ZUR THEORIE DER NICHT LINEAREN DIFFERENZENGLEICHUNGEN.

VON

HEINRICH LÖWIG

in PRAG.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Der französische Mathematiker EMILE PICARD hat in seiner Abhandlung »Sur une classe de transcendantes nouvelles» (Acta mathematica 18 (1894), p. 133—154; 23 (1899), p. 333—337; s. auch das Referat N. E. Nörlunds in der

»Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften» II, 3, 2, S. 705) einen Satz bewiesen, den wir etwa folgendermassen aussprechen können.

Es seien $Q_k(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen der n Variabeln $f_1, f_2, \ldots, f_n$, welche in einer gewissen Umgebung der Stelle $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots$, $f_n = 0$ regulär sind, an dieser Stelle selbst verschwinden und so beschaffen sind, dass für $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$ die Determinante $\left|\frac{\partial Q_k}{\partial f_l}\right|$ einen von Null verschiedenen Wert hat. Diese Funktionen werden sich also in einer gewissen Umgebung der Stelle $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_n = 0$ durch Entwickelungen von der Form

$$Q_k(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl} f_l + \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2}}^{\infty} G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{I}$$

darstellen lassen, in welchen die Determinante $|q_{kl}|$ von Null verschieden ist.

Ist dann $f_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ eine partikuläre Lösung des Systems homogener linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$f_k(x + h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl} f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{II}$$

(h irgendeine von Null verschiedene komplexe Zahl) von der Beschaffenheit, dass sämtliche Funktionen $f_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in der ganzen Ebene meromorph sind und eine gemeinsame Periode ω besitzen, welche der Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}\right| > 1$ genügt[1] und so beschaffen ist, dass bei Einführung der Bezeichnungsweise $\lambda = e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}$ die Determinante $|q_{kl} - \delta_{kl} \lambda^{\alpha}|$ für ganzzahliges α von Null verschieden ist, und sind weiter ϱ_1 und ϱ_2 positive reelle Zahlen von der Beschaffenheit, dass die Funktionen $f_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ definierten Streifen in der Ebene der komplexen Variabeln x keine Pole besitzen, dann kann man dadurch, dass man nötigenfalls die Funktionen $f_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ mit einer absolut genommen hinreichend kleinen,

---

[1] Der Fall, dass $\left|e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}\right| < 1$ ist, kann auf diesen Fall leicht zurückgeführt werden, wenn man bedenkt, dass $-\omega$ ebenso gut wie ω eine Periode der Funktionen $f_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Ausgeschlossen ist nur der Fall $\left|e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}\right| = 1$.

von Null verschiedenen gemeinsamen Konstanten multipliziert (dadurch hören diese Funktionen ja nicht auf, eine Lösung des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (II) zu bilden) erreichen, dass durch die Gleichungen

$$f_k^{(\nu)}(x+h)=\sum_{l=1}^{n} q_{kl} f_l^{(\nu)}(x)+B_k[f_1^{(\nu-1)}(x), f_2^{(\nu-1)}(x), \ldots, f_n^{(\nu-1)}(x)] \qquad \text{(III)}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n;\ \nu=1, 2, 3, \ldots),$$

wo (siehe Gleichung (I))

$$B_k(f_1, f_2, \ldots, f_n)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2} G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}^{(k)} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(IV)}$$

ist, und durch die Forderung, dass für einen bestimmten Wert von ν die Differenzen $f_k^{(\nu)}(x)-f_k^{(0)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$$

regulär sein und die Periode ω besitzen sollen, n Funktionenfolgen $f_k^{(0)}(x), f_k^{(1)}(x), f_k^{(2)}(x), \ldots$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ definiert werden und dass diese Funktionenfolgen für alle Werte von x, welche der Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ genügen, gleichmässig gegen Grenzfunktionen $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ konvergieren. Diese Grenzfunktionen sind dann in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ definierten Streifen meromorph, besitzen daselbst dieselben Pole mit denselben Hauptteilen wie die Funktionen $f_k^{(0)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, sind ferner ebenso wie die Funktionen $f_k^{(0)}(x)$ periodisch mit der Periode ω und genügen dem Differenzengleichungensystem

$$f_k(x+h)=Q_k[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad \text{(V)}$$

Picard hat somit gezeigt, dass man ein Differenzengleichungensystem von der Form

$$f_k(x+h)=Q_k[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(V)}$$

unter gewissen Bedingungen durch Funktionen $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ befriedigen kann, welche eine gemeinsame Periode ω besitzen. Es liegt nun nahe, zu versuchen, dieses Verfahren auch auf den Fall anzuwenden, dass die Funktionen Q_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ nicht nur von den unbekannten Funktionen, sondern auch von der unabhängigen Variabeln x abhängen, aber in Bezug auf diese eine gemeinsame Periode ω besitzen.

Man hätte also Differenzengleichungensysteme von der Form

$$f_k(x+h) = Q_k[x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{VI}$$

zu betrachten, in welchen die Funktionen $Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in Bezug auf die Variable x die gemeinsame Periode ω besitzen, und sich für gewisse x und hinreichend kleine f_l $(l = 1, 2, \ldots, n)$ in der Form

$$Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l + \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2}}^{\infty} G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots, f_n^{\alpha_n} \tag{VII}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellen lassen. In Analogie mit dem Picardschen Verfahren hätte man zunächst ein System von Funktionen $f_k^{(0)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zu suchen, welche den Differenzengleichungen

$$f_k^{(0)}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l^{(0)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{VIII}$$

genügen und die Periode ω besitzen; sodann hätte man zu versuchen, durch die Gleichungen

$$f_k^{(\nu)}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l^{(\nu)}(x) + B_k[x, f_1^{(\nu-1)}(x), f_2^{(\nu-1)}(x), \ldots, f_n^{(\nu-1)}(x)] \tag{IX}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\left[B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(X)}\right]$$

ein System von Funktionenfolgen $f_k^{(0)}(x), f_k^{(1)}(x), f_k^{(2)}(x), f_k^{(3)}(x), \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zu definieren. Schliesslich wäre die Frage aufzuwerfen, unter welchen Umständen diese Funktionenfolgen gegen Grenzfunktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ konvergieren und zu untersuchen, ob gegebenenfalls diese Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dem Differenzengleichungensystem (VI) genügen.

Eine Verallgemeinerung des oben ausgesprochenen Picardschen Satzes in dem hier angeführten Sinne war Thema der Dissertation, welche der Verfasser im Jahre 1927 an der deutschen Universität in Prag einreichte und welche daselbst im Dezember 1927 approbiert wurde. Ein kurzer Auszug aus dieser Dissertation, welche in Manuskriptform vorgelegt wurde, ist in Nr. 78 (1930) der naturwissenschaftlichen Zeitschrift »Lotos» in Prag erschienen. Die vorliegende Arbeit stellt zusammen mit einer zweiten, gleichfalls der Redaktion dieser Zeitschrift vorgelegten Abhandlung, welche den Titel »Lineare Differenzengleichungen mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode» trägt, eine Umarbeitung und Vervollständigung jener Dissertation dar.

§ 1. Formulierung des zu beweisenden Satzes über Differenzengleichungensysteme von der Form $f_k(x+h) = Q_k[x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Wir haben Differenzengleichungensysteme von der Form

$$f_k(x+h) = Q_k[x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

zu betrachten, welche durch $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ befriedigt werden und in welchen die vorkommenden Funktionen $Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in Bezug auf die Variable x eine gemeinsame Periode ω besitzen. Es sei also ω irgendeine von Null verschiedene Zahl und hierauf seien $Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen der $n+1$ Variabeln $x, f_1, f_2, \ldots, f_n$, welche in dem durch die Ungleichungen $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$, $|f_k| \leqq F$ $(k = 1, 2, \ldots, n;$ ϱ_1, ϱ_2, F positive reelle Zahlen; $\varrho_1 < \varrho_2)$ definierten Bereiche in diesen Variabeln regulär sind und daselbst den Gleichungen $Q_k(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0$ und $Q_k(x+\omega, f_1, f_2, \ldots, f_n) = Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ identisch genügen. Es muss daher eine für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$, $|f_k| \leqq F$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ konvergente Entwickelung von der Gestalt

$$Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 1}}^{\infty} \sum_{\alpha = -\infty}^{+\infty} \Gamma^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \tag{2}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Definiert man durch die Gleichungen

$$G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) = \sum_{\alpha = -\infty}^{+\infty} \Gamma^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 1,\ k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

— die auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehenden Reihen sind ja für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ konvergent — Funktionen $G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x)$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 1,$

$k = 1, 2, \ldots, n$) von x, welche für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ regulär sind und die Periode ω besitzen, dann kann man auch schreiben

$$Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 1}}^{\infty} G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

oder mit einer Änderung der Bezeichnungsweise

$$Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \tag{5}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzt man in (3) $\alpha_l = 1$, $\alpha_m = 0$ für $m \neq l$, dann erkennt man, dass die in den Gleichungen (5) auftretenden Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$$

regulär sind und sich durch Reihenentwickelungen von der Form

$$q_{kl}(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} q_{kl\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

darstellen lassen. Wir wollen jedoch über die Funktionen $q_{kl}(x)$, d. h. über die Koeffizienten der *linearen* Glieder der Entwickelungen (4), weiter gehende Voraussetzungen machen. Wir wollen annehmen, dass eine der Ungleichung $R \geqq \varrho_2$ genügende positive reelle Zahl R existiert, so dass die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ sogar in der durch die Ungleichung $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R$ definierten Halbebene regulär sind und daselbst durch Reihenentwickelungen von der Gestalt

$$q_{kl}(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_{kl\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

dargestellt werden können. Die Koeffizienten dieser Entwickelung sollen ausserdem so beschaffen sein, dass die Determinante $|q_{kl0}|$ von Null verschieden ist.

