SUR UNE CLASSE DE FORMES DE DIFFÉRENTIELLES

ET SUR LA

THÉORIE DES SYSTÈMES D'ÉLÉMENTS[1]

PAR

G. KOENIGS

À PARIS.

1. On sait combien il est avantageux pour certaines recherches géométriques d'adopter comme élément générateur de l'espace, non plus le point, mais une courbe ou une surface dépendant d'un certain nombre de paramètres. Les cas où l'on adopte pour élément les droites ou bien les sphères de l'espace ont été particulièrement étudiés, à cause principalement des résultats remarquables auxquels ils conduisent dans la théorie générale des surfaces. La droite et la sphère dépendent de quatre paramètres u_1, u_2, u_3, u_4. Le contact de deux sphères infiniment voisines s'exprime par l'évanouissement d'une certaine forme quadratique des différentielles du_1, du_2, du_3, du_4, dont les coefficients, quoique contenant généralement u_1, u_2, u_3, u_4 peuvent cependant, par un choix convenable des variables, être amenés à être constants. Un fait tout pareil se rencontre lorsque l'on prend pour élément la droite, avec cette seule différence, que la notion de contact doit y être remplacée par une autre, à savoir *la rencontre de deux droites infiniment voisines.*

---

[1] Ces recherches ont été l'objet de deux notes présentées à l'Académie des sciences de Paris en Mars 1887.

Soit, dans l'un et l'autre de ces deux cas, $M(u\,|\,du)$ la forme quadratique, dont les coefficients dépendront généralement des u. Cette forme quadratique admet une forme adjointe que nous représenterons par

$$\mathfrak{M}(u\,|\,T),$$

et alors, toute fonction $\theta(u_1, u_2, u_3, u_4)$ donne lieu à un paramètre différentiel, qui possède la propriété d'invariance relativement à une transformation quelconque effectuée sur les paramètres u; cet invariant est la fonction

$$\mathfrak{M}\left(u\,\middle|\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right).$$

L'évanouissement de cet invariant exprime la condition nécessaire et suffisante pour que, si entre les quatre paramètres u on établit la relation $\theta = 0$, le complexe de droites ou de sphères défini par cette équation soit formé, dans le cas des droites, de droites tangentes à une surface ou rencontrant une courbe fixe, et, dans le cas des sphères, de sphères tangentes à une surface ou bien à une courbe.

2. L'objet de ce travail est d'étendre ces divers résultats au cas d'un élément quelconque. La condition de contact de deux éléments infiniment voisins, si ces éléments sont des surfaces, ou bien leur rencontre, si ces éléments sont des courbes, s'exprime par l'évanouissement d'une forme des $(n+1)$ différentielles des $(n+1)$ paramètres dont dépend l'élément. Cette forme *fondamentale* $M(u\,|\,du)$ n'est pas nécessairement quadratique, et ne dérive pas non plus nécessairement d'une forme à coefficients constants. Il s'en faut cependant qu'une forme de différentielles prise au hasard puisse toujours être considérée comme la forme fondamentale correspondant à un certain système d'éléments. Dès que le nombre des paramètres est supérieur à quatre, la forme $M(u\,|\,du)$ présente des particularités caractéristiques, en sorte qu'il y a lieu de poser d'abord le problème suivant: *Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes une forme de différentielles peut-elle être la forme fondamentale pour un élément convenablement choisi? Construire le type général de ces formes.*

Après avoir complétement résolu cette question, je passe à la question suivante qui en est le complément naturel:

Sachant qu'une forme $M(u\,|\,du)$ peut jouer le rôle de forme fondamen-

tale, trouver tous les systèmes d'éléments qui l'admettent en effet pour forme fondamentale.

Je résouds encore cette question et je parviens ainsi au théorème suivant:

Si deux systèmes d'éléments donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe une transformation de contact qui transforme l'un dans l'autre ces deux systèmes d'éléments.

Par exemple, la forme $du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2$ est fondamentale pour la droite et pour la sphère prise pour éléments. Il doit donc exister une transformation de contact transformant la géométrie de la droite dans celle de la sphère. Il y a longtemps que M[r] S. Lie a découvert une telle transformation.

Si l'on dit de tous les systèmes d'éléments transformables les uns dans les autres par des transformations de contact, qu'ils forment un groupe, de même que l'on dit que des formes de différentielles forment un groupe lorsqu'elles sont transformables les unes dans les autres par un simple changement de variables, on voit qu'à tout groupe d'éléments correspond un groupe de formes et inversement, sous la réserve que ces formes vérifient les conditions auxquelles sont assujetties les formes fondamentales. Il y a lieu alors de distinguer les groupes d'éléments en deux classes. A la première appartiendront les groupes qui ne contiennent que des systèmes d'éléments-surfaces, et aucun système d'éléments-courbes; à la seconde classe appartiendront les groupes qui contiennent un système d'éléments-courbes, auquel cas il y a évidemment dans le groupe une infinité de pareils systèmes. Le groupe qui comprend les sphères de l'espace est, par exemple, de la seconde classe, puisque le système des droites de l'espace fait, d'après Lie, partie de ce même groupe.

Après avoir donné le caractère distinctif des formes principales des groupes de la seconde classe, je traite deux cas particuliers, celui où la forme fondamentale est quadratique, et celui où ses coefficients sont constants, pour lesquels la solution est immédiate. Je démontre à ce sujet un théorème général, qui me paraît devoir conduire à l'étude plus générale des formes fondamentales de degré donné. Il semble résulter de ce théorème que le degré de la forme limite nécessairement le nombre des paramètres dont peut dépendre l'élément. Ainsi lorsque la forme est quadratique le nombre des paramètres ne peut être plus élevé que 4.

Etude du cas où l'élément est une surface.

