SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE A SES POINTS CRITIQUES FIXES.

Par

JEAN CHAZY

à PARIS.

Introduction.

I. On sait l'intérêt que présente la recherche des équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. Elle est un premier pas dans l'étude des intégrales d'une équation différentielle quelconque. D'autre part elle peut conduire, et a conduit effectivement, à la découverte de fonctions uniformes nouvelles. La plupart des fonctions classiques, la fonction exponentielle, les fonctions elliptiques, les fonctions automorphes, etc., sont intégrales d'équations différentielles, dont l'intégrale générale est uniforme, et qui ne sont linéaires ni pour les fonctions elliptiques, ni pour les fonctions automorphes: si l'on détermine a priori les équations différentielles non linéaires, dont l'intégrale générale est uniforme, on peut donc espérer trouver parmi leurs intégrales des transcendantes dont l'importance pour les différentes branches de l'Analyse sera révélée ultérieurement. On est conduit à rechercher d'abord les équations différentielles dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, c'est-à-dire indépendants des constantes d'intégration.

Fuchs a déterminé les équations du premier ordre, algébriques par rapport à la fonction et à sa dérivée, dont l'intégrale générale a ses point critiques fixes, et M. Poincaré a montré[1] que ces équations ont leur intégrale générale algébrique, ou bien sont réductibles algébriquement, soit à une quadrature, soit à une équation de Riccati, c'est-à-dire à une équation linéaire du second ordre: les équations à points critiques fixes du premier ordre ne sauraient donc définir de transcendantes nouvelles.

M. Painlevé a constitué une méthode pour former les équations à points critiques fixes du second ordre. Il a appliqué cette méthode aux équations

[1] *Comptes Rendus*, juillet 1884.

$$y'' = R(y', y, x), \tag{1}$$

R désignant une fonction rationnelle de y', algébrique de y et analytique de x. Mais, dans l'énumération des cas très nombreux à considérer, M. PAINLEVÉ avait laissé échapper un cas important. M. GAMBIER, révisant les tableaux de M. PAINLEVÉ, a comblé les lacunes que ces tableaux présentaient. Les résultats de l'énumération complète se résument ainsi:[1] Toutes les équations à points critiques fixes de la forme (1) sont intégrables par les fonctions classiques, rationnelles, exponentielle, logarithmique, elliptiques (considérées comme fonctions de l'argument ou du module), ou sont réductibles aux équations linéaires, ou enfin se ramènent algébriquement à six types:

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{I})\ y'' = 6y^2 + x,\\
&(\mathrm{II})\ y'' = 2y^3 + xy + \alpha,\\
&(\mathrm{III})\ y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y},\\
&(\mathrm{IV})\ y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y},\\
&(\mathrm{V})\ y'' = y'^2\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1},\\
&(\mathrm{VI})\ y'' = \frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) +\\
&\qquad + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right].
\end{aligned}\right.$$

M. PAINLEVÉ a montré que les cinq premières équations sont des dégénérescences de la sixième; que la sixième, et par suite les cinq autres, *ont leurs points critiques fixes:* ce sont seulement les points singuliers du coefficient différentiel, $x=0$, $x=1$ ou $x=\infty$. M. PAINLEVÉ a établi enfin que, sauf pour des valeurs exceptionnelles des paramètres, les six équations sont *irréductibles*, et de façon précise appartiennent, au point de vue de la réductibilité, à la même classe que les équations $y'' = R(y, x)$, R désignant une fonction rationnelle *arbitraire* de y et de x.[2]

Les recherches de M. PAINLEVÉ se divisent ainsi en trois parties. Une première méthode met en évidence un certain ensemble de conditions nécessaires pour qu'une équation donnée ait ses points critiques fixes: cette méthode s'étend

[1] *Comptes Rendus:* GAMBIER, 18 juin, 25 juin et 12 novembre 1906; PAINLEVÉ, 24 décembre 1906.

[2] M. PAINLEVÉ a exposé ses recherches dans des Communications à l'Académie des Sciences de Paris, dans un mémoire des *Acta Mathematica* (1902), et dans un article du *Bulletin de la Société Mathématique de France* (tome XXVIII).

facilement aux équations d'ordre supérieur. Une seconde méthode, toute différente, a pour but de montrer que, dans le cas du second ordre, ces conditions sont suffisantes: son extension est plus malaisée. Enfin il faut faire appel à un troisième ordre d'idées pour déterminer la classe d'équations irréductibles à laquelle appartient une équation.

II. Je me suis proposé de rechercher parmi les équations à points critiques fixes du troisième ordre et d'ordre supérieur des équations nouvelles. Dans le cas du second ordre, la détermination des équations à points critiques fixes est fondée sur la détermination des équations de la forme

$$y'' = y'^2 a(y), \qquad a(y) \text{ algébrique en } y,$$

dont l'intégrale générale est uniforme. De même ici, le problème préliminaire[1] se pose de déterminer les équations de la forme *simplifiée*

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y)y'y'' + c(y)y'^3,$$

n désignant un entier positif, négatif ou infini, mais différent de -1, $b(y)$ et $c(y)$ deux fonctions algébriques de y, dont l'intégrale générale est uniforme. Pour $n = -2$, $b(y) = 0$, les fonctions uniformes ainsi définies sont les fonctions automorphes, ou s'expriment par les fonctions classiques. Pour $n \neq -2$, M. Painlevé a indiqué sans démonstration que le genre des fonctions algébriques $b(y)$ et $c(y)$ est 0 ou 1, et que les fonctions uniformes définies sont des fonctions classiques, ou des combinaisons de fonctions classiques. J'étudie la forme de l'équation, et je donne la nature de l'intégrale, dans le cas où les coefficients $b(y)$ et $c(y)$ sont rationnels: le nombre des pôles de ces fractions rationnelles est limité à 6 pour $n = 1$, à 4 pour $n \neq 1$. M. Garnier a traité,[2] outre le cas précédent, le cas où les coefficients $b(y)$ et $c(y)$ sont des fonctions algébriques de genre 1, et donné à ce point de vue la solution complète du problème.

III. De toutes les simplifiées, l'équation $y''' = 0$ est la plus simple. L'exemple des équations du second ordre conduisait à déterminer d'abord les équations à points critiques fixes ayant comme simplifiée $y''' = 0$, c'est-à-dire les équations à points critiques fixes de la forme

[1] Pour qu'une équation du second ou du troisième ordre ait ses points critiques fixes, il est nécessaire que son équation *simplifiée*, c'est-à-dire l'équation obtenue en y remplaçant x par $x_0 + ax$, et en faisant tendre a vers zéro, ait son intégrale générale uniforme. L'équation simplifiée a la forme indiquée dans le texte, si l'équation complète a la forme $y''' = R(y'', y', y, x)$, R désignant une fonction rationnelle de y'', y', algébrique de y, analytique de x. La considération des équations simplifiées permet de classer les équations à points critiques fixes.

[2] *Comptes Rendus*, 29 juillet 1907, 16 novembre 1908.

$$(2) \qquad y''' = P(y'', y', y, x),$$

où P est un polynome en y'', y', y, à coefficients analytiques en x. On pouvait espérer obtenir ainsi des équations simples, dont les intégrales ne seraient pas des fonctions classiques, et qui ne se ramèneraient pas nécessairement aux équations (A). Cette espérance semble illusoire. Dans la classe d'équations considérée, si l'on excepte quatre types d'équations dont je n'ai pas achevé l'étude, il n'y a pas d'équations *nouvelles* analogues aux équations (A); il y a seulement des équations qui admettent des facteurs intégrants, et se ramènent à des équations du second ordre, transformées algébriques des équations (A). Parmi ces équations du second ordre citons les suivantes

$$(3) \qquad \begin{cases} y''^2 + 4y'^3 + 2(xy' - y) = 0, \\ y''^2 + 4y'^3 + xy'^2 - yy' + \alpha = 0, \\ y''^2 + 4y'^3 + (xy' - y)^2 + \alpha y' + \beta = 0, \end{cases}$$

qui sont transformées algébriques des équations (A, I), (A, II), (A, IV), et dont les deux premières ont été signalées par M. Painlevé. Les transformées des équations (3) en $u = e^{\int y\,dx}$ ont comme intégrales générales des fonctions entières, qui sont respectivement de genres et d'ordres 2 et $\frac{5}{2}$, 3 et 3, 4 et 4. Dans la suite formée par la fonction $\sigma(x; g_2, g_3)$ de Weierstrass et par ces trois fonctions entières, chaque fonction est une dégénérescence de la suivante. L'étude des intégrales de l'équation (A, IV) se ramène à l'étude de la fonction entière de genre 4. Il existe de même pour les équations (A, III), (A, V), (A, VI) des transformées du second ordre et du second degré, dont l'intégrale générale est entière de genre infini, ou a trois points singuliers fixes.

Signalons parmi les équations (2) des équations remarquables, dont les intégrales se rapprochent des fonctions fuchsiennes. Ce sont les équations

$$(4) \qquad y''' = 2yy'' - 3y'^2,$$

$$(5) \qquad y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \frac{4}{36 - k^2}(6y' - y^2)^2, \qquad k \text{ entier } > 6.$$

L'intégrale générale de chacune de ces équations est uniforme dans une région limitée par une droite ou une circonférence, variable avec les constantes d'intégration, et qui est coupure essentielle. La théorie des groupes fuchsiens et kleinéens a mis en évidence des équations de la forme que nous rappelons précédemment, dont l'intégrale générale est uniforme, et possède une coupure essentielle mobile, circulaire ou non analytique, ou bien admet un ensemble parfait discontinu de points singuliers mobiles: il est curieux d'obtenir des équations aussi simples que les équations (4) et (5), dont les intégrales présentent une singularité analogue. Ces intégrales peuvent être définies de la manière suivante. Considérons l'équation hypergéométrique de Gauss

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}t\right)\frac{dz}{dt}-\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{k^2}\right)\frac{z}{4}=0,\ k \text{ entier } >6, \text{ on } k=\infty,$$

et deux intégrales distinctes arbitraires de cette équation, z et z_1. L'équation $x=\frac{z_1(t)}{z(t)}$ définit une fonction de SCHWARZ $t(x)$, dont le triangle fondamental a comme angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{k}$. La fonction $y(x)=\frac{6}{z}\cdot\frac{dz}{dx}$ est une intégrale de l'équation (5) ou (4). L'intégrale générale de l'équation (4) est holomorphe dans la région où elle est définie: celle de l'équation (5) est méromorphe dans la région où elle est définie, et admet comme pôles simples de résidu $\frac{k-6}{2}$ les pôles de $t(x)$. Posons $y=\frac{k-6}{2}\frac{u'}{u}$: la fonction u satisfait à l'équation différentielle du quatrième ordre

$$uu^{\mathrm{IV}}-(k-2)u'u'''+\frac{3k(k-2)}{2(k+6)}u''^2=0.$$

L'intégrale générale de cette équation admet de même comme coupure essentielle une circonférence variable, et est définie à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence suivant les valeurs des constantes d'intégration. Elle est holomorphe en tout point de la région où elle est définie, sauf en général au point $x=\infty$. Si elle est définie à l'intérieur de sa coupure, ou si la coupure est une droite, elle est uniforme: si elle est définie à l'extérieur, elle acquiert autour de la coupure un nombre de déterminations égal au dénominateur de la fraction irréductible égale à $\frac{12}{k-6}$, comme l'intégrale particulière $u=x^{\frac{12}{6-k}}$. La transformée en $\int y\,dx$ de l'équation (4) possède une propriété analogue: son intégrale générale est uniforme, si elle est définie à l'intérieur de sa coupure; si elle est définie à l'extérieur, elle est une fonction multiforme avec période, comme l'intégrale particulière $-6\log x$.