Wir wollen nun einen Satz aussprechen, der die Existenz von ∞^n Systemen von Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ behauptet, welche dem Differenzengleichungensystem (1), in welchem die Funktionen $Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ der $n+1$ Variabeln $x, f_1, f_2, \ldots, f_n$ die eben angeführten Voraussetzungen erfüllen, genügen und die Periode ω besitzen. Den Beweis dieses Satzes werden wir dann in den §§ 3, 4 und 5 liefern. Unter ω und h wollen wir in dieser Abhandlung stets zwei feste, von Null verschiedene Zahlen verstehen, deren Quotient nicht reell ist, und wollen die Abkürzung

$$e^{\frac{2\pi i h}{\omega}} = \lambda \tag{8}$$

einführen. Es ist dann das Bestehen der Gleichung $|\lambda| = 1$ ausgeschlossen und man wird die Fälle $|\lambda| > 1$ und $|\lambda| < 1$ zu unterscheiden haben.

Satz 1. *Es sei R eine positive reelle Zahl und hierauf seien $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von x, welche in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R$ definierten Halbebene regulär sind und sich daselbst durch Reihenentwickelungen von der Form*

$$q_{kl}(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_{kl\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

darstellen lassen. Hiebei sei die Determinante $|q_{kl0}|$ von Null verschieden und es sei r eine der Ungleichung $r \leqq R$ genügende positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ auch die Determinante $|q_{kl}(x)|$ von Null verschieden ist. Hierauf seien $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von x, welche im Falle $|\lambda| > 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ meromorph sind, die Periode ω besitzen und ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

bilden. Weiter seien ϱ_1 und ϱ_2 positive reelle Zahlen, welche im Falle $|\lambda| > 1$ den Ungleichungen $\varrho_1 \leqq r$, $\varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 < \varrho_2$ und im Falle $|\lambda| < 1$ der Ungleichung $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ genügen und so beschaffen sind, dass die Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ keine Pole besitzen, und F eine beliebige positive reelle Zahl. Endlich seien $B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen der $n+1$ Variabeln $x, f_1, f_2, \ldots, f_n$, die in dem durch die Ungleichungen $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$, $|f_k| \leqq F$

$(k=1, 2, \ldots, n)$ *definierten Bereiche in diesen Variabeln regulär sind und daselbst durch Entwickelungen von der Form*

$$B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2}}^{\infty} \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \Gamma^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \tag{10}$$

$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt werden können, und es sei

$$Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l + B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \quad (11).$$

Dann kann man stets in mannigfach verschiedener Weise ein System von Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *der unabhängigen Veränderlichen* x *und von* n *Parametern* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *angeben, welche so beschaffen sind, dass ein Paar positiver reeller Zahlen* $\bar{\varrho}_1$, $\bar{\varrho}_2$, *welche den Ungleichungen* $\varrho_1 \leqq \bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho}_2 \leqq \varrho_2$, $\bar{\varrho}_1 \leqq r$ *genügen, eine Funktion* $\varphi(x)$ *von* x *allein, welche in der ganzen Ebene meromorph ist und in dem durch die Ungleichung* $\bar{\varrho}_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \bar{\varrho}_2$ *definierten Streifen weder Nullstellen noch Pole besitzt, und eine positive reelle Zahl* C *existieren, so dass im Falle* $|\lambda| > 1$ *in dem durch die Ungleichungen* $\bar{\varrho}_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \bar{\varrho}_2 |\lambda|$, $|c_s| \leqq C$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *in dem durch die Ungleichungen* $\bar{\varrho}_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \bar{\varrho}_2$, $|c_s| \leqq C$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ *definierten Bereiche in den* $n+1$ *Variabeln* $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$

1.) *die Funktionen dieser Variabeln*

$$\frac{f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x)}{\varphi(x)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

regulär sind;

2.) *die Funktionen* $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *die Gleichungen*

$$f_k(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n), \quad \left(\frac{\partial f_k}{\partial c_s}\right)_{\substack{c_1=0 \\ c_2=0 \\ \cdots \\ c_n=0}} = f_{ks}(x) \qquad (k, s=1, 2, \ldots, n)$$

und

$$f_k(x+\omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen und

3.) *dem Differenzengleichungensystem*

$$f_k(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \\ = Q_k[x, f_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] \qquad (12)$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

genügen;

4.) *keine Relation von der Gestalt*

$$G[x, f_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] = 0 \qquad (13)$$

identisch in $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ *besteht.*

Wenn insbesondere die Determinante $|q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^\alpha|$ *für keinen ganzzahligen Wert von* α *verschwindet, dann gibt es ein und nur ein System von Funktionen* $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *der* $n+1$ *Veränderlichen* $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$, *welche so beschaffen sind, dass eine positive reelle Zahl* C *so angenommen werden kann, dass im Falle* $|\lambda| > 1$ *in dem durch die Ungleichungen* $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2|\lambda|$, $|c_s| \leqq C$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *in dem durch die Ungleichungen* $\varrho_1|\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$, $|c_s| \leqq C$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ *definierten Bereiche in den Variabeln* $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$

1.) *die Funktionen dieser Variabeln*

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

regulär sind und

2.) *die Funktionen* $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *die Gleichungen* $f_k(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0$ *und* $f_k(x+\omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *befriedigen und*

3.) *dem Differenzengleichungensystem (12) genügen.*

Diese Funktionen

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen dann auch die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial c_s}\right)_{\substack{c_1=0\\ c_2=0\\ \cdots\\ c_n=0}} = f_{ks}(x) \qquad (k, s=1, 2, \ldots, n)$$

und es besteht daher zwischen ihnen keine Relation von der Gestalt (13).

Setzt man nämlich in diesem Falle

$$\sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) = f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und versteht unter C eine hinreichend kleine positive reelle Zahl, dann sind durch die Gleichungen

$$f_k^{(\nu)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) + \\ + B_k[x, f_1^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] \qquad (14) \\ (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und durch die Forderung, dass die Differenzen $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *im Falle* $|\lambda| > 1$ *in dem durch die Ungleichungen* $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$, $|c_s| \leqq C$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *in dem durch die Ungleichungen* $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$, $|c_s| \leqq C$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *definierten Bereiche in den Variabeln* $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ *regulär sein und die Funktionen* $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *die Gleichungen* $f_k^{(\nu)}(x + \omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *befriedigen sollen, die Funktionen* $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *der Reihe nach eindeutig bestimmt und die so erhaltenen Funktionenfolgen* $f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_k^{(2)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *konvergieren für alle* $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$, *welche den Ungleichungen* $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$, $|c_s| \leqq C$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *bzw.*

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2, \ |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, gleichmässig gegen Grenzfunktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *welche die Bedingungen 1.), 2.) und 3.) erfüllen.*

§ 2. **Die zu benützenden Sätze über lineare Differenzengleichungen mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode.** In diesem Paragraphen werden wir einige Sätze über lineare Differenzengleichungen mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode anführen, deren Kenntnis bei dem Beweise des eben ausgesprochenen Satzes über Differenzengleichungensysteme von der Form

$$f_k(x+h) = Q_k[x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

notwendig sein wird. Bezüglich des Beweises dieser Sätze muss der Leser auf die Abhandlung des Verfassers »Lineare Differenzengleichungen mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode» verwiesen werden, welche gleichzeitig mit dieser Arbeit der Redaktion dieser Zeitschrift vorgelegt wurde. Unter R und r sollen in diesem Paragraphen ebenso wie in Satz 1 positive reelle Zahlen verstanden werden, welche der Ungleichung $R \geqq r$ genügen; hierauf sollen ebenso wie in Satz 1 $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von x sein, welche in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R$ definierten Halbebene regulär sind und daselbst durch Reihenentwicklungen von der Form

$$q_{kl}(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_{kl\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

dargestellt werden können; endlich soll auch wie in Satz 1 die Determinante $|q_{kl0}|$ und ebenso die Determinante $|q_{kl}(x)|$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ von Null verschieden sein.

Satz 2. *Wenn t eine beliebig vorgegebene, von Null verschiedene komplexe Zahl ist, dann kann man stets in mannigfach verschiedener Weise eine in der ganzen Ebene meromorphe, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$ angeben, welche der Differenzengleichung*

$$f(x+h) = t f(x) \tag{15}$$

genügt und die Periode ω besitzt.

Satz 3. *Die Determinante $|q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^{\alpha}|$ möge für keinen ganzzahligen Wert von α den Wert Null annehmen. Gibt es dann in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, ein System von Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda|$, und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, ein System von Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene regulär sind, ω zur Periode haben und dem System homogener linearer Differenzengleichungen*

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

genügen, dann muss identisch für $k = 1, 2, \ldots, n$ $f_k(x) = 0$ sein.