3. Supposons que l'on ait pris pour élément une surface dépendant de $(n+1)$ paramètres, et dont l'équation sera en coordonnées rectilignes, x, y, z:

$$z = \varphi(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = \varphi(x, y \,|\, u); \tag{1}$$

posons aussi

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

et θ étant une fonction quelconque des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$, convenons de représenter par $\boxed{\theta, t}$ l'expression

$$\boxed{\theta, t} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} t_1 + \frac{\partial \theta}{\partial u_2} t_2 + \ldots + \frac{\partial \theta}{\partial u_{n+1}} t_{n+1},$$

où les t_i sont des quantités quelconques.

En exprimant que la surface (u) et la surface infiniment voisine $(u + du)$ se touchent au point x, y, z, on trouve les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\varphi, du} = 0 \\ \boxed{p, du} = 0 \\ \boxed{q, du} = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

En éliminant x, y entre ces équations, on trouve une forme homogène des différentielles du, dont les coefficients dépendent des u. Je désigne par $M(u \,|\, du)$ cette forme, qui n'est définie qu'à un facteur près, indépendant des différentielles.

Au lieu des du introduisons des quantités finies $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$, et considérons la forme

$$M(u \,|\, t)$$

qui proviendra de l'élimination de x, y entre les équations

$$\boxed{\varphi, t} = 0$$
$$\boxed{p, t} = 0$$
$$\boxed{q, t} = 0.$$

Ces équations peuvent encore s'écrire,

$$
(3) \qquad \left|\begin{array}{l}
\boxed{\varphi\,,\,t} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial x}\boxed{\varphi\,,\,t} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y}\boxed{\varphi\,,\,t} = 0.
\end{array}\right.
$$

4. Pour interpréter ces équations nous ferons usage de la considération des espaces à plusieurs dimensions. Les quantités u seront regardées comme constantes, et les t seront les coordonnées linéaires homogènes d'un point d'un espace à n dimensions. Une équation homogène entre les t définit un espace à $(n - 1)$ dimensions, que l'on peut appeler une surface et que je représenterai par le symbole E^{μ}_{n-1}, où μ est le degré de l'équation qui lie les coordonnées t d'un point quelconque de cet espace. Si en particulier $\mu = 1$, l'équation est linéaire et l'on a un espace linéaire à $(n - 1)$ dimensions E^1_{n-1}, que l'on peut appeler un plan. Deux équations linéaires représentent un espace linéaire à $(n - 2)$ dimensions, que je représenterai par E^1_{n-2}; plus généralement, k équations linéaires homogènes entre les t définissent un espace linéaire à $(n - k)$ dimensions, E^1_{n-k}. Un point unique peut être regardé comme un espace linéaire de 0 dimensions E^1_0. Je laisse de côté les espaces E^{μ}_{n-k} à $(n - k)$ dimensions et non linéaires (du degré μ) dont la considération ne nous sera pas utile.

Si l'on se reporte à l'espace ordinaire à trois dimensions, on sait que les surfaces E^{μ}_2 de cet espace se divisent en deux catégories. Pour les surfaces d'une catégorie, les plans tangents sont doublement indéterminés, comme le point de contact; mais pour les surfaces de la seconde catégorie, dites développables, le plan tangent ne dépend que d'un seul paramètre, il est simplement indéterminé, et il est le même pour tous les points d'un même espace linéaire à une dimension E^1_1 (génératrice de contact). Des faits tout pareils se retrouvent dans le cas d'un espace quelconque, mais avec plus de variété.

Il y a, en effet, dans l'espace à n dimensions $(n - 1)$ catégories de surfaces. Pour les unes le plan tangent dépend de $(n - 1)$ paramètres, comme le point de contact; c'est le cas général. Mais pour d'autres le plan tangent dépend de $(n-2)$, $(n-3)$, ... de 2 ou même seulement d'un seul paramètre. Il est facile de se rendre compte de la génération de ces surfaces. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de celles dont le plan tangent dépend de $(n-k)$ paramètres; on écrira l'équation

$$\text{(e)} \qquad \theta = T_1 t_1 + T_2 t_2 + \ldots + T_n t_n + T_{n+1} t_{n+1} = 0$$

où les T_i dépendent de $(n-k)$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$, et l'on cherchera l'enveloppe de ce plan, en éliminant les $(n-k)$ quantités α_i entre les $(n-k+1)$ équations

$$\text{(e')} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_{n-k}} = 0, \qquad \theta = 0.$$

On obtiendra ainsi la surface la plus générale dont le plan tangent dépend de $(n-k)$ paramètres, et l'on aperçoit tout de suite que le plan tangent est le même dans tous les points de l'espace à $k-1$ dimensions E^1_{k-1} représenté par les $n-k+1$ équations (e'). Donc, lorsqu'une surface E^μ_{n-1} est telle que ses plans tangents soient $(n-k)$ fois indéterminés, elle est le lieu d'un espace linéaire E^1_{k-1} à $k-1$ dimensions, en tous les points duquel le plan tangent est le même.

On voit que lorsque l'on parle de surface dans l'espace à n dimensions, il y a lieu d'apporter une indication spéciale portant sur l'indétermination du plan tangent. Par exemple $E^\mu_{n-1,\,n-k}$ représentera un espace d'ordre μ à $(n-1)$ dimensions dont le plan tangent est $(n-k)$ fois indéterminé.

5. Revenons maintenant aux équations (3). L'élimination est celle que l'on effectuerait pour trouver la surface $E^\mu_{n-1,2}$ enveloppe du plan à 2 paramètres x, y représenté par l'équation

$$\boxed{\varphi, t} = 0,$$

qui est linéaire par rapport aux coordonnées t.

Il suit de là que:

Dans l'espace à n dimensions dont les t sont les coordonnées ponctuelles linéaires, l'équation

$$M(u\,|\,t) = 0,$$

où les u sont regardés comme constants, représente une surface $E^{n}_{n-1,2}$, dont les plans tangents sont seulement deux fois indéterminés.

Lorsque $n+1=4$, ce fait ne constitue pas une exception; mais si $n+1>4$ on est en présence d'une véritable singularité, qui est, comme nous le verrons, caractéristique des formes considérées.

