u(y, t, z, x) = B(t, y, z, x) + u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t),$$

égalité qui montre que $v(x, y, z, t)$ est symétrique par rapport au couple (y, t); elle est donc symétrique par rapport à tout couple. On en déduit que $B(x, y, z, t)$ est symétrique aussi par rapport au couple (x, z), ce qui ne suffit pas cependant, pour pouvoir satisfaire à (2. 30).

On déduit alors, de (2. 30),

$$B(x, y, z, t) - B(y, x, t, z) = B(x, y, t, z) - B(y, x, z, t) = w(x, y, z, t). \tag{2. 33}$$

Le premier membre de ces égalités est symétrique par rapport aux couples (x, z), (y, t); le second l'est par rapport aux couples (x, t), (y, z); il s'ensuit que tous, donc $w(x, y, z, t)$ aussi, le sont par rapport à tout couple. On en déduit alors

$$B(x, y, z, t) - B(y, z, t, x) = w(x, y, z, t),$$

ainsi que trois autres égalités analogues, obtenues de la précédente par des permutations circulaires des variables: il s'ensuit $4w = 0$, $w = 0$, donc

$$B(x, y, z, t) = B(y, z, t, x) = B(z, t, x, y) = B(t, x, y, z). \tag{2. 34}$$

La fonction $C(x, y, z, t)$, donnée par (2. 24), est bien symétrique gauche par rapport aux couples (x, y), (z, t), de sorte que la fonction $\Phi(x, y, z, t)$, donnée par (2. 23), satisfaira aux équations fonctionnelles (2. 9), (2. 10), (2. 20), et, par conséquent, aux (2. 22). Comme $\Phi(x, s, z, s) = 1$, nous avons

La solution générale continue du système d'équations fonctionnelles (2. 9), (2. 10) *et* (2. 20), *telle qui* $\Phi(x, s, z, s) = 1$, *est donnée par*

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{B(x, y, z, t) - B(x, y, t, z)}{B(x, t, z, y) - B(x, t, y, z)}, \tag{2. 23}$$

dans laquelle $B(x, y, z, t)$ *désigne une fonction continue arbitraire, symétrique par rapport aux couples* (x, z), (y, t) *et qui satisfait aussi aux équations fonctionnelles* (2. 34).

On trouve ensuite facilement la proposition

La solution générale continue du système d'équations fonctionnelles (2. 9), (2. 10) *et* (2. 20), *telle que* $\Psi(x, s, z, s) = -1$, *est donnée par*

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{\Phi(x, y, z, t) - 2}{2\,\Phi(x, y, z, t) - 1}, \tag{2. 35}$$

où $\Phi(x, y, z, t)$ *est la solution générale continue du même système, telle que* $\Phi(x, s, z, s) = 1$, *donnée par* (2. 23).

9. Les fonctions $B(x, y, z, t)$. — Avant d'aller plus loin, précisons un peu la forme des fonctions $B(x, y, z, t)$ qui entrent dans la solution générale du système d'équations fonctionnelles (2. 9, (2. 10) et (2. 20). Comme nous l'avons déjà établi, ces fonctions satisfont aux équations fonctionnelles (2. 34), étant symétriques par rapport aux couples (x, z) et (y, t). Or, nous avons établi ailleurs que la solution générale continue de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(y, z, t, x) \tag{2. 34'}$$

est donnée par

$$\varphi(x, y, z, t) = B'(x, y, z, t) + B'(y, z, t, x) + B'(z, t, x, y) + B'(t, x, y, z), \tag{2. 36}$$

où $B'(x, y, z, t)$ est une fonction continue arbitraire. Mettons en évidence, dans cette solution, les parties symétrique et symétrique gauche par rapport au couple (x, z); on aura

$$\varphi(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + v(x, y, z, t), \tag{2. 37}$$

avec

$$\begin{aligned} 2u(x, y, z, t) = {} & B'(x, y, z, t) + B'(y, z, t, x) + B'(z, t, x, y) + B'(t, x, y, z) + \\ & + B'(z, y, x, t) + B'(y, x, t, z) + B'(x, t, z, y) + B'(t, z, y, x), \\ 2v(x, y, z, t) = {} & B'(x, y, z, t) + B'(y, z, t, x) + B'(z, t, x, y) + B'(t, x, y, z) - \\ & - B'(z, y, x, t) - B'(y, x, t, z) - B'(x, t, z, y) - B'(t, z, y, x). \end{aligned}$$