Satz 4. *Es seien ϱ_1 und ϱ_2 positive reelle Zahlen, welche im Falle $|\lambda| > 1$ den Ungleichungen $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 \leqq r$ und im Falle $|\lambda| < 1$ der Ungleichung $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ genügen. Hierauf seien $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von x, welche für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär sind und die Periode ω besitzen, so dass für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ konvergente Reihenentwickelungen von der Gestalt*

$$B_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

bestehen. Dann kann man stets in mannigfach verschiedener Weise ein System von Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ angeben, welche in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$, und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ definierten Streifen in der Ebene der komplexen Variabeln x meromorph sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

genügen. Wenn insbesondere die Determinante $|q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^\alpha|$ für keinen ganzzahligen Wert von α den Wert Null annimmt, dann gibt es ein und nur ein System von Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche in dem genannten Streifen holomorph sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen (17) genügen. Durch die Gleichungen

$$b_{km\alpha\gamma}\, \lambda^\alpha = \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha} \sum_{l=1}^{n} b_{lm\beta\gamma}\, q_{kl\alpha-\beta} + \delta_{km}\, \delta_{\alpha\gamma} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma) \tag{18}$$

ist nämlich in diesem Falle ein System von Zahlen $b_{km\alpha\gamma}$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma)$ eindeutig bestimmt. Die Gleichungen

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}\, b_{km\alpha\gamma}\, B_{m\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

definieren dann jene Lösung des Systems (17): die rechts stehenden Summen sind nämlich, wenn $|\lambda| > 1$ ist, für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$, und wenn $|\lambda| < 1$ ist, für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ absolut und gleichmässig konvergent.

Die Gleichungen (19) liefern in dem durch die Ungleichung

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 \, |\lambda| \quad bzw. \quad \varrho_1 \, |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$$

definierten Streifen auch die Laurentsche Entwickelung der Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *nach Potenzen von* $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$*:*

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_{k\alpha} \, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

wo

$$a_{k\alpha} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{k m \alpha \gamma} B_{m\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha \text{ beliebig ganzzahlig}) \tag{21}$$

ist. Sie lehren auch, dass man in diesem Streifen die Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *mittels der Gleichungen*

$$f_k(x) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} B_{m\gamma} f_{k m \gamma}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

aus denjenigen Funktionen $f_{k m \gamma}(x)$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n; \ \gamma$ bel. ganzz.) *zusammensetzen kann, welche für* $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R \, |\lambda|$ *bzw. für* $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$ *regulär sind, die Periode* ω *besitzen und den Differenzengleichungen*

$$f_{k m \gamma}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_{l m \gamma}(x) + \delta_{km} \, e^{\frac{2\pi i \gamma x}{\omega}} \tag{23}$$
$$(k, m = 1, 2, \ldots, n; \ \gamma \text{ beliebig ganzzahlig})$$

genügen.

Satz 5. *Es sei die Determinante* $|q_{kl0} - \delta_{kl} \lambda^\alpha|$ *für jedes ganzzahlige* α *von Null verschieden. Wenn dann* ϱ_1 *und* ϱ_2 *zwei feste, den Ungleichungen* $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 \leqq r$ *im Falle* $|\lambda| > 1$ *und* $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ *im Falle* $|\lambda| < 1$ *genügende positive reelle Zahlen sind, dann ist es möglich, eine positive reelle Zahl* $\varkappa$ *von der Beschaffenheit anzugeben, dass bei jedem System von Funktionen* $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *welche für* $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *regulär sind und die Periode* ω *besitzen, die zugehörigen Funktionen* $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *welche (s. Satz 4) in dem Falle, dass* $|\lambda| > 1$ *ist, dadurch definiert sind, dass sie für* $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 \, |\lambda|$, *und in dem Falle, dass*

$|\lambda| < 1$ *ist, dadurch, dass sie für* $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *regulär sind, die Periode* ω *besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen*

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

genügen, für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ *bzw. für* $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *die Ungleichungen*

$$|f_k(x)| \leqq \varkappa M[B_l(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

erfüllen, wo $M[B_l(x)]$ *den grössten absoluten Wert bedeutet, den die Funktionen* $B_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ *für* $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *annehmen.*

Satz 6. *Es gibt in dem Falle, dass* $|\lambda| > 1$ *ist, stets ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung*

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

dessen sämtliche Funktionen in der durch die Ungleichung $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R |\lambda|$, *und in dem Falle, dass* $|\lambda| < 1$ *ist, stets ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems (9), dessen sämtliche Funktionen in der durch die Ungleichung* $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$ *definierten Halbebene meromorph sind und die Periode* ω *besitzen.*

§ 3. **Beweis der gleichmässigen Beschränktheit aller Funktionen** $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Wir haben nun der Reihe nach die in Satz 1 aufgestellten Behauptungen zu beweisen. Die Kenntnis der im vorigen Paragraphen angeführten Sätze über lineare Differenzengleichungen mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode wird im folgenden, wie schon hervorgehoben wurde, vorausgesetzt.

Zunächst ist die Annahme, dass ein System von Funktionen von x $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ gegeben sei, welche im Falle $|\lambda| > 1$ für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R |\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$ meromorph sind, die Periode ω besitzen und ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

bilden, keine besondere Annahme über die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$, weil unter den Voraussetzungen, welche in Satz 1 über die letzteren Funktionen gemacht werden, die Existenz eines solchen Systems von Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ nach Satz 6 feststeht.

Wir wollen hierauf in diesem und im nächsten Paragraphen annehmen, dass die Determinante $|q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^{\alpha}|$ für keinen ganzzahligen Wert von α verschwindet. In diesem Paragraphen wollen wir sodann beweisen, dass unter der eben gemachten Voraussetzung folgende Behauptung richtig ist. »Setzt man

$$\sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) = f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und versteht unter C eine hinreichend kleine positive reelle Zahl, dann sind durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} f_k^{(\nu)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, f_l^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) + \\ + B_k[x, f_1^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] \\ (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{gathered} \tag{14}$$

und durch die Forderung, dass die Differenzen

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

im Falle $|\lambda| > 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ regulär sein und die Funktionen $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ die Gleichungen

$$f_k^{(\nu)}(x+\omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

befriedigen sollen, die Funktionen $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ der Reihe nach eindeutig bestimmt und es existiert eine positive reelle Zahl U von der Beschaffenheit, dass für

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \ |c_s| \leqq C \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

die Ungleichung

$$|f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq U \tag{25}$$

erfüllt ist.» Der Beweis der in Satz 1 ausgesprochenen weiter gehenden Behauptung, dass bei hinreichender Verkleinerung der positiven reellen Zahl C die Funktionenfolgen $f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, ... $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gleichmässig gegen Grenzfunktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ konvergieren, ist dem nächsten Paragraphen vorbehalten.

Aus den beim Ausspruche von Satz 1 gemachten Voraussetzungen folgt, dass die auf den rechten Seiten der Gleichungen

$$G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) = \sum_{\alpha = -\infty}^{+\infty} \Gamma^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha} \, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \tag{26}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

stehenden Laurentschen Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ in dem durch die Ungleichung

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$$

definierten Streifen konvergieren und Funktionen

$$G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellen, welche in diesem Streifen regulär sind und die Periode ω besitzen. Ebenso folgt weiter, dass die Potenzreihen in den n Variabeln $f_1, f_2, \ldots, f_n$

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \ |f_l| \leqq F \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

absolut und gleichmässig konvergieren; endlich folgt das Bestehen der Gleichungen

$$B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2} G^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x) f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{27}$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |f_l| \leqq F \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir behaupten nun weiter: ist für ein bestimmtes System von Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ der grösste absolute Wert, den die Funktionen

$$G^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$$

annehmen, dann ist die auf der rechten Seite der Gleichung

$$B(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2} G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \tag{28}$$

stehende Potenzreihe in $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wieder in dem durch die Ungleichungen $|f_l| \leqq F$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ definierten Bereiche in den Variabeln $f_1, f_2, \ldots, f_n$ konvergent und stellt eine Funktion $B(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dar, welche in diesem Bereiche regulär ist. Ist nämlich F^* eine der Ungleichung $F^* > F$ genügende positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass die Funktionen $B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in dem durch die Ungleichungen $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$, $|f_l| \leqq F^*$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ definierten Bereiche immer noch regulär sind, und ist hierauf G der grösste absolute Wert, den die Funktionen $B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in diesem Bereiche annehmen, dann ist für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$

$$|G^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x)| \leqq \frac{G}{F^{*\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0, 1, 2, \ldots; \ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2; \ k = 1, 2, \ldots, n);$$

daher ist auch

$$G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \leqq \frac{G}{F^{*\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0, 1, 2, \ldots; \ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2).$$

Aus dieser letzteren Ungleichung erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung.

