DIE VERALLGEMEINERUNG DER SÄTZE VON EULER-MACLAURIN UND LAPLACE-LAGRANGE.

Von

ALFRED TAUBER

in Wien.

Die Reihenentwicklung der Differenz

$$\int_0^m \Psi(x)\,dx - \sum_{\nu=0}^{m-1} \Psi(\nu) \tag{1}$$

(x reell positiv, m eine positive ganze Zahl) zwischen einem Integral und der zugehörigen Summe jener Werte, welche die zu integrierende Funktion Ψ für äquidistante Argumente annimmt, bezweckt entweder einen Näherungswert für das Integral zu finden, oder falls das Integral leicht ausführbar sein sollte, einen solchen für die Summe. Und eine in ganz analoger Weise zu behandelnde Aufgabe der Näherungsrechnung befasst sich mit der Entwicklung der Differenz zweier Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{mk-1} \Psi(\nu) - k\sum_{\nu=0}^{m-1} \Psi(\nu k) \tag{1 a}$$

(k eine positive ganze Zahl) insbesondere wenn die $m\,k$ Grössen $\Psi(0), \Psi(1), \Psi(2), \ldots$ nicht von vorneherein numerisch gegeben vorliegen sondern erst auszurechnen wären, denn die Kenntnis eines Näherungswertes der Differenz (1 a) erlaubt es, die Berechnung von $\sum\limits_{0}^{mk-1} \Psi(\nu)$ ausschliesslich auf diejenige der m Grössen $\Psi(0)$, $\Psi(k)$, $\Psi(2k), \ldots$ zu basieren.

Dabei liegt die Möglichkeit vor, dass sich (1) oder (1 a) durch eine Entwicklung nicht beliebig, sondern nur bis zu einem gewissen Mindestbetrag des Fehlers angenähert darstellen lässt, welches Minimum wieder bei verschiedenen Entwicklungen verschieden ausfallen wird. Anderseits kann es vorkommen, dass selbst dann, wenn sowohl das Integral in (1) als die Reihe für $m \to \infty$ divergiert, dennoch für ihre Differenz eine konvergente Reihe als Grenzwert existiert.

Wofern nun, wie dies den Formeln von Euler-Maclaurin und Laplace-Lagrange[1] als Hauptmerkmal gemeinsam ist, die Werte der zur Entwicklung von (1) oder (1 a) gewählten Funktionen *an beiden Grenzen des Integrales (resp. der Reihe) herangezogen werden sollen*, so kann man für dieses Problem ein generelles Verfahren angeben, das zu gewissen Differenzengleichungen führt, vgl. (6), (9) im Folgenden.[2]

I. In dem vorerst zu betrachtenden Integral $\int\limits_0^h \Phi(x+a) f(x+a)\,dx$ werde eine Entwicklung des Faktors $f(x+a)$ des Integranden *nach bestimmten Funktionen* $\psi_\varkappa(a)$ *des Parameters* a vorgenommen, und zwar mit endlich vielen Gliedern

$$f(x+a) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \varphi_\varkappa(x)\,\psi_\varkappa(a) + R_n(x, a),\ \varphi_0(x) = 1,\ \psi_0(a) = f(a), \tag{2}$$

zugleich aber *bezüglich jeder der Funktionen* ψ *eine ähnliche Entwicklung an der Stelle* $a+h$

$$\psi_\varkappa(h+a) = \sum_{\lambda=0}^{n} \varphi_{\varkappa\lambda}(h)\,\psi_{\varkappa+\lambda}(a) + S_{\varkappa n}(h, a),\ \varphi_{\varkappa 0}(h) = 1. \tag{2 a}$$

Dann folgt einerseits aus (2), indem man mit $\frac{1}{h}\Phi(x+a)$ multipliziert und von 0 bis h integriert

---

[1] Vgl. z. B. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Band II, Teil 3, S. 92 u. 97. Die dort stehende Formel (145) weist zwei Zeichenfehler auf, bei $\Delta^2 y_0$ und $\Delta^4 y_0$, auch fehlt der zum Verständnis der Überleitung in Formel (146) notwendige Lehrsatz der Differenzenrechnung

$$\Delta^\varkappa y_n = \sum_{\lambda=\varkappa}^{n-1} \binom{\lambda-1}{\lambda-\varkappa} \Delta^\lambda y_{n-\lambda} + \sum_{\lambda=n+1}^{n+\varkappa} \binom{n}{\lambda-\varkappa} \Delta^\lambda y_0$$

