EIN APPROXIMATIONSSATZ FÜR DIE FUCHSSCHEN GRUPPEN.

Von

P. J. MYRBERG

in Helsingfors.

Einleitung.

1. In einer gleichbetitelten Note[1] haben wir folgenden allgemeinen Satz ausgesprochen, der in gewissem Sinne für die fuchsschen Gruppen dasselbe leistet, wie der bekannte Kroneckersche Approximationssatz für die Gruppen der doppeltperiodischen Funktionen.

Approximationssatz: *Für jede fuchssche Gruppe Γ, deren Hauptkreis H ($|z| = 1$) zugleich Grenzkreis ist, gibt es auf H eine Punktmenge M vom Mass 2π mit der folgenden Eigenschaft: wenn K ein beliebiger regulärer Kurvenbogen innerhalb des Hauptkreises ist, welcher diesen Kreis in irgend einem zu M gehörigen Punkt unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet, so approximieren die vermittels der Substitutionen von Γ erhaltenen Transformierten von K jeden innerhalb des Hauptkreises liegenden und denselben unter dem nämlichen Winkel schneidenden Kreisbogen mit jeder Genauigkeit. Die komplementare Nullmenge von M hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Die Gültigkeit des obigen Satzes für die Modulgruppe haben wir schon früher durch Anwendung von Kettenbrüchen bewiesen.[2] Bevor wir den Beweis des Satzes beginnen, wollen wir hier gewisse unmittelbare Folgerungen desselben im voraus erwähnen.

---

[1] Zentralblatt für Mathematik und ibre Grenzgebiete, Bd. 1, S. 2.

[2] P. J. Myrberg: *Einige Anwendungen der Kettenbrüche in der Theorie der binären quadratischen Formen und der elliptischen Modulfunktionen,* Annales Academiae scientiarum Fennicae, t. XXIII, 1924; s. auch Noten in Comptes Rendus, t. 178, S. 370 u. 1785.

2. Daraus dass die Transformierten der Kurvenbogen K innerhalb H überall dicht liegen, folgt ohne Weiteres der

Satz: *Die automorphen Funktionen von Γ approximieren mit jeder Genauigkeit jeden komplexen Wert auf jedem regulären Bogen, welcher H in irgend einem zu M gehörigen Punkt unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet.*[1]

Die zweite Anwendung unseres Satzes bezieht sich auf den quasiergodischen Verlauf geodätischer Linien auf geschlossenen Flächen konstanter negativer Krümmung. Wenn man nämlich Γ mit der Fundamentalgruppe einer solchen Fläche identifiziert, und als Kurven K speziell die orthogonalen Halbkreise des Hauptkreises wählt, welche hier die geodätischen Linien der Fläche repräsentieren, gelangt man zum folgenden Satz, der eine Verschärfung der Resultate von KOEBE[2], J. NIELSEN[3] und LÖBELL[4] enthält.

Satz. *Fast alle geodätischen Linien einer Fläche konstanter negativer Krümmung sind quasiergodisch, d. h. sie haben die Eigenschaft, unbegrenzt auf der Fläche fortgesetzt jeden geodätischen Bogen mit jeder Genauigkeit zu approximieren. Genauer: Unter allen durch irgend einen beliebig gewählten Punkt gehenden geodätischen Linien sind nur diejenigen nicht quasiergodisch, deren Schnittpunkte mit einer um den betreffenden Punkt beschriebenen geschlossenen regulären Kurve einer gewissen Menge angehören, deren lineares Mass gleich Null ist und welche die Mächtigkeit des Kontinuums hat.*

Für den obigen Satz findet man eine andere interessante Interpretation, wenn man die gegebene fuchssche Gruppe in bekannter Weise z. B. durch Ausführung einer stereographischen und orthogonalen Projektion in eine Gruppe G von Bewegungen der hyperbolischen Ebene transformiert, die durch reelle ternäre Kollineationen

---

[1] In etwas spezialisierter Form haben wir diesen Satz schon früher bewiesen: *Ein Satz über die fuchsschen Gruppen und seine Anwendung in der Funktionentheorie,* Annales Academiae scientiarum Fennicae, t. XXXII, 1929; s. auch: Berichtigung usw. zu vorgenannter Arbeit, ibidem, t. XXXIII, 1930.

[2] P. KOEBE: *Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen,* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse, insbesondere vierte (1929) und fünfte (1930) Mitteilung.

[3] J. NIELSEN: *Om geodaetiske Linier i lukkede Mangfoldigheder med konstant negativ Krumning,* Matematisk Tidsskrift B, Aargang 1925 (Festskrift til C. Juel).

[4] F. LÖBELL: *Über die geodätischen Linien der Clifford-Kleinschen Flächen,* Math. Zeitschrift, Bd. 30, 1929.

$$y_i' = a_i y_1 + b_i y_2 + c_i y_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dargestellt werden, welche einen reellen Kegelschnitt A, das absolute Gebilde der hyperbolischen Ebene, in sich selbst transformieren.

Bekanntlich ist die Gruppe G nur im Inneren des Kegelschnittes A, dessen Punkte den Punkten des Inneren des Hauptkreises H umkehrbar eindeutig entsprechen, eigentlich diskontinuierlich, während ihre Diskontinuität auf und ausserhalb von A nur uneigentlich ist. Um das Verhalten der Gruppe G ausserhalb des Kegelschnittes A zu beherrschen, denke man sich jeden dort liegenden Punkt durch seine in bezug auf A genommene Polare ersetzt, der ihrerseits ein zum Hauptkreis orthogonaler Halbkreis umkehrbar eindeutig entspricht. Dadurch gelangt man zum folgenden, dem obigen äquivalenten

Satz. *Die Transformierten eines ausserhalb des absoluten Kegelschnittes gelegenen Punktes vermittels der Substitutionen von G haben im allgemeinen jeden auf und ausserhalb des Kegelschnittes liegenden Punkt zur Häufungsstelle, indem eine Ausnahme nur dann stattfindet, wenn die beiden Schnittpunkte der Polaren des gegebenen Punktes mit A einer gewissen Menge vom Mass Null angehören.*[1]

I.