La fonction $u(x)$ jouit d'une propriété fonctionnelle analogue à celle des fonctions thétafuchsiennes: par les substitutions $\left(x, \frac{\alpha_i x+\beta_i}{\gamma_i x+\delta_i}\right)$ d'un groupe fuchsien, elle est multipliée par $(\gamma_i x+\delta_i)^{\frac{12}{k-6}}$; elle est thétafuchsienne pour $k=7, 8, 9, 12$. Elle possède une seconde propriété fonctionnelle de nature connexe, signalée par Halphen: elle fait partie des solutions en fonctions uniformes de l'identité $X^2+Y^3+u^k=0$. La fonction u est une transcendante définie par une équation différentielle du quatrième ordre: mais, comme l'équation du troisième ordre que vérifient les fonctions fuchsiennes et kleinéennes, cette équation du quatrième ordre se ramène, par un changement de variable et de fonction, à une équation linéaire du second ordre. Enfin, si l'on rend la fonction u homogène de degré $\frac{12}{6-k}$ par rapport à la variable x et à une nouvelle variable x_1, elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles remarquable

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial x_1}\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial x_1^3} + 3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial x_1^2}\right)^2 = 0.$$

Pour $k = 3, 4, 5$, le groupe de l'équation hypergéométrique est le groupe d'un polyèdre régulier, les fonctions u correspondantes sont des polynomes connus.

Parmi les types d'équations (2) dont je n'ai pas encore achevé l'étude, le plus intéressant est le type

$$(6) \qquad y''' = y^\lambda y'' - (\lambda + 1) y^{\lambda - 1} y'^2, \qquad \lambda \text{ entier positif.}$$

Je n'ai pu décider jusqu'ici si l'équation (6) a son intégrale générale uniforme. Cette intégrale ne possède ni points critiques algébriques, ni pôles: si elle n'avait pas de singularités transcendantes, elle serait une fonction entière. Mais il me parait vraisemblable qu'elle possède des singularités transcendantes et critiques: si l'on admet qu'il en est ainsi, le degré en y de l'équation (2) est limité, comme le degré en y de l'équation (1).

L'étude des équations (6) m'a conduit à considérer des équations dont *l'intégrale générale est uniforme*, ou a ses points critiques fixes, et dont *l'intégrale singulière a des points critiques mobiles:* l'existence de telles équations n'avait pas été signalée.

IV. La détermination des équations à points critiques fixes de la forme (2), et l'étude des difficultés arithmétiques et analytiques qu'elle soulève, offrent d'autant plus d'intérêt que, cette étude une fois épuisée, la détermination des équations à points critiques fixes de la forme

$$(7) \qquad y''' = R(y'', y', y, x),$$

R désignant une *fraction rationnelle* en y'', y', y à coefficients analytiques en x, ne présente aucune difficulté de nature nouvelle. Parmi ces équations (7), j'ai considéré spécialement (par opposition au cas où la simplifiée se réduit à $y''' = 0$) les équations dont les simplifiées sont les plus compliquées possible. Dans le cas où la simplifiée admet comme intégrale une fonction fuchsienne ou kleinéenne, l'intégrale générale de l'équation complète s'exprime par ces fonctions elles-mêmes.

Dans le cas où l'intégrale de la simplifiée possède des points essentiels isolés mobiles, il en est de même de l'intégrale générale de l'équation complète, et l'intégration de cette équation se ramène à l'intégration d'une équation à points critiques fixes du second ordre, suivie d'une quadrature.

Dans un troisième cas, la *simplifiée* est l'équation obtenue en éliminant les constantes A et B dans l'équation

$$y'^2 = AP + BQ,$$

P et Q désignant deux polynomes du quatrième degré en y à coefficients constants: parmi les équations à points critiques fixes admettant cette équation simplifiée, j'ai obtenu une équation de la forme

$$(E)\begin{cases} y''' = \sum \dfrac{(y'-a'_i)(y''-a''_i)}{y-a_i} + \sum \dfrac{A_i(y'-a'_i)^3 + B_i(y'-a'_i)^2 + C_i(y'-a'_i)}{y-a_i} \\ \qquad\qquad + Dy'' + Ey' + \Pi(y-a_i)\sum \dfrac{F_i}{y-a_i} \; (i=1,2,3,4,5,6) \end{cases}$$

dont les coefficients sont définis par un système différentiel et algébrique (S), et dépendent de six paramètres. J'ai démontré qu'effectivement *les intégrales de l'équation* (E) *ont leurs points critiques fixes;* elles n'ont, en dehors des points singuliers des coefficients, d'autres points singuliers que des pôles. Je n'ai pas achevé l'intégration du système (S), ni déterminé la classe d'équations irréductibles à laquelle appartient l'équation (E). J'ai toutefois montré que l'équation (E) admet les équations (A) comme dégénérescences, et par suite est *une équation nouvelle.*

V. Après la publication par M. Painlevé des équations (A, I), (A, II), M. Borel a groupé un certain nombre d'équations dont l'intégrale générale est une fonction entière, et a remarqué qu'en séparant dans ces équations les termes de poids le plus élevé par rapport aux indices de dérivation, on obtient des invariants usuels de formes binaires telles que

$$u^{(n)} + n\lambda u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 u^{(n-2)} + \cdots + n\lambda^{n-1}u' + \lambda^n u.$$

Je complète les remarques de M. Borel. Si dans les équations transformées en $u = e^{\int y\,dx}$ des équations (3) et des équations analogues, on sépare les termes de poids le plus élevé, on obtient le discriminant de la forme cubique en λ: ce qui rattache les équations (A) à ce discriminant. D'autre part de tout invariant d'une forme binaire on peut déduire une équation différentielle, et d'une classe d'invariants, on déduit une suite d'équations différentielles. Dans la suite d'équations déduite de certaines classes d'invariants, des discriminants par exemple, l'intégrale générale de chaque équation est entière, et s'exprime par la fonction exponentielle. Pour d'autres classes d'invariants au contraire, seules les premières équations de la suite ont leur intégrale générale entière. Tel est le cas des deux équations $u u'' - u'^2 = 0$, $u u^{IV} - 4 u' u''' + 3 u''^2 = 0$: j'ai obtenu pour l'équation suivante

$$u u^{VI} - 6 u' u^{V} + 15 u'' u^{IV} - 10 u'''^2 = 0$$

une intégrale entière dépendant de cinq constantes: je n'ai pu décider si l'intégrale générale est une combinaison de fonctions classiques, n'est pas uniforme, ou est une fonction uniforme nouvelle; les autres équations de cette suite n'on pas leur intégrale générale uniforme. Il est à remarquer que l'équation que nous venons d'obtenir par induction à partir des remarques de M. Borel, peut être obtenue aussi par application de la méthode de M. Painlevé: cette méthode conduit à l'équation plus générale

$$u u^{VI} - 6 u' u^{V} + 15 u'' u^{IV} - 10 u'''^2 = \alpha (u u'' - u'^2) - \beta u^2, \quad \alpha, \beta \text{ constantes arbitraires,}$$

au sujet de laquelle se posent les mêmes questions.

VI. Les solutions de plusieurs des problèmes que nous rencontrons restent incomplètes, et le plus important de nos résultats, la découverte d'une équation à points critiques fixes nouvelle, est lui-même imparfait, puisque nous ne donnons pas l'expression explicite des coefficients de cette équation. En premier lieu, une fois que l'on a exprimé que les intégrales n'ont pas de points critiques algébriques, ni de points critiques transcendants de certaines catégories, l'étude d'une équation différentielle du troisième ordre et d'ordre supérieur devient un problème de la plus profonde difficulté: comme le montre l'exemple des solutions que M. Poincaré et M. Klein ont données de ce problème dans le cas des équations fuchsiennes et kleinéennes. En second lieu, il est possible que la méthode de M. Painlevé (conditions nécessaires), qui offre l'intérêt de fournir toutes les équations à points critiques fixes, ne les présente pas sous la forme la plus simple. Rappelons à ce sujet que l'équation (A, VI) a été retrouvée[1] par M. R. Fuchs dans l'étude des équations linéaires du second ordre dont le groupe est indépendant d'un paramètre: ce qui constitue une propriété des équations (A). Depuis, M. Schlesinger a généralisé le problème traité par M. R. Fuchs, et a obtenu[2] des systèmes différentiels d'ordre aussi élevé qu'on veut, et de forme élégante; d'après M. Schlesinger, ces systèmes différentiels ont leurs points singuliers fixes. Peut-être l'équation (E) est-elle équivalente à l'un d'entre eux.

---

[1] Comptes Rendus, 2 octobre 1905.

[2] Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 1908), vol. II, p. 64.

Équations simplifiées des équations à points critiques fixes de la forme $y''' = R(y'', y', y, x)$, où R désigne une fraction rationnelle en y'', y', y à coefficients analytiques en x.

1. M. Painlevé a indiqué les premières conditions nécessaires pour qu'une équation de cette forme ait ses points critiques fixes. R doit être un polynome du second degré en y'':

$$y''' = A(y', y, x)\, y''^2 + B(y', y, x)\, y'' + C(y', y, x). \tag{8}$$

La fraction A a nécessairement l'une des formes:

$0, \dfrac{1-\frac{1}{n}}{y'+a_1}$ (n désignant un entier positif, négatif ou infini, mais différent de -1),

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'+a_1}+\frac{1}{y'+a_2}\right), \frac{1}{y'+a_1}+\frac{1}{2(y'+a_2)}, \frac{1}{2(y'+a_1)}+\frac{2}{3(y'+a_2)},$$

$$\frac{1}{2(y'+a_1)}+\frac{3}{4(y'+a_2)}, \frac{1}{2(y'+a_1)}+\frac{5}{6(y'+a_2)}, \frac{2}{3}\left(\frac{1}{y'+a_1}+\frac{1}{y'+a_2}\right),$$

$$\frac{2}{3(y'+a_1)}+\frac{5}{6(y'+a_2)}, \frac{3}{4}\left(\frac{1}{y'+a_1}+\frac{1}{y'+a_2}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'+a_1}+\frac{1}{y'+a_2}+\frac{1}{y'+a_3}\right),$$

les a_i désignant des fonctions rationnelles de y et analytiques de x. Tout pôle $y' = g(y, x)$ des fractions rationnelles B et C est d'ordre 1 au plus, et coïncide avec un pôle de A. Enfin les degrés d'infinitude pour $y' = \infty$ de B et C sont 1 et 3 au plus.