Es sei nun eine Funktion $B(f)$ einer Veränderlichen f durch die Gleichung

$$B(f) = B(f, f, \ldots, f) \tag{29}$$

definiert. Dann ist $B(f)$ in dem durch die Ungleichung $|f| \leqq F$ definierten Bereiche in der Veränderlichen f regulär und lässt sich daselbst durch eine Potenzreihe in f von der Gestalt

$$B(f) = \sum_{\alpha=2}^{\infty} G_\alpha f^\alpha \tag{30}$$

darstellen, in welcher die Konstanten G_α $(\alpha = 2, 3, \ldots)$ nicht negative reelle Zahlen sind. Weiter sei $\varkappa$ eine positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass bei jedem System von Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär sind und die Periode ω besitzen, die zugehörigen Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche (s. Satz 4) in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, dadurch definiert sind, dass sie für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$, und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, dadurch, dass sie für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

genügen, für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ bzw. für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ die Ungleichungen

$$|f_k(x)| \leqq \varkappa M[B_l(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

erfüllen, wo $M[B_l(x)]$ den grössten absoluten Wert bedeutet, den die Funktionen $B_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ annehmen. Dass es eine positive reelle Zahl $\varkappa$ von dieser Beschaffenheit wirklich gibt, folgt aus Satz 5. Dann betrachten wir die Gleichung

$$u = \varkappa B(v + u). \tag{31}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $u = v = 0$ ist. Weil aber

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u}[u - \varkappa B(v + u)]\right\}_{\substack{u=0\\v=0}} = 1 - \varkappa B'(0) = 1$$

also von Null verschieden ist, kann man durch stetige Fortsetzung aus dem Wertepaare $u=0$, $v=0$ vermöge (31) u in einer gewissen Umgebung der Stelle $v=0$, etwa für $|v|\leqq M$, wo M eine hinreichend kleine positive reelle Zahl ist, als Funktion von v erklären:

$$u=U(v). \tag{32}$$

Die Funktion $U(v)$ ist also in dem durch die Ungleichung $|v|\leqq M$ definierten Bereiche ihres Argumentes regulär. Weiter ist offenbar $U(v)$ für reelle, der Ungleichung $|v|\leqq M$ genügende Werte von v ebenfalls reell. Wir behaupten nun weiter: die Funktion $U(v)$ wird für hinreichend kleine positive reelle Werte der Veränderlichen v nicht negativ. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist evident, wenn $B(f)$ identisch verschwindet (das kann nur eintreten, wenn das Differenzengleichungensystem (1) linear ist), weil dann ebenso identisch $U(v)=0$ ist. Andernfalls sei G_μ $(\mu\geqq 2)$ der erste nicht verschwindende Koeffizient in der Entwickelung (30) der Funktion $B(f)$ nach Potenzen von f. Dann folgt aus Gleichung (31), dass sich $U(v)$ in der Umgebung der Stelle $v=0$ durch eine Entwickelung von der Form

$$U(v)=\varkappa G_\mu v^\mu+\cdots \tag{33}$$

darstellt, wo die Punkte Glieder mit höheren Potenzen von v bedeuten, deren Koeffizienten sämtliche reell sind. Nachdem das festgestellt ist, ergibt sich ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung.

Also ist es möglich, die positive reelle Zahl M so klein zu machen, dass für positive reelle, der Ungleichung $v\leqq M$ genügende Werte der Veränderlichen v $U(v)\geqq 0$ ist. Da $U(0)=0$ ist, ist es ausserdem möglich, der positiven reellen Zahl M die Bedingung aufzuerlegen, dass für positive reelle, der Ungleichung $v\leqq M$ genügende Werte der Veränderlichen v die Ungleichung

$$v+U(v)\leqq F \tag{34}$$

erfüllt ist. Wir wollen daher im folgenden unter M eine positive reelle Zahl verstehen, welche so beschaffen ist, dass 1.) für $|v|\leqq M$ $U(v)$ regulär ist und 2.) für positives reelles $v\leqq M$ $U(v)\geqq 0$ und 3.) $v+U(v)\leqq F$ (34) ist. Die nicht negative reelle Zahl $U(M)$ wollen wir kurz mit U bezeichnen.

Unter diesen Voraussetzungen ist durch die Gleichungen

$$M_1=\varkappa B(M),\quad M_\nu=\varkappa B(M+M_{\nu-1})\qquad(\nu=2,3,\ldots) \tag{35}$$

eine konvergente Folge von Zahlen M_1, M_2, M_3, ... definiert und es ist

$$\lim_{\nu=\infty} M_\nu = U. \tag{36}$$

Beweis: Da wegen Ungleichung (34) $M + U \leqq F$ ist, so ist erst recht $M \leqq F$; weil aber die Funktion $B(f)$ für $|f| \leqq F$ regulär ist, kann man den Wert $f = M$ in diese Funktion einsetzen. Also ist durch die erste der Gleichungen (35) wirklich eine Zahl M_1 definiert. Diese Zahl ist ferner eine nicht negative reelle Zahl; das folgt daraus, dass die Koeffizienten G_α ($\alpha = 2, 3, \ldots$) der Entwicklung (30) der Funktion $B(f)$ ebenfalls nicht negative reelle Zahlen sind. Aus demselben Grunde nimmt weiter die Funktion $B(f)$ niemals ab, wenn f von kleineren zu grösseren positiven reellen Werten übergeht. Daraus folgt

$$M_1 = \varkappa B(M) \leqq \varkappa B(M + U) = U \quad \text{und} \quad M + M_1 \leqq M + U$$

und daher $M + M_1 \leqq F$. Also kann man auch den Wert $f = M + M_1$ in die Funktion $B(f)$ einsetzen und es ist durch die Gleichung $M_2 = \varkappa B(M + M_1)$ eine nicht negative reelle Zahl M_2 definiert. Diese Zahl M_2 genügt weiter der Ungleichung $M_2 = \varkappa B(M + M_1) \leqq \varkappa B(M + U)$ oder $M_2 \leqq U$ und ebenso der Ungleichung $M + M_2 \leqq F$, weil $M + U \leqq F$ ist. Hat man nun bereits bewiesen, dass durch die Gleichungen

$$M_1 = \varkappa B(M), \quad M_2 = \varkappa B(M + M_1), \ldots, \quad M_{\nu-1} = \varkappa B(M + M_{\nu-2})$$

nicht negative reelle Zahlen $M_1, M_2, \ldots, M_{\nu-1}$ definiert sind, welche den Ungleichungen $M_1 \leqq U$, $M_2 \leqq U, \ldots, M_{\nu-1} \leqq U$ und $M + M_1 \leqq F$, $M + M_2 \leqq F, \ldots$, $M + M_{\nu-1} \leqq F$ genügen, dann folgt, dass man den Wert $f = M + M_{\nu-1}$ wieder in die Funktion $B(f)$ einsetzen kann, und dass durch die Gleichung

$$M_\nu = \varkappa B(M + M_{\nu-1})$$

wieder eine nicht negative reelle Zahl M_ν definiert ist. Weiter ist

$$M_\nu = \varkappa B(M + M_{\nu-1}) \leqq \varkappa B(M + U) = U \quad \text{und} \quad M + M_\nu \leqq M + U \leqq F.$$

Durch diese vollständige Induktion ist bewiesen, dass durch die Gleichungen (35) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen M_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) definiert ist, welche den Ungleichungen

$$M_\nu \leqq U \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{37}$$

und

$$M + M_\nu \leqq F \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{38}$$

genügen. Die Folge der Zahlen M_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ist also beschränkt.

Anderseits ist kein Glied dieser Folge kleiner als das vorhergehende. Es ist nämlich

$$M_1 = \varkappa B(M) \geqq 0$$
$$M_2 = \varkappa B(M + M_1) \geqq \varkappa B(M) = M_1$$
$$M_3 = \varkappa B(M + M_2) \geqq \varkappa B(M + M_1) = M_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Also ist $M_1 \leqq M_2 \leqq M_3 \leqq \ldots$, wie behauptet wurde. Aus diesen beiden Eigenschaften der Folge muss man aber mit Notwendigkeit auf ihre Konvergenz schliessen.

Nennen wir den hiemit als vorhanden nachgewiesenen Grenzwert der Folge M_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ vorläufig $\overline{U}$, dann folgt aus den Ungleichungen (37) und (38) das Bestehen der Ungleichungen

$$\overline{U} \leqq U \tag{39}$$

und

$$M + \overline{U} \leqq F. \tag{40}$$

Nun nimmt die für reelle, der Ungleichung $|v| \leqq M$ genügende Werte ihres Argumentes ebenfalls reelle Funktion $v + U(v)$ von v für $v = 0$ den Wert 0 und für $v = M$ den Wert $M + U$ an; also muss es auch mindestens eine der Ungleichung $0 < \bar{v} \leqq M$ genügende reelle Zahl $\bar{v}$ geben, so dass die Funktion $v + U(v)$ für $v = \bar{v}$ den der Ungleichung $0 < M + \overline{U} \leqq M + U$ genügenden Wert $M + \overline{U}$ annimmt, also die Gleichung

$$\bar{v} + U(\bar{v}) = M + \overline{U} \tag{41}$$

besteht. Nun folgt aus den Gleichungen (35), wenn man zur Grenze $\nu = \infty$ übergeht,

$$\overline{U} = \varkappa B(M + \overline{U})$$

oder wegen (41)

$$\bar{v} + U(\bar{v}) - M = \varkappa B[\bar{v} + U(\bar{v})]$$

oder nach der Definition der Funktion $U(v)$ $\bar{v} + U(\bar{v}) - M = U(\bar{v})$ oder endlich $\bar{v} = M$ und daher $\overline{U} = U(M) = U$. Also ist wirklich

$$\lim_{\nu = \infty} M_\nu = U, \tag{36}$$

wie behauptet wurde.