Si l'on représente par $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ les coefficients de l'équation du plan tangent de la surface $M(u|t)$, on aura, en comparant à la première des équations (3)

$$(4)\qquad \frac{T_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}}=\frac{T_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}}=\ldots=\frac{T_{n+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}},$$

et en éliminant x, y entre ces n équations on tombera sur $(n-2)$ équations homogènes entre les quantités T, dont les coefficients dépendront des u, et que nous écrirons,

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u|T)=0 \\ \mathfrak{M}_2(u|T)=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u|T)=0. \end{array}\right.$$

Puisque le plan tangent à la surface $M(u|t)=0$ ne contient que deux paramètres il devait, à priori, exister $(n-2)$ relations entre les coefficients de ce plan, ces relations sont précisement les équations (5).

Une forme quelconque de $(n+1)$ variables $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ étant donnée, on sait qu'il existe une forme étroitement liée à la première, qui contient les coefficients $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ d'une forme linéaire, et dont l'évanouissement exprime le contact du plan représenté par cette forme linéaire avec la surface représentée par la forme proposée elle-même. Cette seconde forme s'appelle la *forme adjointe.*

On voit cependant que l'on ne peut plus parler de forme adjointe du moment que le plan tangent à la surface représentée par la forme contient moins de $(n-1)$ paramètres; s'il en contient $(n-k)$, *il faut k équations* pour exprimer le contact d'un plan avec la surface, et au lieu d'une forme adjointe unique on a un *système adjoint* de k formes.

Dans le cas actuel, la forme $M(u|t)$ se trouve donc caractérisée par *ce fait qu'elle admet un système adjoint composé de* $(n - 2)$ *formes, à savoir le système des premiers membres des équations* (5).

Dans le cas de $n + 1 = 4$, le système se réduit à une forme unique, et on n'a dès lors aucune singularité, mais si $n + 1 > 4$, le système (5) comporte plusieurs équations. Il en résulte donc déjà que du moment que $n + 1 > 4$ on ne peut chercher les formes fondamentales relatives à tous les éléments imaginables, que parmi celles qui ont un système adjoint comprenant $(n - 2)$ formes simultanées.

6. Ce caractère *purement algébrique* que doit présenter la forme $M(u \mid du)$ n'est pas cependant suffisant; nous allons voir qu'elle doit présenter encore un autre caractère exceptionnel, où l'on tient compte du mode de composition des coefficients de la forme au moyen des variables u, dont il a été jusqu'ici fait abstraction.

D'après la définition même des équations (5) on a identiquement

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

en sorte que le système des $(n - 2)$ équations différentielles simultanées

$$(6) \qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

admet la solution $\varphi(x, y \mid u) - z$, où x, y, z sont considérés comme 3 constantes.

Le système des équations (6) admet donc une solution contenant un nombre de constantes égal à l'excès du nombre $(n + 1)$ des variables indépendantes sur le nombre $(n - 2)$ de ces mêmes équations; et l'on peut dire ainsi, en étendant une locution usitée pour les équations linéaires, que les équations (6) forment un système complet. Les conditions auxquelles sont soumis les coefficients de la forme $M(u|du)$ ne sont donc autres que celles qui expriment, conformément aux théories connues, la compatibilité des équations (6).

7. Ces conditions caractérisent entièrement la forme $\mathfrak{M}(u|du)$ comme le prouve la réciproque suivante.

Soit un système de $(n - 2)$ équations différentielles homogènes

$$(E) \qquad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \end{array} \right.$$

assujetti à la seule condition de former un système complet, c'est-à-dire, d'admettre une solution complète douée de trois constantes, dont une nécessairement additive à la fonction θ.

Je dis que le système des fonctions

$$(E') \qquad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u \mid T) \\ \mathfrak{M}_2(u \mid T) \\ \dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) \end{array} \right.$$

constitue le système adjoint d'une forme fondamentale, qui est même fondamentale pour une infinité de systèmes d'éléments.

Formons d'abord la forme à laquelle le système (E') est adjoint; pour cela nous prenons dans l'espace à n dimensions (dont les t_i sont des coordonnées linéaires ponctuelles) le plan

$$T_1 t_1 + \dots + T_{n+1} t_{n+1} = 0$$

où les T_i sont liés par les $(n - 2)$ équations

$$(E'') \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_1(u \mid T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u \mid T) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) = 0 \end{cases}$$

et nous cherchons l'enveloppe de ce plan, qui se trouve représentée par une forme $M(u \mid t)$. Cette forme est la forme cherchée. En y remplaçant les t par des différentielles du, nous obtenons la forme $M(u \mid du)$. Il faut prouver que cette forme est une forme fondamentale.

Soit en effet

$$\varphi(x, y, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}) - z$$

une solution complète du système (E), où x, y, z représentent les trois constantes, dont l'une est nécessairement additive à θ, puisque θ ne figure pas explicitement dans les équations différentielles. Si l'on considère x, y, z comme des coordonnées linéaires dans l'espace à trois dimensions, et que l'on adopte pour élément la surface à $(n + 1)$ paramètres

$$\varphi(x, y \mid u) - z = 0,$$

la forme $M(u \mid du)$ sera la forme fondamentale correspondante à ce système d'éléments. Car si l'on veut former le système adjoint à la forme fondamentale relative à cet élément, on doit, comme on l'a vu, éliminer x, y entre les équations

$$\frac{T_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \dots = \frac{T_{n+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}};$$

d'après l'hypothèse faite que $\varphi(x, y \mid u) - z$ vérifie le système (E), cette élimination donnera lieu au système d'équations (E''), en sorte que la forme fondamentale aura le système (E') pour système adjoint, et coïncidera, par conséquent, avec la forme $M(u \mid du)$.

Maintenant, comme l'on peut adopter toute autre forme de solution complète du système (E), on obtiendra autant de systèmes d'éléments, admettant la forme fondamentale $M(u|du)$, qu'il y a de solutions complètes distinctes, c'est-à-dire une infinité.

