

A PROPOS D'UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS.

Par

GEORGES KUREPA,
à ZAGREB.

T , P étant respectivement un ensemble et une propriété d'ensemble, il arrive fréquemment qu'on a à étudier la famille $U_P T$ de tous les sous-ensembles de T vérifiant la propriété P et que, en particulier, il importe de connaître la puissance de la famille $U_P T$. Dans le dernier cas où l'on a à déterminer la puissance de $U_P T$, le procédé diagonal de Cantor (fournissant l'inégalité fondamentale de Cantor: $2^m > m$, quel que soit le nombre cardinal m) ne nous donnera, dans le cas général, aucun renseignement là-dessus. C'est que le procédé de Cantor construit un ensemble point par point, et dans des cas concrets, il est extrêmement difficile sinon impossible de vérifier si l'ensemble ainsi construit vérifie ou non la propriété P^1 .

Dans cet ordre d'idées nous allons traiter deux problèmes dont l'un se rattache très étroitement au problème de Souslin et à l'hypothèse du continu. L'ensemble T de tout à l'heure appartiendra, par la suite, à une classe d'ensembles partiellement ordonnés généralisant d'une manière aussi simple et naturelle que possible la classe d'ensembles bien ordonnés: il s'agit de la notion de suites ramifiées que nous allons définir.

1. La notion de suites ramifiées.

1, 1. Rappelons qu'un ensemble T partiellement ordonné (par rapport à une relation d'ordre quelconque $<$) est dit un *tableau ramifié*² (par rapport à la relation $<$) si a étant un point quelconque de T , l'ensemble

¹ Le procédé diagonal a été publié par Cantor en 1890—91 dans *Jahr. Ber. d. D. Math. Ver.*, Bd I., pp. 75—78; aussi *Gesamm. Abh.* pp. 278—281.

² Voir GEORGES KUREPA, *Ensembles ordonnés et ramifiés* (Thèse, Paris, 1935, aussi *Publ. Math. Univ. Belgrade*, IV, 1935, pp. 1—138) pp. 106, 124 et 134.

$$(1) \quad (., a)_T$$

des points de T précèdent le point a est bien ordonné (par rapport à $<$). Si l'on désigne par γ_a le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné $(., a)_T$ et par

$$(2) \quad \gamma T$$

le type d'ordre de l'ensemble bien ordonné des nombres ordinaux γ_a , ($a \in T$), il est manifeste que, pour tout nombre ordinal $\alpha < \gamma T$, l'ensemble

$$(3) \quad R_\alpha T$$

des points $a \in T$ vérifiant $\gamma_a = \alpha$ contient au moins un point sans contenir aucun couple de points distincts comparables. Manifestement

$$(4) \quad T = \sum_{\alpha} R_\alpha T, \quad (\alpha < \gamma T).$$

1, 2. Le nombre ordinal γT s'appelle le rang du tableau T . Si $\alpha < \beta < \gamma T$, les ensembles $R_\alpha T$, $R_\beta T$ sont sans point commun. Il est alors commode de dire d'un point $a \in T$ qu'il est de *première* ou de *seconde espèce* relativement à T si l'ordinal α vérifiant $a \in R_\alpha T$ est de *première* ou de *seconde espèce*. En particulier, tout point de $R_0 T$ sera de première espèce.

Pour un $a \in T$ nous désignerons par

$$(5) \quad [a]_T$$

l'ensemble de tous les points de T dont chacun est comparable à a et par

$$(5') \quad |a|_T$$

l'ensemble de tous les $x \in T$ tels que $(., x)_T = (., a)_T$ (cf. (1)). Tout sous-ensemble N de T tel qu'il y ait un $a \in T$ vérifiant $|a|_T = N$ sera appelé un *noeud* de T , de première ou de seconde espèce, suivant que l'est le point a . Par exemple, $R_0 T$ est un noeud de première espèce.

1, 3. Une *suite ramifiée* sera, par définition, tout tableau ramifié T vérifiant

$$\gamma [a]_T = \gamma T, \quad (a \in T).$$

C'est-à-dire T est une suite ramifiée si, quels que soient $a \in T$ et $\alpha < \gamma T$, l'ensemble $R_\alpha T$ contient un point comparable à a .

