NOTE SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE

PAR

S. PINCHERLE

À BOLOGNE.

1. Soient $A(z)$, $\varphi(z)$ deux séries de LAURENT, la première convergente dans l'anneau circulaire, que j'indiquerai par $(|p^2|, 1)$, compris entre deux circonférences ayant le centre à l'origine et les rayons $|p^2|$ et 1 respectivement, et $|p| < 1$; la seconde convergente dans l'anneau circulaire (R, R_1). Je considère l'intégrale

$$(1) \qquad I(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} A\left(\frac{x}{y}\right)\varphi(y)\frac{dy}{y},$$

prise le long d'une circonférence concentrique et interne à l'anneau (R, R_1) et de rayon ρ. Cette intégrale représente aussi une série de LAURENT, et si l'on pose

$$A(z) = a_0 + \sum_1^\infty \left(a_n z^n + \frac{a'_n}{z^n}\right),$$

et

$$\varphi(z) = c_0 + \sum_1^\infty \left(c_n z^n + \frac{c'_n}{z^n}\right)$$

il vient

$$(2) \qquad I(\varphi) = a_0 c_0 + \sum_1^\infty \left(a_n c_n x^n + \frac{a'_n c'_n}{x^n}\right).$$

Si l'on fixe $A\left(\frac{x}{y}\right)$, tandis que $\varphi(y)$ est une série de LAURENT quelconque, on peut regarder l'expression (1) comme un algorithme appliqué à *l'objet*

$\varphi(y)$, et dont le *résultat* est de même espèce que l'objet, c'est-à-dire une nouvelle série de LAURENT. Il est à remarquer que l'anneau de convergence de cette nouvelle série contient toujours l'anneau $(|p^2|\rho,\ \rho)$.

En spécialisant la forme de la fonction $A(z)$, on trouvera des relations plus ou moins remarquables entre la fonction objet et la fonction résultat. Je me propose de revenir plus en détail sur ce sujet dans un autre travail; pour le moment je me bornerai à un cas particulier qui me semble assez intéressant.

2. Soit

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_n = \frac{1}{1 - p^{2n}}, \qquad a'_n = \frac{1}{1 - p^{-2n}};$$

il vient

$$I(\varphi) = \frac{c_0}{2} + \sum_1^\infty \left(\frac{c_n x^n}{1 - p^{2n}} - \frac{c'_n p^{2n}}{(1 - p^{2n}) x^n}\right) = f(x), \tag{3}$$

et cette série est convergente dans l'anneau $(|p^2|R,\ R_1)$, qui contient $(|p^2|\rho,\ \rho)$. Il s'ensuit que la série $f(p^2 x)$ est convergente dans l'anneau $\left(R,\ \frac{R_1}{|p^2|}\right)$, et par conséquent la différence

$$\Delta f(x) = f(x) - f(p^2 x)$$

est une série de LAURENT convergente dans l'anneau commun $(R,\ R_1)$; et l'on trouve immédiatement que

$$\Delta f(x) = \varphi(x) - c_0. \tag{4}$$

Donc, l'opération $I(\varphi)$ donne, dans ce cas, l'intégrale de l'équation aux différences finies (4); en d'autres termes, si l'on pose

$$s(z) = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \left(\frac{z^n}{1 - p^{2n}} + \frac{z^{-n}}{1 - p^{-2n}}\right) \tag{5}$$

et que la fonction $f(y)$ soit donnée par une série de LAURENT dans l'anneau $(|p^2|R,\ R_1)$ qui comprend l'anneau $(|p^2|\rho,\ \rho)$, on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} [f(y) - f(p^2 y)]\, s\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y} = f(x). \tag{6}$$

Or cette formule peut s'étendre comme il suit au cas où $f(y)$ n'est plus régulière dans tout l'anneau $(|p^2|R,\ R_1)$, mais a un nombre quelconque de singularités dans l'anneau intérieur $(|p^2|\rho,\ \rho)$.

3. A cet effet, je remarque que la fonction $s(z)$, représentée par la formule (5) dans l'anneau circulaire $(|p^2|,\ 1)$, peut être définie dans tout le plan de la façon suivante:

Je pars de la fonction [1]

$$\eta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} p^{n^2} z^n$$

régulière dans tout le plan, excepté aux points $z = 0$ et $z = \infty$. Si l'on pose

$$s(z) = -z\frac{d}{dz}\log\{\sqrt{-z}\,\eta(-pz)\},$$

l'on trouve sans difficulté les propriétés suivantes pour la fonction $s(z)$:

a) $s(z)$ est représentée par la formule (5) dans l'anneau $(|p^2|,\ 1)$;

b) $s(z)$ est régulière pour tous les points du plan, excepté $z = 0$ et $z = \infty$, qui sont des points singuliers essentiels, et les points $z = p^{2n}$ qui sont des pôles du premier ordre avec les résidus respectifs $-p^{2n}$;

c) la fonction $s(z)$ satisfait aux équations fonctionnelles:

$$s(z) - s(p^2 z) = 1, \quad \text{ou} \quad \Delta s(z) = 1; \tag{7}$$

$$s\left(\frac{1}{z}\right) = -s(z). \tag{8}$$

Actuellement, je considère l'expression

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\rho)} s\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\frac{dy}{y} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(p^2\rho)} s\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\frac{dy}{y}$$