On pouvait déjà prévoir l'existence d'une infinité de systèmes d'éléments donnant lieu à la même forme fondamentale; car si l'on effectue une transformation de contact sur l'espace à trois dimensions, un système de surfaces à $(n + 1)$ paramètres se transforme en un système analogue; et si deux surfaces se touchent, leurs transformées se touchent également. L'évanouissement de la forme $M(u|du)$ qui exprime le contact de deux surfaces infiniment voisines exprime donc aussi le contact de leurs transformées, qui sont également infiniment voisines. Nous pouvons ainsi regarder comme formant un groupe tous les systèmes de surfaces qui dérivent les uns des autres par des transformations de contact, de même que l'on regarde comme formant un groupe toutes les formes de différentielles qui dérivent les unes des autres par un simple changement de variables. On dit aussi que ces formes sont *équivalentes*. Cela posé, nous allons démontrer la proposition réciproque suivante.

Si deux éléments dépendant d'un même nombre de paramètres donnent lieu à la même forme fondamentale, ou bien à deux formes fondamentales équivalentes, ces deux éléments font partie d'un même groupe, c'est-à-dire, que l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation de contact.

Ce théorème, que nous énonçons ici dans le cas des surfaces, subsiste dans le cas où l'élément est une courbe, comme nous le verrons plus loin.

8. Pour démontrer cette proposition nous remarquons que les deux systèmes d'éléments considérés doivent correspondre chacun à une solution complète du système (E), et nous n'avons dès lors qu'à étudier le passage d'une solution complète à une autre solution complète.

Ceci nous conduit à étudier de plus près les solutions du système (E), en partant de ce fait qu'il admet au moins une solution contenant trois constantes, dont une nécessairement doit être additive. Soit alors $\Phi + \gamma$ cette solution complète, donnée par l'équation

$$(V) \qquad V(\alpha, \beta, \Phi + \gamma, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0,$$

où α, β, γ sont les trois constantes. On voit que les $\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$ seront proportionnelles aux $\frac{\partial V}{\partial u_i}$, et, par suite, les équations suivantes

$$(\varepsilon)\qquad\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial V}{\partial u}\right) = 0 \\[2ex] \mathfrak{M}_2\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial V}{\partial u}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial V}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

seront vérifiées en vertu de $V = 0$, c'est-à-dire si l'on transporte dans ces équations la valeur de Φ, tirée de l'équation $V = 0$. D'après cela les équations (ε) étant vérifiées pour toutes valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ et de α, β, γ, le seront encore si ces trois dernières quantités, au lieu d'être constantes dépendent des u et d'autres quantités. Si nous posons alors

$$\alpha = \xi(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta) = \xi(u \,|\, \theta)$$

$$\beta = \eta(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta) = \eta(u \,|\, \theta)$$

$$\gamma = \zeta(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, \theta) = \zeta(u \,|\, \theta)$$

où ξ, η, ζ sont trois fonctions arbitraires, et θ une quantité quelconque, l'équation

$$V\big(\xi(u\,|\,\theta), \eta(u\,|\,\theta), \zeta(u\,|\,\theta), u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\big) = 0$$

définira θ en fonction des u; et par un choix convenable de ξ, η, ζ on pourra faire en sorte que θ représente telle solution que l'on voudra du système des équations compatibles (E). C'est là un fait bien connu dans la théorie des équations différentielles. Différentions l'équation $V = 0$ et dans la différentielle totale de ξ distinguons deux parties; l'une provenant de la variation des u et l'autre de la variation de θ, en sorte que

$$d\xi = \delta\xi + \frac{\partial\xi}{\partial\theta} d\theta;$$

nous aurons, en différentiant

$$dV = \frac{\partial V}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial V}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial V}{\partial\zeta}\delta\zeta + \left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)d\theta$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial V}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial u_{n+1}}du_{n+1} = 0.$$

Exprimons qu'ici encore, comme pour la fonction Φ, les $\frac{\partial \theta}{\partial u_i}$ sont proportionnels aux $\frac{\partial V}{\partial u_i}$, nous aurons nécessairement

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial V}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\delta\zeta = 0.$$

Supposons ξ, η, ζ choisis de sorte que l'équation (α) ait lieu, les $\frac{\partial \theta}{\partial u_i}$ étant proportionnels aux $\frac{\partial V}{\partial u_i}$, vérifieront les équations (E), eu égard aux équations (ε), et cela en vertu de l'équation $V = 0$, c'est-à-dire que θ sera une solution du système (E).

On sait, de plus, ainsi que je l'ai dit déjà, que toute solution du système (E) peut s'engendrer de cette façon, sauf les singularités que j'écarte. Tout revient donc à vérifier l'équation (α). Cette équation exprime que si l'on considère ξ, η, ζ comme des fonctions des u, la quantité θ jouant le rôle de constante, il existe entr'elles une ou plusieurs relations. De là trois cas à distinguer.

1°. S'il existe *trois relations*, en se rappelant que θ joue le rôle de constante, ξ, η, ζ seront trois fonctions de θ,

$$\xi = \xi(\theta), \qquad \eta = \eta(\theta), \qquad \zeta = \zeta(\theta),$$

et la fonction θ sera définie par l'équation

$$V(\xi(\theta), \eta(\theta), \zeta(\theta) | u) = 0.$$

2°. S'il existe deux relations on pourra les écrire

$$\eta = f(\xi, \theta), \qquad \zeta = g(\xi, \theta)$$

et l'équation (α) donne alors

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial g}{\partial \xi} = 0.$$

On éliminera ξ, η, ζ entre ces trois équations et l'équation $V = 0$; le résultant sera une équation entre θ et les u, qui définira θ comme fonction de ces variables.

3°. Enfin dans le cas d'une seule relation

$$\zeta = f(\xi, \eta, \theta),$$

l'équation (α) se décomposera dans ces deux

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

et on éliminera encore ξ, η, ζ entre ces équations et $V = 0$, pour obtenir l'équation qui donne θ en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$.