3. Wir verstehen wie üblich mit einer fuchsschen Gruppe eine von endlich vielen Substitutionen erzeugte, in der komplexen Ebene eigentlich diskontinuierliche Gruppe Γ linearer Transformationen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1), \qquad (1)$$

die den Einheitskreis H

$$|z| = 1,$$

den Hauptkreis der Gruppe, invariant lassen. Wir nehmen ferner an, dass H zugleich Grenzkreis der Gruppe ist, d. h. dass die eigentliche Diskontinuität auf H nicht mehr stattfindet. Indem wir uns im Folgenden auf das Innere von H beschränken, können wir als Fundamentalbereich der Gruppe ein Kreisbogenpolygon S_0 wählen, dessen Seiten zu H orthogonal sind. Aus dem Fundamental-

---

[1] Wegen der Anwendung der obigen Betrachtungen auf den nichteuklidischen Billard vgl. J. HADAMARD: *Sur le billard non euclidien,* Procès-verbaux soc. sciences phys., Bordeaux 1898, S. 147—149.

polygon S_0 wird durch Anwendung der Substitutionen von Γ ein unendliches Netz von Polygonen erhalten, die das Innere von H einfach und lückenlos bedecken und die jeden Punkt von H zur Häufungsstelle haben. Für jedes Polygon wird im Folgenden dasselbe Zeichen S wie für diejenige Substitution angewandt, die S_0 auf das betreffende Polygon abbildet.

Wir werden neben der gewöhnlichen, euklidischen Massbestimmung auch von der hyperbolischen Gebrauch machen, wo die Länge einer Kurve C durch das Integral

$$\int\limits_C \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

definiert wird. Zum Unterschied wird im letzteren Falle stets das Zeichen » » um das betreffende Wort angewandt. Es wird also z. B. mit einer »Geraden» der innerhalb des Hauptkreises liegende Teil eines Orthogonalkreises von H verstanden.

4. Von jeder unendlichen Folge der Substitutionen von Γ lässt sich eine Teilfolge

$$S_\nu = S_\nu(z) = \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

auswählen, für welche die beiden Grenzwerte

$$a = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} S_\nu(\infty); \quad b = \lim_{\nu \to \infty} - \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} S_\nu^{-1}(\infty) \tag{3}$$

existieren. Aus

$$\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 1$$

folgt wegen (3) und

$$\alpha_\nu = \bar{\delta}_\nu, \quad \beta_\nu = \bar{\gamma}_\nu, \qquad |b| = |a| = 1,$$

dass

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{|\gamma_\nu|^2} = \lim_{\nu \to \infty} \left| \frac{\delta_\nu}{\gamma_\nu} \right|^2 - 1 = 0.$$

Aus der Darstellung

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} - \frac{1}{\gamma_\nu^2} \cdot \frac{1}{z + \dfrac{\delta_\nu}{\gamma_\nu}} \tag{4}$$

von S_ν geht dann hervor, dass die Funktionenfolge (2) in jedem abgeschlossenen, den Punkt b nicht enthaltenden Bereich der z-Ebene gleichmässig gegen a konvergiert.

Durch Anwendung der Substitutionen (2) auf b wird eine unendliche Menge von Punkten auf H erhalten, die wenigstens eine Häufungsstelle besitzen. Indem man die betreffende Folge durch eine geeignete Teilfolge ersetzt, kann man erreichen, dass die zugeordnete Punktfolge eine einzige Häufungsstelle c haben wird:

$$c = \lim_{\nu \to \infty} S_\nu(b).$$

Wir werden eine solche Folge *einfach* nennen.

Wir ziehen jetzt von irgend einem innerhalb des Hauptkreises gewählten Punkt aus nach dem auf H liegenden Punkt P einen regulären Kurvenbogen K, welcher dort den Hauptkreis unter dem von Null verschiedenen Winkel ϑ schneidet. Indem man auf K die Substitutionen der einfachen Folge F anwendet, erhält man unendlich viele den Hauptkreis unter dem nämlichen Winkel ϑ schneidende Kurvenbogen, die nach dem Obigen jedenfalls den zugehörigen Punkt a zur Häufungsstelle haben. Dieser Punkt ist auch die einzige Häufungsstelle, wenn P von dem Punkt b der Folge F verschieden ist.

Wenn dagegen P mit b zusammenfällt, sind wenigstens zwei Häufungspunkte, nämlich die Punkte a und c von F, vorhanden, vorausgesetzt, dass diese Punkte nicht mit einander zusammenfallen. Dann gibt es aber ein ganzes Kontinuum von Häufungspunkten zwischen a und c.

5. Zur Bestimmung dieses Kontinuums ziehen wir durch b einen die Kurve K dort berührenden Kreisbogen C, dessen Transformierten vermittels der Substitutionen von F offenbar gegen denjenigen Kreisbogen C' konvergieren, welcher H in den Punkten a und c unter dem Winkel ϑ schneidet. Weil der gegenseitige »Abstand» der Kurven K und C bei unbegrenzter Annäherung an b gegen Null konvergiert, kann man eine solche Umgebung B von b bestimmen, wo der kürzeste »Abstand» jedes Punktes der Kurve K von C kleiner als eine gegebene kleine positive Grösse ε ist.

Wir ersetzen nun die Bogen C und K durch ihre innerhalb B liegenden Teilbogen und erhalten aus dem ersteren vermittels der Substitutionen von F wieder Kreisbogen, die den ganzen Kreisbogen C' zur Häufungskurve haben, während jede Bildkurve von K, wegen der Invarianz des »Abstandes» den Substitutionen von Γ gegenüber, je einen schmalen, um die zugeordnete Bildkurve von C konstruierten Streifen der »Breite» ε durchläuft. Weil nun ε im voraus beliebig klein gewählt werden kann, folgt hieraus, dass die Transformierten von K vermittels F den Kreisbogen C' zum Häufungsgebilde haben. Es gilt somit der

Satz. *Wenn man auf einen regulären Kurvenbogen, welcher in seinem Endpunkt P den Hauptkreis unter dem von Null verschiedenen Winkel ϑ schneidet, die Substitutionen der einfachen Folge F anwendet, dessen Punkt b mit P zusammenfällt, so konvergieren die erhaltenen Bildbogen gegen denjenigen Kreisbogen, welcher H in seinen Endpunkten, den Punkten a und c von F, unter dem Winkel ϑ schneidet.*

Nach dem Vorhergehenden ist unser Approximationssatz hauptsächlich äquivalent mit dem

Satz. *Es gibt stets eine einfache Folge von Substitutionen der Gruppe Γ, deren Punkte a und c mit zwei beliebig gegebenen Punkten von H zusammenfallen, und deren Punkt b mit einem beliebig gegebenen Punkt einer gewissen auf H liegenden Punktmenge vom Mass 2π identisch ist.*

Weil die Punktpaare von H und die durch ihnen gezogenen »Geraden» einander umkehrbar eindeutig entsprechen, geht aus der letzteren Formulierung des Approximationssatzes hervor, dass wenn derselbe einmal für »gerade» Linien K bewiesen worden ist, er dann allgemein gültig ist. Es bedeutet somit keine Einschränkung, wenn wir in den folgenden Betrachtungen als Kurven K die Radien von H wählen.