[2] Einige Spezialfälle, bei denen wegen Unendlichwerdens der oberen Grenze nur die untere in Frage kommt, habe ich betreffs der Konvergenz bereits früher untersucht. (Sitzungsber. der Wiener Akademie d. W., math.-nat. Klasse Bd. 130 S. 321.)

$$(3)\qquad \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a)f(x+a)\,dx = \frac{1}{h}\Bigg[\sum_{\varkappa=0}^{n}\psi_\varkappa(a)\int_0^h \Phi(x+a)\,\varphi_\varkappa(x)\,dx + {} + \int_0^h \Phi(x+a)\,R_n(x,a)\,dx\Bigg]$$

anderseits sind die, mit noch zu wählenden Funktionen $P_\varkappa(a,h)$ der beiden Parameter a, h gebildeten $(n+1)$ Ausdrücke

$$(4)\qquad P_\varkappa(a,h)\,\psi_\varkappa(a) - P_\varkappa(a+h,h)\,\psi_\varkappa(a+h),\ \varkappa = 0 \text{ bis } n$$

nach (2 a) als lineare Aggregate von $\psi_\varkappa(a), \ldots \psi_n(a)$ auswertbar

$$(5)\qquad P_\varkappa(a,h)\,\psi_\varkappa(a) - P_\varkappa(a+h,h)\left[\sum_{\lambda=0}^{n-\varkappa}\varphi_{\varkappa\lambda}(h)\,\psi_{\varkappa+\lambda}(a) + S_{\varkappa,\,n-\varkappa}(h,a)\right].$$

Addiert man jetzt die rechte Seite von (3) und die $(n+1)$ Ausdrücke (5), stellt aber hiebei die Forderung, dass sich in der Gesamtsumme alle die Koeffizienten von $\psi_1(a), \psi_2(a), \ldots \psi_n(a)$ gegenseitig aufheben sollen, während der Koeffizient von $\psi_0(a) = f(a)$ den Wert $\Phi(a)$ annehmen soll, so reduziert sich dieselbe auf

$$(5\text{ a})\qquad \begin{aligned}\Phi(a)\,f(a) + \Re_n(a,h),\ \Re_n(a,h) = \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a)\,R_n(x,a)\,dx - {}\\ - \sum_{\varkappa=0}^{n} P_\varkappa(a+h,h)\,S_{\varkappa,\,n-\varkappa}(h,a).\end{aligned}$$

Die Erfüllung der gestellten, vom Charakter der Funktion f unabhängigen Forderung

$$(6)\qquad 0 = P_\varkappa(a,h) - \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} P_\lambda(a+h,h)\,\varphi_{\lambda,\,\varkappa-\lambda}(h) + \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a)\,\varphi_\varkappa(x)\,dx \text{ für } \varkappa \geqq 1$$

$$(6\text{ a})\qquad \Phi(a) = P_0(a,h) - P_0(a+h,h) + \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a)\,dx$$

bewirkt demnach dass

$$
(7)\qquad \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a)f(a+x)\,dx + \sum_{\varkappa=0}^{n}\Big[P_\varkappa(a,h)\,\psi_\varkappa(a) - P_\varkappa(a+h,h)\,\psi_\varkappa(a+h)\Big] = \Phi(a)f(a) + \Re_n(a,h)
$$

wird, welche Beziehung sich nach bekannter Methode, (Substitution von $a+h$, $a+2h$, $\ldots a+\overline{m-1}\,h$, *anstatt* a *und Addition aller so enstandenen Gleichungen) erweitern lässt*

$$
(8)\qquad \frac{1}{h}\int_0^{mh} \Phi(x+a)f(x+a)\,dx + \sum_{\varkappa=0}^{n}\Big[P_\varkappa(a,h)\,\psi_\varkappa(a) - P_\varkappa(a+mh,h)\,\psi_\varkappa(a+mh)\Big] = \sum_{\nu=0}^{m-1}\Phi(a+\nu h)f(a+\nu h) + \Re_{m,n}, \qquad \Re_{m,n} = \sum_{\nu=0}^{m-1}\Re(a+\nu h, h).
$$

Wie verlangt treten die Werte der $\psi_\varkappa$ an beiden Grenzen des Integrales in (7) und (8) auf.