Imaginons, par exemple, qu'il s'agisse de passer d'une solution complète Φ donnée par l'équation

$$V(\alpha, \beta, \Phi + \gamma, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0$$

à une autre Ω donnée par l'équation

$$W(\alpha', \beta', \Omega + \gamma', u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0,$$

où α, β, γ et α', β', γ' sont respectivement les constantes qui doivent figurer dans ces intégrales.

Ce passage s'effectuera suivant l'une des trois manières ci-dessus rappelées.

1°. S'il y a trois relations, on devra poser

$$\alpha = f(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega),$$

$$\beta = g(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega),$$

$$\gamma = h(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega),$$

en sorte que le passage de

$$V(\alpha, \beta, \gamma \mid u) = 0$$

à

$$W(\alpha', \beta', \gamma' \mid u) = 0$$

s'effectuera par la transformation

$$(\mathrm{T}_1) \qquad \begin{cases} \alpha = f(\alpha', \beta', \gamma') \\ \beta = g(\alpha', \beta', \gamma') \\ \gamma = h(\alpha', \beta', \gamma'). \end{cases}$$

2°. S'il y a deux relations, on devra avoir

$$\beta = f(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega, \alpha)$$
$$\gamma = g(\alpha', \beta', \gamma' + \Omega, \alpha)$$

et on adjoindra l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \gamma}\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0.$$

On passera donc de $V(\alpha, \beta, \gamma | u) = 0$ à $W(\alpha', \beta', \gamma' | u) = 0$ en portant dans V les valeurs des α, β, γ tirées des équations

$$(\mathrm{T}_2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\beta = f(\alpha', \beta', \gamma', \alpha) \\ &\gamma = g(\alpha', \beta', \gamma', \alpha) \\ &\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \gamma}\frac{\partial g}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right.$$

3°. De même, dans le cas d'une seule équation, on verra qu'on passe de $V(\alpha, \beta, \gamma | u)$ à $W(\alpha', \beta', \gamma' | u)$ en portant dans V les valeurs de α, β, γ tirées des équations

$$(\mathrm{T}_3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\gamma = f(\alpha', \beta', \gamma', \alpha, \beta) \\ &\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \gamma}\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \\ &\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \gamma}\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \right.$$

Interprétons ces résultats. Si dans l'équation

$$V(\alpha, \beta, \gamma | u) = 0$$

on regarde α, β, γ comme des coordonnées, on obtient une famille de surfaces dépendant des $(n + 1)$ paramètres u; de même

$$W(\alpha', \beta', \gamma' | u) = 0$$

représente une seconde famille de surfaces, et d'après les hypothèses faites, ces deux familles constituent deux systèmes d'éléments quelconques parmi ceux qui donnent lieu à une même forme fondamentale, à savoir, celle qui correspond aux équations (E).

Or les trois transformations (T_1), (T_2), (T_3) par l'une desquelles on peut certainement passer d'un système à l'autre représentent évidemment les trois classes de transformations de contact relatives à l'espace à trois dimensions.

Le théorème énoncé au numéro **8** se trouve donc complétement démontré.

Et la relation entre *les groupes de systèmes d'éléments* et *les classes de formes fondamentales* se trouve ainsi entièrement établie.

9. Cherchons maintenant à interpréter les solutions du système (E) sous une forme différente.

Nous venons de voir qu'un changement de solution complète est équivalent à une transformation de contact de l'élément. Nous allons étudier l'équation $V = 0$ à un autre point de vue.

Si dans l'équation

$$V(x\,,\,y\,,\,z\,|\,u) = 0$$

on regarde $x\,,\,y\,,\,z$ comme donnés, l'équation $V = 0$ est celle qui lie les u de toutes les surfaces du système qui passent par un point donné. On en conclut donc que si l'équation

$$\theta(u_1\,,\,u_2\,,\,\ldots\,,\,u_n\,,\,u_{n+1}) = 0$$

assujettit la surface (u) à passer par un point donné, la fonction $\theta(u)$ vérifie le système des équations (E). Cette proposition se généralise ainsi:

Si l'équation $\theta = 0$ est telle que les surfaces (u) qui la vérifient touchent une surface ou une courbe fixe, ou passent par un point fixe, les équations (E) *sont vérifiées par la fonction θ, soit identiquement, soit en vertu de l'équation $\theta = 0$.*

En effet, soit S une surface fixe; on peut toujours trouver une transformation de contact telle que toutes les surfaces de l'espace qui touchent S aient pour transformées des surfaces passant par un point fixe. Si on applique alors cette transformation, la condition $\theta = 0$ qui exprime le contact des surfaces (u) avec la surface S, exprime que les surfaces transformées passent par un point fixe. Le système (E) n'étant pas modifié par la transformation, il en résulte que θ doit vérifier les équations (E). La même démonstration s'applique au cas où l'on assujettit les surfaces (u) à toucher une courbe fixe.

Voici maintenant la réciproque de cette proposition.

Si la fonction $\theta(u)$ *vérifie les équations* (E) *soit identiquement, soit en vertu de l'équation* $\theta = 0$, *cette dernière équation exprime que les surfaces* (u) *qui la vérifient touchent une courbe ou une surface fixe, ou bien passent par un point fixe.*

En effet, toute fonction θ de l'espèce considérée dérive d'une fonction (solution complète) telle que $W(x', y', z'|u)$ dans laquelle x', y', z' ont reçu des valeurs numériques déterminées, x'_0, y'_0, z'_0, en sorte que

$$W(x'_0, y'_0, z'_0|u) = \theta(u);$$

si l'on effectue la transformation de contact qui consiste à prendre pour élément les surfaces $W(x', y', z'|u) = 0$, l'équation $\theta = 0$ exprime que les surfaces W qui la vérifient passent un point (x'_0, y'_0, z'_0). Les surfaces primitives $V = 0$ touchent donc une courbe ou une surface fixe, ou bien elles passent par un point fixe.[1]

Examen du cas où l'élément est une courbe.