On reconnait facilement que $u(x, y, z, t)$ est symétrique aussi par rapport à l'autre couple (y, t); de même, $v(x, y, z, t)$ est symétrique gauche aussi par rapport à ce même couple. On a, ensuite,

$$u(x, y, z, t) + v(x, y, z, t) = u(y, z, t, x) + v(y, z, t, x)$$

et encore

$$u(x, y, z, t) - v(x, y, z, t) = u(y, z, t, x) - v(y, z, t, x),$$

desquelles on déduit

$$u(x, y, z, t) = u(y, z, t, x), \quad v(x, y, z, t) = v(y, z, t, x),$$

relations qui montrent que les fonctions u et v satisfont *séparément* à l'équation fonctionnelle (2. 34'); on a ainsi

Les parties symétrique et symétrique gauche par rapport à l'un des couples (x, z) *ou* (y, t) (*en réalité, par rapport à tous les deux à la fois*), *de la solution de l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(y, z, t, x), \tag{2. 34'}$$

sont les solutions générales, jouissant respectivement de la même propriété, de cette même équation.

En posant

$$\varphi(x, y, z, t) = B(x, y, z, t) + C(x, y, z, t),$$

on a

$$\begin{aligned} B(x, y, z, t) &= U(x, y, z, t) + U(y, z, t, x) + U(z, t, x, y) + U(t, x, y, z), \\ C(x, y, z, t) &= V(x, y, z, t) + V(y, z, t, x) + V(z, t, x, y) + V(t, x, y, z), \end{aligned} \tag{2. 38}$$

$U(x, y, z, t)$, $V(x, y, z, t)$ *étant arbitraires, l'une symétrique, l'autre symétrique gauche par rapport à l'un des couples* (x, z), (y, t).

10. — La fonction $B(x, y, z, t)$ a été déterminée eu égard à la résolution du système d'équations fonctionnelles (2. 9), (2. 10) et (2. 20). Si l'on tient maintenant compte du rôle joué par la fonction $\Phi(x, y, z, t)$ pour l'équation fonctionnelle (1. 1), des considérations analogues à celles faites au § 4, nous conduisent à prendre pour la fonction $U(x, y, z, t)$, qui figure dans l'expression (2. 38) de $B(x, y, z, t)$, la forme suivante

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) = A(x)A(z) + [B(x) + B(z)][C(y) + D(t)] + \\ + E(y)F(t) + G(x) + G(z) + H(y) + K(t), \end{aligned}$$

abstraction faite d'une fonction satisfaisant à l'équation fonctionnelle (2. 34'). On a alors

$$\begin{aligned} B(x, y, z, t) - B(x, y, t, z) = [B(x) - B(y)][C(t) + D(t) - C(z) - D(z)] + \\ + [B(t) - B(z)][C(x) + D(x) - C(y) - D(y)] + \\ + [E(x) - E(y)][F(z) - F(t)] + [E(z) - E(t)][F(x) - F(y)]. \end{aligned}$$

Cette expression contient un seul terme en x, par exemple, lorsque l'on a, en premier lieu,

$$B = E,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} B(x, y, z, t) - B(x, y, t, z) = [B(x) - B(y)][[C(t) + D(t) - F(t)] - [C(z) + D(z) - F(z)]] + \\ + [B(t) - B(z)][[C(x) + D(x) - F(x)] - [C(y) + D(y) - F(y)]]. \end{aligned}$$