6. Es sei nun ω ein Punkt von H und R der zugehörige Radius. Ferner sei

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots \tag{5}$$

die vom Mittelpunkte O aus gerechnete Reihe der von R geschnittenen Polygone, die nur dann endlich ist, wenn ω der möglicherweise vorhandenen abzählbaren Menge der parabolischen, d. h. auf H liegenden Ecken der Polygone des Netzes angehört. Die Reihe (5), welche den betreffenden Punkt ω vollständig bestimmt, kann als eine Art der Kettenbruchentwicklung der Zahl ω angesehen werden, wobei die Substitutionen (5) und $S_\nu S_{\nu-1}^{-1}$ die Rolle der sukzessiven Näherungsbrüche bzw. Nenner des Kettenbruches spielen. Der Inhalt des zu beweisenden Satzes kann, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, auch dahin interpretiert werden, dass im allgemeinen, d. h. wenn ω nicht einer gewissen Menge vom Mass Null angehört, in der aus der Entwicklung (5) von ω gebildeten Doppelreihe

$$S_\nu S_\mu^{-1} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots; \mu < \nu) \tag{6}$$

jede Substitution der Gruppe und zwar unendlich oft vorkommt.

Der im Folgenden gegebene Beweis des Approximationssatzes gestaltet sich verschiedenartig, je nach dem ob die Polygone der Gruppe parabolische Ecken besitzen oder nicht. Wir werden zuerst ausführlich diejenigen Gruppen behandeln, deren Fundamentalpolygon nur von Null verschiedene Winkel hat und also als Ganzes im Innern des Hauptkreises liegt (Gruppen erster Familie nach POINCARÉ). Von den Gruppen mit parabolischen Ecken wird im Folgenden nur derjenige, wegen der Anwendungen wichtigste Fall betrachtet, wo sämtliche Winkeln des Fundamentalpolygons gleich Null sind (Gruppen zweiter Familie). Es dürfte nicht schwierig sein, durch Zusammenschmelzen beider Methoden einen für alle Fälle gültigen Beweis herzustellen.

II.

7. Wir beginnen also mit denjenigen fuchsschen Gruppen, deren Fundamentalpolygon S_0 als Ganzes im Innern des Hauptkreises H liegt und mithin nur nichtverschwindende Winkel hat. Jeder Radius von H durchschneidet dann unendlich viele Polygone des Netzes.

Definition. *Unter (T) soll die Menge derjenigen Punkte ω von H verstanden werden, in deren Entwicklung* (5):

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots$$

wenigstens ein Paar Substitutionen S_μ, S_ν $(\nu > \mu)$ vorkommt derart, dass

$$S_\nu S_\mu^{-1} = T,$$

wo T eine bestimmte Substitution von Γ ist.[1] *Die Polygone*

$$S_\nu = T S_\mu$$

sollen dabei als »zu T gehörige Polygone» bezeichnet werden.

Satz. *Die Punkte der Menge (T) liegen für jede Substitution T überall dicht auf H.*

Es sei P (Fig. 1) ein beliebiger Punkt von H und $\varkappa$ ein kleines diesen Punkt enthaltendes Segment. Um die Existenz von Punkten der Menge

[1] Wir bezeichnen mit $S_\alpha S_\beta$ diejenige Substitution, die erhalten wird, wenn man zuerst S_α und dann S_β ausführt.

(T) in $\varkappa$ nachzuweisen, wählen wir auf H einen zweiten Punkt P' und ein kleines denselben enthaltendes Segment $\varkappa'$ derart, dass durch jeden Punkt von $\varkappa'$ eine »Gerade» gezogen werden kann, welche die beiden Polygone S_0 und T schneidet. Wir wählen hiernach in $\varkappa'$ bzw. $\varkappa$ zwei Polygone S' und S derart, dass ihre oberen Randkreise K' bzw. K als Ganzes in $\varkappa'$ bzw. $\varkappa$ verlaufen und dass ihre zum oberen Rand von S' bzw. S gehörigen Bogen einander nicht konjugiert sind. Diejenige Substitution U, welche S' auf S abbildet, ist dann eine solche hyperbolische Substitution, die K' und K als zwei aufeinander folgende Niveaukurven hat und deren Fixpunkte resp. innerhalb K' und K und also in einer beliebig vorgeschriebenen Nähe der Punkte P' und P liegen. Ferner wird durch U der in bezug auf das Innere von H genommene Komplementarbereich von $\varkappa'$ auf einen innerhalb von $\varkappa$ liegenden Bereich abgebildet.

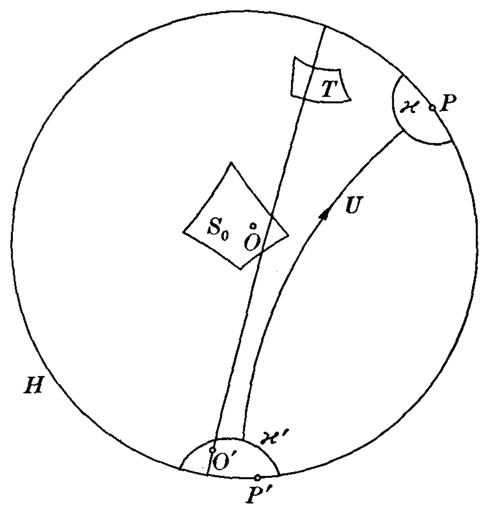

Fig. 1.

Wenn nun der Bereich $\varkappa'$ so klein gewählt wird, dass S_0 und T ausserhalb desselben liegen werden, so liegen die beiden Polygone

$$S_0 U, \quad T U$$

innerhalb $\varkappa$, wogegen der Punkt

$$U^{-1}(O) = O'$$

innerhalb $\varkappa'$ liegt. Wir ziehen durch O' eine »Gerade», welche S_0 und T schneidet. Dieselbe wird durch U auf einen Durchmesser D von H abgebildet, welcher die Polygone

$$S_\mu = S_0 U, \quad S_\nu = T U$$

schneidet. Weil aber

$$S_\nu S_\mu^{-1} = T$$

ist, so gehört der in $\varkappa$ liegende Endpunkt von D zur Menge (T). Die Punkte dieser Menge liegen somit überall dicht auf H. Gleichzeitig ist gezeigt worden, dass es in beliebiger Nähe jedes Punktes von H zu (T) gehörige Polygone gibt.