Par exemple tout ensemble bien ordonné (vide ou non) est une suite ramifiée de rang égal au type d'ordre de l'ensemble.

Voici un autre exemple: la famille des complexes finis (a_0, \dots, a_k) où $a_k < \omega$, $k < \omega$, est une suite ramifiée, en considérant qu'un complexe (a_0, \dots, a_k) précède (b_0, \dots, b_n) si $k < n$ et $a_0 = b_0, \dots, a_k = b_k$.

2. **Conditions I, II, III.** Dans ce qui suit nous ne considérerons que des suites ramifiées T vérifiant les conditions I, II, III que voici:

I. Quel que soit le point $a \in T$, on a $p|a|^T = \aleph_0$ ou 1 ,¹ suivant que a est un point de première ou de seconde espèce (cf. le n° 1, 2).

II. $\gamma T = \Omega$ et donc, T étant une suite ramifiée, $\gamma[a]_T = \omega_1$ (cf. (5));

III. $p R_\alpha T = \aleph_0$, ($\alpha < \Omega$) (cf.¹, (3)).

Les conditions I, II, III entraînent la relation

$$(6) \quad p T = \aleph_1.$$

3. **Suites (s).** Le problème bien connu de Souslin² est étroitement lié avec des suites ramifiées vérifiant, en sus des conditions I, II, III, la condition IV que voici:

IV. *Tout sous-ensemble bien ordonné de T est au plus dénombrable.* Une suite ramifiée vérifiant I, II, III, IV sera appelée une suite (s) et désignée, en général, par s .

On sait que le problème de Souslin est équivalent à la proposition que n'importe quelle suite (s) contient un ensemble infini non dénombrable de points deux à deux incomparables³.

En qualifiant de *disjonctif* tout ensemble composé de points deux à deux incomparables, la réponse affirmative au problème de Souslin entraîne que la famille $U_D s$ de tous les ensembles disjonctifs extraits d'une suite (s) quelconque est de la puissance 2^{\aleph_1} et donc supérieure à la puissance de la suite (s) elle-même; c'est que la suite (s) contient un ensemble disjonctif non dénombrable.

Si l'on suppose vraie l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, on peut prouver la réciproque: si pour chaque suite (s), soit s , la puissance de la famille $U_D s$ des sous-ensembles disjonctifs de s est supérieure à $\aleph_1 = p s$, la réponse au problème de Souslin est affirmative.

¹ Comme d'habitude, $p X$ désigne la puissance de X .

² Celui-ci demande si un ensemble ordonné continu jouissant de la dénombrabilité de chacune des familles infinies de ses intervalles est nécessairement identique, au point de vue d'ordre, à un ensemble linéaire.

³ Cf. loc. cit.¹ p. 139: p. 106 (passage b), p. 124 (dernier passage) et p. 132 $P_4 \neq P_5$.

Pour s'en assurer, il suffit, d'après l'équivalence de tout à l'heure de prouver que s contient un sous-ensemble disjonctif de puissance \aleph_1 . Or, si tout sous-ensemble disjonctif de s était $\leq \aleph_0$, la famille $U_D s$ aurait la puissance $(ps)^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$, et donc la puissance $2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = ps$ (c'est que par hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$); bref, on aurait $p U_D s = ps$, contrairement à la supposition.

Bref, en désignant pour une suite (s) , soit s , par $U_D s$ la famille des sous-ensembles disjonctif de s et en posant¹

$$(7) \quad 2_{\aleph_1} = \text{borne inf}_s p U_D s,$$

s parcourant toutes les suites (s) deux à deux distinctes au point de vue d'ordre², nous avons le

Théorème 1: Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'inégalité $2_{\aleph_1} > \aleph_1$ est équivalente à la réponse affirmative au problème de Souslin.³

Il est probable que $2_{\aleph_1} > \aleph_1$ (ce serait l'analogie de l'inégalité de Cantor $2^{\aleph_1} > \aleph_1$) mais je suis incapable de le prouver; une raison en est que le procédé de Cantor n'est pas, sans plus, applicable à la détermination de la puissance de la famille $U_D s$ (cf. (7)).