Faisons dans l'équation (8) la substitution $(x, x_0 + \alpha x)$: elle devient, d'après cela,

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y, x_0)\, y' y'' + c(y, x_0)\, y'^3 + \alpha(\cdots).$$

M. Painlevé appelle *simplifiée* de l'équation (8) l'équation

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y)\, y' y'' + c(y)\, y'^3. \tag{9}$$

Cette équation simplifiée doit avoir son intégrale générale uniforme. Le problème préliminaire se pose donc de déterminer les équations (9) dont l'intégrale générale est uniforme: n est un entier positif, négatif ou infini, mais différent de -1, $b(y)$ et $c(y)$ sont deux fonctions rationnelles. M. PAINLEVÉ a énoncé la solution de ce problème: l'intégrale générale s'exprime par les fonctions automorphes, leurs dégénérescences, ou des combinaisons de ces dégénérescences.[1] Nous allons préciser dans les différents cas la nature de l'intégrale.

L'équation (9) ne change pas dans la transformation à deux paramètres $(x, x_0 + \alpha x)$; l'expression $v = \dfrac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\frac{dx}{dy}}$ ne change pas non plus, elle vérifie donc une équation du premier ordre, qu'on forme aussitôt:

$$\frac{dv}{dy} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) v^2 + b(y)\, v - c(y).$$

C'est une équation de RICCATI, qui se ramène à une équation linéaire du second ordre, et en définitive l'équation (9) peut être remplacée par le système

$$\frac{dx}{dy} = u^{-\frac{n}{n+1}} \qquad \frac{d^2u}{dy^2} = b(y)\frac{du}{dy} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) c(y)\, u, \tag{10}$$

qui va nous permettre de l'étudier.

2. Au voisinage d'un point y_0 régulier pour $b(y)$ et $c(y)$, les intégrales de l'équation linéaire admettent le développement

$$u = A + B(y - y_0) + \cdots,$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. La première équation (10) fait correspondre à un cercle de centre y_0 du plan des y un certain domaine du plan des x. Inversement, quand x varie dans ce domaine, $y - y_0$ est fonction uniforme de x, pour $A \neq 0$. Pour $A = 0$, si n est positif ou négatif, mais différent de -2, $(y - y_0)^{\frac{1}{n+1}}$ est fonction uniforme de x; si n est infini, $\log(y - y_0)$ est fonction uniforme de x; si enfin n est égal à -2, l'uniformité de y entraîne nécessairement la condition $b(y_0) = 0$.

Donc, pour $n = -2$, $b(y)$ est identiquement nul. L'intégrale générale peut alors recevoir la forme $y = f\left(\dfrac{Ax + B}{Cx + D}\right)$, A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires.

---

[1] En toute rigueur, l'intégrale s'exprime par les fonctions automorphes, elliptiques, exponentielles, rationnelles, logarithmiques, les fonctions ζ, σ, ou par des combinaisons de ces fonctions.

Considérons un pôle a de $b(y)$ et $c(y)$. Les intégrales de l'équation linéaire doivent être régulières au sens de Fuchs au voisinage de ce pôle:

$$b(y) = \frac{\beta}{y-a} + \cdots, c(y) = \frac{\gamma}{(y-a)^2} + \frac{\delta}{y-a} + \cdots$$

Les racines r_1 et r_2 de l'équation déterminante doivent être de la forme

$$r_1 = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{N_1}\right), r_2 = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{N_2}\right),$$

N_1 et N_2 désignant des entiers positifs, négatifs ou infinis. D'où:

$$\beta = \frac{n+2}{n} - \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right), \gamma = -\frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{N_1}\right)\left(1 - \frac{1}{N_2}\right).$$

Alors $(y-a)^{\frac{1}{N_1}}$ ou $(y-a)^{\frac{1}{N_2}}$ (ou $\log(y-a)$) sont uniformes pour les intégrales correspondantes. De plus, si N_1 est fini, $\frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)$ doit être un nombre entier K_1; si N_2 est fini, $\frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right)$ doit être un nombre entier K_2. Si la différence $r_2 - r_1$ est un entier non nul, le développement des intégrales de l'équation linéaire au voisinage de $y = a$ ne doit pas contenir de logarithme: en particulier, si β et γ sont nuls, δ l'est aussi. Si r_2 et r_1 sont égaux, le nombre correspondant $N_2 = N_1$ doit être infini.

Considérons enfin la valeur $y = \infty$: par une transformation homographique préalable effectuée sur y, nous pouvons supposer que $y = \infty$ n'est pas un pôle de l'équation, c'est-à-dire que $z = 0$ n'est pas un pôle de l'équation transformée en $z = \frac{1}{y}$. D'où les nouvelles conditions:

$$b(y) = \sum \frac{\beta}{y-a}, \quad c(y) = \sum \left(\frac{\gamma}{(y-a)^2} + \frac{\delta}{y-a}\right);$$

le signe $\sum$ est étendu à tous les pôles, h désigne leur nombre;

$$\sum \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right) = \frac{n+2}{n+1}(h-2), \tag{11}$$

$$\sum \delta = 0, \quad \sum \delta a = -\frac{h}{n} + \frac{n+1}{n} \sum \frac{1}{N_1 N_2}, \quad \sum \delta a^2 = -2\frac{\Sigma a}{n} + 2\frac{n+1}{n} \sum \frac{a}{N_1 N_2}.$$

Les pôles se classent en plusieurs sortes, suivant les valeurs des entiers K_1 et K_2. Sauf dans le cas où N_1 et N_2 sont infinis, les entiers K_1 et K_2 sont liés par la relation

$$\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}=\frac{n}{n+1},$$

qui admet, quel que soit n, la solution $K_1=1$, $K_2=-(n+1)$, et qui admet en outre les solutions:

pour $n=1$, $2, \infty; 3, 6; 4, 4;$
pour $n=2$, $2, 6; 3, 3;$
pour $n=3$, $2, 4;$
pour $n=5$, $2, 3;$
ponr $n=\infty$, $2, 2.$

3. Une première catégorie d'équations simplifiées est celle des équations pour tous les pôles desquelles, ou bien les nombres K_1 et K_2 sont 1 et $-(n+1)$ d'où $N_2=(n+1)N_1$, ou bien les nombres N_1 et N_2 sont infinis. On a dans les deux cas

$$\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{N_1},$$

et l'équation (11) devient, pour $n \neq -2$, $\sum\frac{1}{N_1}=h-2$: h est un nombre entier positif,[1] et les N_1 sont des entiers positifs, négatifs ou infinis, mais différents de 1. On reconnaît l'équation en nombres entiers à la résolution de laquelle Briot et Bouquet ont ramené le problème: déterminer toutes les équations de la forme

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^m=P(y),$$

m désignant un entier positif, et $P(y)$ un polynome en y à coefficients constants, dont l'intégrale $y(z)$ est uniforme. Si l'on suppose la valeur $y=\infty$ régulière, l'intégration d'une telle équation se ramène à la quadrature

$$z=\int\frac{dy}{(y-a)^{1-\frac{1}{N}}(y-b)^{1-\frac{1}{N'}}\cdots},$$

les quantités $a, b, \ldots$ désignant des constantes distinctes, et les nombres $N, N', \ldots$ des entiers positifs, négatifs ou infinis, en nombre h et satisfaisant à la relation $\sum\frac{1}{N}=h-2$. Ces quadratures sont les suivantes

[1] Pour $n=-2$, h peut être nul, mais non égal à 1.

$$
(12)\begin{cases}
z=\int\frac{dy}{(y-a)^2},\ z=\int\frac{dy}{(y-a)^{1-\frac{1}{N}}(y-b)^{1+\frac{1}{N}}}\ (N\ \text{entier} > 1),\ z=\int\frac{dy}{(y-a)(y-b)},\\
z=\int\frac{dy}{(y-a)\sqrt{(y-b)(y-c)}},\ z=\int\frac{dy}{(y-a)^{\frac{2}{3}}(y-b)^{\frac{2}{3}}(y-c)^{\frac{2}{3}}},\ z=\int\frac{dy}{(y-a)^{\frac{1}{2}}(y-b)^{\frac{3}{4}}(y-c)^{\frac{3}{4}}},\\
z=\int\frac{dy}{(y-a)^{\frac{1}{2}}(y-b)^{\frac{2}{3}}(y-c)^{\frac{5}{6}}},\ z=\int\frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}}.
\end{cases}
$$

Il résulte que le nombre des pôles de $b(y)$ et $c(y)$ est 1, 2, 3 ou 4. Soient $a, b, \ldots$ ces pôles et $N, N', \ldots$ les nombres N_1 qui leur sont relatifs: formons l'équation à laquelle satisfait la fonction z définie par la quadrature correspondante. C'est une équation du type (9): au voisinage de $y=a$, les différentes valeurs de z sont fonctions uniformes de $(y-a)^{\frac{1}{N}}$ et les entiers N_1 et N_2 qui leur correspondent dans l'équation en z sont 1 et $n+1$: ces valeurs sont donc régulières pour cette équation.

Pour $h\leq 3$, elle est nécessairement

$$z'''=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z''^2}{z'};$$

pour $h=4$, elle peut avoir cette forme. D'où l'intégration:

$$z=(Ax+B)^{n+1}+C;\quad z=e^{Ax+B}+C,\ \text{si } n \text{ est infini.}^1$$

y est fonction rationnelle de z, ou de $e^{\lambda z}$, λ désignant une constante numérique, ou fonction elliptique de z. y est fonction rationnelle ou méromorphe de x, excepté dans les cas où n est négatif et où z s'exprime en y par l'une des six dernières quadratures: y admet alors le point essentiel isolé $x=-\frac{B}{A}$. On voit nettement la manière dont les trois constantes figurent dans l'intégrale générale: pour $n=-2$, on retrouve la forme indiquée.

Pour $h=4$, les conditions obtenues ne suffisent pas à déterminer les coefficients de l'équation. L'équation transformée en

$$z=\int\frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}}$$

peut s'écrire

$$z'''=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z''^2}{z'}+\frac{n+1}{n\lambda^2}z'^3,$$

[1] Nous désignons d'une façon générale dans cette étude par A, B, C, D des constantes d'intégration, et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ des constantes numériques.