Aus dem Obigen folgt insbesondere, dass man eine endliche Anzahl der zu T gehörigen Polygone

$$TS_1', \ TS_2', \ldots, \ TS_q' \tag{7}$$

so wählen kann, dass in jedem das Fundamentalpolygon S_0 enthaltenden »Winkel» stets wenigstens ein der Polygone (7) als Ganzes vorhanden ist.

8. **Definition.** *Unter* $[T]$ *soll die Summe der Mengen* $(T\Sigma)$ *verstanden werden, wo* T *eine bestimmte Substitution von* Γ *bezeichnet und* Σ *alle diejenigen endlich vielen Substitutionen durchläuft, für welche der kürzeste Abstand ihres Polygons von* S_0 *höchstens gleich dem »Diameter»* d *von* S_0 *ist.*

Satz. *Ist* B *ein beliebiger Bogen von* H *und* $\varDelta$ *seine Länge, so gibt es ein Teilbogen* B' *von* B *der Länge*

$$\varDelta' > \varrho_T \varDelta, \tag{8}$$

dessen sämtliche Punkte zur Menge $[T]$ *gehören. Hier bezeichnet* ϱ_T *eine durch* T *bestimmte positive Konstante.*

Unser Beweis des vorstehenden Satzes beruht auf dem folgenden fast evidenten

Hilfssatz. *Sind* S_α *und* S_β *zwei Polygone des Netzes, deren gegenseitiger (kürzester) »Abstand»* $\leqq \delta$ *ist, so besitzt das Verhältnis der Zentriwinkel* S_α *und* S_β *der Polygone eine durch* δ *bestimmte endliche obere (und untere) Grenze.*

Mit dem Zentriwinkel des Polygons S wird hier derjenige Zentriwinkel des Hauptkreises verstanden, dessen Bogen durch Projizieren des Polygons von O aus entsteht.

Wir führen zum Beweis die Substitution S_α^{-1} aus, wodurch die gegebenen Polygone S_α und S_β resp. in die Polygone S_0 und $S_\beta S_\alpha^{-1} = S$ übergehen, deren gegenseitiger Abstand $\leqq \delta$ ist. Wir umschliessen S_0 mit einem innerhalb H verlaufenen Kreis C_0 und wir bezeichnen ferner mit c_0 einen zweiten innerhalb S_0 gewählten Kreis. Die Kreise

$$S_\alpha(c_0), \quad S_\beta(C_0), \tag{9}$$

von denen der erste innerhalb S_α liegt, während der letztere das Polygon S_β umschliesst, werden aus den Kreisen

$$c_0, \quad S(C_0) \tag{10}$$

vermittels der Substitution S_α erhalten. Weil nun die Kreise (10), von denen der letztere um das Polygon S beschrieben ist, innerhalb eines um O beschriebenen Kreises H_δ liegen, dessen Radius eine durch δ bestimmte Grösse < 1 ist, so erhält man, durch Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes im Bereiche H_δ auf die für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion S_α, für die Radien r_α und R_β von (9) die Ungleichungen

$$0 < \eta'_\delta < r_\alpha : R_\beta < \frac{1}{\eta'_\delta} < \infty, \tag{11}$$

wo η'_δ eine durch δ bestimmte Konstante ist. Anderseits genügen die Zentriwinkel φ_α und φ_β offenbar den Ungleichungen

$$\varphi_\alpha > 2 r_\alpha, \quad \varphi_\beta < 2(1 + \varepsilon) R_\beta, \tag{12}$$

wo $\varepsilon \to 0$, wenn der »Abstand» des Polygons S_β von O unbegrenzt wächst. Aus (11) und (12) folgt aber dann

$$\varphi_\alpha : \varphi_\beta > \eta_\delta \tag{13}$$

wo $\eta_\delta = \eta'_\delta / 1 + \varepsilon_{\max}$ eine durch δ bestimmte positive Konstante ist. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

9. Indem wir zum Beweis unseres obigen Satzes zurückkehren, gehen wir von einem beliebig gegebenen Zentriwinkel φ von H aus und wir wählen auf der Halbierungslinie N von φ das von O gerechnet erste Polygon S_α, welches ganz zu φ gehört. Ist dann S_β das zu S_α in der Richtung nach O nächstfolgende von N geschnittene Polygon, so genügen die zugehörigen Zentriwinkel nach dem Hilfssatz der Ungleichung

$$\varphi_\alpha : \varphi_\beta > \eta_0 .$$

Wegen

$$\varphi_\beta > \frac{\varphi}{2}$$

ist

$$\varphi_\alpha : \varphi > \frac{\eta_0}{2} .$$

Somit enthält jeder Zentriwinkel φ von H ganz ein Polygon, dessen Zentriwinkel der Ungleichung

$$\varphi_\alpha > \frac{1}{2}\varphi\eta_0 \tag{14}$$

genügt, wo η_0 eine positive durch die Gruppe Γ bestimmte Grösse ist.

Wir führen jetzt die Substitution S_α^{-1} aus, wodurch der Winkel φ_α in einen »Winkel» φ' übergeht, dessen Spitze im Punkte $O' = S_\alpha^{-1}(O)$ liegt und dessen »Seiten» das Polygon S_0 berühren (Fig. 2). Wegen der am Schlusse des Beweises des Satzes in Nr. 7 gemachten Bemerkung können wir annehmen, dass der »Winkel» φ' von der Lage seiner Spitze O' unabhängig wenigstens ein

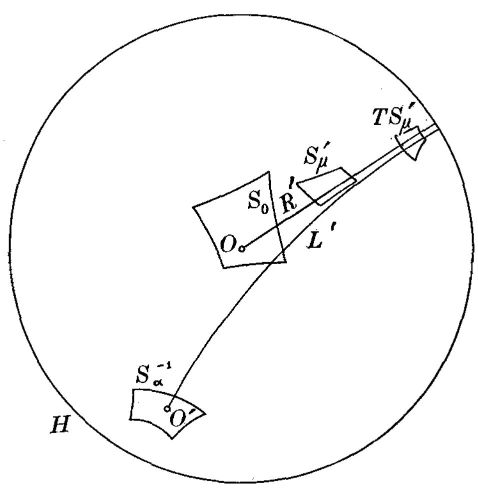

Fig. 2.