10. Si l'élément est une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres, il est facile de ramener ce cas à celui où l'élément est une surface; il suffit d'effectuer une transformation de contact arbitraire (non ponctuelle). On obtient ainsi des surfaces dépendant de $(n+1)$ paramètres, auxquelles on peut appliquer tous les résultats précédents. On formera ainsi la forme $M(u|du)$ et le système adjoint de cette forme; il ne restera plus qu'à interpréter le rôle de ces diverses fonctions dans le langage des courbes. Les transformations de contact transforment la rencontre de deux courbes dans le contact des deux surfaces correspondants et inversement. Il suit de là que l'évanouissement de la forme $M(u|du)$ exprimera la rencontre des deux courbes infiniment voisines (u) et $(u+du)$.

[1] Ainsi qu'on va le voir, tous ces résultats s'étendent d'eux-mêmes au cas où l'élément est une courbe. Dans le cas particulier où l'élément est une droite, on a ce théorème de M. Klein (Mathematische Annalen, t. 5), que lorsque le paramètre différentiel du premier ordre d'un complexe est nul, ce complexe est formé des sécantes d'une courbe ou des tangentes d'une surface. Dans le mémoire précité, M. Klein n'a pas complété sa démonstration, et je ne crois pas qu'elle ait été reprise par personne, si ce n'est dans mon travail *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (Annales de l'école normale, 2ème série, t. 11).

Ce qui précède fournit une nouvelle démonstration de cet important théorème.

Si la fonction $\theta(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ vérifie les équations (E) identiquement ou en vertu de $\theta = 0$, cette dernière équation exprime que les surfaces transformées touchent une surface fixe ou une courbe fixe, ou bien qu'elles passent par un point fixe. Les courbes primitives doivent donc toucher une surface fixe, ou bien couper une courbe fixe.

On retrouve ainsi une extension fort générale du théorème que M. Klein a fait connaître pour le cas des complexes de droites. D'après M. Klein, pour que le complexe $\theta = 0$ soit formé des tangentes d'une surface ou des sécantes d'une courbe, il faut et il suffit que l'invariant $\mathfrak{M}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$ soit nul.

Or, dans le cas des droites, on a $n + 1 = 4$ et $n - 2 = 1$; le système adjoint se réduit précisément à la forme $\mathfrak{M}\left(u \,\middle|\, \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$.

11. Ce qui précède montre assez qu'il n'y a pas de distinction fort essentielle à faire entre le cas où l'élément est une surface, et celui où l'élément est une courbe. Il suffit, par une transformation de contact, de transformer en surfaces les courbes du système pour pouvoir appliquer les résultats ci-dessus démontrés.

On a vu, par exemple, que si deux éléments donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe une transformation de contact qui les transforme l'un dans l'autre. Ce théorème n'a été démontré que dans le cas où l'élément est une surface. Il s'étend de lui-même au cas des courbes.

Soit un système Γ de courbes et un système Σ de surfaces qui donnent lieu à la même forme fondamentale. Une transformation de contact T transforme Γ en un système $T\Gamma$ de surfaces. Le système $T\Gamma$ de surfaces et le système Σ donnent lieu à la même forme fondamentale, il existe donc une transformation de contact T' qui transforme $T\Gamma$ en Σ, en sorte que $T'T\Gamma = \Sigma$; on en conclut que si l'on transforme successivement Σ par les transformations de contact T'^{-1}, T^{-1} inverses de T' et de T on reproduit Γ; ou enfin, que Γ et Σ sont transformables l'un dans l'autre par une transformation de contact, attendu que le produit de deux transformations de contact est une transformation de contact.

Par exemple, on sait que par un choix convenable des coordonnées la sphère et la droite donnent lieu à la forme fondamentale

$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2.$$

Il existe donc une transformation de contact qui change la sphère en droite. Mr SOPHUS LIE a depuis longtemps donné cette remarquable transformation, dont l'usage est si fécond pour la théorie générale des surfaces.

Distinction entre le cas des courbes et celui des surfaces.

12. Malgré la grande similitude entre le cas où l'élément est une courbe et celui où l'élément est une surface, malgré qu'une transformation de contact permette toujours de passer du premier cas au second, il existe néanmoins des particularités dans le cas où l'élément est une courbe, particularités qui tiennent à ce *qu'un système de surfaces ne peut généralement pas se transformer en un système de courbes* par une transformation de contact, même convenablement choisie.

Nous avons déjà dit que nous regardions comme équivalents, ou formant un groupe, tous les systèmes d'éléments qu'une transformation de contact transforme les uns dans les autres. Ce qui précède fait voir assez que nous n'excluons pas le cas où le groupe contient un système de courbes, auquel cas il en comprend une infinité. Mais alors nous sommes conduits à diviser ces groupes en deux classes. Un groupe de la première classe ne comprendra comme éléments que des surfaces, qu'il sera impossible de ramener à des courbes; à la seconde classe appartiendront les groupes qui comprennent un système de courbes, et par suite une infinité de ces systèmes.

Nous avons déjà vu que chaque groupe est caractérisé par une classe de formes fondamentales, c'est-à-dire de formes qui dérivent toutes les unes des autres par un changement de variables.

Le problème qui se présente maintenant est donc celui-ci, *qu'est ce qui caractérise les formes dont le groupe d'éléments correspondant est de la seconde classe?*

Nous allons traiter ce problème dans lequel on verra intervenir, non sans intérêt, ces systèmes simultanés d'équations différentielles dits *semi-linéaires* dont la notion est due à Mr S. LIE.