Der Ableitung von (7) volkommen analog hat man auch mit der Differenz (1 a) zweier Reihen, dort $\Psi(x) = \Phi(a+x)f(a+x)$ und $\varkappa = h$ gesetzt, zu verfahren: *Funktionen* $\mathfrak{P}_\varkappa(a,h)$ *entsprechend den Bedingungen*

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{P}_\varkappa(a,h) - \sum_{\lambda=0}^{\varkappa}\mathfrak{P}_\lambda(a+h,h)\,\varphi_{\lambda,\varkappa-\lambda}(h) + \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1}\Phi(a+\nu)\,\varphi_\varkappa(\nu), \qquad \varkappa \geqq 1 \\
\Phi(a) &= \mathfrak{P}_0(a,h) - \mathfrak{P}_0(a+h,h) + \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1}\Phi(a+\nu)
\end{aligned}
$$

zu wählen, so dass aus (2), (2 a) die Beziehung folgt

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1}\Phi(a+\nu)f(a+\nu) + \sum_{\varkappa=0}^{n}\Big[\mathfrak{P}_\varkappa(a,h)\,\psi_\varkappa(a) - \mathfrak{P}_\varkappa(a+h,h)\,\psi_\varkappa(a+h)\Big] = \Phi(a)f(a) + \Re'_n(a,h) \\
&\Re'_n(a,h) = \frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1}\Phi(a+\nu)\,R_n(\nu,a) - \sum_{\varkappa=0}^{n}\mathfrak{P}_\varkappa(a+h,h)\,S_{\varkappa,n-\varkappa}(h,a).
\end{aligned}
\right.
$$

Alsdann nimmt man mit (10) *dieselbe Erweiterung vor, wie früher mit* (7)

$$\frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{mh-1}\Phi(a+\nu)f(a+\nu)+\sum_{\varkappa=0}^{n}\left[\mathfrak{P}_\varkappa(a,h)\psi_\varkappa(a)-\mathfrak{P}_\varkappa(a+mh,h)\psi_\varkappa(a+mh)\right]$$

$$(11)\qquad =\sum_{\nu=0}^{m-1}\Phi(a+\nu h)f(a+\nu h)+\mathfrak{R}'_{m,n},\quad \mathfrak{R}'_{m,n}=\sum_{\nu=0}^{m-1}\mathfrak{R}'_n(a+\nu h,h).$$

Nachträglich, nach Bestimmung der Funktionen $P_\varkappa$ resp. $\mathfrak{P}_\varkappa$, kann unbeschadet der Allgemeinheit der Fragestellung $a=0$ in der Formeln (8) und (11) gesetzt werden.

II. In den beiden einfachsten Arten der Entwicklung (2) von $f(x+a)$, nach der Taylorschen resp. der Newtonschen Interpolationsreihe, haben die Entwicklungsfunktionen φ,ψ die Werte

$$(12)\qquad \begin{cases} \varphi_\varkappa(x)=\dfrac{x^\varkappa}{\varkappa!},\quad \psi_\varkappa(a)=f^{(\varkappa)}(a) \\ \text{resp. } \varphi_\varkappa(x)=\begin{pmatrix}\frac{x}{h}\\ \varkappa\end{pmatrix},\quad \psi_\varkappa(a)=\varDelta_h^\varkappa f(a)=\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\varkappa}(-1)^{\varkappa-\lambda}\binom{\varkappa}{\lambda}f(a+\lambda h)\end{cases}$$

ferner sind die in (2 a) auftretenden Funktionen gleich

$$(12\text{ a})\qquad \varphi_{\varkappa\lambda}(x)=\frac{x^\lambda}{\lambda!}$$

$$(12\text{ b})\qquad \text{resp. } \varphi_{\varkappa 0}(x)=1,\ \varphi_{\varkappa 1}(x)=1,\ \varphi_{\varkappa 2}(x)=\cdots=0$$