λ désignant un paramètre arbitraire. La fonction $z'(x)$ a deux déterminations au plus, et ne saurait avoir de points critiques logarithmiques; par suite il résulte de l'étude des équations du second ordre que, si λ n'est pas infini, n a nécessairement l'une des quatre valeurs: $1, 2, \infty, -2$. z' est fonction rationnelle de x pour $n = -2$, de e^{Cx} pour $n = \infty$, fonction elliptique de x pour $n = 1, 2$, et dans les quatre cas admet des pôles simples de résidus $\pm \lambda$. Pour que la fonction $y(x)$ soit uniforme, il faut ajouter aux conditions algébriques obtenues la condition transcendante que $2\pi i \lambda$ soit période de l'intégrale elliptique $z(y)$. La fonction $y(x)$ admet alors les pôles de la fonction z' comme points essentiels isolés mobiles.

On peut exprimer l'intégrale générale $z(x)$ sous les formes suivantes

$$\text{pour } n = -2, \; z = \lambda \log \frac{Ax+B}{Cx+D};$$

$$\text{pour } n = \infty, \quad z = \lambda \log \frac{e^{Ax+B} - 1}{e^{Ax+B} + 1} + C;$$

$$\text{pour } n = 1, \quad z = \lambda \log \frac{\sqrt{p(Ax+B; 4, 0)}}{\sqrt{1 + p(Ax+B)} + \sqrt{1 - p(Ax+B)}} + C;$$

$$\text{pour } n = 2, \quad z = \lambda \log \frac{\sigma(Ax+B-h)}{\sigma(Ax+B+h)} + 2\lambda(Ax+B)\zeta h + C, \text{ avec } p\left(h; 0, -\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0.$$

4. La valeur $n = -2$ est tout à fait exceptionnelle.[1] Pour cette valeur, ou bien K_1 et K_2 sont égaux à 1, d'où $N_2 = -N_1$, ou bien N_1 et N_2 sont infinis. Les coefficients γ sont donc de la forme $-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N^2}\right)$, N désignant un entier plus grand que 1, qui peut être infini: c'est la forme connue dans la théorie des fonctions automorphes. D'ailleurs la différence $r_2 - r_1 = \frac{1}{N}$ n'est un nombre entier que pour $N = \infty$: nous avons donc seulement trois équations entre les coefficients δ.

Pour $h = 3$, nous obtenons comme équations dont l'intégrale générale est uniforme, outre les équations du n° 3: pour $\sum \frac{1}{N} > 1$, des équations dont l'intégrale

[1] Pour $n = -2$, la relation entre l'équation (9) et l'équation linéaire du système (10) est bien connue. Pour $n \neq -2$, si l'équation simplifiée est de la première catégorie, l'équation linéaire est encore *normale*, suivant le terme de M. Poincaré: la différence des racines de l'équation déterminante relative à chaque pôle est nulle, ou est une partie aliquote de l'unité, d'après les relations $r_2 - r_1 = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right) = \frac{1}{N_1}$. La variable x est encore fonction uniforme du rapport des intégrales de l'équation linéaire; et d'après l'équation $\sum \frac{1}{N_1} = h - 2$, cette fonction uniforme est une fonction fuchsienne dégénérée. Voir *Acta mathematica*, t. IV, p. 226.

générale est rationnelle, et se rattache à la théorie des polyèdres réguliers; pour $\sum \frac{1}{N} < 1$, des équations dont les intégrales sont les fonctions de SCHWARZ. Ces fonctions admettent comme coupure essentielle une droite ou une circonférence variable avec les constantes d'intégration, et ne sont définies que dans la partie du plan située d'un côté de la droite, à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence. Les plus remarquables sont la fonction modulaire d'HERMITE, c'est-à-dire le carré k^2 du module de JACOBI, considéré comme fonction du rapport des périodes de l'intégrale elliptique, qui vérifie l'équation correspondant aux valeurs des entiers ∞, ∞, ∞; et l'invariant absolu J de M. KLEIN considéré comme fonction de la même variable, qui vérifie l'équation correspondant aux entiers $2, 3, \infty$. Ces deux fonctions admettent comme coupure l'axe réel. Elles sont liées par l'équation algébrique

$$\frac{J}{J-1} = \frac{(k^4 - k^2 + 1)^3}{(k^2+1)^2 (k^2 - \frac{1}{2})^2 (k^2 - 2)^2} \text{ ou } J = \frac{4(k^4 - k^2 + 1)^3}{27 k^4 (k^2 - 1)^2}$$

qui montre la correspondance des valeurs $J = 0$, $J = 1$ à des valeurs régulières de k^2; la fonction k^2 n'atteint pas les valeurs $0, 1, \infty$, et la fonction J n'atteint pas la valeur correspondante, ∞.

Pour $h \geq 4$ (h n'est pas limité), excepté l'intégrale de l'équation obtenue au n° 3, les intégrales uniformes sont des fonctions fuchsiennes ou kleinéennes. Les fonctions fuchsiennes admettent une circonférence comme coupure essentielle, ou bien possèdent un ensemble parfait de points singuliers, discontinu et situé sur une circonférence: dans ce second cas, le prolongement analytique de WEIERSTRASS définit la fonction dans tout le plan. Les fonctions kleinéennes possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers, ou bien admettent comme coupures essentielles une ligne non analytique, ou encore une infinité de circonférences. Toutes ces singularités sont mobiles, puisque l'intégrale générale se déduit d'une intégrale particulière en y remplaçant x par $\frac{Ax+B}{Cx+D}$. On sait comment la théorie des groupes fuchsiens et kleinéens fournit de nouvelles conditions nécessaires pour que l'intégrale soit uniforme, sous la forme d'égalités ou d'inégalités transcendantes entre les coefficients de l'équation, comment elle permet de démontrer que ces conditions sont suffisantes, et de distinguer la nature des intégrales.

5. Pour les valeurs de n: $1, 2, 3, 5, \infty$, il peut exister d'autres sortes de pôles. *L'équation linéaire du second ordre a alors son intégrale algébrique.* Et les équations simplifiées de cette seconde catégorie se ramènent aux équations du premier

ordre suivantes, dont l'intégrale est uniforme d'après la discussion de Briot et Bouquet que nous avons rappelée:

$$
(13)\quad \begin{cases}
y'^2 = A(a_0 y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4) + B(b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4), \\
y'^{\frac{3}{2}} = A(a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3) + B(b_0 y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3), \\
y'^{\frac{4}{3}} = A(a_0 y^2 + a_1 y + a_2) + B(b_0 y^2 + b_1 y + b_2). \\
y'^{\frac{6}{5}} = y^{\frac{3}{5}}(Ay + B), \\
y' = A(a_0 y^2 + a_1 y + a_2) + B(b_0 y^2 + b_1 y + b_2).
\end{cases}
$$

Les a_i, b_i désignent des constantes numériques, et A, B deux constantes d'intégration.

Soit par exemple $n = 1$. Supposons que pour tous les pôles d'une équation simplifiée les nombres N_1 et N_2 soient égaux à deux des nombres $\pm 1, \pm 2, \infty$, sans être tous deux infinis: les nombres r_1 et r_2 sont entiers positifs ou nuls. L'intégrale générale de l'équation linéaire correspondante est holomorphe pour toute valeur finie de y, et, comme la valeur $y = \infty$ est régulière, cette intégrale est nécessairement un polynome du quatrième degré: l'équation simplifiée considérée admet une équation de la forme (13) comme intégrale intermédiaire. Mais, même si les nombres r_1, r_2 ne sont pas tous entiers positifs ou nuls, l'équation simplifiée peut se ramener à une équation (13). Si les quatre nombres N_1, N_2, N'_1, N'_2 relatifs à deux pôles a et b admettent un diviseur commun N (∞ étant considéré comme multiple de tout nombre fini), l'équation transformée en $z = \left(\frac{y-a}{y-b}\right)^{\frac{1}{N}}$ a son intégrale générale uniforme, et est du type (9). Toutes les équations simplifiées dont l'intégrale générale est uniforme, et qui ne sont pas de la première catégorie, ou bien admettent une intégrale intermédiaire de la forme (13), ou bien se ramènent à une équation admettant une telle intégrale intermédiaire par un des changements de fonction

$$
(y, y^N);\ \left[y, \left(\frac{y^N - 1}{y^N + 1}\right)^2\right]\ (N \text{ entier } > 1);\ \left[y, \left(\frac{y^4 - 2i\sqrt{3}\,y^2 + 1}{y^4 + 2i\sqrt{3}\,y^2 + 1}\right)^3\right],
$$

en négligeant les changements de fonction homographiques. On reconnaît les fractions rationnelles inaltérées par les substitutions du groupe cyclique, du groupe du dièdre et du groupe du tétraèdre: on sait que ces fractions s'introduisent dans l'intégration de l'équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques, dont l'intégrale est algébrique.

Pour cette catégorie d'équations simplifiées, l'intégrale générale est donc fonction elliptique de x, ou fonction rationnelle de $e^{\lambda x}$. Mais ici le module des fonctions elliptiques, ou le nombre λ, dépend des constantes d'intégration, tandis que, pour les équations de la première catégorie, il en était indépendant.

Si nous considérons la première équation (13), et si nous posons

$$P = a_0 y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4, \quad Q = b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4,$$

l'élimination des constantes A et B donne l'équation simplifiée

$$y''' = \frac{PQ'' - QP''}{PQ' - QP'} y' y'' - \frac{P'Q'' - Q'P''}{PQ' - QP'} \frac{y'^3}{2}. \tag{14}$$

Cette équation simplifiée a six pôles, si les coefficients de P et Q sont arbitraires, et les entiers N_1, N_2 relatifs à ces pôles sont $1, \infty$. Effectivement la discussion de l'équation arithmétique (11) montre que, pour $n = 1$, ce nombre 6 ne peut être dépassé, et que s'il est atteint, c'est par une équation (14).

Pour n différent de 1 et -2, le nombre des pôles est 4 au plus. Il est donc limité pour toutes les valeurs de n, excepté -2.

Équations à points critiques fixes de la forme $y''' = P(y'', y', y, x)$, où P désigne un polynome en y'', y', y à coefficients analytiques en x.

6. Les degrés de ce polynome en y'' et y' sont limités par les propositions de M. Painlevé que nous avons rappelées: la simplifiée est

$$y''' = b(y) y' y'' + c(y) y'^3,$$

$b(y)$ et $c(y)$ désignant des polynomes en y. Il résulte de la discussion du chapitre précédent que ces deux polynomes sont identiquement nuls. Les équations considérées ont donc nécessairement la forme

$$y''' = Q(y, x) y'' + R(y, x) y'^2 + S(y, x) y' + T(y, x), \tag{15}$$

Q, R, S, T désignant des polynomes en y à coefficients analytiques en x. Elles admettent comme simplifiée $y''' = 0$, et la réciproque est vraie.