13. Nous prendrons les équations des courbes considérées comme élément, sous la forme

$$\left|\begin{array}{l} x = f(z\,,\,u_1\,,\,u_2\,,\,\ldots\,,\,u_{n+1}) = f(z\,|\,u) \\ y = \varphi(z\,|\,u). \end{array}\right.$$

Si les courbes (u), $(u + du)$ se coupent au point x, y, z, on a, en reprenant une notation précédente,

$$\left|\begin{array}{l} \boxed{f, du} = 0 \\ \boxed{\varphi, du} = 0, \end{array}\right.$$

d'où l'on déduira la forme $M(u|du)$ par l'élimination de z. Ou encore, on obtiendra la forme $M(u|t)$ en éliminant z entre les équations

$$\text{(a)} \qquad \left|\begin{array}{l} \boxed{f, t} = 0 \\ \boxed{\varphi, t} = 0. \end{array}\right.$$

Cherchons le système adjoint de la forme M. Pour cela, je différentie totalement les équations ci-dessus, en regardant les u comme constants. Il vient

$$\frac{\partial \boxed{f, t}}{\partial z} dz + \boxed{f, dt} = 0$$

$$\frac{\partial \boxed{\varphi, t}}{\partial z} dz + \boxed{\varphi, dt} = 0$$

d'où, en posant

$$\text{(b)} \qquad -\lambda = \frac{\dfrac{\partial \boxed{f, t}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \boxed{\varphi, t}}{\partial z}},$$

on conclut

$$\boxed{f, dt} + \lambda \boxed{\varphi, dt} = 0,$$

en sorte qu'on a

$$\text{(c)} \qquad \frac{T_1}{\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\dfrac{\partial f}{\partial u_2} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_2}} = \ldots = \frac{T_{n+1}}{\dfrac{\partial f}{\partial u_{n+1}} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_{n+1}}};$$

$T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ désignant les coefficients du plan tangent à la surface E^n_{n-1} représentée par

$$M(u|t) = 0$$

dans l'espace à n dimensions dans lequel les t_i sont les coordonnées linéaires ponctuelles.

Ce plan tangent dépend de deux paramètres λ et z, comme dans le cas général étudié au début. Mais ici se place une remarque nouvelle.

14. Précédemment, notre surface E^{μ}_{n-1} se trouve être le lieu d'un espace linéaire E^{1}_{n-3}, en tous les points duquel le plan tangent est le même. Mais ici il y a plus; la surface E^{μ}_{n-1} est, d'après les équations (a), le lieu d'un espace linéaire à E^{μ}_{n-2} dimensions, et tout plan mené par l'un de ces espaces générateurs touche la surface en tous les points d'un espace linéaire à trois dimensions, représenté par les équations (a) (b), où λ a reçu une valeur arbitraire déterminée. La différence avec le cas général est donc bien établie; présentons la sous une forme moins symbolique.

Si on élimine z et λ entre les équations (c), on obtient les $(n-2)$ équations du système adjoint

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1(u\,|\,T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u\,|\,T) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u\,|\,T) = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on forme alors les équations

$$(E_0)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u\,\Big|\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u\,\Big|\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \end{array}\right.$$

on voit par les équations (c) elles-mêmes, que la fonction $f(z|u) + \lambda\varphi(z|u) + \mu$, où z, λ, μ jouent le rôle de constantes, est une solution du système (E_0).

Or on sait qu'un système complet de $(n-2)$ équations différentielles homogènes *linéaires* simultanées admet une solution complète de la forme

$$x_0 + \partial x_1 + \lambda x_2 + \mu$$

où λ, μ, ∂ sont les constantes, et x_0, x_1, x_2 trois solutions particulières.[1] Cette solution est linéaire par rapport à toutes les constantes.

---

[1] On suppose le nombre des variables égal à $(n+1)$.

Dans le cas actuel, nous avons une solution

$$f(z|u) + \lambda\varphi(z|u) + \mu$$

qui est linéaire par rapport à deux des constantes seulement; de là le nom de semi-linéaire que Lie a donné à ce genre d'équations différentielles.

Ainsi, ce qui caractérise une forme $M(u|du)$ dont le groupe d'éléments comprend des systèmes de courbes, c'est que le système adjoint d'équations différentielles est un système *semi-linéaire.*

Je n'insisterai pas davantage sur ces considérations générales, et je passe à quelques applications.

Recherche de tous les cas où la forme fondamentale est quadratique.

15. Je démontrerai d'abord la proposition suivante: *si parmi les équations du système adjoint l'une d'elles est linéaire, le nombre des variables peut être réduit d'une unité.*

Soient en effet les équations

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Si l'équation $\mathfrak{M}_{n-2}\left(u \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right) = 0$ est linéaire, elle admet n solutions indépendantes $v_1, v_2, \dots, v_n$; on peut prendre pour variables les fonctions v et une $(n+1)^{\text{ème}}$, formant avec elles un système de variables indépendantes. Les équations du système adjoint deviendront alors

$$\left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(v \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-3}\left(v \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right) = 0 \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(v \,\middle|\, \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial\theta}{\partial v_{n+1}} = 0. \end{array}\right.$$

Toutes les solutions communes au système seront donc nécessairement des fonctions de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et ne contiendront pas v_{n+1}. La solution complète

$$\varphi(x, y \,|\, v) - z$$

ne contiendra pas v_{n+1}, et la surface

$$z = \varphi(x, y \,|\, v)$$

dépendra seulement de n paramètres. Il en résulte que v_{n+1} doit se trouver naturellement éliminé des équations du système adjoint, résultat auquel on est encore conduit en écrivant les conditions d'intégrabilité.

Corollaire. *Si p des équations du système adjoint sont linéaires, on peut réduire de p le nombre des paramètres.*

16. Appliquons ceci à la recherche des formes $M(u \,|\, du)$ qui sont quadratiques.

Je remarque d'abord que si une forme quadratique, de $(n+1)$ variables, est réductible à $(n+1-p)$ carrés, il existe p relations linéaires homogènes entre les dérivées partielles de cette forme, en sorte que ces dérivées sont exprimables en fonction de $(n+1-p)$ d'entr'elles entre lesquelles il n'existe aucune espèce de relation.