Nach diesen Vorbereitungen können wir an den angekündigten Beweis der zu Beginn dieses Paragraphen ausgesprochenen Behauptung gehen. Es sei wieder M eine positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass 1.) für $|v| \leqq M$ $U(v)$ regulär ist und 2.) für positives reelles $v \leqq M$ $U(v) \geqq 0$ und 3.) $v + U(v) \leqq F$ (34) ist. Es sei hierauf C eine positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

$$|f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| = \left| \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) \right| \leqq M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Eine solche positive reelle Zahl C kann man angeben, weil die Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ keine Pole besitzen. Nun ist aber (es wird wieder $U(M) = U$ gesetzt) $M \leqq M + U \leqq F$; daher folgen aus den Ungleichungen $|f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq M$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ auch die Ungleichungen $|f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq F$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Also ist es, wenn die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind, möglich, die Funktionen $f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in die Funktionen $B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ einzusetzen, und es sind

$$B_k[x, f_1^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_2^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

wieder für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

reguläre Funktionen von $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$, welche in Bezug auf die Variable x die Periode ω besitzen. Diese Funktionen werden sich daher als für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

konvergente Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ von der Gestalt

$$B_k[x, f_1^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_2^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] =$$
$$= \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2}}^{\infty} \sum_{\alpha = -\infty}^{+\infty} B^{(k, 1)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha} c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (42)$$

darstellen lassen. Setzt man

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2} B^{(k,1)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\, c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} = B^{(1)}_{k\alpha}(c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{43}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \text{ beliebig ganzzahlig}),$$

dann wird

$$B_k[x, f_1^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_2^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] =$$

$$= \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B^{(1)}_{k\alpha}(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{44}$$

Hält man nun ein bestimmtes Wertesystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$ fest, dann kann man mit Hilfe von Satz 4 und mit Hilfe der Gleichungen

$$f_{ks}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_{ls}(x) \qquad (k, s = 1, 2, \ldots, n) \tag{45}$$

einsehen, dass durch die Gleichungen

$$f_k^{(1)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) +$$

$$+ B_k[x, f_1^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{46}$$

eindeutig ein System von Funktionen von x $f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bestimmt ist, welche die Periode ω besitzen und so beschaffen sind, dass die Funktionen von x $f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ im Falle $|\lambda| > 1$ für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär sind. Geht man jetzt von dem gewählten Wertesystem $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zu andern solchen Wertesystemen über, dann erhält man auch andere Funktionen von x $f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Es ist mit anderen Worten auf diese Weise für

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

ein System von Funktionen $f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ der $n+1$ Veränderlichen $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ definiert. Man kann nun zeigen, dass die Differenzen

$$f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

nicht nur bei festgehaltenen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda| \quad \text{bzw. für} \quad \varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$$

reguläre Funktionen von x, sondern sogar für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

reguläre Funktionen der $n+1$ Veränderlichen $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sind. Es ist nämlich nach Satz 4

$$f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) + \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma}^{(1)}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Nun hören die Reihen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha}^{(1)}(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

nicht auf, für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ zu konvergieren und Funktionen von x darzustellen, welche daselbst regulär sind und die Periode ω besitzen, wenn man an Stelle der Funktionen $B_{k\alpha}^{(1)}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n,\ \alpha$ beliebig ganzzahlig) den grössten absoluten Wert $B_{k\alpha}^{(1)}$ einsetzt, den diese Funktionen für $|c_s| \leqq C$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ annehmen. Wir haben einen ähnlichen Schluss bereits einmal gezogen und brauchen daher auf den Beweis dieser Behauptung nicht eingehen. Also sind nach Satz 4 die Summen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma}^{(1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda| \quad \text{bzw. für} \quad \varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$$

absolut und gleichmässig konvergent. Weiter sind daher die Glieder der auf den rechten Seiten der Gleichungen (47) stehenden Summen für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

absolut genommen kleiner als die Glieder der konvergenten Summen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} \varrho_1^{\alpha} \left| b_{k m \alpha \gamma} \right| B_{m \gamma}^{(1)} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} (\varrho_2 |\lambda|)^{\alpha} \left| b_{k m \alpha \gamma} \right| B_{m \gamma}^{(1)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

absolut genommen kleiner als die Glieder der konvergenten Summen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} (\varrho_1 |\lambda|)^{\alpha} \left| b_{k m \alpha \gamma} \right| B_{m \gamma}^{(1)} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} \varrho_2^{\alpha} \left| b_{k m \alpha \gamma} \right| B_{m \gamma}^{(1)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Daraus folgt, dass die Summen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} b_{k m \alpha \gamma} B_{m \gamma}^{(1)} (c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

absolut und gleichmässig konvergieren. Nun ist aber jedes Glied einer dieser Summen eine in dem durch diese Ungleichungen definierten Bereiche analytische Funktion der Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$. Dasselbe gilt daher auch von den Funktionen

$$f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

welche durch den Wert dieser Summen definiert sind, wie behauptet wurde.

Bezeichnet $\varkappa$ die in diesem Paragraphen bereits eingeführte positive reelle Zahl, dann ist für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

nach Satz 5 und nach (46)

$$\left| f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \right| \leqq \varkappa B(M) \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

oder wenn man wieder die durch die Gleichungen (35) gegebene Bezeichnungsweise einführt,

$$|f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq M_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{48}$$

Aus (48) folgt weiter für

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

$$|f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq M + M_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{49}$$

Nun ist aber $M + M_1 \leqq M + U \leqq F$. Also kann man die Funktionen $f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ wieder in die Ausdrücke $B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ einsetzen. Man erkennt so, dass man den eben ausgeführten Schluss beliebig oft wiederholen kann. Also sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_k^{(\nu)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) + \\ + B_k[x, f_1^{(\nu-1)}(x, c_1, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(\nu-1)}(x, c_1, \ldots, c_n)] \end{aligned} \tag{14}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und durch die Forderung, dass die Differenzen

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

im Falle $|\lambda| > 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ regulär sein und die Funktionen $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ die Gleichungen

$$f_k^{(\nu)}(x+\omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

befriedigen sollen, die Funktionen

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

der Reihe nach eindeutig bestimmt und es bestehen die Ungleichungen

$$|f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq M_\nu \tag{50}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$|f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq M + M_\nu \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{51}$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (37) und (50) folgt aber

$$|f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq U \tag{25}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

womit die zu Beginn dieses Paragraphen ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Ebenso folgt aus (51) für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

$$|f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq M + U \tag{52}$$

und

$$|f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq F. \tag{53}$$

Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir noch eine bemerkenswerte Eigenschaft der Funktionen $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ feststellen. Ist

$$B_k[x, f_1^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_2^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] =$$
$$= \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha}^{(\nu)}(c_1, c_2, \ldots, c_n)\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \tag{54}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

dann ist ja entsprechend Gl. (47)

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) + \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma}^{(\nu)}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{55}$$

Aus den Gleichungen (55) und aus der Tatsache, dass die durch die Gleichungen (27) gegebenen Entwicklungen der Funktionen $B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nach Potenzen von $f_1, f_2, \ldots, f_n$ keine von $f_1, f_2, \ldots, f_n$ freien und keine in $f_1, f_2, \ldots, f_n$ linearen Glieder enthalten, kann man nun unschwer die Richtigkeit der im nachfolgenden Absatze ausgesprochenen Behauptung einsehen.

Schreibt man

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = a_0^{(k,\nu)}(x) + \sum_{s=1}^{n} c_s a_s^{(k,\nu)}(x) + \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2}}^{\infty} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}^{(k,\nu)}(x)\, c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} \tag{56}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

dann ist zunächst identisch

$$a_0^{(k,\nu)}(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

und

$$a_s^{(k,\nu)}(x) = f_{ks}(x) \qquad (k, s = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Schreibt man daher

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}^{(k,\nu)}(x)\, c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} \tag{57}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

dann gelten weiter die Gleichungen

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}^{(k,\nu)}(x) = a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}^{(k, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - 1)}(x) \tag{58}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2;\ \nu \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - 1).$$

D. h. die Glieder der auf den rechten Seiten der Gleichungen (57) stehenden Entwicklungen der Funktionen $f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$, welche in den Variabeln $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vom μ-ten Grade sind, sind für einen bestimmten Wert des Index k und für alle Werte des Index ν, welche der Ungleichung $\nu \geqq \mu - 1$ genügen, die gleichen.

§ 4. **Beweis der Konvergenz der Funktionenfolgen** $f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $f_k^{(2)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $\ldots$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Aus den Gleichungen

$$f_k^{(\nu)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) +$$
$$+ B_k[x, f_1^{(\nu-1)}(x, c_1, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(\nu-1)}(x, c_1, \ldots, c_n)] \tag{14}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n;\ \nu=1, 2, 3, \ldots)$$

folgt

$$f_k^{(\nu)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(\nu-1)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\,[f_l^{(\nu)}(x, c_1, \ldots, c_n) - f_l^{(\nu-1)}(x, c_1, \ldots, c_n)] +$$
$$+ B_k[x, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}] - B_k[x, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}] \tag{59}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n;\ \nu=2, 3, \ldots).$$

Führt man die Bezeichnungsweise

$$T_{kl}[x, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}] = \tag{60}$$
$$= \frac{B_k[x, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_{l-1}^{(\nu-2)}, f_l^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}] - B_k[x, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_{l-1}^{(\nu-2)}, f_l^{(\nu-2)}, f_{l+1}^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}]}{f_l^{(\nu-1)} - f_l^{(\nu-2)}}$$
$$(k, l=1, 2, \ldots, n)$$

ein, dann kann man statt (59) auch schreiben

$$f_k^{(\nu)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(\nu-1)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\,[f_l^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_l^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} T_{kl}[x, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}]\,[f_l^{(\nu-1)} - f_l^{(\nu-2)}] \tag{61}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n;\ \nu=2, 3, \ldots).$$

Nun sind, wie aus (60) hervorgeht

$$T_{kl}[x, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}] \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n)$$

Funktionen der $2n+1$ Veränderlichen $x, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}$, welche in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |f_k^{(\nu-1)}| \leqq F, \quad |f_k^{(\nu-2)}| \leqq F \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in diesen Veränderlichen regulär sind und daselbst den Gleichungen

$$T_{kl}[x+\omega, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}] =$$
$$= T_{kl}[x, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_n^{[\nu-2)}] \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n)$$

und

$$T_{kl}(x, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots 0) = 0 \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Also kann man in diesem Bereiche die Funktionen

$$T_{kl}[x, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}] \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n)$$

folgendermassen nach Potenzen von $f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}$ entwickeln:

$$T_{kl}[x, f_1^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}, f_1^{(\nu-2)}, \ldots, f_n^{(\nu-2)}] =$$
$$= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\cdots+\beta_n \geqq 1} T_{kl\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_n}(x)\, [f_1^{(\nu-1)}]^{\alpha_1} \ldots [f_n^{(\nu-1)}]^{\alpha_n} [f_1^{(\nu-2)}]^{\beta_1} \ldots [f_n^{(\nu-2)}]^{\beta_n} \tag{62}$$
$$(k, l=1, 2, \ldots, n),$$

wo $T_{kl\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_n}(x)$ $(k, l=1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\cdots+\beta_n \geqq 1)$ Funktionen von x sind, welche in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ definierten Streifen regulär sind und die Periode ω besitzen.