En conséquence, si $2_{\aleph_1} = \aleph_1$, au moins l'un des deux cas aura lieu:

L'hypothèse du continu de Cantor est fausse c'est-à-dire $2^{\aleph_0} > \aleph_1$;

La réponse au problème de Souslin est négative.

4. **Suites (S).** Voici une condition diamétralement opposée à la condition IV:

V. *Pour tout $a \in T$, l'ensemble $[a]_T$ (cf. (5)) contient un ensemble ordonné infini non-dénombrable.*

Une suite ramifiée vérifiant I, II, III, V, sera appelée une suite (S) et désignée, en général, par la lettre S.

¹ D'une manière générale, en disant d'un tableau ramifié t qu'il est *dégénéré* si pour tout $a \in t$ l'ensemble $[a]_t$ est ordonné, et en désignant, pour un tableau T , par $U_D T$ la famille des tableaux dégénérés extraits de T , en posant, pour un ordinal α , $2_{\aleph_\alpha} = \text{borne inf}_T p U_D T$, T parcourant la classe des tableaux ramifiés de puissance $\leq \aleph_\alpha$, on aura $\aleph_\alpha \leq 2_{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\alpha}$, mais nous ne savons pas si nécessairement $\aleph_\alpha < 2_{\aleph_\alpha}$ et $2_{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$. Si \aleph_α est somme de \aleph_0 nombre cardinaux $< \aleph_\alpha$, on aura $2_{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$ (et donc $2_{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$). Par exemple $2_{\aleph_\omega} = 2^{\aleph_\omega}$.

² On peut prouver que dans la définition du nombre 2_{\aleph_1} il suffit de supposer $s \subseteq C$ (cf. le n° 6, 2 ci-après).

³ Voir p. 141, note 2.

Dans le cas d'un ensemble S , le problème du n° 3 n'est plus intéressant, chaque S contenant un ensemble disjonctif non-dénombrable.¹

En revanche, nous ne savons pas évaluer la puissance de la famille $U_M S$ de tous les ensembles ordonnés maximaux² de puissance \aleph_1 extraits de S . Toutefois nous allons démontrer que $p U_M S \geq p S (= \aleph_1)$.

Supposons, par impossible, que la famille $U_D S$ soit dénombrable; on pourrait alors énumérer la famille des couples d'éléments distincts de $U_M S$:

$$(A^0, B^0), (A^1, B^1), \dots, (A^n, B^n), \dots, (A^n \neq B^n, A^n \in U_M S, B^n \in U_M S).$$

Or, chaque élément X de $U_M S$ étant un sous-ensemble bien ordonné

$$x_0 < x_1 < \dots < x_\alpha < \dots, (x_\alpha \in R_\alpha S, \alpha < \Omega),$$

on en déduit que pour tout $n < \omega$, il existe un indice bien déterminé $\alpha_n < \Omega$ tel que $a_{\xi}^n = b_{\xi}^n$, pour $\xi < \alpha_n$, et $a_{\alpha_n}^n \neq b_{\alpha_n}^n$ où a_{α}^n et b_{α}^n désigne respectivement les points $A^n R_\alpha S, B^n R_\alpha S$.

En posant $\alpha =$ borne sup. $\alpha_n, (n < \omega)$, on aura $\alpha < \Omega$. Soit alors a un point quelconque de $R_\alpha S$; en désignant par a^1, a^2 deux points distincts de $R_{\alpha+1} S$ succédant au point a (cf. la condition I), et par A_1, A_2 deux ensembles ordonnés maximaux de puissance \aleph_1 extraits de $[a^1]_S, [a^2]_S$ respectivement, il est clair que le couple A_1, A_2 d'éléments de $U_M S$ ne peut pas faire partie de la suite précédente des $(A^n, B^n), (n < \omega)$, l'indice lui correspondant étant $\alpha + 1$ et donc $> \alpha$, ce qui est en contradiction avec la définition du nombre α .