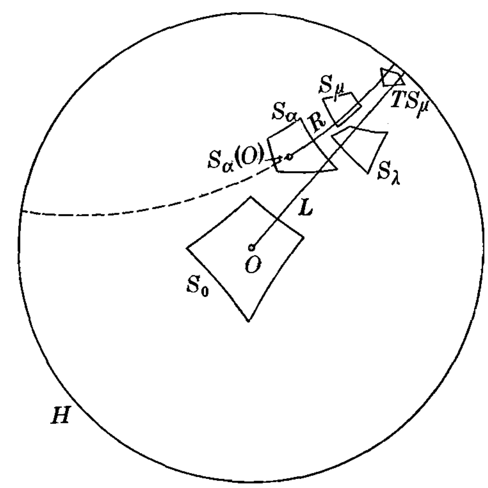

Fig. 3.

von den endlich vielen zu T gehörigen Polygonen (7) in seinem Innern zwischen S_0 und H enthält. Es sei TS_μ' das betreffende Polygon, und ω ein zugeordneter Punkt der Menge (T). Wir ziehen den Radius $R' = O\omega$, welcher u. A. die Polygone

$$S_0,\quad S_\mu',\quad TS_\mu' \tag{15}$$

schneidet und ferner durch O' im Winkel φ' eine das Polygon TS_μ' schneidende »Halbgerade» L', die dann auch das Polygon S_0 schneiden muss. Durch die Substitution S_α wird der Radius R' auf eine gewisse die Polygone

$$S_\alpha,\quad S_\mu = S_\mu' S_\alpha,\quad TS_\mu = TS_\mu' S_\alpha \tag{16}$$

schneidende »Halbgerade» R abgebildet, während aus L' ein Radius L von H erhalten wird, der u. A. die Polygone

$$S_0, \quad S_\alpha, \quad TS_\mu$$

schneidet (Fig. 3). Weil nun die »Halbgeraden» L und R die beiden Polygone

$$S_\alpha, \quad TS_\mu \tag{17}$$

schneiden, so ist ihr gegenseitiger »Abstand» zwischen diesen Polygonen $\leqq d$. Es gibt somit auf L zwischen (17) ein Polygon S_λ, dessen »Abstand» von S_μ höchstens d ist. Dann ist der gegenseitige Abstand der Polygone $S_\lambda S_\mu^{-1}$ und $S_0 \leqq d$. Nach der in Nr. 8 eingeführten Bezeichnung ist also $S_\lambda S_\mu^{-1} = \Sigma$ oder $S_\lambda = \Sigma S_\mu$ und folglich

$$TS_\mu S_\lambda^{-1} = T\Sigma^{-1} \quad \text{oder} \quad TS_\mu = T\Sigma^{-1} S_\lambda.$$

Weil nun offenbar mit $(T\Sigma)$ gleichzeitig auch $(T\Sigma^{-1})$ zur Menge $[T]$ gehört, so gehört der Endpunkt des die Polygone

$$S_\lambda, \quad T\Sigma^{-1} S_\lambda$$

schneidenden Radius L zur Menge $[T]$ und zwar für jede Lage des Radius L, wenn nur derselbe das Polygon TS_μ schneidet. Weil nun der gegenseitige »Abstand» der Polygone S_α und TS_μ höchstens gleich dem grössten »Abstand» des Fundamentalpolygons S_0 von den endlich vielen durch T bestimmten Polygonen (7) ist, so genügen die Zentriwinkeln von TS_μ und S_α nach unserem Hilfssatz der Ungleichung

$$\varphi_\mu : \varphi_\alpha > \eta_T, \tag{18}$$

wo η_T eine durch T bestimmte positive Grösse ist. Wir identifizieren nun B und B' mit dem zum Winkel φ bzw. φ_μ gehörigen Bogen von H und erhalten aus (14) und (18) für ihre Längen die Ungleichung

$$\varDelta' : \varDelta > \varrho_T,$$

wo $\varrho_T = \frac{1}{2}\eta_0 \eta_T$ eine positive durch T bestimmte Grösse ist. Weil hier B ein beliebiger Bogen von H ist und B' ein Teilbogen desselben, dessen sämtliche Punkte zur Menge $[T]$ gehören, so ist damit der obige Satz vollständig bewiesen.

10. **Satz.** *Das Mass der Menge $[T]$ ist für jede Substitution von Γ gleich 2π.*

Indem wir B zuerst mit der ganzen Peripherie von H identifizieren, finden wir einen Bogen B' der Länge $> 2\pi\varrho_T$, dessen sämtliche Punkte zur Menge $[T]$

gehören. Auf den komplementaren Bogen der Länge $< 2\pi(1 - \varrho_T)$ von B' angewandt führt unser Satz zu gewissen neuen Bogen der Menge $[T]$, wobei die Summe der Restbogen $< 2\pi(1 - \varrho_T)^2$ ist. Nach n-malige Anwendung desselben Verfahrens erhält man die obere Grenze

$$2\pi(1 - \varrho_T)^n \tag{19}$$

für das lineare Mass der komplementaren Menge von $[T]$. Weil der Ausdruck (19) für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, ist das Mass von $[T]$ gleich 2π, w. z. b. w.

Satz. *Für jede Gerade L_i und jede positive Zahl ε_i gibt es auf H eine Punktmenge M_i vom Mass 2π der folgenden Art: Wenn R ein beliebiger Radius von H ist, dessen Endpunkt zu M_i gehört, so approximieren die Transformierten von R die »Gerade» L_i mit der Genauigkeit ε_i.*

Es seien S_a und S_b zwei von L_i geschnittene und resp. in der Nähe der Schnittpunkte von L_i und H liegende Polygone, die so klein, d. h. so nahe an H gewählt werden, dass alle durch S_b und irgend ein von den zu S_a benachbarten Polygonen ΣS_a gezogenen »Geraden» die gegebene »Gerade» L_i mit der Genauigkeit ε_i approximieren. Es sei $S_b S_a^{-1} = T$ und R ein Radius, dessen Endpunkt zu $M_i = [T]$ gehört. Dann schneidet also R zwei Polygone der Form

$$S_\lambda, \quad T\Sigma S_\lambda.$$

Durch die Substitution $S_\lambda^{-1} \Sigma^{-1} S_a$ wird aus R eine »Halbgerade» erhalten, welche u. A. die Polygone

$$\Sigma^{-1} S_a, \quad T S_a = S_b$$

schneidet und welche somit die »Gerade» L_i mit der Genauigkeit ε_i approximiert. Unser Satz ist damit bewiesen.