und die Reste R, S lauten nach bekannten Elementarregeln bei der Taylorschen Reihe

$$(13)\quad R_n(x,a)=\int_0^x f^{(n+1)}(x+a-t)\frac{t^n}{n!}\,dt,\quad S_{\varkappa,n-\varkappa}(h,a)=\int_0^h f^{(n+1)}(h+a-t)\frac{t^{n-\varkappa}\,dt}{(n-\varkappa)!}$$

resp. bei der Newtonschen Interpolationsreihe

$$(14)\ R_n(x,a)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\begin{pmatrix}\frac{x}{h}\\ n+1\end{pmatrix}f^{(n+1)}(a+\vartheta nh),\ S_{\varkappa,n-\varkappa}(h,a)=0 \text{ ausser } S_{\varkappa 0}(h,a)=\varDelta_h^{\varkappa+1}f(a)$$

(mit ϑ ein positiver echter Bruch bezeichnet und f, a reell vorausgesetzt).

Bezüglich der Zerlegung $\Psi(x)=\Phi(x)f(x)$ repräsentiert $\Phi(x)=1$ die einfachst mögliche Annahme, insbesondere entstehen dann für die Entwicklungsfunktionen

(12) die Sätze von Euler-Maclaurin und Laplace-Lagrange. Es ist hienach auch nicht notwendig, den letztern, wie oft üblich, auf den ersteren zurückzuführen.

Eine Generalisierung und Ergänzung der genannten Sätze kann nun in doppelter Weise geschehen: Entweder unter Festhalten der Annahme $\Phi(x)=1$ andere Entwicklungsarten als die in (12) zu betrachten, oder aber, wenn die zu integrierende Funktion Ψ ein Produkt Φf zweier anderer vorstellt, deren eine sich auf einfachere Weise darstellen lässt, die Entwicklung auf diese eine Funktion zu beschränken. Ohne solche Verallgemeinerungen begibt man sich in Einzelfällen auch der Möglichkeit geschlossene, im Endlichen abbrechende Entwicklungen zu erlangen.

III. Die letztere der beiden angeregten Aufgaben, unter Beibehaltung der Entwicklungsfunktionen (12), die Wahl von Φ nicht auf die Annahme $\Phi=1$ zu beschränken, sondern offen zu lassen, soll hier untersucht werden.

Zunächst sind dann, wie auch Φ gewählt wird, die Differenzengleichungen (6), welche hier nach (12a), (12b) zu lauten haben

$$(15\,\mathrm{a})\qquad P_\varkappa(a,h)-\sum_{\lambda=0}^{\varkappa} P_\lambda(a+h,h)\frac{h^{\varkappa-\lambda}}{(\varkappa-\lambda)!}=-\frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a)\frac{x^\varkappa}{\varkappa!}\,dx$$

$$(15\,\mathrm{b})\qquad \text{resp. } P_\varkappa(a,h)-[P_\varkappa(a+h,h)+P_{\varkappa-1}(a+h,h)]=-\frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a)\binom{\frac{x}{h}}{\varkappa}dx$$

in einer einzigen subsumierbar. Um dies zu zeigen multipliziert man (15a) resp. (15b) unter Benützung einer Hilfsvariabeln ε mit $(-\varepsilon)^\varkappa$ und addiert die so für $\varkappa=1,2,\ldots$ entstehenden Gleichungen zu (6a), so ergeben sich, *weil rechts die Summation geschlossen ausführbar wird,* zwei Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} P_\varkappa(a,h)(-\varepsilon)^\varkappa-\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-\varepsilon)^\varkappa\sum_{\lambda=0}^{\varkappa}P_\lambda(a+h,h)\frac{h^{\varkappa-\lambda}}{(\varkappa-\lambda)!}=\Phi(a)-\frac{1}{h}\int_0^h\Phi(x+a)e^{-x\varepsilon}dx$$