5. **Suites (C).** Les deux catégories de suites ramifiées que nous venons de considérer jouissent de la propriété suivante: α étant un ordinal quelconque de seconde espèce et $< \Omega$, la famille des ensembles ordonnés maximaux de type α extraits de la suite est de la puissance 2^{\aleph_α} . Et voici maintenant une condition tout différente entraînant une sorte de non-lacunarité (au point de vue du dénombrable) de chaque suite ramifiée qui la vérifie:

VI. *Tout sous-ensemble ordonné maximal est d'une puissance $\geq \aleph_1$.* Une suite ramifiée sera dite une suite (C) et désignée en général par C si elle vérifie les conditions I, II, III et VI.

¹ En effet, soit $a_0, \dots, a_\xi, \dots (\xi < \Omega)$ un sous-ensemble ordonné de S tel que $a_\xi \in R_\xi S, (\xi < \Omega)$; soit, pour tout $\alpha < \Omega, a'_\alpha$ un point quelconque distinct de $a_{\alpha+1}$ et appartenant à $R_{\alpha+1} S$; alors l'ensemble des $a'_\xi, (\xi < \Omega)$, est disjonctif et de puissance \aleph_1 . Dès lors, $p U_D S = 2^{\aleph_1}$.

² Un sous-ensemble ordonné E de T est maximal, si, quel que soit l'ensemble ordonné X , les relations $E \subseteq X \subseteq T$ entraînent $E = X$.

Théorème 2¹: *Pour que $z^{\aleph_0} = \aleph_1$, il faut et il suffit que, C étant une suite ramifiée vérifiant I, II, III et VI, il existe une suite de points $a_\alpha \in R_\alpha C$, ($\alpha < \Omega$) telle que $C = \sum_\alpha [a_\alpha]_C$, ($\alpha < \Omega$) (cf. 5). Tout d'abord, on voit sans peine que $p R_\alpha C = z^{\aleph_0}$ pour tout $\omega \leq \alpha < \Omega$. Dès lors $p C = z^{\aleph_0}$ et donc, en supposant $z^{\aleph_0} = \aleph_1$, les points de C peuvent être rangés dans une suite transfinie, soit*

$$b_0, b_1, b_2, \dots, b_\alpha, \dots, (\alpha < \Omega).$$

En désignant, pour un $\alpha < \Omega$ quelconque, par a_α un point de $R_\alpha C$ comparable à b_α , on aura $C = \sum_\alpha [a_\alpha]_C$, ($\alpha < \Omega$).

Prouvons que la condition du théorème 2 est encore suffisante. Commençons par le lemme que voici:

Quelle que soit la suite de points $a_n \in R_n C$, ($n < \omega$), l'ensemble

$$D(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \equiv R_\omega C - \sum_n [a_n]_C$$

a la puissance du continu.

Pour prouver le lemme, désignons, pour abrégé, par R_n l'ensemble $R_n C$ diminué du point a_n , quel que soit $n < \omega$; soient a^0, a^1 deux points distincts de R_0 ; i_0 désignant 0 ou 1, soient $a^{i_0}, a^{i_0 1}$ deux points distincts de R_1 succédant à a^{i_0} ; d'une manière générale, $n < \omega$ étant donné, supposons qu'on ait construit z^{n+1} points distincts $a^{i_0 \dots i_n} \in R_n$, ($i_0, i_1, \dots, i_n = 0$ ou 1); alors $a^{i_0 i_1 \dots i_n 0}, a^{i_0 i_1 \dots i_n 1}$ désigneront deux points distincts de R_{n+1} succédant au point $a^{i_0 \dots i_n}$. Ceci étant,

$$(8) \quad i_0, i_1, \dots, i_n, \dots (n < \omega)$$

étant une suite quelconque de nombres 0 ou 1, soit

$$(9) \quad a^{i_0 i_1 \dots i_n \dots}$$

le point bien déterminé de $R_\omega C$ succédant à chacun des points

$$a^{i_0}, a^{i_0 i_1}, \dots$$

L'existence du point (9) résultant de la condition VI, il est manifeste que le point (9) est incomparable à chacun des a_n , ($n < \omega$) est qu'il appartient, par conséquent, à l'ensemble $D(a_0, \dots, a_n, \dots)$. Or, à deux suites distinctes (8) corres-

¹ Voir loc. cit.¹ p. 139; p. 134 th. 5.

spondent deux points distincts (g), ce qui veut dire que l'ensemble $D(a_0, \dots, a_n, \dots)$ a bien la puissance 2^{\aleph_0} .