11. Wir wählen jetzt eine abzählbare Folge von »Geraden»

$$L_1, L_2, L_3, \ldots$$

derart, dass dieselben jede »Gerade» mit jeder Genauigkeit approximieren, ferner ordnen wir den »Geraden» resp. die positiven Zahlen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$$

zu, welche gegen Null konvergieren. Wir definieren ferner für jedes Paar L_i, ε_i die Punktmenge M_i in der oben angegebenen Weise und bilden den Durchschnitt

$$M = M_1 M_2 M_3 \ldots \tag{20}$$

aller Mengen M_i, der vom Mass 2π ist, weil seine Komplementarmenge als Summe der abzählbar vielen komplementaren Mengen von M_i eine Menge vom Mass Null ist. Ist dann R ein Radius, dessen Endpunkt zu M und somit zu allen Mengen M_i gehört, so approximieren die Transformierten desselben jede »Gerade» L_i mit der zugehörigen Genauigkeit ε_i und folglich überhaupt jede »Gerade» mit jeder Genauigkeit. Nach der am Schlusse von Nr. 5 gemachten Bemerkung ist damit unser Approximationssatz für die hier betrachteten Gruppen vollständig bewiesen.

III.

12. Wenn das Fundamentalpolygon der fuchsschen Gruppe Γ auch verschwindende Winkel besitzt, kann das obige Beweisverfahren als solches nicht angewandt werden, weil man sich des Verzerrungssatzes in der Nr. 8 angegebenen Weise nicht bedienen kann. Im Folgenden wird ein Beweis des Approximationssatzes für diejenigen Gruppen gegeben, wo sämtliche Winkel des Polygons S_0 gleich Null sind.

Im vorliegenden Falle besteht die Begrenzung von S_0 aus einer geraden Anzahl einander von Aussen berührender Orthogonalkreise von H, die durch die erzeugenden Substitutionen

$$\Sigma_i, \ \Sigma_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

auf einander paarweise derart bezogen sind, dass das Innere des einen Kreises auf das Äussere des anderen abgebildet wird. Weil ferner zwischen den erzeugenden Substitutionen keine anderen Relationen herrschen ausser diejenigen, die sich auf die Identitäten

$$\Sigma \Sigma^{-1} = 1$$

zurückführen lassen, wird jede Substitution der Gruppe eindeutig in der Form

$$S_n = \Sigma_{\nu_1} \Sigma_{\nu_2} \ldots \Sigma_{\nu_n} \tag{21}$$

dargestellt, wenn allgemein $\Sigma_{\nu_{k+1}} \neq \Sigma_{\nu_k}^{-1}$ vorausgesetzt wird.

Wir nennen (21) nach der Anzahl n der Primfaktoren eine *Substitution* bzw. ein *Polygon n:ter Stufe,* ferner den von dem oberen Randkreis von S_n aus

H geschnittenen Bogen einen *Bogen n:ter Stufe.* Jedes Polygon n:ter Stufe (21) umschliesst dabei $2p-1$ Polygone $(n+1)$:ter Stufe, die durch

$$\Sigma S_n$$

dargestellt werden, wo Σ alle erzeugenden Substitutionen durchläuft, die dem ersten Primfaktor von S_n nicht invers sind.

13. **Satz.** *Das Verhältnis zweier Bogen $(n+1)$:ter bzw. n:ter Stufe, von denen der erste ein Teilbogen des letzteren ist, genügt der Ungleichung*

$$\varDelta_{n+1} : \varDelta_n > \frac{\varrho}{n}, \tag{22}$$

wo ϱ eine positive Gruppenkonstante ist.

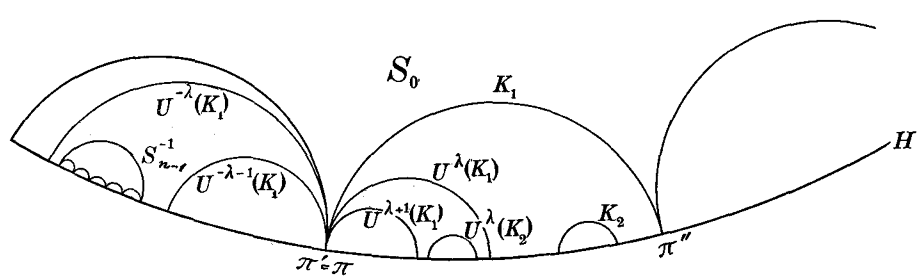

Fig. 4.

Wir nehmen an, was keine Einschränkung bedeutet, dass $n > 1$. Es sei (21) das betreffende Polygon und

$$K_{n+1}, \quad K_n$$

sein innerer dem Bogen $\varDelta_{n+1}$ bzw. äusserer dem Bogen $\varDelta_n$ entsprechender Randkreis. Offenbar wird (21) aus dem Polygon erster Stufe Σ_{ν_1} durch die Substitution $(n-1)$:ter Stufe

$$S_{n-1} = \Sigma_{\nu_2} \Sigma_{\nu_3} \ldots \Sigma_{\nu_n} \tag{23}$$

erhalten, wobei K_n dem äusseren Randkreis K_1 und K_{n+1} einem gewissen inneren Randkreis K_2 von Σ_{ν_1} entspricht. (Fig. 4.)

Es seien

$$\pi', \quad \pi'' \tag{24}$$

die Schnittpunkte von K_1 mit H und

$$U', \quad U'' \tag{25}$$

diejenigen parabolischen Substitutionen niedrigster Stufe, welche resp. die Punkte (24) als Fixpunkt haben und deren zugeordnete Polygone innerhalb des Kreises K_1 liegen. Die beiden Kreisschaaren

$$U'^{-\lambda}(K_1), \quad U''^{-\lambda}(K_1) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

welche K_1 im Punkte π' bzw. π'' berühren, liegen dann ausserhalb des Kreises K_1.

Wir betrachten jetzt das Polygon

$$S_{n-1}^{-1},$$

welches der inversen Substitution von (23) entspricht. Dasselbe liegt offenbar ausserhalb des Kreises K_1. Denn durch die Substitution S_{n-1} wird das Polygon S_{n-1}^{-1} auf S_0, das Innere von K_1 dagegen auf das Innere von K_n abgebildet.

Wenn erstens das Polygon S_{n-1}^{-1} ausserhalb der beiden Kreise

$$U'^{-1}(K_1), \quad U''^{-1}(K_1)$$

liegt, so hat sein Abstand von K_1 eine durch Γ bestimmte positive untere Grenze d. Offenbar ist dann der Abstand des Poles der linearen Funktion S_{n-1}, welches in dem Spiegelbild des Polygons S_{n-1}^{-1} in bezug auf H liegt, grösser als d. Man kann jetzt den Verzerrungssatz im Kreise K_1 auf die Funktion S_{n-1} anwenden und man erhält statt (22) sogar die stärkere Ungleichung

$$\Delta_{n+1} : \Delta_n > \varrho,$$

wo ϱ eine positive Gruppenkonstante ist.