Pour le même motif, on doit avoir finalement

$$B = C + D - F = U,$$

donc

$$B(x, y, z, t) - B(x, y, t, z) = 2\,[U(x) - U(y)]\,[U(t) - U(z)],$$

de sorte que (2. 1) devient, compte tenu de (2. 23) et de la relation précédente,

$$\frac{U(x) - U(y)}{U(x) - U(t)} : \frac{U(z) - U(y)}{U(z) - U(t)} = u, \tag{2. 39}$$

ou encore, en revenant aux fonctions F_i

$$\frac{U(F_1) - U(F_2)}{U(F_1) - U(F_4)} : \frac{U(F_3) - U(F_2)}{U(F_3) - U(F_4)} = u(z), \tag{2. 40}$$

que le changement de fonction $U(F) = F$ réduit à la forme la plus simple

$$\frac{F_1 - F_2}{F_1 - F_4} : \frac{F_3 - F_2}{F_3 - F_4} = u(z), \tag{2. 41}$$

qui exprime que le rapport anharmonique des quatre solutions F_i est une fonction itérative. Il est facile de déterminer l'équation fonctionnelle (1. 1) correspondant à la relation précédente: remplaçons, dans le second membre, $u(z)$ par le premier membre, dans lequel on a remplacé z par $\theta(z)$; en prenant, par exemple, F_1 comme fonction inconnue, on est conduit à l'équation fonctionnelle

$$F(\theta) = \frac{AF + B}{CF + D}, \tag{2. 42}$$

avec A, B, C, D fonctions de z, équation trouvée directement par M. C. Popovici.[1]

Nous avons obtenu ainsi le résultat général suivant

Si entre quatre solutions absolument quelconques d'une équation fonctionnelle du premier ordre, telle que (1. 1), *il y a une relation de la forme* (2. 1), *alors la relation* (2. 1) *est nécessairement de la forme* (2. 40), *où U est une fonction continue connue, relation que le changement de fonction $U(F) = F$ réduit à* (2. 41). *L'équation fonctionnelle* (1. 1) *doit alors se réduire par le même changement à* (2. 42).

---

[1] Loc. cit. 1 p. 193.

Autrement dit,

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une relation de la forme (2. 1) *entre quatre solutions quelconques d'une équation fonctionnelle du premier ordre, telle que* (1. 1), *est qu'il existe un changement de fonction* $F = U(f)$, *ramenant l'équation fonctionnelle donnée à la forme* (2. 42).

L'équation fonctionnelle (2. 42) joue, parmi les équations fonctionnelles du premier ordre le même rôle que celui joué par l'équation de Riccati parmi les équations différentielles du même ordre, jouissant de propriétés analogues.

Par exemple, outre la propriété fondamentale concernant le rapport anharmonique de quatre solutions, on peut aussi la réduire à une équation linéaire si l'on en connaît une solution particulière, en faisant le changement de fonction $F = F_1 + f$: on est ramené d'abord à l'équation fonctionnelle (1. 28), etc.

11. — D'après (1. 1), (1. 3) et (2. 1), la fonction Φ est une solution de l'équation fonctionnelle, analogue à (1. 29), mais portant sur quatre variables,

$$\Phi[\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w), \varphi(s)] = \Phi(u, v, w, s). \tag{2. 43}$$

Comme dans le cas de trois variables, nous pouvons signaler les résultats immédiats suivants

I. — *Si* $\Phi'(u)$ *est une solution de l'équation à une seule variable* (1. 30), *toute fonction de la forme* $\Phi[\Phi'(u), \Phi'(v), \Phi'(w), \Phi'(s)]$ *est une solution de l'équation fonctionnelle* (2. 43).

II. — *L'équation fonctionnelle*

$$\Phi\left(\frac{Au+B}{Cu+D}, \frac{Av+B}{Cv+D}, \frac{Aw+B}{Cw+D}, \frac{As+B}{Cs+D}\right) = \Phi(u, v, w, s) \tag{2. 44}$$

admet la solution

$$\Phi(u, v, w, s) = \frac{u-v}{u-w} : \frac{s-v}{s-w}, \tag{2. 45}$$

quelles que soient A, B, C, D, *constantes ou fonctions d'un paramètre* z.

Il est visible que cette dernière propriété comprend comme un cas particulier celle qui correspond à l'équation fonctionnelle (1. 33) et à la solution (1. 34), à laquelle elle se réduit en faisant $B = 0$ et $s = 0$ dans (2. 44) et (2. 45).