Pour étudier au voisinage du point x_0 les intégrales qui deviennent infinies en ce point, mettons en évidence les termes de degré le plus élevé en y:

$$y''' = (a(x) y^m + \cdots) y'' + (b(x) y^n + \cdots) y'^2 + (c(x) y^p + \cdots) y' + d(x) y^q + \cdots,$$

et faisons la substitution $\left(x, y; x_0 + \alpha^\lambda x, \frac{y}{\alpha}\right)$, λ désignant le plus grand des nombres $m, n+1, \frac{p}{2}, \frac{q-1}{3}$. L'équation devient

$$(16) \qquad y''' = a(x_0)\, y^{\lambda} y'' + b(x_0)\, y^{\lambda-1} y'^2 + c(x_0)\, y^{2\lambda} y' + d(x_0)\, y^{3\lambda+1} + \alpha(\ldots),$$

si les quatre nombres sont égaux; s'ils ne sont pas égaux, l'équation prend une forme analogue, mais un ou plusieurs des coefficients $a(x_0)$, $b(x_0)$, $c(x_0)$, $d(x_0)$ sont nuls, et le développement peut procéder suivant les puissances de $\alpha^{\frac{1}{2}}$ ou de $\alpha^{\frac{1}{3}}$. Dans tous les cas, l'équation *réduite* pour $\alpha = 0$

$$(17) \qquad y''' = a\, y^{\lambda} y'' + b\, y^{\lambda-1} y'^2 + c\, y^{2\lambda} y' + d\, y^{3\lambda+1}$$

doit avoir son intégrale générale uniforme. Le problème se pose donc de déterminer les équations de la forme (17) dont l'intégrale générale est uniforme: les quantités a, b, c, d sont des constantes, dont l'une au moins n'est pas nulle; λ est un nombre positif entier ou fractionnaire; s'il est fractionnaire, a et b sont nuls et, si c n'est pas nul, 2λ est entier, si d n'est pas nul, 3λ est entier.

Remplaçons l'équation (17) par le système

$$y' = u y^{\lambda+1} \qquad \frac{u''}{y^{2\lambda}} + [3(\lambda+1)u - a]\frac{u'}{y^{\lambda}} + (\lambda+1)(2\lambda+1)u^3 - [(\lambda+1)a + b]u^2 - cu - d = 0.$$

Nous voyons de suite que, si l'on n'a pas

$$(\lambda + 1)a + b = c = d = 0,$$

la seconde équation admet au moins une intégrale de la forme $u = h$, h désignant une constante non nulle, et la première équation fait correspondre à cette intégrale l'intégrale définie par l'équation $y^{-\lambda} = -\lambda h(x + C)$, C désignant une constante d'intégration. Cette dernière intégrale, pour $\lambda > 1$, a un point critique algébrique mobile, et par suite l'intégrale générale n'est pas uniforme.

Ainsi, ou bien l'équation réduite est

$$(18) \qquad y''' = y^{\lambda} y'' - (\lambda + 1)\, y^{\lambda-1} y'^2$$

(si a n'est pas nul, on peut lui donner telle valeur numérique qu'on veut, en multipliant y par une constante), ou bien λ est égal ou inférieur à 1. Réservons l'étude de l'équation (18), et supposons d'abord λ égal à 1.

L'équation réduite

$$y''' = a\, y y'' + b\, y'^2 + c y^2 y' + d y^4$$

peut être remplacée par le système

$$(19) \qquad y' = u y^2 \qquad \frac{u''}{y^2} + (6u - a)\frac{u'}{y} = -6u^3 + (2a + b)u^2 + cu + d = P(u).$$

Si nous réservons encore l'étude de l'équation

$$(20) \qquad y''' = yy'' - 2y'^2,$$

qui n'est autre que l'équation (18) où l'on fait $\lambda = 1$, les trois racines h, k, l du polynome $P(u)$ ne peuvent être nulles à la fois. Soit h une racine non nulle: à cette racine correspond l'intégrale $y = -\frac{1}{h(x+C)}$; nous allons étudier les intégrales voisines. Posons $u = h + \alpha v$, et développons v suivant les puissances de α. Le système (19) devient

$$y' = (h + \alpha v) y^2 \qquad \frac{v''}{y^2} + (6h - a)\frac{v'}{y} + 6v(h-k)(h-l) = \alpha(\ldots),$$

d'où, pour $\alpha = 0$:

$$y = -\frac{1}{h(x+C)} \qquad (x+C)^2 v''_0 - \left(6 - \frac{a}{h}\right)(x+C)v'_0 + 6\frac{(h-k)(h-l)}{h^2} v_0 = 0.$$

Posons $v_0 = (x+C)^r$, et soient r_1, r_2 les deux racines de l'équation caractéristique:

$$r_1 + r_2 = 7 - \frac{a}{h}, \quad r_1 r_2 = 6\frac{(h-k)(h-l)}{h^2}.$$

r_1 et r_2 sont deux nombres entiers différents, si v_0 est uniforme. Aucun d'eux n'est nul: sinon, le polynome $P(u)$ aurait une racine double, ou triple, différente de zéro, et la fonction v_1, ou v_2, contiendrait un logarithme. Aucun des deux entiers n'est égal à -1, puisque u, et par suite v, sont dérivées de fonctions uniformes.

Si le polynome $P(u)$ a deux racines nulles, le produit $r_1 r_2$ relatif à la troisième est égal à 6: r_1 et r_2 peuvent être

I	1 et 6,	d'où l'équation $y''' + 6y'^2 = 0$,	d'où $y''^2 + 4y'^3 + C = 0$;
II	2 et 3	$y''' = 2yy'' + 2y'^2$	$y'' = 2yy' + C$;
III	-2 et -3	$y''' = 2yy'' - 3y'^2$.	

Si le polynome $P(u)$ a une seule racine nulle, les produits $r_1 r_2$ relatifs aux deux autres h et k doivent être des nombres entiers:

$$6\frac{h-k}{h} = N, \quad 6\frac{k-h}{k} = N',$$

d'où l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} = \frac{1}{6}.$$

Il faut résoudre cette équation en nombres entiers, faire pour les deux nombres N, N' de chaque solution la discussion que nous venons de faire pour le nombre 6: les valeurs de a calculées à partir des deux nombres doivent être égales. On est conduit ainsi aux cinq équations

$$\begin{array}{lll}
\text{IV} & y''' = 3yy'' + 3y'^2 - 3y^2y', \text{ d'où} & y'' = 3yy' - y^3 + C, \\
\text{V} & y''' = 2yy'' + 4y'^2 - 2y^2y' & y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + 2yy' - \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{C}{y}, \\
\text{VI} & y''' = yy'' + 5y'^2 - y^2y' & (y'' - yy' - y^3)^2 = \dfrac{8}{3}(y' - y^2)^2\left(y' + \dfrac{y^2}{2}\right) + C, \\
\text{VII} & y''' = yy'' + 2y'^2 + 2y^2y' & y'' = \dfrac{y'^2}{2y} + yy' + \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{C}{y}, \\
\text{VIII} & y''' = 6y^2y' & y'' = 2y^3 + C.
\end{array}$$

Si le polynome $P(u)$ a ses trois racines différentes de zéro, le produit $r_1 r_2$ relatif à chacune d'elles est un nombre entier:

$$6\frac{(h-k)(h-l)}{h^2} = N, \quad 6\frac{(k-l)(k-h)}{k^2} = N', \quad 6\frac{(l-h)(l-k)}{l^2} = N'',$$

d'où l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} + \frac{1}{N''} = \frac{1}{6}. \tag{21}$$

Soit d'abord $a = 0$. Pour les trois racines, la somme $r_1 + r_2$ est égale à 7: les trois nombres $49 - 4N$, $49 - 4N'$, $49 - 4N''$ doivent être carrés parfaits. D'après l'équation arithmétique (21), l'un au moins des nombres N, N', N'' est positif, et par suite égal à $6, 10$ ou 12. Si l'un était 6, un autre serait $6, 10$ ou 12, et le troisième -6, -10 ou -12, ce qui est impossible. Si l'un est 10, les deux autres peuvent être 10 et -30, ou 12 et -60, d'où les deux équations

$$\begin{array}{ll}
\text{IX} & y''' + 6y'^2 = 18(y' + y^2)(y' + 3y^2), \\
\text{X} & y''' = 6y^2y' + 3\dfrac{9 + 7\sqrt{3}}{11}(y' + y^2)^2.
\end{array}$$

Si l'un des nombres N, N', N'' est 12, un autre est nécessairement 10, c'est le cas précédent.

Supposons enfin a différent de zéro. Les rapports des racines h, k, l sont commensurables, et le produit

$$-6NN'N'' = 6^4\frac{(h-k)^2(k-l)^2(l-h)^2}{h^2k^2l^2}$$

est un carré parfait. On résoud l'équation (21) en nombres entiers tels que $-6NN'N''$ soit carré parfait, on fait pour les nombres N, N', N'' de chaque solution la discussion précédemment faite pour le nombre 6: les valeurs de a calculées à partir des trois nombres doivent être égales. On obtient les deux nouvelles équations

$$\text{XI} \qquad y''' = \frac{1-k^2}{2} y y'' + \left(\frac{1-k^2}{2} + 6\right) y'^2 - 3(1-k^2) y^2 y' + \frac{3(1-k^2)^2}{8} y^4$$

$$\text{ou } y' = \frac{1-k^2}{4} y^2 + z, \quad z'' = 6z^2 \quad (k \text{ entier } > 1, \text{ non multiple de } 6),$$

$$\text{XII} \qquad y''' = 2yy'' - 3y'^2 + \frac{4}{36-k^2}(6y' - y^2)^2 \quad (k \text{ entier } > 1, \text{ différent de } 6).$$

Remarquons que les entiers r_1, r_2 relatifs à une racine h du polynome $P(u)$ ont la signification suivante: s'ils sont positifs, ou si l'un d'eux r_1 est positif, les intégrales de l'équation réduite admettent des pôles simples de résidu $-\frac{1}{h}$, et dans les développements polaires correspondants, les coefficients des puissances $r_1 - 1$, $r_2 - 1$, ou le coefficient de la puissance $r_1 - 1$, sont arbitraires. De même, si r_1 et r_2 sont négatifs, ou si l'un d'eux r_2 est négatif, l'équation réduite est satisfaite formellement par des développements suivant les puissances de $\frac{1}{x+C}$, dont le premier terme est $-\frac{1}{h(x+C)}$, et dans lesquels les coefficients de $(x+C)^{r_1-1}$ et de $(x+C)^{r_2-1}$, ou le coefficient de $(x+C)^{r_1-1}$, sont arbitraires: ces développements convergent si $|x+C|$ est assez grand, et représentent[1] des intégrales au voisinage de la valeur $x = \infty$.

Si λ est inférieur à 1, l'équation réduite a l'une des formes

$$y''' = dy^3, \; y''' = cyy', \; y''' = dy^2,$$

ou enfin l'équation (15) est linéaire.

L'équation $y''' = dy^3$, dans laquelle λ est égal à $\frac{2}{3}$, admet des intégrales de la forme $\frac{m}{(x+C)^{\frac{3}{2}}}$, m désignant une constante; l'intégrale générale n'est pas uniforme.