Wir nehmen zweitens an, es liege S_{n-1}^{-1} zwischen den Kreisen

$$U_k^{-\lambda}(K_1), \quad U_k^{-\lambda-1}(K_1) \qquad \lambda > 0,$$

wo $U_k = U$ eine der Substitutionen (25) bezeichnet. Dann liegt das Polygon

$$S_m^{-1} = S_{n-1}^{-1} U_k^{\lambda}$$

offenbar zwischen den Kreisen

$$K_1, \quad U_k^{-1}(K_1)$$

und sein Abstand von den Kreisen $U_k^{\lambda}(K_1)$ $(\lambda > 0)$ muss daher für $m > 0$ eine gewisse durch Γ bestimmte positive Grösse d' überschreiten. Ferner ist

$$S_{n-1} = U_k^{\lambda} S_m, \qquad (n - 1 = \lambda k + m). \quad (26)$$

Es sei nun

$$\frac{1}{z'-\pi} = \frac{1}{z-\pi} + g$$

der Ausdruck von U_k und also

$$\frac{1}{z^{(\lambda)}-\pi} = \frac{1}{z-\pi} + \lambda g \tag{27}$$

derjenige von U_k^λ, woraus

$$\frac{d z^{(\lambda)}}{d z} = \frac{1}{(1+\lambda g(z-\pi))^2} \tag{28}$$

erhalten wird. Für die Länge des zum Kreis

$$U_k^\lambda(K_1) \tag{29}$$

gehörigen Bogens von H erhält man aus (27) leicht die Ungleichung

$$\varDelta_k^\lambda(K_1) < \frac{\eta_1}{\lambda}, \tag{30}$$

für die Länge des zu

$$U_k^\lambda(K_2) \tag{31}$$

gehörigen Bogens aus (28) die Ungleichung

$$\varDelta_k^\lambda(K_2) > \frac{\eta_2}{\lambda^2}, \tag{32}$$

wo η_1 und η_2 positive Gruppenkonstanten sind. Aus (26), (30) und (32) folgt

$$\varDelta_k^\lambda(K_2) : \varDelta_k^\lambda(K_1) > \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{1}{\lambda} > \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \tag{33}$$

Nun werden aber die gegebenen Bogen $\varDelta_{n+1}$ und $\varDelta_n$ aus den innerhalb des Kreises K_1 liegenden zu den Kreisen (31) bzw. (29) gehörigen Bogen durch die Substitution S_m erhalten, wobei der Abstand des Poles der linearen Funktion S_m vom Kreis K_1 die oben eingeführte positive Konstante d' überschreitet. Wegen des Verzerrungssatzes folgt hieraus eine Ungleichung der Form

$$\varDelta_{n+1} : \varDelta_n > \varrho' \,.\, \varDelta_k^\lambda(K_2) : \varDelta_k^\lambda(K_1), \tag{33'}$$

wo ϱ' eine positive Gruppenkonstante ist. Aus (33) und (33)' folgt schliesslich die zu beweisende Ungleichung (22), wenn $\varrho = \varrho' \frac{\eta_2}{\eta_1}$ gesetzt wird.

Durch eine leichte Modifikation des obigen Beweises gelangt man zur folgenden Verallgemeinerung des vorstehenden Satzes:

Satz. *Das Verhältnis zweier Bogen $q(n+1)$:ter bzw. qn:ter Stufe, von denen der erste ein Teilbogen des letzteren ist, genügt der Ungleichung*

$$\varDelta_{q(n+1)} : \varDelta_{qn} > \frac{\varrho_q}{n}, \tag{34}$$

wo ϱ_q eine positive durch q bestimmte positive Gruppenkonstante ist.

14. Es sei nun T_q eine festgewählte Substitution q:ter Stufe, von der wir nur voraussetzen, dass ihre extremen Primfaktoren einander nicht invers sind. Ist dann S_{qn} ein beliebiges Polygon qn:ter Stufe, so liegt wenigstens ein von den Polygonen

$$T_q S_{qn}, \quad T_q^{-1} S_{qn}$$

innerhalb des Polygons S_{qn}, weil der erste Primfaktor von S_{qn} nicht gleichzeitig den letzten Primfaktor von T_q und T_q^{-1} aufheben kann. Wir bezeichnen mit $(T_q^{\pm 1})$ die Summe der beiden Mengen

$$(T_q), \quad (T_q^{-1}),$$

also die Menge derjenigen Punkte von H, deren zugeordneter Radius wenigstens ein Paar Polygone der Form

$$S_{qn}, \quad T_q S_{qn} \quad \text{oder} \quad S_{qn}, \quad T_q^{-1} S_{qn}$$

durchschneidet. Wegen des letzten Satzes folgt dann aus dem Obigen, dass jeder Bogen qn:ter Stufe der Länge $\varDelta_{qn}$ einen Teilbogen $q(n+1)$:ter Stufe der Länge

$$\varDelta_{q(n+1)} > \frac{\varrho_q}{n} \varDelta_{qn}$$

besitzt, dessen sämtliche Punkte zur Menge $(T_q^{\pm 1})$ gehören.

Wir wählen zuerst $n = 1$ und wir identifizieren $\varDelta_q$ der Reihe nach mit sämtlichen Bogen q:ter Stufe, wodurch innerhalb derselben eine Anzahl Bogen $2q$:ter Stufe gefunden wird mit der Gesamtlänge $> 2\pi\varrho_q$, deren Punkte zu $(T_q^{\pm 1})$ gehören. Die Summe der übrigen Bogen $2q$:ter Stufe ist also $< 2\pi(1-\varrho_q)$. Indem wir nun jeden derselben der Reihe nach mit $\varDelta_{2q}$ identifizieren, erhalten wir in ihren Innern zu $(T_q^{\pm 1})$ gehörige Bogen $3q$:ter Stufe, wobei die Summe der übriggebliebenen Bogen $3q$:ter Stufe $< 2\pi(1-\varrho_q)\left(1-\frac{\varrho_q}{2}\right)$ ist. Nach n-malige Anwendung desselben Verfahrens erhält man die obere Grenze

$$2\pi\left(1-\frac{\varrho_q}{1}\right)\left(1-\frac{\varrho_q}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\varrho_q}{n}\right) \tag{35}$$

für das lineare Mass der Menge derjenigen Punkte von H, die der Menge $(T_q^{\pm 1})$ nicht angehören. Weil der Wert von (35) für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, muss das Mass der Menge $(T_q^{\pm 1})$ gleich 2π sein.