Cela posé, prouvons que la relation $C = \sum_{\alpha} [a_{\alpha}]_C$, ($a_{\alpha} \varepsilon R_{\alpha} C$, $\alpha < \Omega$) entraîne $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$ et donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Pour cela, il suffira de prouver que la puissance de l'ensemble $D(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, ($n < \omega$) est $\leq \aleph_1$.

Tout d'abord

$$D(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \subseteq \sum_{\alpha} [a_{\alpha}]_C, (a_{\alpha} \varepsilon R_{\alpha} C, \omega \leq \alpha < \Omega),$$

tout point de D étant incomparable à tout point a_n , ($n < \omega$). Désignons pour un $x \varepsilon D(a_0, \dots, a_n, \dots)$ par $\alpha(x)$ le premier nombre ordinal tel que les points x , $a_{\alpha(x)}$, soient comparables; manifestement, C étant un tableau ramifié, à deux x distincts et donc incomparables correspondront deux $\alpha(x)$ distincts. Bref, la correspondance $x \rightleftharpoons \alpha(x)$, ($x \varepsilon D$) serait une correspondance biunivoque entre l'ensemble D de puissance 2^{\aleph_0} et un ensemble de nombre ordinaux $< \Omega$, ce qui voudrait dire précisément que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$.

Ainsi le théorème 2 est complètement démontré.

6. Existence des suites (s), (S) et (C).

6, 1. Quant à l'existence d'une suite (s) — elle fut prouvée pour la première fois par M. ARONSZAJN — voir mon article *Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (tableaux ramifiés de M. Aronszajn*¹.)

6, 2. Pour démontrer l'existence d'une suite (C), il suffit de considérer l'ensemble C des complexes $(a_0, a_1, \dots, a_{\xi}, \dots)_{\xi < \alpha}$, ($a_{\xi} < \omega$, $0 < \alpha < \Omega$) ordonné partiellement par la relation $<$ où $(a_0, \dots, a_{\xi}, \dots)_{\xi < \alpha} < (b_0, b_1, \dots, b_{\xi})_{\xi < \beta}$ veut dire que $\alpha < \beta < \Omega$ et $a_{\xi} = b_{\xi}$, ($\xi < \alpha$).

Lemme 1. *Deux suites (C) quelconques sont semblables. Pour établir une similitude, φ , entre deux suites (C), C_1 , C_2 , énumérons, pour commencer, chaque noeud de première espèce de chacun des ensembles C_1 et C_2 (cf. n° 1, 2). Faisons se correspondre les points du noeud $R_0 C_1$ et ceux du noeud $R_0 C_2$ de manière que se correspondent les points portant, dans l'énumération dont nous venons de parler, un même indice. Soit $0 < \alpha < \Omega$ et supposons qu'on ait établi une*

¹ Publ. Math. Univ. Belgrade, VI, 1937, pp. 124—160.

similitude entre les ensembles $\sum_{\xi} R_{\xi} C_1$ et $\sum_{\xi} R_{\xi} C_2$, ($\xi < \alpha$); prolongeons-la dans les ensembles $\sum_{\xi} R_{\xi} C_1$, $\sum_{\xi} R_{\xi} C_2$, ($\xi \leq \alpha$).

Soit $a \in R_{\alpha} C_1$; déterminons $\varphi(a) \in R_{\alpha} C_2$. Si α est de seconde espèce, $\varphi(a)$ sera le point de $R_{\alpha} C_2$ succédant à chacun des points $\varphi(x)$, x parcourant tous les prédécesseurs de a . Si α est de première espèce, soient a' le prédécesseur immédiat de a et A le noeud de C_2 succédant immédiatement au point $\varphi(a') \in C_2$. Alors, $\varphi(a)$ sera le point du noeud A ayant même indice que le point a dans les énumérations précédentes des noeuds $|a|_{C_1}$ et A .