L'équation

$$\text{XIII} \qquad y''' = cyy', \text{ soit } y''' = 12yy'$$

admet l'intégrale première $y'' = 6y^2 + C$, elle est donc à retenir.

---

[1] Voir le n° 12.

L'équation $y''' = dy^2$, soit $y''' + 60\,y^2 = 0$ admet l'intégrale particulière $\frac{1}{(x+C)^3}$: étudions les intégrales voisines. Posons[1] $y = \frac{1}{(x+C)^3} + \alpha z$, et développons z suivant les puissances de α. z_0 est donné par l'équation linéaire d'EULER

$$z_0''' + \frac{120}{(x+C)^3} z_0 = 0,$$

dont l'équation caractéristique

$$r(r-1)(r-2) + 120 = (r+4)(r^2 - 7r + 30) = 0$$

a des racines imaginaires. z_0, et par suite l'intégrale générale ne sont pas uniformes.

7. Une transformation linéaire de la fonction et un changement de variable définis par les équations

$$y = \lambda(x)\,Y + \mu(x), \quad X = \varphi(x), \tag{22}$$

λ, μ, φ désignant des fonctions analytiques de x, n'altèrent ni la forme de l'équation (15), ni la nature des points critiques, fixes ou mobiles, de l'intégrale. On profite de l'indétermination de ces fonctions pour réduire les équations à points critiques fixes à des formes canoniques le plus simples possible, en particulier pour donner aux coefficients $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ les valeurs numériques des coefficients des équations réduites. Les coefficients λ, μ, φ de la transformation qui ramène une équation à points critiques fixes donnée à l'équation canonique correspondante sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation donnée et de leurs dérivées, si l'équation canonique n'admet pas de groupe de transformations en elle-même de la forme (22), dépendant de paramètres variables. Ils sont déterminés par des quadratures, si l'équation canonique admet une tel groupe de transformations à un ou deux paramètres. Enfin ils sont déterminés par des quadratures, et par l'intégration d'une équation linéaire du second ordre, dont les coefficients sont des fonctions algébriques des coefficients de l'équation donnée et de leurs dérivées, si l'équation canonique admet un tel groupe de transformations à trois paramètres.[2]

Au point de vue de la recherche des équations irréductibles, une quadrature et l'intégration d'un système linéaire doivent être considérées comme des opéra-

---

[1] On voit nettement ici que cette sorte de calcul revient à la formation de l'équation aux variation de M. POINCARÉ (ou de l'équation auxiliaire de M. DARBOUX) relative à une intégrale particulière connue. Voir le n° 25.

[2] Voir le n° 12, voir aussi le n° 18.

tions élémentaires, et en général nous ne préciserons pas la nature des opérations qui effectuent la réduction aux équations canoniques que nous considérerons.

8. Pour obtenir les équations à points critiques fixes admettant une équation réduite donnée, il faut écrire les termes complémentaires, et rechercher de nouvelles conditions nécessaires pour que l'équation complète ait ses points critiques fixes. On peut développer l'intégrale de l'équation (16) suivant les puissances du paramètre α, ou se servir des développements polaires. Si au voisinage d'un pôle le développement d'une intégrale de l'équation réduite contient un ou deux coefficients arbitraires, les intégrales de l'équation complète doivent admettre des pôles mobiles au voisinage desquels leur développement a le même terme prépondérant, et le, ou les mêmes coefficients arbitraires: sinon, comme M. GAMBIER l'a montré pour les équations du second ordre,[1] l'intégrale générale a des points critiques mobiles autour desquels elle acquiert une infinité de déterminations. Pour les équations du troisième ordre, les développements polaires dont deux coefficients sont arbitraires, fournissent plusieurs équations différentielles entre les coefficients.

9. Appliquons ces principes aux équations à points critiques fixes admettant comme équation réduite l'équation I. Les intégrales de ces équations ont des pôles mobiles, et admettent au voisinage des développements de la forme

$$y = \frac{1}{x - x_0} + \alpha + \beta(x - x_0) + \gamma(x - x_0)^2 + \delta(x - x_0)^3 + \varepsilon(x - x_0)^4 + \varphi(x - x_0)^5 + \cdots,$$

les coefficients α et φ étant arbitraires. Ces équations se ramènent à l'un des six types:

$$(23)\quad \begin{cases} y''' + 6y'^2 = \dfrac{g_2}{2}, \\ y''' + 6y'^2 = -x, \\ y''' + 6y'^2 = 6y + 3x^2, \\ y''' + 6y'^2 = 12xy + 2x^4 + \alpha, \\ y''' + 6y'^2 = 6\dfrac{y' + y^2}{x^2} + \alpha x^3(xy' - 2y) + \beta x^2 + \dfrac{\gamma}{x}, \\ y''' + 6y'^2 = 6p(x; 0, 1)(y' + y^2) + \alpha(2py' - p'y) + \beta\dfrac{\sigma(x+h)}{\sigma x}e^{-x\zeta h} + \gamma\dfrac{\sigma(x-h)}{\sigma x}e^{x\zeta h}, \end{cases}$$

$g_2, \alpha, \beta, \gamma$ désignant des paramètres arbitraires, et h une solution de l'équation transcendante $p(h; 0, 1) = 0$.

Chacune de ces équations est une dégénérescence de la suivante, comme il

---

[1] *Acta mathematica,* 1910.

arrive à certaines des équations (A). Nous allons montrer qu'elles se ramènent précisément aux équations (A). Elles admettent des facteurs intégrants, et par des transformations simples, deviennent les équations du second ordre

$$y''^2 + 4y'^3 - g_2 y' + g_3 = 0,$$

$$(B)\begin{cases} \text{I} & y''^2 + 4y'^3 + 2(xy' - y) = 0, \\ \text{II} & y''^2 + 4y'^3 + xy'^2 - yy' + \alpha = 0, \\ \text{III} & y''^2 + 4y'^3 + (xy' - y)^2 + \alpha y' + \beta = 0, \\ \text{IV} & \left(y'' - \dfrac{2y}{x^2}\right)^2 + 4\left(y' - \dfrac{2y}{x}\right)\left(y' + \dfrac{y}{x}\right)^2 + \alpha x^2 (xy' - 2y)^2 + \beta x(xy' - 2y) + \dfrac{\gamma}{x^2}(xy' + y) + \delta = 0, \\ \text{V} & (y'' - 2py)^2 + 4y'^3 - 12py^2y' + 4p'y^3 + \alpha(py'^2 - p'yy' + p^2y^2) + Hy' - H'y + \delta = 0, \end{cases}$$

$g_2, g_3, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des paramètres arbitraires, h une solution de la même équation transcendante et H la fonction à multiplicateurs constants $\beta\dfrac{\sigma(x+h)}{\sigma x}e^{-x\zeta h} + \gamma\dfrac{\sigma(x-h)}{\sigma x}e^{x\zeta h}$, intégrale de l'équation de Lamé $H'' = 2pH$.

De même, chacune de ces équations est une dégénérescence de la suivante. La première admet comme intégrale générale $y = \zeta(x + A; g_2, g_3) + B$. M. Painlevé a montré que l'équation (B, I) est transformée algébrique de l'équation (A, I): $y'' = 6y^2 + x$. Il résulte que les cinq équations (B) sont irréductibles sauf pour des valeurs exceptionnelles de leurs paramètres.

M. Painlevé a formé[1] pour l'équation (A, VI) une expression qui possède des pôles mobiles simples de résidu 1, comme l'intégrale générale de chacune des équations (B), et qui n'a pas d'autres points singuliers mobiles: c'est l'expression

$$z = \frac{x(x-1)y'^2}{2y(y-1)(y-x)} - \frac{\alpha y}{x(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)y} + \frac{\gamma}{x(y-1)} - \frac{y' - \delta}{y - x}.$$

Elle satisfait à une équation différentielle du second ordre, mais de degré élevé. Pour obtenir une équation transformée du second ordre et du second degré, il suffit d'employer un procédé que M. Painlevé a appliqué aux plus simples des équations (A). Les intégrales de l'équation (A, VI), qui ont pour pôle le point arbitraire x_0, admettent au voisinage le développement

$$y = \pm\frac{x(x-1)}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \frac{1}{x - x_0} + h + \cdots \text{ (pour } \alpha \neq 0),$$

le terme constant du développement étant arbitraire. Considérons alors la fonction

[1] *Comptes Rendus,* 24 décembre 1906.

$$t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{\sqrt{2\alpha}}{x(x-1)}\,y\right).$$

Pour cette fonction, les pôles de y correspondant au signe $-$ sont des points réguliers, et les pôles de y correspondant au signe $+$ sont des pôles simples de résidu 1. L'équation transformée en t est du second degré en t'', et les termes prépondérants au voisinage des pôles sont $t''^2 + 4t'^3$. Cette équation se ramène algébriquement à l'une des équations (B), en général à l'équation (B, V) qui renferme quatre paramètres. Ainsi *les deux équations* (A, VI) et (B, V) *sont transformées algébriques pour des valeurs arbitraires de leurs paramètres.* Les équations (B), et par suite les équations du troisième ordre (23), ont leurs points critiques fixes, ce sont seulement les points singuliers du coefficient différentiel.

La forme des équations (B) est particulièrement propre à l'étude de la croissance de leurs intégrales, du genre et de l'ordre des fonctions entières qu'on peut y rattacher. M. Boutroux a considéré à ce point de vue les équations (A, I), (A, II), (A, III):[1] nous pouvons compléter ses résultats. Si dans les équations (B) on pose $y = \frac{u'}{u}$, on obtient des équations du troisième ordre en u, dont les intégrales sont régulières en dehors des points singuliers du coefficient différentiel.

Les équations en u déduites des équations (B, I), (B, II), (B, III) ont comme intégrales générales des fonctions entières, et, si l'on admet que la croissance de ces fonctions entières est régulière, il résulte des équations (B) qu'elles sont de genres et d'ordres 2 et $\frac{5}{2}$, 3 et 3, 4 et 4. Dans la suite formée par la fonction $\sigma(x; g_2, g_3)$ et par ces trois fonctions entières, chacune est une dégénérescence de la suivante. La fonction entière d'ordre $\frac{5}{2}$ a été considérée par M. Boutroux. M. Boutroux a considéré la fonction $e^{-\int dx \int y^2 dx}$, y désignant une intégrale de l'équation (A, II): elle est le produit de $e^{\frac{x^3}{12}}$ et de deux fonctions entières définies par des équations (B, II), et par suite est comme elles de genre et d'ordre 3. L'étude des intégrales de l'équation (A, IV) se ramène à celle de la fonction entière de genre 4.