Es sei jetzt L eine beliebige »Gerade» und S_a und S_b zwei in der Nähe der beiden Schnittpunkte von L mit H so gewählte Polygone, dass jede dieselben schneidende »Gerade» die »Gerade» L mit der Genauigkeit ε approximiert. Wir bilden dann die Substitution

$$T_q = S_b S_a^{-1},$$

von der wir ohne Einschränkung voraussetzen können, dass ihre extremen Primfaktoren einander nicht invers sind, weil wir andernfalls S_a durch ΣS_a ersetzen könnten, wo Σ eine passend gewählte erzeugende Substitution bezeichnet, was den Übergang vom Polygon S_a zu einem benachbarten Polygon bedeutet. Wir ziehen dann den Radius R nach dem zur Menge $(T_q^{\pm 1})$ gehörigen Punkt ω, wobei derselbe zwei Polygone der Form

$$S_{qn}, \quad T_q S_{qn} \quad \text{oder} \quad S_{qn}, \quad T_q^{-1} S_{qn}$$

schneidet. Indem wir im ersten Falle auf den Radius R die Substitution S_{qn}^{-1}, im zweiten Falle die Substitution $S_{qn}^{-1} T_q$ anwenden, geht derselbe in eine »Halbgerade» über, die u. a. die Polygone S_0 und T_q schneidet. Hieraus erhält man ferner durch die Substitution S_a eine »Halbgerade», welche die Polygone S_a und S_b schneidet und folglich die gegebene »Gerade» L mit der Genauigkeit ε approximiert. Damit ist aber der Satz in Nr. 10 des vorigen Kapitels für die hier betrachteten Gruppen bewiesen. Daraus gelangt man schliesslich wie vorher zum Approximationssatz.

IV.

15. Wir wollen zum Abschluss noch zeigen, dass die komplementare Nullmenge M_0 von M die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Der Einfachheit halber werden wir uns dabei auf die Gruppen der zweiten Familie beschränken.

Ist L eine »Gerade», deren beide Schnittpunkte mit H zur Menge M_0 angehören, so können nach der Definition von M_0 die Transformierten von L nicht jede »Gerade» zum Häufungsgebilde haben. Diese Transformierten können jedoch, wenigstens a priori, innerhalb des Hauptkreises überall dicht liegen. Damit dies nicht der Fall wäre, müssen die beiden Schnittpunkte von L mit H zu einer gewissen Teilmenge $\bar{M}_0$ von M_0 angehören. Wir werden im Folgenden zeigen, dass schon $\bar{M}_0$ die Mächtigkeit des Kontinuums hat, was dann natürlich auch mit M_0 der Fall sein muss.

Wir nehmen zuerst an, dass die Anzahl der Randkreise von $S_0 \geqq 8$ ist. Es seien dann

$$a, \ b \tag{36}$$

irgend zwei aufeinander folgende Seiten von S_0. Wir können unendlich viele Radien von H ziehen derart, dass niemals eine zu (36) konjugierte Seite überschritten wird. Weil jedes Polygon wenigstens sieben innere Randkreise besitzt, hat man bei jedem Schritte sogar zwischen wenigstens drei Möglichkeiten zu wählen, um von einem Polygon zu einem nächstfolgenden zu überschreiten. Die Endpunkte solcher Radien haben demnach die Mächtigkeit des Kontinuums.

Die Bildlinien der genannten Radien können aber weder die Kreise (36) noch ihre konjugierten Kreise schneiden. Daraus folgt offenbar, dass es ein Sektor von S_0 um den Schnittpunkt der Kreise (36) gibt, welches keinen Punkt der Bildlinien von R enthält, womit unsere Behauptung für den vorliegenden Fall bewiesen ist.

16. Ist die Anzahl der Randkreise von S_0 gleich vier oder sechs, so bedarf der obige Beweis nur einer geringen Modifizierung. Wir werden dies für den erstgenannten Fall näher erläutern. (Fig. 5.)

Wir nehmen an, um einen bestimmten Fall zu fixieren, dass von den vier aufeinander folgenden Seiten a, b, c, d die Seiten a und b sowie c und d miteinander konjugiert sind. Wir konstruieren nun in S_0 um die Ecke A einen so kleinen Sektor V, dass derselbe mit seinen in den Polygonen Σ_1 und $\Sigma_2 = \Sigma_1^{-1}$

liegenden Transformierten, die den nämlichen Eckpunkt A haben, in den Dreiecken ABF und ADE liegen wird.

Wir ziehen jetzt einen Radius R von H, der abwechselnd eine zu c, d und a, b konjugierte Polygonseite überschreitet und behaupten, dass die Transformierten von R den Sektor V nicht schneiden.

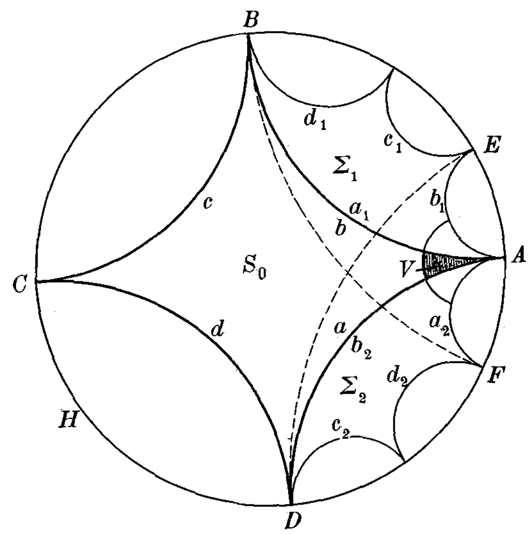

Fig. 5.

Es sei nämlich S ein von R geschnittenes Polygon, dessen obere Randkurve z. B. mit c konjugiert sei. Durch die Substitution S^{-1} wird der zu S gehörige Teil von R auf eine das Polygon S_0 schneidende »gerade» Linie R' abgebildet, deren in S_0 liegender Teil von einem Punkt von c entweder zu a oder zu b führt derart, dass die Fortsetzung im Polygone Σ_2 bzw. Σ_1 zu einem mit c oder d konjugierten Seite führt. Wie aus der Fig. 5 zu sehen ist, kann der betrachtete Teil von R' die in den betreffenden Polygonen liegenden Sektoren nicht schneiden. Indem man nun die nämlichen Schlüsse auf jeden Teil des Radius R anwendet, in welche derselbe durch seine Schnittpunkte mit den zu c oder d konjugierten Seiten zerlegt wird, gelangt man zu dem Resultat, dass die Transformierten von R im Sektor V keinen Punkt haben können. Der Endpunkt von R gehört somit zur Menge $\overline{M}_0$. Weil man nun bei der Wahl der unendlich vielen von R geschnittenen Polygone jedesmal zwischen zwei Möglichkeiten frei wählen kann, so hat die Menge der verschiedenen Radien R und somit auch die Menge $\overline{M}_0$ die Mächtigkeit des Kontinuums.