Ainsi, par l'induction transfinie, à tout $a \in C_1$ on fait correspondre un seul $\varphi(a) \in C_2$, et on voit que φ est une similitude entre C_1 et C_2 .

En particulier, il n'y a, au point de vue d'ordre, aucune différence entre une suite (C) quelconque et la suite C de tout à l'heure.

6, 3. *L'ensemble μ .* Designons par μ l'ensemble des complexes

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), (n < \omega, \alpha_0 < \Omega, \dots, \alpha_n < \Omega)$$

ordonné partiellement par la relation $<$ que voici:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) < (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k).$$

veut dire que, ou bien

$$n = k, \alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} = \beta_{n-1}, \alpha_n < \beta_n$$

(en particulier, si $n = k = 0$, cela veut dire que $\alpha_0 < \beta_0$), ou bien

$$n < k, (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) < (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}).$$

On prouve facilement par le procédé de l'induction totale, que μ est partiellement ordonné, ce qui, au fond, revient à la transitivité de la relation $<$ dans μ : les relations $a < b < c$ entraînent $a < c$, quels que soient les points a , b , c de μ .

Lemme 2. *L'ensemble μ est une suite (S) .*

La démonstration du lemme 2 étant facile, nous nous contentons de quelques observations: $a \equiv (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ étant un élément de μ , le noeud $|a|_{\mu}$ est constitué des points $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_k, 0)$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_k, 0, 0)$, \dots , k désignant le plus grand des nombres $\leq n$ vérifiant $\alpha_k \neq 0$; en particulier, $R_0 \mu$ est constitué

des points (o) , (o, o) , (o, o, o) , ... Le noeud de μ succédant immédiatement à a est composé des points

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n + 1), (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n + 1, o), \dots, (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n + 1, o, o, \dots, o), \dots$$

Que μ vérifie V, cela résulte de ce que les points $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \xi)$, $(\xi < \Omega)$, constituent un sous-ensemble ordonné non-dénombrable maximal de μ contenant le point a .

Par ailleurs, on vérifie que tout ensemble ordonné maximal non-dénombrable extrait de μ a la forme précédente: $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \xi)$, $(\xi < \Omega)$. En conséquence, la famille $U_M \mu$ des sous-ensembles ordonnés maximaux non-dénombrables de μ a la puissance égale à celle de μ , donc $\aleph_1: p U_M \mu = \aleph_1$ (cf. le problème du n° 4).

Lemme 3. *Chaque suite (S) contient un ensemble semblable à μ .*

On peut exprimer le lemme 3 en disant que μ est la plus petite suite (S) .

Soit donc S une suite (S) quelconque. Désignons par $T_0 \equiv \{a_{\alpha_0}\}_{\alpha_0 < \Omega}$ un sous-ensemble ordonné maximal non-dénombrable de S ; par conséquent, $a_{\alpha_0} \in R_{\alpha_0} S$, $(\alpha_0 < \Omega)$; soit, pour tout $\alpha_0 < \Omega$, $M_{\alpha_0} \equiv \{a_{\alpha_0 \alpha_1}\}$, $(\alpha_1 < \Omega)$ un ensemble ordonné maximal non-dénombrable quelconque extrait de $\sum_{\xi} R_{\xi} S - T_0$, $(\alpha_0 \leq \xi < \Omega)$ tel que a_{α_0} et $a_{\alpha_0 \alpha_1}$ appartiennent au même noeud de S . D'une manière générale, les ensembles

$$T_0 = \{a_{\alpha_0}\}, M_{\alpha_0} = \{a_{\alpha_0 \alpha_1}\}, \dots, M_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} = \{a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}\}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n < \Omega)$$

étant définis, nous désignerons par

$$M_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n} \equiv \{a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}}\}, (\alpha_{n+1} < \Omega)$$

un ensemble ordonné maximal non-dénombrable extrait de

$$\sum_{\xi} R_{\xi} S - T_0 - \sum_{\alpha_0} M_{\alpha_0} - \dots - \sum_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} M_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}, (\beta \leq \xi < \Omega, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} < \Omega)$$

où $a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \in R_{\beta} S$, sous la seule condition que les points

$$a_{\alpha_0 \dots \alpha_n}, a_{\alpha_0 \dots \alpha_n 0}$$

appartiennent au même noeud de S .