Les intégrales de l'équation en u déduite de l'équation (B, IV) sont régulières en dehors des deux points $0, \infty$. Par le changement de variable (x, e^x), l'intégrale générale devient une fonction entière de genre infini. La dérivée logarithmique satisfait à une équation telle que

$$(y''-y')^2 + 4y'^2(y'-y) + \alpha e^{2x}(y'-y)^2 + \beta e^x(y'-y) + \gamma e^{2x} + \delta e^x y' = 0:$$

[1] *Acta mathematica*, 1904.

on obtient de même l'ordre de grandeur de cette fonction entière. Pour $\alpha \neq 0$, le module maximum sur la circonférence de rayon r, $M(r)$, croît, si r est suffisamment grand, comme $e^{h e^{2r}}$, h désignant une constante: l'équation (B, IV) est alors transformée de l'équation (A, V). Pour $\alpha = 0$, l'équation (B, IV) est transformée de l'équation (A, III). Pour $\beta \neq 0$, le module maximum $M(r)$ croît comme $e^{h e^{r}}$; pour $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$, comme $e^{h e^{\frac{2}{3} r}}$; pour $\beta = \gamma = 0$, $\delta \neq 0$, comme $e^{h e^{\frac{1}{2} r}}$. Ces résultats concordent avec ceux que M. Boutroux a obtenus directement sur l'équation (A, III).

Les intégrales de l'équation en u déduite de l'équation (B, V) sont régulières en dehors des pôles de $p(x)$ et du point $x = \infty$. Avec la nouvelle variable $X = 4 p^3(x)$, elles sont régulières en dehors des trois points $0, 1, \infty$; et par le nouveau changement de variable $X = \varphi(\xi)$, $\varphi(\xi)$ désignant la fonction modulaire, elles deviennent des fonctions de ξ holomorphes au-dessus et au-dessous de l'axe réel, qui est pour elles une coupure essentielle.

Remarquons encore que l'intégrale générale de chacune des deux premières équations du troisième ordre (23) est fonction transcendante de deux constantes d'intégration et fonction rationnelle de la troisième: au contraire l'intégrale générale de chacune des quatre dernières équations (23) est fonction transcendante des trois constantes d'intégration (parce que l'intégrale générale de l'équation $y'' = 2y^3 + xy + \alpha$ est fonction transcendante des deux constantes d'intégration et du paramètre α).

Signalons enfin des transformées algébriques des équations (A), du second degré comme les équations (B), et curieuses en raison de leur élégance:

$$
(\mathrm{C}) \left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & y'' = 6y^2 + \alpha + x\sqrt{y'^2 - 4y^3 - 2\alpha y - \beta}, \\
\mathrm{II} & y'' = 2y^3 + \alpha y + \beta + 2i(y - e^x)\sqrt{y'^2 - y^4 - \alpha y^2 - 2\beta y - \gamma}, \\
\mathrm{III} & y'' = \alpha y + \beta + 2\dfrac{y}{x}\sqrt{y'^2 - \alpha y^2 - 2\beta y - \gamma}, \\
\mathrm{IV} & y'' = 6y^2 + \alpha y + \beta + \dfrac{2}{x}\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right)\sqrt{y'^2 - 4y^3 - \alpha y^2 - 2\beta y - \gamma}, \\
\mathrm{V} & y'' = 2y^3 + \alpha y + \beta + 2\,\mathrm{tg}\,x\left(y - \dfrac{\delta}{\sin x}\right)\sqrt{y'^2 - y^4 - \alpha y^2 - 2\beta y - \gamma}.
\end{array}
\right.
$$

Les quatre premières équations sont des dégénérescences de la cinquième. L'équation (C, V) est transformée de l'équation (A, VI), les équations (C, II) et (C, IV) sont transformées de l'équation (A, V), l'équation (C, I) de l'équation (A, IV), et l'équation (C, III) de l'équation (A, III). Dans les équations (C) l'élimination du radical conduit à des équations du troisième ordre de la forme (7), admettant comme simplifiée $y''' = \dfrac{y' y''}{y}$.

10. Les équations à points critiques fixes qui admettent comme équations réduites les équations II, IV, V, VII se ramènent à des équations du second ordre connues par les recherches de M. PAINLEVÉ et de M. GAMBIER. Chacune admet en effet comme équation réduite au voisinage de la valeur $y=\infty$ l'équation du second ordre, intégrale première de l'équation réduite du troisième ordre, dans laquelle on a annulé la constante C.

Il en est de même des équations à points critiques fixes admettant comme équations réduites les équations VIII et XIII, à l'exception d'équations qui se ramènent aux trois types

$$y''' = 6y^2 y' + 12xyy' + 4(x^2-\alpha)y' + 4y^2 + 4xy,$$
$$y''' = 12yy' + 6y - 6x,$$
$$y''' = 12yy' + \frac{y''-6y^2-\alpha}{x} + 12xy - 6x^3.$$

La première équation est l'équation (A, IV) différentiée de façon à éliminer la constante β. La deuxième et la troisième deviennent par la transformation $(y, -y')$ et par intégration, des équations du troisième ordre admettant comme équation réduite l'équation I.

Les équations à points critiques fixes admettant comme équation réduite l'équation VI se ramènent à l'équation

(24) $$y''' = yy'' + 5y'^2 - y^2y' + 3ay' + a'y + a'',$$

a désignant une intégrale de l'équation

$$a''' = aa', \text{ d'où } \frac{a'^2}{2} = \frac{a^3}{6} + \alpha a + \beta, \text{ et } a = 12\,p\left(x+\gamma; -\frac{\alpha}{6}, -\frac{\beta}{72}\right).$$

L'équation (24) admet l'intégrale première

$$(y''-yy'-y^3+ay+a')^2 = \frac{8}{3}(y'-y^2)^2\left(y'+\frac{y^2}{2}+\frac{3a}{2}\right) + 4(y'-y^2)(2ay^2+a'y+a'')$$
$$+ 4a^2y^2 + 4aa'y + 2a'^2 + C.$$

L'intégrale générale de cette équation du second ordre a ses points critiques fixes, et est fonction rationnelle des deux constantes d'intégration: on sait par suite la ramener aux équations linéaires. y s'exprime en fonction rationnelle de a, de ses dérivées, et des dérivées logarithmiques première et seconde de l'intégrale de l'équation linéaire et homogène

$$\theta''' = a\theta' + \frac{\sqrt{\beta+C}}{3}\theta.$$

y est fonction transcendante de la troisième constante d'intégration.

Les équations à points critiques fixes admettant comme équations réduites les équations IX et X se ramènent aux deux équations

$$y''' + 6y'^2 = 18(y' + y^2)(y' + 3y^2) + \alpha,$$

$$y''' = 6y^2 y' + 3\frac{9 + 7\sqrt{3}}{11}(y' + y^2)^2.$$

Je n'ai pas intégré ces équations. Elles ont cette propriété particulière, que leur intégrale générale possède deux familles de pôles simples mobiles, dont les résidus sont incommensurables l'un à l'autre. Mais cette propriété n'est pas essentielle, elle n'appartient plus aux équations transformées en $y' + y^2$. Il est vraisemblable que les intégrales de ces deux équations sont uniformes, mais ne sont pas des fonctions nouvelles, qu'elles s'expriment par les fonctions elliptiques par exemple.

11. Les équations à points critiques fixes admettant comme équation réduite l'équation XI se ramènent au système

$$y' = \frac{1 - k^2}{4} y^2 + z + a, \quad z'' = 6z^2 + b \quad (k \text{ entier } > 1, \text{ non multiple de } 6),$$

ou

$$y = \frac{4}{k^2 - 1} \cdot \frac{t'}{t}, \quad \frac{t''}{t} = \frac{k^2 - 1}{4}(z + a), \quad z'' = 6z^2 + b.$$

L'intégration de l'équation réduite ($a = b = 0$) se ramène ainsi à celle de l'équation linéaire

$$t'' = \frac{k^2 - 1}{4} p(x + A; 0, B)\, t.$$

Si k est impair, cette équation est une équation de Lamé. Si k est pair, mais non multiple de 6, l'intégrale générale n'est pas uniforme, mais le quotient de deux intégrales quelconques est uniforme, et l'on sait que l'intégrale générale s'exprime encore (algébriquement) au moyen des fonctions p, ζ, σ.

Les fonctions a et b ne sont pas arbitraires. Evidemment la fonction b est linéaire. Quant à la fonction a, des considérations d'homogénéité montrent qu'elle satisfait aux équations:

$$\begin{aligned}
\text{pour } k &= 6m + 2, \ m \text{ entier } \geq 0, & a &= 0,\\
k &= 6m + 3, & a' &= 0,\\
k &= 6m + 4, & a'' &= \alpha a^2 + \beta b\\
k &= 6m + 5, & a''' &= \alpha a a' + \beta b', \text{ d'où } a'' = \frac{\alpha a^2}{2} + \beta b + \gamma,
\end{aligned}$$

α, β, γ désignant des constantes numériques. Dans ces quatre cas, la fonction a

est donc un polynome, une fonction elliptique ou s'exprime par les intégrales de l'équation $y'' = 6y^2 + x$.

Si k est de la forme $6m + 1$, m entier > 0, la fonction a satisfait à une équation présentant la même homogénéité, mais d'ordre égal à 5. Par exemple, pour $k = 7$, après la substitution $\left(a, b; \frac{5a}{16}, \frac{-b}{24}\right)$, cette équation est

$$a^{\mathrm{V}} = 15\, a a''' + \frac{75}{2} a' a'' - 45\, a^2 a' + b a' + 2 b' a, \quad b = \alpha x + \beta.$$

Je ne l'ai pas intégrée. Rappelons que l'étude des équations à points critiques fixes du second ordre et du premier degré a mis en évidence un fait curieux: les coefficients des équations canoniques auxquelles elles se ramènent sont arbitraires, ou, s'ils ne sont pas arbitraires, sont des fonctions uniformes classiques, ou enfin sont des fonctions uniformes intégrales des équations irréductibles (A): la théorie des équations différentielles à points critiques fixes a ainsi une application en elle-même. La nature des équations différentielles que nous obtenons pour $k = 6m + 4$, $6m + 5$ confirme cette remarque. L'équation obtenue pour $k = 7$ est, en tout état de cause, introduite dans l'Analyse par la théorie des équations différentielles à points critiques fixes, mais il semble qu'elle a son intégrale générale uniforme, et il est possible qu'elle se ramène aux équations connues.

Enfin, pour $k > 7$, la fonction a satisfait à d'autres équations différentielles, dont le nombre croît avec k, et qui la simplifient.

12. Considérons maintenant l'équation

$$\text{XII} \qquad y''' = 2 y y'' - 3 y'^2 + \frac{4}{36 - k^2}(6y' - y^2)^2, \ k \text{ entier } > 1, \neq 6, \text{ ou } k = \infty,$$

qui, pour $k = \infty$, devient l'équation III, et les équations à points critiques fixes qui admettent cette équation réduite. Par des quadratures, et par l'intégration d'une équation de Riccati, on peut annuler dans ces équations les termes en y'' et y^2, et les termes complémentaires sont alors: pour $k = 2$, $ay + b$; pour $k = 3$, b, a et b désignant des fonctions analytiques de x; pour k différent de 2, 3, il n'y a pas de termes complémentaires.