III. Équations a plus de quatre intégrales.

12. — Soit $a = \Phi(x, y, z, t, u)$ une fonction de cinq variables, telle que, si on y change deux variables entre elles, la nouvelle valeur de a soit remplaçée par une autre, fonction biunivoque de la première.

En permutant les lettres x, y, z, t, u de toutes les manières possibles, on obtient $5! = 120$ valeurs de a, que nous rangeons dans cinq groupes de vingt-quatre, la première lettre étant la même dans toutes les fonctions d'un même groupe.

Nous allons écrire les trois premiers groupes seulement, qui suffisent à nos besoins de démonstration.

$$
\begin{array}{ll}
\Phi(x, y, z, t, u) = a, & \Phi(x, z, t, u, y) = a_6, \\
\Phi(x, y, t, z, u) = a_1, & \Phi(x, z, u, t, y) = a_7, \\
\Phi(x, y, u, t, z) = a_2, & \Phi(x, z, y, u, t) = a_8 \\
\Phi(x, y, z, u, t) = a_3, & \Phi(x, z, t, y, u) = a_9, \\
\Phi(x, y, t, u, z) = a_4, & \Phi(x, z, u, y, t) = a_{10}, \\
\Phi(x, y, u, z, t) = a_5, & \Phi(x, z, y, t, u) = a_{11}, \\
 & \\
\Phi(x, t, u, y, z) = a_{12}, & \Phi(x, u, y, z, t) = a_{18}, \\
\Phi(x, t, y, u, z) = a_{13}, & \Phi(x, u, z, y, t) = a_{19}, \\
\Phi(x, t, z, y, u) = a_{14}, & \Phi(x, u, t, z, y) = a_{20}, \\
\Phi(x, t, u, z, y) = a_{15}, & \Phi(x, u, y, t, z) = a_{21}, \\
\Phi(x, t, y, z, u) = a_{16}, & \Phi(x, u, z, t, y) = a_{22}, \\
\Phi(x, t, z, u, y) = a_{17}, & \Phi(x, u, t, y, z) = a_{23},
\end{array}
\tag{3. 1}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
a &= a_8 = a_{12} = a_{20}, \\
a_1 &= a_{13} = a_{17} = a_9 = 1 - a, \\
a_2 &= a_{18} = a_{14} = a_6 = \frac{1}{a}, \\
a_3 &= a_{11} = a_{23} = a_{15} = \frac{a}{a-1}, \\
a_4 &= a_{16} = a_{19} = a_7 = \frac{a-1}{a}, \\
a_5 &= a_{21} = a_9 = a_{17} = \frac{1}{1-a};
\end{aligned}
\tag{3. 2}
$$

$$
(3.3)\quad
\begin{aligned}
&\Phi(y, z, t, u, x) = b, && \Phi(y, t, u, x, z) = b_6,\\
&\Phi(y, z, u, t, x) = b_1, && \Phi(y, t, x, u, z) = b_7,\\
&\Phi(y, z, x, u, t) = b_2, && \Phi(y, t, z, x, u) = b_8,\\
&\Phi(y, z, t, x, u) = b_3, && \Phi(y, t, u, z, x) = b_9,\\
&\Phi(y, z, u, x, t) = b_4, && \Phi(y, t, x, z, u) = b_{10},\\
&\Phi(y, z, x, t, u) = b_5, && \Phi(y, t, z, u, x) = b_{11},\\
\\
&\Phi(y, u, x, z, t) = b_{12}, && \Phi(y, x, z, t, u) = b_{18},\\
&\Phi(y, u, z, x, t) = b_{13}, && \Phi(y, x, t, z, u) = b_{19},\\
&\Phi(y, u, t, z, x) = b_{14}, && \Phi(y, x, u, t, z) = b_{20},\\
&\Phi(y, u, x, t, z) = b_{15}, && \Phi(y, x, z, u, t) = b_{21},\\
&\Phi(y, u, z, t, x) = b_{16}, && \Phi(y, x, t, u, z) = b_{22},\\
&\Phi(y, u, t, x, z) = b_{17}, && \Phi(y, x, u, z, t) = b_{23},
\end{aligned}
$$

