SUR LA VALEUR DE QUELQUES SÉRIES
QUI DÉPENDENT
DE LA FONCTION $E(x)$

PAR

M. A. STERN

à BERNE.

La considération qui m'a fait trouver une démonstration élémentaire du théorème

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(mx) - E(x)$$

qu'on doit à M. HERMITE,[1] peut aussi servir à trouver la valeur de diverses séries qui dépendent de la fonction $E_2(x)$, fonction qui, selon la notation proposée par M. HERMITE, a la valeur

$$E_2(x) = \frac{E(x)E(x+1)}{1 \cdot 2}.$$

Si k et m sont deux nombres entiers, $k < m$ et

$$x \geqq E(x) + \frac{k}{m}, \qquad x < E(x) + \frac{k+1}{m},$$

on aura, r désignant un nombre contenu dans la série $1, 2, \ldots, m-1$,

$$E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(x) \quad \text{ou} \quad E\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(x) + 1$$

selon que le nombre r est un des nombres $1, 2, \ldots, m-k-1$ ou un des nombres $m-k, \ldots, m-1$ et il s'ensuit qu'alors la fonction

$$E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) = \frac{E\left(x+\frac{r}{m}\right)E\left(x+\frac{r}{m}+1\right)}{1 \cdot 2}$$

[1] Voir T. 5, p. 315 et T. 8, p. 93 de ce journal.

aura la valeur $E_2(x)$ ou $E_2(x+1)$. Ainsi dans la série $\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x+\frac{r}{m}\right)$ les $m-k-1$ premiers termes auront tous la valeur $E_2(x)$ tandis que chacun des k termes suivants sera $= E_2(x+1)$, et la valeur de la série entière sera

$$= (m-k-1)E_2(x) + kE_2(x+1) = (m-1)E_2(x) + kE(x+1).$$

En substituant au lieu de k sa valeur $E(mx) - mE(x)$ on trouve

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) = E(mx)E(x) + E(mx) - (m+1)E_2(x).$$

Considérons la série

$$\sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x+\frac{r}{m}\right).$$

La somme des $m-k-1$ premiers termes aura la valeur

$$\left[\frac{m(m-1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}\right]E_2(x)$$

et la somme des k termes suivants sera $\frac{k(k+1)}{2}E_2(x+1)$. La valeur de la série entière sera donc

$$\frac{k(k+1)}{2}E_2(x+1) + \left[\frac{m(m-1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}\right]E_2(x).$$

Mais $E_2(x+1) - E_2(x)$ étant $= E(x+1)$ on aura

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2}E_2(x) + \frac{k(k+1)}{2}E(x) + \frac{k(k+1)}{2}.$$

En supposant $E(x) = 0$ pour toutes les valeurs de x plus petites que l'unité positive, il est évident que la série $\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x-\frac{r}{m}\right)$ s'évanouit pour les valeurs de $x \leqq 1$. On peut donc prendre $x = 1 + z$, z étant un *nombre positif*, et alors la série se change en

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(z+\frac{r}{m}\right) = E(mz) - E(z).$$

Ainsi on aura

$$(3)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x - \frac{r}{m}\right) = E(m[x - 1]) - E(x - 1).$$

Cherchons maintenant la valeur de la série

$$\sum_{r=1}^{m-1} (m - r)\, E_2\left(x - \frac{r}{m}\right).$$

En prenant toujours $x \overline{\overline{>}} E(x) + \frac{k}{m}$, $x < E(x) + \frac{k+1}{m}$ on voit que la valeur de $E_2\left(x - \frac{r}{m}\right)$ est $= E_2(x)$ ou $E_2(x - 1)$ selon que le nombre r est $\leq k$ ou $> k$. Ainsi la somme des k premiers termes de la série est $\left[\frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}\right] E_2(x)$ tandis que la somme des termes suivants est $= \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} E_2(x - 1)$, et comme on a

$$E_2(x) = E_2(x - 1) + E(x)$$

il s'ensuit

$$(4)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2} E_2(x) - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} E(x).$$

En ajoutant ensemble les deux séries (2) et (4) on obtient

$$\sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x - \frac{r}{m}\right)$$
$$= m(m - 1) E_2(x) - \frac{m^2 E(x)}{2} + \frac{m(2k+1)}{2} E(x) + \frac{k(k+1)}{2}$$

et en substituant $E(mx) - mE(x)$ au lieu de k on aura, après quelques simples réductions,

$$(5)\qquad \sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} (m - r) E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = E_2(mx) - mE_2(x).$$

C'est un théorème qu'on doit aussi à M. Hermite.[1]

---

[1] Voir T. 5, p. 315 et *Correction* à la suite de la table des matières du T. 8 de ce journal.

Si, au lieu de la série (4) on considère la série

$$\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x - \frac{r}{m}\right)$$

on aura

$$\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = kE_2(x) + (m - k - 1)E_2(x - 1) \tag{6}$$

$$= \frac{m-1}{2}[E(x)]^2 - \frac{m - 2k - 1}{2} E(x).$$

En prenant la somme et la différence des séries (1) et (6) on obtient

$$\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = (m - 1)[E(x)]^2 + 2kE(x) + k, \tag{7}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) - \sum_{r=1}^{m-1} E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x + \frac{r}{m}\right). \tag{8}$$

Les mêmes considérations conduisent à

$$\sum_{r=1}^{m-1} rE_2\left(x + \frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2} E_2(x) + \frac{(2m-1)k - k^2}{2} E(x + 1), \tag{9}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} rE_2\left(x - \frac{r}{m}\right) = \frac{m(m-1)}{2} E_2(x - 1) + \frac{k(k+1)}{2} E(x) \tag{10}$$

et la somme de ces deux dernières séries aura la valeur

$$m(m - 1)[E(x)]^2 + mkE(x) + \frac{(2m - 1)k - k^2}{2}.$$

On voit aisément que la même méthode donne la valeur d'un grand nombre de séries semblables.

Berne le 20 février 1887.