---

[1] Cette fonction joue dans la théorie des fonctions à période multiplicatoire, c'est à dire telles que $\varphi(p^2x) = \varphi(x)$, le même rôle que la fonction $\Theta(x)$ dans la théorie des fonctions doublement périodiques. Je remarque à cette occasion qu'on peut substituer avec avantage à l'étude de ces dernières fonctions celle des fonctions à période multiplicatoire, comme je l'ai déjà indiqué dans mon Mémoire *Sopra una classe importante di funzioni monodrome* publié en 1879 dans le Giornale de M. BATTAGLINI. M. RAUSENBERGER, sans avoir eu connaissance de mon travail, a eu la même idée qu'il a développée dans son intéressant ouvrage ***Lehrbuch der periodischen Functionen***, Leipzig 1884. J'emploie ici la notation $\eta(z)$ de M. RAUSENBERGER.

où $f(y)$ est une fonction donnée dans l'anneau $(|p^2|R, R_1)$ qui comprend $(|p^2|\rho, \rho)$. Je suppose que la fonction $f(y)$ n'ait, dans cet anneau, d'autres singularités que les points a_i intérieurs à $(|p^2|\rho, \rho)$, pour lesquels la fonction devient singulière respectivement comme les fonctions

$$G_i\left(\frac{1}{y-a_i}\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{i,\nu}}{(y-a_i)^\nu}, \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, m)$$

et où y est compris dans l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$.

L'expression I est égale, par le théorème de Cauchy, à la somme des résidus à l'intérieur de l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$, c'est-à-dire à la somme des résidus relatifs aux points a_i et au point $y=x$ où la fonction $s\left(\frac{y}{x}\right)$ est infinie, on a donc:

$$I=-f(x)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_{i,\nu+1}}{\underline{|\nu}}D_{a_i}\left[\frac{1}{a_i}s\left(\frac{a_i}{x}\right)\right].$$

D'autre part, on a, à cause de la relation (7):

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\rho)}s\left(\frac{y}{x}\right)[f(y)-f(p^2y)]\frac{dy}{y}+C$$

où l'on a posé

$$C=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(p^2\rho e^{i\theta})d\theta;$$

d'où, en égalant les deux expressions de I, et en tenant compte de la formule (8), il vient enfin:

$$(9)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\rho)}s\left(\frac{x}{y}\right)[f(y)-f(p^2y)]\frac{dy}{y}=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_{i,\nu+1}}{\underline{|\nu}}D_{a_i}^{\nu}\left[\frac{1}{a_i}s\left(\frac{x}{a_i}\right)\right]+C.$$

Cette formule donne l'extension de la formule (6) au cas où la fonction $f(x)$ admet des singularités en nombre fini dans l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$. La fonction du second membre est régulière dans tout l'anneau et peut par conséquent s'exprimer par une série de LAURENT; et si l'on indique cette fonction par $F(x)$, on a par la formule (7)

$$\Delta F(x) = \Delta f(x) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{i,\nu+1}}{\underline{|\nu}} D^{\nu}\left(\frac{1}{a_i}\right)$$

ou

$$(10) \qquad \Delta F(x) = \Delta f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} G_i\left(-\frac{1}{a_i}\right).$$

De sorte que si l'on pose

$$\Delta f(x) = \varphi(y),$$

on peut conclure de ce qui précède que l'opération $I(\varphi)$ donne pour résultat une intégrale, régulière dans tout l'anneau, de l'équation aux différences finies

$$\Delta F = \varphi(x) - \text{const.}$$

La constante est nulle si les points singuliers de la fonction $f(x)$ satisfont à la condition

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i} G_i\left(-\frac{1}{a_i}\right) = 0.$$

4. Si l'on a

$$\Delta f(x) = 0,$$

ce qui exige que la condition (11) soit satisfaite, la fonction $f(x)$ a une période multiplicatoire p^2 et la formule (9) devient

$$(12) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{i,\nu+1}}{\underline{|\nu}} D^{\nu}\left[\frac{1}{a_i} s\left(\frac{x}{a_i}\right)\right] - C,$$

qui donne l'expression analytique d'une fonction à période multiplicatoire qui a m points singuliers essentiels d'espèce donnée, à l'intérieur de chaque anneau élémentaire. Cette formule est analogue à celle donnée par M. APPELL (Acta Mathematica, T. 1, p. 138) et qui fait connaître l'expression analytique d'une fonction doublement périodique, ayant un nombre fini de points singuliers essentiels. On obtiendrait sans peine, d'une façon analogue, l'expression d'une fonction ayant un nombre infini de points singuliers, ou même un espace lacunaire, à l'intérieur de l'anneau $(|p^2|\rho, \rho)$. Si, en particulier, les points singuliers α_i se réduisent à des pôles de l'ordre r_i respectivement, la formule (12) devient

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{A_{i,1}}{\alpha_i} s\left(\frac{x}{\alpha_i}\right) + \frac{A_{i,2}}{1} D\left[\frac{1}{\alpha_i} s\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)\right] + \ldots + \frac{A_{i,r_i}}{\underline{|r_i - 1}} D^{(r_i-1)}\left[\frac{1}{\alpha_i} s\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)\right] \right\}$$

qui est, pour les fonctions à période multiplicatoire, ce qu'est la formule bien connue de M. HERMITE pour les fonctions doublement périodiques.