Wir wollen nun in den auf den rechten Seiten der Gleichungen (62) stehenden Reihenentwicklungen jede der Funktionen $T_{kl\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_n}(x)$ durch den grössten absoluten Wert ersetzen, den die Funktionen

$$T_{kl\alpha_1\ldots\alpha_n\beta_1\ldots\beta_n}(x) \quad (k, l=1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n,\ \beta_1, \ldots, \beta_n \text{ fest})$$

für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ annehmen und wollen sodann $f_1^{(\nu-1)} = f_2^{(\nu-1)} = \cdots = f_n^{(\nu-1)} = f_1^{(\nu-2)} = \cdots = f_n^{(\nu-2)} = f$ setzen. Wir erhalten dann eine Potenzreihe in f von der Form

$$T(f) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} T_\alpha f^\alpha. \tag{63}$$

Wie man mit Hilfe einer Überlegung, welche dem früher bei der Bildung der Funktion $B(f)$ angewandten Schlusse analog ist, zeigen kann, ist diese Potenzreihe für $|f| \leqq F$ konvergent und stellt eine Funktion $T(f)$ von f dar, welche in dem durch diese Ungleichung definierten Bereiche der Variabeln f regulär ist. Ferner nimmt $T(f)$ für positives reelles f reelle, nicht negative Werte an. Wenn wir daher, wie wir es tun wollen, die Bezeichnungsweise

$$n\,T(M+U) = \tau \tag{64}$$

einführen, dann ist τ eine nicht negative reelle Zahl.

Da die Funktionen

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

von $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ im Falle $|\lambda| > 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche regulär sind, so gilt dasselbe auch von den Differenzen

$$[f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] - [f_k^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

d. h. von den Funktionen

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wenn ν eine bestimmte positive ganze Zahl ist, dann wollen wir den grössten absoluten Wert, den die Funktionen

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

annehmen, mit N_ν bezeichnen. Dann folgt aus der Ungleichung (52) und aus den Gleichungen (61) und (64) mit Hilfe von Satz 5 für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

das Bestehen der Ungleichungen

$$|f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)| \leqq \varkappa \tau N_{\nu-1} \tag{65}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 2, 3, \ldots)$$

und daher auch der Ungleichungen

$$N_\nu \leqq \varkappa \tau N_{\nu-1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{66}$$

Wir wollen nun die positive reelle Zahl M ausser den bisherigen Bedingungen auch noch der Einschränkung unterwerfen, dass für positives reelles $v \leqq M$

$$\varkappa n T[v + U(v)] < 1$$

ist. Das ist möglich, weil $T(0) = 0$ ist. Es wird dann auch

$$\varkappa \tau = \varkappa n T[M + U(M)] < 1.$$

Versteht man hierauf wie bisher unter C eine positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left| \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) \right| \leqq M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, dann haben somit die Reihen

$$f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) + [f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] +$$
$$+ [f_k^{(2)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] + \cdots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

von den zweiten Gliedern angefangen die konvergente Majorante

$$N_1 + \varkappa\tau N_1 + (\varkappa\tau)^2 N_1 + \cdots.$$

Also sind diese Reihen in dem durch die obigen Ungleichungen definierten Bereiche absolut und gleichmässig konvergent. Daraus folgt zunächst, dass für $k = 1, 2, \ldots, n$ $\lim\limits_{\nu=\infty} f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ existiert, wenn die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw.

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind und x nicht gerade mit einem Pole einer der Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ zusammenfällt. Setzt man daher

$$\lim_{\nu=\infty} f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{67}$$

dann kann man aus dem Umstande, dass die Glieder der Reihen

$$[f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] +$$
$$+ [f_k^{(2)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] + \cdots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

regulär sind, schliessen, dass dasselbe auch von den Summen dieser Reihen, nämlich von den Funktionen

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f_k^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{gilt.}$$

Geht man mit den Gleichungen

$$f_k^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) + \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}^{(k,\nu)}(x)\, c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} \tag{57}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n; \; \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

zur Grenze $\nu = \infty$ über, dann kann man wegen der gleichmässigen Konvergenz des auf der linken Seite vorgenommenen Grenzprozesses für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 \left| \lambda \right|, \quad \left| c_s \right| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 \left| \lambda \right| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad \left| c_s \right| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

auf der rechten Seite die vorgenommene Summation mit diesem Grenzübergang vertauschen und es wird wegen (58)

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) + \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2} a^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x)\, c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} \tag{68}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo

$$a^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x) = a^{(k,\, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-1)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x) \tag{69}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2) \quad \text{ist.}$$

Geht man nun auch mit den Gleichungen

$$f_k^{(\nu)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) +$$

$$+ B_k\left[x, f_1^{(\nu-1)}(x, c_1, \ldots, c_n), \ldots, f_n^{(\nu-1)}(x, c_1, \ldots, c_n)\right] \tag{14}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

zur Grenze $\nu = \infty$ über, dann erkennt man, dass die Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in der Tat den drei in Satz 1 gestellten Anforderungen genügen, dass nämlich im Falle $|\lambda| > 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 \left| \lambda \right|, \quad \left| c_s \right| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \left| \lambda \right| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad \left| c_s \right| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$

1.) die Funktionen dieser Variabeln

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

regulär sind und

2.) die Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Gleichungen $f_k(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0$ und $f_k(x + \omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ befriedigen und

3.) dem Differenzengleichungensystem

$$f_k(x + h, c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= Q_k[x, f_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] \qquad (12)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen.

Aus den Gleichungen (68) folgt endlich, dass die Funktionen

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

in dem oben definierten Bereiche auch den Gleichungen

$$\left\{\frac{\partial\,[f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)]}{\partial c_s}\right\}_{\substack{c_1=0\\ c_2=0\\ \cdots\\ c_n=0}} = f_{ks}(x) \qquad (k, s = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, wie es Satz 1 verlangt. Nun verschwindet die Determinante $|f_{ks}(x)|$ nicht identisch, weil die Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x + h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (9)$$

bilden. Also besteht zwischen den Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in diesem Bereiche keine Relation von der Gestalt

$$G[x, f_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad f_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \quad f_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] = 0 \qquad (13)$$

identisch in $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Ist umgekehrt ein System von Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ gegeben, welche so beschaffen sind, dass eine positive reelle Zahl C existiert, so dass in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

bzw. in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ die Funktionen

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

den unter 1.), 2.) und 3.) ausgesprochenen Bedingungen genügen, dann muss eine für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

konvergente Entwicklung von der Gestalt

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) + \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 1}}^{\infty} a^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x)\, c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} \tag{70}$$

$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

bestehen, wo die Funktionen

$$a^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 1)$$

von x für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ bzw. für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ regulär sind und die Periode ω besitzen. Nun kann es aber höchstens ein solches System von Funktionen

$$a^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 1)$$

von der Beschaffenheit geben, dass die auf den rechten Seiten der Gleichungen (70) stehenden Potenzreihen in $c_1, c_2, \ldots, c_n$ für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. für

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

konvergieren und die sodann durch diese Gleichungen definierten Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dem Differenzengleichungensystem (12) genügen.

Ist nämlich ein solches System von Funktionen $a^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 1)$ gegeben, welche den eben ausgesprochenen Bedingungen genügen, dann müssen diese Funktionen, wie man mit Hilfe der Gleichungen

$$B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} G^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{27}$$

und

$$Q_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l + B_k(x, f_1, f_2, \ldots, f_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

erkennt, zunächst den Gleichungen

$$\begin{gathered} a^{(k)}_{100\ldots0}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, a^{(l)}_{100\ldots0}(x), \quad a^{(k)}_{010\ldots0}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, a^{(l)}_{010\ldots0}(x), \ldots \\ \ldots, a^{(k)}_{000\ldots01}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, a^{(l)}_{000\ldots01}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{71}$$

genügen. Aus dem Bestehen der Gleichungen (71) folgt aber, dass die Funktionen

$$a^{(k)}_{100\ldots0}(x), \quad a^{(k)}_{010\ldots0}(x), \ldots, a^{(k)}_{000\ldots01}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

nicht nur für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda| \quad \text{bzw. für} \quad \varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2,$$

sondern sogar für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R |\lambda| \quad \text{bzw. für} \quad \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$$

regulär sind und die Periode ω besitzen. Weil wir aber voraussetzen, dass die Determinante $|q_{kl0} - \delta_{kl} \lambda^{\alpha}|$ für keinen ganzzahligen Wert von α verschwindet, folgt mit Hilfe von Satz 3, dass die Funktionen

$$a^{(k)}_{100\ldots0}(x), \quad a^{(k)}_{010\ldots0}(x), \ldots, a^{(k)}_{000\ldots01}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

identisch verschwinden.