(16)

$$\text{resp. } \sum_{\varkappa=0}^{\infty} P_\varkappa(a,h)(-\varepsilon)^\varkappa-(1-\varepsilon)\sum_{\varkappa=0}^{\infty}P_\varkappa(a+h,h)(-\varepsilon)^\varkappa=\Phi(a)-\frac{1}{h}\int_0^h\Phi(x+a)(1-\varepsilon)^{\frac{x}{h}}dx$$

deren jede eine Differenzengleichung für die Generierende P der $P_\varkappa(a,h)$

$$P(a, h, \varepsilon) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} P_\varkappa(a, h)(-\varepsilon)^\varkappa \tag{17}$$

vorstellt. Denn man braucht nur in der ersteren die Summationsfolge der auftretenden Doppelsumme zu vertauschen, wodurch die Summierung über $\varkappa$ ausführbar wird

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} P_\lambda(a+h, h) \sum_{\varkappa=\lambda}^{\infty} (-\varepsilon)^\varkappa \frac{h^{\varkappa-\lambda}}{(\varkappa-\lambda)!} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} P_\lambda(a+h, h)(-\varepsilon)^\lambda e^{-h\varepsilon}$$

und für P die Bedingungsgleichung entsteht

$$P(a, h, \varepsilon) - e^{-h\varepsilon} P(a+h, h, \varepsilon) = \Phi(a) - \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a) e^{-x\varepsilon} dx \tag{18 a}$$

während die zweite Gleichung (16) sofort als Differenzengleichung für P zu schreiben ist

$$P(a, h, \varepsilon) - (1-\varepsilon) P(a+h, h, \varepsilon) = \Phi(a) - \frac{1}{h}\int_0^h \Phi(x+a)(1-\varepsilon)^{\frac{x}{h}} dx. \tag{18 b}$$

Eine Vereinfachung erzielt man jetzt noch durch Einführung des unbestimmten Integrales

$$\Omega(x, \varepsilon) = \frac{1}{h}\int \Phi(x) e^{-x\varepsilon} dx \text{ resp. } \frac{1}{h}\int \Phi(x)(1-\varepsilon)^{\frac{x}{h}} dx \tag{19}$$

und, an Stelle der Generierenden P, der Funktion

$$T(a, h, \varepsilon) = e^{-a\varepsilon} P(a, h, \varepsilon) - \Omega(a, \varepsilon) \quad \text{resp. } (1-\varepsilon)^{\frac{a}{h}} P(a, h, \varepsilon) - \Omega(a, \varepsilon) \tag{19 a}$$

weil zwischen Φ und T ein Zusammenhang elementarer Art besteht

$$T(a, h, \varepsilon) - T(a+h, h, \varepsilon) = e^{-a\varepsilon}\Phi(a) \text{ resp. } (1-\varepsilon)^{\frac{a}{h}}\Phi(a). \tag{20}$$

Vollkommen analogen Bedingungen wie (18 a), (18 b) genügt *bezüglich der in* (9) *definierten Funktionen* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *deren Generierende* $\mathfrak{P} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\varkappa(a, h)(-\varepsilon)^\varkappa$

$$(21)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{P}(a, h, \varepsilon)-e^{-h\varepsilon}\,\mathfrak{P}(a+h, h, \varepsilon)=\Phi(a)-\frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1}\Phi(a+\nu)\,e^{-\nu\varepsilon} \\ &\mathfrak{P}(a, h, \varepsilon)-(1-\varepsilon)\,\mathfrak{P}(a+h, h, \varepsilon)=\Phi(a)-\frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{h-1}\Phi(a+\nu)\,(1-\varepsilon)^{\frac{\nu}{h}}. \end{aligned}$$

IV. *Die Spezialisierung* $\Phi(x)=\varrho^x$, welche ihrerseits für $\varrho\to 1$ die Sätze von Euler-Maclaurin und Laplace-Lagrange reproduziert, *lässt* $P_\varkappa$ *und* $\mathfrak{P}_\varkappa$ *als die* $\varkappa$*-ten Differentialquotienten elementarer Funktionen definieren.* Im Falle $\Phi(x)=\varrho^x$ ist nämlich offenbar der Ansatz

$$(22)\qquad P_\varkappa(a, h)=\varrho^a F_\varkappa(\varrho, h),\quad P(a, h, \varepsilon)=\varrho^a F(\varrho, h, \varepsilon),$$