avec

$$
(3.4)\quad
\begin{aligned}
&b = b_8 = b_{12} = b_{20},\\
&b_1 = b_{13} = b_{17} = b_9 = 1 - b,\\
&b_2 = b_{18} = b_{14} = b_6 = \frac{1}{b},\\
&b_3 = b_{11} = b_{23} = b_{15} = \frac{b}{b-1},\\
&b_4 = b_{16} = b_{19} = b_7 = \frac{b-1}{b},\\
&b_5 = b_{21} = b_9 = b_{17} = \frac{1}{1-b};
\end{aligned}
$$

$$
(3.5)\quad
\begin{aligned}
&\Phi(z, t, u, x, y) = c, && \Phi(z, u, x, y, t) = c_6,\\
&\Phi(z, t, x, u, y) = c_1, && \Phi(z, u, y, x, t) = c_7,\\
&\Phi(z, t, y, x, u) = c_2, && \Phi(z, u, t, y, x) = c_8,\\
&\Phi(z, t, u, y, x) = c_3, && \Phi(z, u, x, t, y) = c_9,\\
&\Phi(z, t, x, y, u) = c_4, && \Phi(z, u, y, t, x) = c_{10},\\
&\Phi(z, t, y, u, x) = c_5, && \Phi(z, u, t, x, y) = c_{11},
\end{aligned}
$$

$$
(3.\ 5)\qquad
\begin{array}{ll}
\Phi(z, x, y, t, u) = c_{12}, & \Phi(z, y, t, u, z) = c_{18}, \\
\Phi(z, x, t, y, u) = c_{13}, & \Phi(z, y, u, t, x) = c_{19}, \\
\Phi(z, x, u, t, y) = c_{14}, & \Phi(z, y, x, u, t) = c_{20}, \\
\Phi(z, x, y, u, t) = c_{15}, & \Phi(z, y, t, x, u) = c_{21}, \\
\Phi(z, x, t, u, y) = c_{16}, & \Phi(z, y, u, x, t) = c_{22}, \\
\Phi(z, x, u, y, t) = c_{17}, & \Phi(z, y, x, t, u) = c_{23},
\end{array}
$$

avec

$$
(3.\ 6)\qquad
\begin{aligned}
c &= c_8 = c_{12} = c_{20}, \\
c_1 &= c_{13} = c_{17} = c_9 = 1 - c, \\
c_2 &= c_{18} = c_{14} = c_6 = \frac{1}{c}, \\
c_3 &= c_{11} = c_{23} = c_{15} = \frac{c}{c-1}, \\
c_4 &= c_{16} = c_{19} = c_7 = \frac{c-1}{c}, \\
c_5 &= c_{21} = c_9 = c_{17} = \frac{1}{1-c},
\end{aligned}
$$

Dans le groupe (3. 1), la variable x reste à la même place; on peut le considérer donc comme paramètre et alors les relations entre les diverses fonctions a_i sont les mêmes que dans le cas de quatre variables, cas traité dans la seconde partie de ce travail. Nous prendrons ainsi, pour la fonction $B(x, y, z, t, u)$, l'expression donnée par (2. 23), quant aux quatre dernières variables y, z, t, u: on aura donc

$$
(3.\ 7)\qquad \Phi(x, y, z, t, u) = \frac{B(x, y, z, t, u) - B(x, y, z, u, t)}{B(x, y, u, t, z) - B(x, y, u, z, t)},
$$

dans laquelle $B(x, y, z, t, u)$ est symétrique par rapport aux couples (y, t), (z, u) et satisfait aux équations fonctionnelles, analogues aux (2. 34).

$$
(3.\ 8)\qquad B(x, y, z, t, u) = U(x, y, z, t, u) + U(x, z, t, u, y) + \\
+ U(x, t, u, y, z) + U(x, u, y, z, t),
$$

la fonction $U(x, y, z, t, u)$ étant symétrique par rapport à l'un des couples (y, t), (z, u).