Wir können daher statt der Gleichungen (70) auch schreiben:

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x) + \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2} a^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x)\, c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_n^{\alpha_n} \tag{68}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Man kann nun mit Hilfe der Gleichungen (27), (11) und (12) weiter schliessen, dass die Funktionen von x $a^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2)$ Gleichungen von folgender Gestalt genügen müssen:

$$a^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x + h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, a^{(l)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) + \\ + H^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}[G^{(l)}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}(x), f_{ls}(x), a^{(l)}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n}(x)] \tag{72}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2).$$

Hier bedeuten

$$H^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}[G^{(l)}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}(x), f_{ls}(x), a^{(l)}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n}(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2)$$

ganze rationale Funktionen derjenigen Koeffizienten $G^{(l)}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}(x)$, deren untere Indices der Ungleichung $2 \leqq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ genügen, der Funktionen $f_{ls}(x)$ $(l, s = 1, 2, \ldots, n)$ und derjenigen Funktionen $a^{(l)}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n}(x)$, deren untere Indices der Ungleichung $2 \leqq \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ genügen. Nach dieser Definition der Ausdrücke

$$H^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}[G^{(l)}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}(x), f_{ls}(x), a^{(l)}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n}(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2)$$

folgt aber vermöge Satz 4, dass Funktionen

$$a^{(k)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \geqq 2),$$

welche für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda| \quad \text{bzw. für} \quad \varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$$

regulär sind und die Periode ω besitzen, durch die Gleichungen (72) der Reihe nach eindeutig bestimmt sind.

Also kann es nicht zwei verschiedene Systeme von Funktionen

$$f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

geben, welche den Bedingungen 1.), 2.) und 3.) genügen. Ist daher ein System von Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gegeben, welche den Bedingungen 1.), 2.) und 3.) genügen, dann müssen diese Funktionen mit denjenigen Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zusammenfallen, welche durch den durch die Gleichungen (14) definierten Grenzübergang erklärt sind.

§ 5. **Betrachtung des Falles, dass die Determinante $|q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^\alpha|$ für ganzzahlige Werte von α verschwindet.** Um auch die Richtigkeit derjenigen in Satz 1 ausgesprochenen Behauptungen einzusehen, denen nicht die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass für ganzzahliges α $|q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^\alpha|$ von Null verschieden sei, werden wir folgendermassen verfahren. Es sei ε eine von Null verschiedene Zahl von der Beschaffenheit, dass für ganzzahliges α $|q_{kl0} - \delta_{kl}\varepsilon\lambda^\alpha|$ von Null verschieden ist; eine solche Zahl ε anzugeben, ist stets in mannigfach verschiedener Weise möglich. Hierauf sei $\varphi(x)$ eine nicht identisch verschwindende, meromorphe Funktion, welche der Differenzengleichung

$$\varphi(x+h) = \varepsilon\varphi(x) \tag{73}$$

genügt und die Periode ω besitzt. Die Existenz einer solchen Funktion $\varphi(x)$ folgt aus Satz 2. Nun wollen wir durch die Transformation

$$f(x) = \varphi(x)\bar{f}_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{74}$$

an Stelle der unbekannten Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ neue unbekannte Funktionen $\bar{f}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ einführen. Durch die Transformation (74) geht das Differenzengleichungensystem

$$f_k(x+h) = Q_k[x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

in das Differenzengleichungensystem

$$\varepsilon\bar{f}_k(x+h) = \bar{Q}_k[x, \bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x), \ldots, \bar{f}_n(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{75}$$

über. Dabei ist

$$\bar{Q}_k(x, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\bar{f}_l + \bar{B}_k(x, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{76}$$

$$\bar{B}_k(x, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n) = \frac{B_k[x, \varphi(x)\bar{f}_1, \varphi(x)\bar{f}_2, \ldots, \varphi(x)\bar{f}_n]}{\varphi(x)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{77}$$

Nun mögen wieder die Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ im Falle $|\lambda| > 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene meromorph sein, die Periode ω besitzen und ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

bilden. In dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ definierten Streifen mögen die Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ keine Pole besitzen. Hierauf seien $\bar{\varrho}_1$ und $\bar{\varrho}_2$ positive reelle Zahlen, welche den Ungleichungen $\bar{\varrho}_1 \leqq r$, $\varrho_1 \leqq \bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho}_2 \leqq \varrho_2$ genügen und so beschaffen sind, dass die Funktion $\varphi(x)$ in dem durch die Ungleichung $\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2$ definierten Streifen weder Nullstellen noch Pole besitzt.[1] Dann stellen die Ausdrücke $\frac{f_{ks}(x)}{\varphi(x)}$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von x dar, welche im Falle $|\lambda| > 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene meromorph sind, die Periode ω besitzen und ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen

$$\varepsilon f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) \bar{f}_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{78}$$

bilden; in dem durch die Ungleichung $\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2$ definierten Streifen insbesondere sind die Funktionen $\frac{f_{ks}(x)}{\varphi(x)}$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ regulär. Nun hat die der Matrix $\{q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^{\alpha}\}$ in dem Differenzengleichungensystem (75) entsprechende Matrix die Form $\left\{\frac{q_{kl0}}{\varepsilon} - \delta_{kl}\lambda^{\alpha}\right\}$; die Determinante dieser Matrix

---

[1] Wenn $\varrho_1 = r$ ist, was wir im Falle $|\lambda| > 1$ ja zulassen, dann folgt aus den Ungleichungen $\varrho_1 \leqq \bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho}_2 \leqq \varrho_2$, $\bar{\varrho}_1 \leqq r$ die Gleichung $\bar{\varrho}_1 = r$. Man muss daher in diesem Falle an die Funktion $\varphi(x)$ noch die leicht zu erfüllenste Anforderung stellen, dass sie auf der durch die Gleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = r$ definierten Geraden weder Nullstellen noch Pole besitzen soll.

$$\left|\frac{q_{kl0}}{\varepsilon} - \delta_{kl}\lambda^{\alpha}\right| = \frac{1}{\varepsilon^n}\left|q_{kl0} - \delta_{kl}\varepsilon\lambda^{\alpha}\right|$$

verschwindet aber für keinen ganzzahligen Wert von α. Versteht man anderseits unter Φ den grössten absoluten Wert, den die Funktion $\varphi(x)$ für $\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2$ annimmt, dann sind, wie aus (77) folgt, die Funktionen $\bar{B}_k(x, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in dem durch die Ungleichungen

$$\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2, \ |\bar{f}_k| \leqq \frac{F}{\Phi} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche ihrer Argumente regulär und besitzen in Bezug auf x die Periode ω.

Daher folgt aus denjenigen in Satz 1 ausgesprochenen Behauptungen, welche bereits in den §§ 3 und 4 bewiesen wurden, dass es genau ein System von Funktionen $\bar{f}_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ der $n + 1$ Veränderlichen $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ gibt, welche so beschaffen sind, dass eine positive reelle Zahl C so angenommen werden kann, dass im Falle $|\lambda| > 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2|\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\bar{\varrho}_1|\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$

1.) die Funktionen dieser Variabeln

$$\bar{f}_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - \sum_{s=1}^{n} c_s \frac{f_{ks}(x)}{\varphi(x)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

regulär sind und

2.) die Funktionen $\bar{f}_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Gleichungen $\bar{f}_k(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und $\bar{f}_k(x + \omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \bar{f}_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ befriedigen und

3.) dem Differenzengleichungensystem

$$\varepsilon \bar{f}_k(x + h, c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= \bar{Q}_k[x; \bar{f}_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \bar{f}_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \bar{f}_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] \tag{79}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen; weiter folgt, dass diese Funktionen $\bar{f}_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial c_s}\right)_{\substack{c_1=0\\ c_2=0\\ \cdots\\ c_n=0}} = \frac{f_{ks}(x)}{\varphi(x)} \qquad (k, s = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen und dass daher zwischen diesen Funktionen keine Relation von der Gestalt

$$\bar{G}[x, \bar{f}_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad \bar{f}_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \quad \bar{f}_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] = 0 \tag{80}$$

besteht. Setzt man nun

$$\varphi(x)\bar{f}_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{81}$$

dann sind im Falle $|\lambda| > 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\bar{\varrho}_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \bar{\varrho}_2 |\lambda|, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ in dem durch die Ungleichungen

$$\bar{\varrho}_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \bar{\varrho}_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den $n + 1$ Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$

1.) die Funktionen dieser Variabeln

$$\frac{f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - \sum_{s=1}^{n} c_s f_{ks}(x)}{\varphi(x)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

regulär;

2.) befriedigen die Funktionen $f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Gleichungen $f_k(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$,

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial c_s}\right)_{\substack{c_1=0\\ c_2=0\\ \cdots\\ c_n=0}} = f_{ks}(x) \qquad (k, s = 1, 2, \ldots, n)$$

und $f_k(x + \omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f_k(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und genügen

3.) dem Differenzengleichungensystem

$$f_k(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= Q_k[x, f_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad f_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] \tag{12}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n);$$

4.) besteht zwischen diesen Funktionen keine Relation von der Gestalt

$$G[x, f_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad f_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \quad f_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] = 0. \tag{13}$$

Dass auch diese letztere Behauptung zutrifft, lässt sich leicht indirekt beweisen. Das Bestehen einer Relation von der Form (13) hätte nämlich das Bestehen der Relation

$$\bar{G}[x, \bar{f}_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad \bar{f}_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \ldots, \bar{f}_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)] = 0 \tag{80}$$

zur Folge, wo

$$\bar{G}(x, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n) = G[x, \varphi(x)\bar{f}_1, \varphi(x)\bar{f}_2, \ldots, \varphi(x)\bar{f}_n) \tag{82}$$

ist. — Hiemit sind alle in Satz 1 aufgestellten Behauptungen bewiesen.