Si on assujettit néanmoins les variables à annuler la forme, une relation quadratique unique existe entre ces $(n+1-p)$ dérivées indépendantes. Donc, nous voyons que dans le cas d'une forme quadratique, $(n-3)$ des équations du système adjoint seront linéaires, et la $(n-2)^{\text{ème}}$ sera quadratique. Il en résulte que le nombre des paramètres peut être abaissé de $(n+1)$ à $n+1-(n-3)=4$. De là ce théorème:

Les éléments qui ont pour forme fondamentale une forme quadratique ne peuvent dépendre de plus de 4 paramètres.[1]

D'ailleurs, si l'on prend une forme quadratique quelconque dépendant de 4 variables

$$M(u \,|\, du) = M(u_1, u_2, u_3, u_4 \,|\, du_1, du_2, du_3, du_4),$$

---

[1] Généralement, le nombre des paramètres est inférieur ou égal au degré de la forme augmenté de deux.

et que l'on prenne la forme adjointe unique $\mathfrak{M}(u \mid T)$, l'équation quadratique en $\frac{\partial \theta}{\partial u}$

$$\mathfrak{M}\left(u \;\middle|\; \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0$$

admettra une solution complète

$$\varphi(x\,,\,y \mid u) - z$$

qui donnera immédiatement un élément pour lequel $M(u \mid du)$ est la forme fondamentale.

Dans cet exemple on n'a pas à s'occuper des conditions d'intégrabilité. Voici un exemple encore où ces conditions sont vérifiées d'elles-mêmes.

Cas des formes à coefficients constants.

17. Pour engendrer les formes fondamentales à coefficients constants, il suffit de partir d'un système de $(n - 2)$ équations différentielles simultanées quelconque à coefficients constants

$$(\mathrm{E}) \qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{M}_1\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathfrak{M}_{n-2}\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Les conditions d'intégrabilité sont vérifiées d'elles-mêmes, et si l'on détermine les fonctions $\varphi_1(x\,,\,y)\,,\,\varphi_2(x\,,\,y)\,,\,\ldots\,,\,\varphi_{n+1}(x\,,\,y)$ des deux constantes $x\,,\,y$, de façon à avoir

$$\mathfrak{M}_1(\varphi) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2(\varphi) = 0, \quad \ldots\;, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(\varphi) = 0,$$

la fonction

$$- z + \varphi_1(x\,,\,y)u_1 + \varphi_2(x\,,\,y)u_2 + \ldots + \varphi_n(x\,,\,y)u_n + \varphi_{n+1}(x\,,\,y)u_{n+1}$$

sera une solution complète du système des équations (E).

Si l'on prend pour élément la surface

$$z = \varphi_1(x\,,\,y)u_1 + \varphi_2(x\,,\,y)u_2 + \ldots + \varphi_{n+1}(x\,,\,y)u_{n+1},$$

la forme fondamentale correspondante aura ses coefficients constants. Réciproquement, toute forme fondamentale à coefficients constants est évidemment susceptible d'un tel mode de génération.

Sur une forme particulière des équations adjointes.

18. Les équations

$$(A)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_1(u\,|\,T) = 0 \\ \mathfrak{M}_2(u\,|\,T) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{M}_{n-2}(u\,|\,T) = 0 \end{cases}$$

peuvent n'être pas entièrement équivalentes aux équations de définition

$$(B)\qquad \frac{T_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}} = \frac{T_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}} = \dots = \frac{T_{n+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n+1}}}.$$

Il se peut en effet que l'espace commun aux espaces

$$\mathfrak{M}_1(u\,|\,T) = 0, \qquad \mathfrak{M}_2(u\,|\,T) = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(u\,|\,T) = 0$$

se décompose en espaces partiels dont l'un d'eux seulement corresponde aux équations (B).

Supposons ici algébriques par rapport aux T les équations (A).

Je m'appuierai sur le théorème suivant:

Lorsque $(n + 1)$ *quantités sont liées par* $(n - 2)$ *relations homogènes algébriques, on peut trouver* $(n + 1)$ *polynômes*

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma), \; \Phi_2(\alpha, \beta, \gamma), \; \dots, \; \Phi_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma)$$

de trois paramètres α, β, γ *liés par une équation irréductible algébrique*

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

ces polynômes étant tels que si l'on substitue $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}$ *à la place des* $(n + 1)$ *quantités dans les* $(n - 2)$ *équations, celles-ci se trouvent identiquement satisfaites en vertu de* $\Omega = 0$.

Si le système des solutions des $(n - 2)$ équations forme un espace indécomposable, le système des polynômes Φ et Ω sera unique; mais s'il y a décomposition, à chaque espace partiel correspondra un système de fonctions Φ et Ω.

Sans aller bien loin, nous avons déjà rencontré une représentation de ce genre pour les équations (A); reportons-nous en effet à la fonction V; on voit que les fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial u_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial u_{n+1}},$$

mises à la place de $T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ dans les équations (A), vérifient ces équations en vertu de l'équation

$$V(x, y, z \,|\, u) = 0.$$

On a donc une représentation immédiate des équations (A) lorsque l'on connaît un des éléments qui correspondent à la forme, car ces équations pourront s'écrire sous la forme

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{T_1}{\dfrac{\partial V}{\partial u_1}} = \dfrac{T_2}{\dfrac{\partial V}{\partial u_2}} = \dfrac{T_3}{\dfrac{\partial V}{\partial u_3}} = \ldots = \dfrac{T_{n+1}}{\dfrac{\partial V}{\partial u_{n+1}}} \\ \qquad\qquad V = 0. \end{array}\right.$$

Mais dans le cas où l'on part de la forme elle-même, on aura plus généralement

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{T_1}{\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma \,|\, u)} = \dfrac{T_2}{\Phi_2(\alpha, \beta, \gamma \,|\, u)} = \ldots = \dfrac{T_{n+1}}{\Phi_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma \,|\, u)}, \\ \qquad\qquad \Omega(\alpha, \beta, \gamma \,|\, u) = 0, \end{array}\right.$$

où il est entendu que α, β, γ peuvent être déterminés en fonction de u et de deux constantes de sorte que l'expression

$$\Phi_1 du_1 + \Phi_2 du_2 + \ldots + \Phi_{n+1} du_{n+1}$$

admette un facteur intégrant.

Cette nouvelle forme des équations (A) est principalement utile pour rechercher les formes fondamentales d'un degré donné.

Paris le 9 Juillet 1887.