wo $F_\varkappa$ nicht mehr von a abhängt, zu gebrauchen, so dass die Gleichungen (18 a), (18 b), durch ϱ^a dividiert, die Form

$$\left[1-\varrho^h e^{-h\varepsilon}\right]F(\varrho, h, \varepsilon)=1-\frac{1}{h}\int_0^h \varrho^x e^{-x\varepsilon}\,dx$$

$$\text{resp.}\quad \left[1-\varrho^h(1-\varepsilon)\right]F(\varrho, h, \varepsilon)=1-\frac{1}{h}\int_0^h \varrho^x(1-\varepsilon)^{\frac{x}{h}}\,dx$$

annehmen und nach Auswertung der Integrale die Generierende F auf einfache Weise bestimmen

$$(23)\quad \begin{aligned} &F(\varrho, h, \varepsilon)=\frac{1}{1-\varrho^h e^{h\varepsilon}}+\frac{1}{h(\lg\varrho-\varepsilon)} \\ &\text{resp.}\quad F(\varrho, h, \varepsilon)=\frac{1}{1-\varrho^h(1-\varepsilon)}+\frac{1}{\lg[\varrho^h(1-\varepsilon)]}. \end{aligned}$$

Setzt man aber in der ersten dieser Gleichungen $\beta=-\lg\varrho$ so wird $F=F(\varrho, h, \varepsilon)$ zu einer Funktion von $\varepsilon+\beta$

$$(24)\qquad F=\frac{1}{1-e^{-h(\varepsilon+\beta)}}-\frac{1}{h(\varepsilon+\beta)},\qquad \beta=-\lg\varrho$$

welche für $\varepsilon=0$ den Wert besitzt

$$(24\text{ a})\qquad F_0=\frac{1}{1-e^{-h\beta}}-\frac{1}{h\beta}$$

deshalb muss, gemäss dem Taylorschen Satz der Koeffizient von $\varepsilon^\varkappa$ in F mit

$$\frac{1}{\varkappa!}\frac{d^\varkappa}{d\beta^\varkappa}\left(\frac{1}{1-e^{-h\beta}}-\frac{1}{h\beta}\right)$$

übereinstimmen. *Als Generalisierung der Euler-Maclaurinschen Formel findet man* somit, nach (8), dort der Einfachheit halber $a=0$ angenommen

$$\frac{1}{h}\int_0^{mh}\varrho^x f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{m-1}\varrho^{\nu h}f(\nu h)-\sum_{\varkappa=0}^{n}(-1)^\varkappa\frac{f^{(\varkappa)}(0)-\varrho^{mh}f^{(\varkappa)}(mh)}{\varkappa!}\frac{d^\varkappa F_0}{d\beta^\varkappa}+\mathfrak{R}_{m,n}. \tag{25}$$

Durch den Übergang $\varrho\to 1$ oder $\beta\to 0$ ergibt sich aus (24)

$$F=\frac{1}{1-e^{-h\varepsilon}}-\frac{1}{h\varepsilon},\quad F_\varkappa=\frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!}\left\{\frac{d^\varkappa}{d\varepsilon^\varkappa}\left(\frac{1}{1-e^{-h\varepsilon}}-\frac{1}{h\varepsilon}\right)\right\}^{\varepsilon=0}$$

also der Euler-Maclaurinsche Satz, der allerdings nicht direkt aus (25) abzulesen ist.

Anderseits wird in der zweiten Gleichung (23) die Generierende F als Funktion von $\varrho^h(1-\varepsilon)$ definiert

$$F=\frac{1}{1-(\sigma-\sigma\varepsilon)}+\frac{1}{\lg(\sigma-\sigma\varepsilon)},\qquad \sigma=\varrho^h, \tag{26}$$

daher resultiert, wieder nach dem Taylorschen Satze, als Koeffizient von $(-\varepsilon)^\varkappa$ in F

$$F_\varkappa=\frac{\sigma^\varkappa}{\varkappa!}\frac{d^\varkappa}{d\sigma^\varkappa}\left(\frac{1}{1-\sigma}+\frac{1}{\lg\sigma}\right)$$