Ainsi, par l'induction totale, nous construisons la famille des ensembles

$$T_0, M_{\alpha_0}, M_{\alpha_0 \alpha_1}, \dots, M_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}, \dots$$

et l'ensemble A des points

$$a_{\alpha_0}, a_{\alpha_0 \alpha_1}, \dots, a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}, \dots, (\alpha_n < \Omega, n < \omega)$$

extraits de S . On voit sans peine que A est semblable à μ , la correspondance

$$a_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} \leftrightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

étant une similitude entre A et μ .

Il serait extrêmement intéressant de savoir si une proposition analogue au lemme 3 subsiste pour des suites (s) ; c'est-à-dire s'il existe une suite (s) minimale!

Lemme 4. *L'ensemble μ ne contient aucune suite (s) .*

Supposons, par impossible, que μ contienne une suite (s) , soit s . Tout d'abord, s ne contient que $\leq \aleph_0$ points de la forme (α_0) ; sinon, l'ensemble des (α_0) , $(\alpha_0 < \Omega)$, étant ordonné, l'ensemble s contiendrait un ensemble ordonné non-dénombrable, ce qui est impossible, vu la condition IV. Soit β^0 le premier ordinal tel que

$$(10) \quad (\alpha_0) \text{ non } \varepsilon s, (\beta^0 \leq \alpha_0 < \Omega).$$

Montrons que s contient $\leq \aleph_0$ points $(\alpha_0 \alpha_1)$. $(\alpha_0, \alpha_1 < \Omega)$. Dans le cas contraire, l'indice α_0 parcourrait nécessairement une suite transfinie; c'est que si l'on avait un $\alpha < \Omega$ tel que $\alpha_0 < \alpha$ et $(\alpha_0, \alpha_1) \varepsilon s$ pour une suite transfinie des $\alpha_1 < \Omega$, il y aurait un $\beta \leq \alpha$ tel que $(\beta, \alpha_1) \varepsilon s$ pour une infinité non-dénombrable des α_1 , ce qui est impossible, l'ensemble des (β, α_1) , $(\alpha_1 < \Omega)$, étant, pour β fixe, ordonné.

Il y aurait donc un ensemble non-dénombrable K_0 d'ordinaux $< \Omega$ tel que, quel que soit $\alpha_0 \varepsilon K$, il y ait au moins un α_1 (dépendant de α_0) vérifiant $(\alpha_0, \alpha_1) \varepsilon s$. En désignant, pour un $\alpha_0 \varepsilon K_0$, par $\varphi(\alpha_0)$ le premier ordinal tel que $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0)) \varepsilon s$, l'ensemble E_0 des points $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$, $(\alpha_0 \varepsilon K_0)$ appartiendrait à l'ensemble $\sum_{\xi} R_{\xi} S$,

$(\xi \leq \beta^0)$, l'ordinal β^0 ayant la signification de tout à l'heure. En effet, soit $\alpha_0 \varepsilon K_0$; l'ensemble des points de μ précédant le point $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$ est de l'une des deux formes:

$$\text{soit } (\xi), (\xi < \alpha_0), \text{ soit } (\alpha_0, \zeta), (\zeta < \varphi(\alpha_0)).$$

Or, $(\xi) < (\alpha_0, \zeta)$, $(\xi < \alpha_0, \zeta < \varphi(\alpha_0))$ ce qui, vu qu'aucun des points (α_0, ζ) , $(\zeta < \varphi(\alpha_0))$ n'appartienne à s , entraîne que l'ensemble des points de s précédant le point $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$ est contenu dans l'ensemble bien ordonné des points (ξ) , $(\xi < \alpha_0)$, ce qui vu la relation (10) veut dire que l'ensemble des points de s précédant le point $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$ est d'un type d'ordre $< \beta^0$, c'est-à-dire que la relation $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0)) \varepsilon R_{\eta} s$ entraîne $\eta \leq \beta^0$.