Pour achever la détermination de la fonction $\Phi(x, y, z, t, u)$, il faut trouver la relation qui permet le passage de b à a, c'est à dire, de $\Phi(x, y, z, t, u)$ à $\Phi(y, z, t, u, x)$, ce qui revient à permuter circulairement les cinq variables x, y, z, t, u. Posons

$$b = \alpha(a) = \frac{pa + q}{ra + s}. \tag{3.9}$$

En permutant circulairement les lettres qui figurent dans a_1, on trouve b_{11}; en procédant de la même manière avec a_2, a_3, a_4, a_5, on trouve respectivement b_{14}, b_1, b_9, b_{16}, donc

$$b = \alpha(a),\quad b_{11} = \alpha(a_1),\quad b_{14} = \alpha(a_2),\quad b_1 = \alpha(a_3),\quad b_9 = \alpha(a_4),\quad b_{16} = \alpha(a_5),$$

de sorte que, compte tenu des relations (3. 2) et (3. 4), la fonction $\alpha(a)$ doit satisfaire en même temps aux équations fonctionnelles suivantes

$$\alpha(a)\,\alpha\left(\frac{1}{a}\right) = 1,\quad 1 - \alpha(a) = \alpha\left(\frac{a}{a-1}\right),\quad \frac{\alpha(a)}{\alpha(a) - 1} = \alpha(1 - a), \tag{3.10}$$
$$\frac{1}{1 - \alpha(a)} = \alpha\left(\frac{a-1}{a}\right),\quad \frac{\alpha(a) - 1}{\alpha(a)} = \alpha\left(\frac{1}{a-1}\right).$$

En introduisant l'expression (3. 9) de $\alpha(a)$ dans l'équation fonctionnelle $\alpha(a)\,\alpha\left(\frac{1}{a}\right) = 1$, on obtient $s = p$, $r = q$, donc

$$b = \alpha(a) = \frac{pa + q}{qa + p}.$$

Cette expression de $\alpha(a)$, introduite dans l'équation fonctionnelle

$$1 - \alpha(a) = \alpha\left(\frac{a}{a-1}\right),$$

conduit à $p(p - 2q) = 0$ et $p(p + q) = 0$. On ne peut pas avoir $p \neq 0$, car les relations $p - 2q = 0$ et $p + q = 0$ conduisent à $p = q = 0$. On doit donc avoir $p = 0$, de sorte que

$$\alpha(a) = \frac{1}{a},$$

qui satisfait à toutes les autres équations fonctionnelles (3. 10). On a donc

$$\Phi(x, y, z, t, u)\,\Phi(y, z, t, u, x) = 1, \tag{3.11}$$

qui donne, avec (3. 2) et (3. 4),

$$a = a_8 = a_{12} = a_{20} = b_2 = b_{18} = b_{14} = b_6 = c = c_8 = c_{12} = c_{20}.$$

L'égalité $a = b_{18}$, c'est à dire,

$$\Phi(x, y, z, t, u) = \Phi(y, x, z, t, u)$$

montre que $\Phi(x, y, z, t, u)$ est symétrique par rapport au couple (x, y). On a alors

$$c_{12} = \Phi(x, z, y, t, u)$$

et l'égalité $c_{12} = a$, c'est à dire,

$$\Phi(x, y, z, t, u) = \Phi(x, z, y, t, u)$$

montre que $\Phi(x, y, z, t, u)$ est symétrique aussi par rapport au couple (y, z). La même égalité $c_{12} = a$ montre aussi que $a_{11} = a$, c'est à dire, d'après (3. 2),

$$\frac{a}{a - 1} = a,$$

qui donne $a = 0$ ou $a = 1$, inacceptables toutes les deux. Donc,

Il n'y a pas de fonction proprement dite, donnée par (3. 7) *et satisfaisant à l'équation fonctionnelle* (3. 11), par conséquent, il n'y a pas d'équation fonctionnelle du premier ordre, telle que (1. 1), dont cinq solutions quelconques soient liées par une relation dépendant d'une constante itérative arbitraire.

A plus forte raison, on arrive à une conclusion négative dans le cas de plus de cinq solutions, de sorte qu'on a le résultat suivant

Il n'y a pas d'équation fonctionnelle du premier ordre, telle que (1. 1), *dont plus de quatre solutions quelconques soient liées par une relation dépendant d'une constante itérative arbitraire.*