und als *Verallgemeinerung des Satzes von Laplace-Lagrange*

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_0^{mh}\varrho^x f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{m-1}\varrho^{\nu h}f(\nu h)-\sum_{\varkappa=0}^{n}\sigma^\varkappa\frac{\Delta_h^\varkappa f(0)-\varrho^{mh}\Delta_h^\varkappa f(mh)}{\varkappa!}D_\sigma^\varkappa\left(\frac{1}{1-\sigma}+\frac{1}{\lg\sigma}\right)+\\+\mathfrak{R}_{mn},\end{aligned} \tag{27}$$

eine nach Differenzen von $f(0)$, $f(h)$, $f(2h),\ldots$ fortschreitende Entwicklung. Für $\varrho=1$ geht F nach (26) über in

$$\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\lg(1-\varepsilon)}=\int_0^1\frac{1-(1-\varepsilon)^x}{\varepsilon}\,dx\,.$$

Speziell wenn $f(x)$ eine echt gebrochene rationale Funktion von x bedeutet, bringen Formeln von der Kategorie (25) und (27) die Potenzreihe $\sum \varrho^\nu f(\nu)$ oder Teile derselben, nach Partialbruchzerlegung von $f(x)$, in Verbindung mit dem Integrallogarithmus.

V. Nach ganz demselben Verfahren wie für die Differenz eines Integrales und einer Reihe *findet man im Falle* $\Phi(x) = \varrho^x$ *auch eine Entwicklung für die Differenz zweier Reihen*

$$\frac{1}{h} \sum_{\nu=0}^{mh-1} \varrho^\nu f(\nu) - \sum_{\nu=0}^{m-1} \varrho^{\nu h} f(\nu h) \tag{28}$$

bis auf den in (11) mit $\mathfrak{R}'_{m,n}$ bezeichneten Rest

$$\begin{aligned} &\sum_{\varkappa=0}^{n} (-1)^\varkappa \frac{f^{(\varkappa)}(0) - \varrho^{mh} f^{(\varkappa)}(mh)}{\varkappa!} D_{\mathfrak{z}}^\varkappa \left[\frac{1}{1 - e^{-h\mathfrak{z}}} - \frac{1}{h(1 - e^{-\mathfrak{z}})}\right] \\ \text{resp.} \quad &\sum_{\varkappa=0}^{n} \sigma^\varkappa \frac{\Delta_h^\varkappa f(0) - \varrho^{mh} \Delta_h^\varkappa f(mh)}{\varkappa!} D_\sigma^\varkappa \left[\frac{1}{1 - \sigma} - \frac{1}{h\left(1 - \sigma^{\frac{1}{h}}\right)}\right] \end{aligned} \tag{29}$$

jenachdem man sich f nach (12) in eine Potenz- oder Binomialkoeffizientenreihe entwickelt denkt. Man beweist dies mittels der Formeln (21), deren rechte Seiten geschlossen summierbar für die Annahme $\Phi(x) = \varrho^x$ werden, und aus denen man sofort bei dem zu (22) korrespondierenden Ansatz

$$\mathfrak{P}_\varkappa(a, h) = \varrho^a \mathfrak{F}_\varkappa(\varrho, h), \quad \mathfrak{P}(a, h, \varepsilon) = \varrho^a \mathfrak{F}(\varrho, h, \varepsilon) \tag{30}$$

die Werte der Generierenden $\mathfrak{F}$ entnimmt

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{1}{1 - \varrho^h e^{-h\varepsilon}} - \frac{1}{h} \frac{1}{1 - \varrho e^{-\varepsilon}} \\ \text{resp.} \quad & \frac{1}{1 - \varrho^h (1 - \varepsilon)} - \frac{1}{h} \frac{1}{1 - \varrho (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{h}}}. \end{aligned} \tag{31}$$

Die letztere Formel (29) verdient auch aus dem Grunde Erwähnung, weil sie die Summe der Glieder einer Potenzreihe $\sum_0^{mh-1} \varrho^\nu f(\nu)$ bloss durch die Koeffizienten $f(0)$, $f(h)$, $f(2h)$, ... und *deren fortschreitende Differenzen* ausdrückt, ohne die übrigen Koeffizienten zu berücksichtigen.