Ainsi donc l'ensemble infini non-dénombrable des points $(\alpha_0, \varphi(\alpha_0))$, $(\alpha_0 \in K_0)$, fairait partie de l'ensemble $\sum_{\xi} R_{\xi} s$, $(\xi \leq \beta^0)$, ce qui est impossible, celui-ci étant dénombrable comme conséquence des relations $\beta^0 < \Omega$ et $p R_{\xi} s = \aleph_0$, $(\xi < \Omega)$ (cf. la condition III).

Bref, l'ensemble des points de s de forme (α_0) ou $(\alpha_0 \alpha_1)$ serait $\leq \aleph_0$. Soit $0 < n < \omega$ et supposons que nous ayons prouvé que l'ensemble des points de s de forme $(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k)$, $(k \leq n)$ est au plus dénombrable; démontrons qu'il en serait encore ainsi de l'ensemble des points $(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1})$ appartenant à s .

Soit β^n le premier nombre ordinal tel qu'aucun des points

$$(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k), (\beta^n \leq \alpha_0 < \Omega, \dots, \beta^n \leq \alpha_k < \Omega, k \leq n)$$

n'appartienne à s . Comme tout à l'heure, nous concluons que pour un point donné $(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n)$ de μ il y a un nombre ordinal, et soit $\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ le plus petit ordinal tel que $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in s$ entraîne $\alpha_{n+1} < \varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Il y aurait donc un ensemble non-dénombrable K_n de points $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que l'ensemble E_n des points $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \varphi(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n))$, $((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K_n)$ fasse partie de s . On aboutit à la contradiction en démontrant comme ci-dessus que l'ensemble E_n serait contenu dans l'ensemble dénombrable $\sum_{\xi} R_{\xi} s$, $(\xi \leq \beta^n)$.

Bref, quel que soit l'entier $n \geq 0$, il n'y aurait qu'au plus \aleph_0 points de μ de forme $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ appartenant à s ; d'où l'on conclurait à la dénombrabilité de s , ce qui est impossible (cf. (6)). Autrement dit, μ ne contient aucune suite (s) . —

Lemme 5. *Il y a deux suites (S) distinctes au point de vue d'ordre.*

Soient s une suite (s) quelconque et, pour un $a \in s$, $S(a)$ une suite (S) semblable à la suite μ et sans point commun avec μ , de manière qu'à deux points distincts a, a^1 de s , les ensembles $S(a), S(a^1)$ sont sans point commun. Désignons par

$$\mu(s) \text{ l'ensemble } s + \sum_a S(a), (a \in s)$$

ordonné partiellement de manière que, quel que soit $x \in \mu(s)$, l'ensemble des points de $\mu(s)$ précédant le point x est composé: des points de s précédant, dans s , le point x si $x \in s$, et des points de s précédant, dans s , le point a et des points de $S(a)$ précédant, dans $S(a)$, le point x , si $x \in S(a)$ et $a \in s$; bien entendu, l'ordre

relatif des points dans chacun des ensembles s et $S(a)$, $(a \varepsilon s)$, reste conservé dans $\mu(s)$, de manière qu'on peut dire qu'on obtient l'ensemble $\mu(s)$ à partir de l'ensemble s en faisant suivre le point $a \varepsilon s$ par l'ensemble $S(a)$, $(a \varepsilon s)$.

On prouve que $\mu(s)$ est une suite (S) .

Or, les deux suites (S) , μ et $\mu(s)$ ne sont pas semblables, la suite $\mu(s)$ contenant une suite (s) , soit s , alors que la suite μ n'en contient aucune, comme le prouve le lemme 4.

Le problème de savoir s'il y a deux suites (s) distinctes au point de vue d'ordre reste ouvert.

Remarquons, en terminant, que chaque suite (s) ou (S) est semblable à un sous-ensemble d'une suite (C) quelconque, ce qui, vu la similitude de deux suites (C) quelconques, veut dire qu'on peut supposer les ensembles dont nous venons nous occuper au cours de l'article appartenir à la suite C que nous avons définie au n° 6, 2. —