§ 6. **Übertragung der bisherigen Ergebnisse auf den Fall einer einzigen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion.** Die Auflösung einer Differenzengleichung n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion von der Form

$$f(x+nh) = P\{x, f(x), f(x+h), \ldots, f[x+(n-1)h]\} \tag{83}$$

kann man darauf zurückführen, dass man das System von Differenzengleichungen erster Ordnung in den n unbekannten Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$

$$f_1(x+h) = f_2(x), f_2(x+h) = f_3(x), \ldots, f_n(x+h) = P[x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \tag{84}$$

auflöst und dann $f_1(x) = f(x)$ setzt. Es kann daher aus jedem Satze über Differenzengleichungensysteme erster Ordnung von der Form

$$f_k(x+h) = Q_k[x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

ein Satz über Differenzengleichungen mit einer unbekannten Funktion von der Form (83) abgeleitet werden. In diesem Sinne wollen wir nachstehend unseren

Satz I in der Form eines Satzes über Differenzengleichungen n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion aussprechen.

Satz 7. *Es sei R eine positive reelle Zahl und hierauf seien $p_l(x)$ $(l=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ Funktionen von x, welche in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R$ definierten Halbebene regulär sind und sich daselbst durch Reihenentwicklungen von der Form*

$$p_l(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} p_{l\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (l=0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

darstellen lassen; unter $p_n(x)$ werde die Konstante Eins verstanden; ferner sei $p_{n0}=1$, $p_{n\alpha}=0$ $(\alpha=1, 2, 3, \ldots)$, so dass man zusammenfassend schreiben kann

$$p_l(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} p_{l\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (l=0, 1, 2, \ldots, n). \tag{85}$$

Hiebei sei die Konstante p_{00} von Null verschieden und es sei r eine der Ungleichung $r \leqq R$ genügende positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ $p_0(x)$ von Null verschieden ist. Hierauf seien $f_s(x)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ (veränderte Bedeutung des Index!) *Funktionen von x, welche im Falle $|\lambda| > 1$ für*

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda|^n \quad \textit{und im Falle } |\lambda| < 1 \textit{ für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$$

meromorph sind, die Periode ω besitzen und ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x)\, f(x+lh) = 0 \tag{86}$$

bilden. Weiter seien ϱ_1 und ϱ_2 positive reelle Zahlen, welche im Falle $|\lambda| > 1$ den Ungleichungen $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 \leqq r$ und im Falle $|\lambda| < 1$ der Ungleichung $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ genügen und so beschaffen sind, dass die Funktionen $f_s(x)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ keine Pole besitzen, und F eine beliebige positive reelle Zahl. Endlich sei $A\{x, f(x), f(x+h), \ldots, f[x+(n-1)h]\}$ eine Funktion der $n+1$ Veränderlichen x, $f(x)$, $f(x+h)$, $\ldots$, $f[x+(n-1)h]$, die in dem durch die Ungleichungen

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2, \quad |f(x)| \leqq F, \quad |f(x+h)| \leqq F, \ldots, |f[x+(n-1)h]| \leqq F$$

definierten Bereiche in diesen Variabeln regulär ist und daselbst durch eine Entwicklung von der Form

$$A\{x, f(x), f(x+h), \ldots, f[x+(n-1)h]\} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \geqq 2}}^{\infty} \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha} [f(x)]^{\alpha_1} [f(x+h)]^{\alpha_2} \ldots \{f[x+(n-1)h]\}^{\alpha_n} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \tag{87}$$

dargestellt werden kann, und es sei

$$P\{x, f(x), f(x+h), \ldots, f[x+(n-1)h]\} =$$

$$= -\sum_{l=0}^{n-1} p_l(x) f(x+lh) + A\{x, f(x), f(x+h), \ldots, f[x+(n-1)h]\}. \tag{88}$$

Dann kann man stets in mannigfach verschiedener Weise eine Funktion $f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *der unabhängigen Veränderlichen* x *und von* n *Parametern* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *von der Beschaffenheit angeben, dass ein Paar positiver reeller Zahlen* $\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2$, *welche den Ungleichungen* $\varrho_1 \leqq \bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho}_2 \leqq \varrho_2$, $\bar{\varrho}_1 \leqq r$ *genügen, eine Funktion* $\varphi(x)$ *von* x *allein, welche in der ganzen Ebene meromorph ist und in dem durch die Ungleichung* $\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2$ *definierten Streifen weder Nullstellen noch Pole besitzt, und eine positive reelle Zahl* C *existieren, so dass im Falle* $|\lambda| > 1$ *in dem durch die Ungleichungen*

$$\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2 |\lambda|^n, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ *in dem durch die Ungleichungen*

$$\bar{\varrho}_1 |\lambda|^n \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den $n+1$ *Variabeln* $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$

1.) *die Funktion dieser Variabeln*

$$\frac{f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - \sum_{s=1}^{n} c_s f_s(x)}{\varphi(x)} \quad \textit{regulär ist;}$$

2.) *die Funktion* $f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *die Gleichungen* $f(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0$,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial c_s}\right)_{\substack{c_1=0\\c_2=0\\\cdots\\c_n=0}} = f_s(x) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und $f(x+\omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *identisch befriedigt und*

3.) *der Differenzengleichung*

$$f(x+nh, c_1, c_2, \ldots, c_n) = P\{x, f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ f(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f[x+(n-1)h, c_1, c_2, \ldots, c_n]\} \tag{89}$$

genügt;

4.) *keine Relation von der Gestalt*

$$G\{x, f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \; f(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \\ f[x+(n-1)h, c_1, c_2, \ldots, c_n]\} = 0 \tag{90}$$

identisch in $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ *besteht.*

Wenn insbesondere der Ausdruck $\sum_{l=0}^{n} p_{l0}\, \lambda^{\alpha l}$ *für keinen ganzzahligen Wert von* α *verschwindet, dann gibt es eine und nur eine Funktion* $f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *der* $n+1$ *Veränderlichen* $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ *von der Beschaffenheit, dass eine positive reelle Zahl* C *existiert, so dass im Falle* $|\lambda| > 1$ *in dem durch die Ungleichungen*

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|^n, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ *in dem durch die Ungleichungen*

$$\varrho_1 |\lambda|^n \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$

1.) *die Funktion dieser Variabeln*

$$f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - \sum_{s=1}^{n} c_s f_s(x)$$

regulär ist und

2.) *die Funktion* $f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *die Gleichungen* $f(x, 0, 0, \ldots, 0) = 0$ *und* $f(x+\omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *befriedigt und*

3.) *der Differenzengleichung (89) genügt.*

Diese Funktion $f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *befriedigt dann auch die Gleichungen*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial c_s}\right)_{\substack{c_1=0\\c_2=0\\\cdots\\c_n=0}} = f_s(x) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

und liefert daher keine Relation von der Gestalt

$$G\{x, f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f[x+(n-1)h, c_1, c_2, \ldots, c_n]\} = 0. \tag{90}$$

Setzt man nämlich in diesem Falle $\sum_{s=1}^{n} c_s f_s(x) = f^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *und versteht unter* C *eine hinreichend kleine positive reelle Zahl, dann sind durch die Differenzengleichungen*

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f^{(\nu)}(x+lh, c_1, c_2, \ldots, c_n) = A\{x, f^{(\nu-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), f^{(\nu-1)}(x+h, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, f^{(\nu-1)}[x+(n-1)h, c_1, c_2, \ldots, c_n]\} \tag{91}$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und durch die Forderung, dass die Differenzen

$$f^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) - f^{(0)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

im Falle $|\lambda| > 1$ *in dem durch die Ungleichungen*

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|^n, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in den Variabeln $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *in dem durch die Ungleichungen*

$$\varrho_1 |\lambda|^n \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereiche in denselben Variabeln regulär sein und die Funktionen $f^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *die Gleichungen*

$$f^{(\nu)}(x+\omega, c_1, c_2, \ldots, c_n) = f^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

befriedigen sollen, die Funktionen $f^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *eindeutig bestimmt und die so erhaltene Funktionenfolge* $f^{(\nu)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $(\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ *konvergiert für alle* $x, c_1, c_2, \ldots, c_\nu$, *welche den Ungleichungen*

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|^n, \quad |c_s| \leqq C, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

bzw. den Ungleichungen

$$\varrho_1 |\lambda|^n \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2, \quad |c_s| \leqq C \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, *welche die Bedingungen 1.), 2.) und 3.) erfüllt.*