L'équation XII a la propriété de ne pas changer quand on prend pour nouvelle variable $\frac{Ax + B}{Cx + D}$, et qu'on remplace y par $\frac{AD - BC}{(Cx + D)^2} y - \frac{6C}{Cx + D}$, A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires. Cette propriété permet de déduire d'une intégrale particulière $y = f(x)$ l'intégrale générale $y = \frac{AD - BC}{(Cx + D)^2} f\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right) - \frac{6C}{Cx + D}$, et nous conduit à considérer la fonction dont y est la dérivée logarithmique, ou une puissance de cette fonction.

L'équation XII admet les intégrales particulières:

$$\text{pour } k \text{ fini, } y = \frac{k-6}{2}\cdot\frac{1}{x+A} - \frac{k+6}{2}\cdot\frac{1}{x+B}, \text{ d'où } y = -\frac{6}{x+A};$$

$$\text{pour } k = \infty,\ y = -\frac{6}{x+A} + \frac{B}{(x+A)^2},$$

qui ne suffisent pas à donner l'intégrale générale. L'intégrale générale admet, si k est fini, une famille de pôles simples de résidu $\frac{k-6}{2}$. Posons $y = \frac{k-6}{2}\frac{u'}{u}$: l'équation XII devient

$$u u^{\mathrm{IV}} - (k-2) u' u''' + \frac{3k(k-2)}{2(k+6)} u''^2 = 0; \tag{25}$$

l'équation complète pour $k = 2$ devient

$$u u^{\mathrm{IV}} = a u u' - \frac{b}{2} u^2, \text{ équation linéaire;}$$

et l'équation complète pour $k = 3$

$$u u^{\mathrm{IV}} - u' u''' + \frac{u''^2}{2} = -\frac{2}{3} b u^2,$$

d'où, par dérivation,

$$u u^{\mathrm{V}} = -\frac{2}{3}(2 b u u' + b' u^2), \text{ équation linéaire.}$$

L'équation (25) a la propriété de ne pas changer quand on prend pour nouvelle variable $\frac{Ax+B}{Cx+D}$, et qu'on remplace u par $u(Cx+D)^{\frac{12}{6-k}}$: on peut espérer l'intégrer par des fonctions analogues aux fonctions thétafuchsiennes.

Rendons la fonction u homogène de degré $\frac{12}{6-k}$ par rapport à la variable x et à une nouvelle variable x_1: l'équation (25) se transforme en l'équation aux dérivées partielles remarquable

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial x_1}\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial x_1^3} + 3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial x_1^2}\right)^2 = 0. \tag{26}$$

Notre problème revient à la détermination des intégrales homogènes de degré $\frac{12}{6-k}$ de cette équation aux dérivées partielles, et distinctes des intégrales particulières $u = (Ax + Bx_1)^{\frac{6+k}{6-k}}(Cx + Dx_1)$, $u = (Ax + Bx_1)^{\frac{12}{6-k}}$.

Pour $k = 2, 3, 4, 5$, la fraction $\frac{12}{6-k}$ a les valeurs entières positives $3, 4, 6, 12$. Pour $k = 2$, l'intégrale générale de l'équation (25) est un polynome du troisième degré à coefficients arbitraires; pour $k=3$, elle est un polynome du quatrième degré, dont les coefficients satisfont à la relation $S=0$. Il existe de même des polynomes de degrés 6 et 12, dont les coefficients dépendent de quatre paramètres, et dont le covariant (26) est identiquement nul.[1] Une transformation homographique de la variable permet d'écrire ces polynomes de degrés 4, 6 et 12

$$(27)\qquad \begin{cases} x^4 + 2i\sqrt{3}\,x^2 + 1, \\ x^5 + x, \\ x^{11} + 11\,x^6 - x. \end{cases}$$

Inversement l'intégrale générale de l'équation (25) se déduit de ces intégrales particulières par une transformation homographique de la variable. Ainsi, pour $k=2,3,4,5$, l'intégrale générale de l'équation (25) est un polynome, et par suite celle de l'équation XII est rationnelle.

Les racines des polynomes (27) ont comme représentation sur la sphère, dans le mode de représentation des points du plan complexe sur la sphère introduit par RIEMANN, les sommets du tétraèdre régulier inscrit, les sommets de l'octaèdre inscrit, ou les centres des faces du cube circonscrit, les sommets de l'icosaèdre inscrit, ou les centres des faces du dodécaèdre circonscrit. Par les substitutions $\left(x, \dfrac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}\right)$ faisant partie des groupes des polyèdres inscrits correspondants, les polynomes se reproduisent, divisés par $(\gamma_i x + \delta_i)^{\frac{12}{6-k}}$. Rendons-les homogènes. Il résulte que le polynome $x x_1(x^{10} + 11\,x^5 x_1^5 - x_1^{10})$ est inaltéré par les substitutions du groupe correspondant; le polynome $x x_1(x^4 + x_1^4)$ est inaltéré, ou bien change de signe, car la fonction $(\gamma_i x + \delta_i)^{\frac{12}{2}}$ a deux valeurs égales et de signes contraires; la fonction $(\gamma_i x + \delta_i)^{\frac{12}{3}}$ a trois valeurs, et le polynome $x^4 + 2i\sqrt{3}\,x^2 x_1^2 + x_1^4$ est multiplié par une racine cubique de l'unité. Nous coordonnons ainsi des résultats[2] dont le lien n'était pas apparent. On peut d'ailleurs adjoindre aux polynomes (27) comme solution de l'équation (25) pour $k=2$ le polynome x^3+1. Ce polynome rendu homogène, par les substitutions du groupe correspondant, est multiplié par une racine quatrième de l'unité: effectivement par les substitutions du groupe du dièdre, la forme fondamentale $x^n + x_1^n$ est multipliée par une racine quatrième de l'unité, si n est impair; par une racine carrée, si n est pair.

Les polynomes (27) ont une propriété qui se rattache à la précédente, et qui par analogie va nous conduire à l'intégration de l'équation (25) pour $k>6$.

---

[1] Cf. KLEIN, *Vorlesungen über das Icosaeder*, p. 57.
[2] *Id.* p. 51, 54, 57.

Ils font partie des solutions du problème traité par Halphen: déterminer tous les systèmes de polynomes à une variable X, Y, Z, tels qu'on ait l'identité

$$X^m + Y^n + Z^p = 0, \tag{28}$$

m, n, p désignant trois entiers positifs. Il est clair que d'une solution on peut déduire une infinité d'autres, en y remplaçant la variable par une fraction rationnelle en une nouvelle variable: Halphen appelle primitive une solution formée de trois polynomes, dont les degrés ne peuvent être abaissés par le procédé inverse. Les identités entre solutions primitives sont en nombre très restreint: ce sont seulement celles que l'on rencontre dans la théorie des groupes linéaires finis. Les entiers m, n, p correspondants sont $2, n, 2$ (groupe du dièdre); $2, 3, 3$ (groupe du tétraèdre); $2, 3, 4$ (groupe de l'octaèdre); $2, 3, 5$ (groupe de l'icosaèdre): et dans ces trois derniers cas, les polynomes d'exposants $3, 4, 5$ peuvent, par une transformation homographique de la variable, recevoir les formes (27). Pour toutes ces solutions, la somme $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ est plus grande que 1.

Halphen a obtenu de même des fonctions uniformes satisfaisant à l'identité (28) dans les cas, en nombre limité aussi, où la somme $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ est égale à 1: ce sont des fonctions entières de la théorie des fonctions elliptiques. Et il a obtenu enfin des fonctions uniformes satisfaisant à l'identité (28) dans les cas en nombre infini où la somme $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ est plus petite que 1:[1] ces fonctions ne sont définies que dans un cercle dont la circonférence est coupure essentielle. Elles dérivent des fonctions de Schwarz de la façon suivante.

Soit l'équation hypergéométrique de Gauss

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)t)\frac{dz}{dt} - \alpha\beta z = 0$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right), \beta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right), \gamma = 1 - \frac{1}{m},$$

m, n, p désignant trois entiers positifs tels que l'on ait $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$, ou $\beta > 0$. Halphen considère les deux intégrales particulières qui, pour $|t| > 1$, se représentent ainsi:

$$z = t^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{t}\right), \ z_1 = t^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{t}\right),$$

[1] *Comptes Rendus*, 4 avril 1881.

F désignant la série hypergéométrique. Si l'on pose $x = \frac{z_1(t)}{z(t)}$, la fonction $t(x)$ est une fonction de SCHWARZ, dont le triangle fondamental a comme angles $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}$: elle est holomorphe dans un cercle dont le centre est à l'origine, et dont le rayon s'exprime au moyen de la fonction Γ (loc. cit.); la circonférence est pour la fonction $t(x)$ une coupure essentielle.

Formons les trois fonctions:

$$X(x) = (-t)^{\frac{1}{m}} z^{\frac{1}{m\beta}}, \quad Y(x) = (t-1)^{\frac{1}{n}} z^{\frac{1}{n\beta}}, \quad Z(x) = z^{\frac{1}{p\beta}}.$$

Ces trois fonctions satisfont à l'identité (28): elles sont définies dans le même cercle que la fonction $t(x)$, admettent la circonférence comme coupure; elles sont holomorphes dans ce cercle: il suffit de le constater au voisinage des valeurs $t = 0, 1, \infty$, puisque, $|x|$ restant fini, $z(t)$ ne peut s'annuler pour une autre valeur de t. Les fonctions X, Y, Z admettent respectivement comme zéros simples les points où la fonction $t(x)$ atteint les valeurs $0, 1, \infty$. Si m, n, p étaient des entiers positifs tels que l'on eût $\beta \leq 0$, les fonctions X, Y, Z obtenues par ce calcul seraient les polynomes, ou, en passant à la limite, les fonctions entières satisfaisant à l'identité (28). HALPHEN a remarqué que, si l'on considère les trois fonctions X, Y, Z comme des fonctions homogènes de degrés $-\frac{1}{m\beta}, -\frac{1}{n\beta}, -\frac{1}{p\beta}$, comme dans les cas où, β étant négatif, elles sont des polynomes, et si l'on calcule leurs invariants et covariants, ces invariants et covariants s'expriment au moyen des fonctions X, Y, Z elles-mêmes. Et il arrive que le covariant (26) de la fonction Z, qui est nul dans les cas où les entiers ont les valeurs: $2, 3, 2$; $2, 3, 3$; $2, 3, 4$; $2, 3, 5$ d'où $\beta < 0$, est nul encore pour $\beta > 0$, si m et n sont égaux à 2 et 3, et si p est un entier quelconque plus grand que 6. Le degré d'homogénéité de la fonction $Z(x)$ est $\frac{12}{6-p}$.

Une intégrale particulière des équations (25) ou (26) est donc la fonction $Z(x)$ construite avec les nombres $2, 3, k$, et vérifiant avec les fonctions associées $X(x)$, $Y(x)$ l'identité

$$X^2 + Y^3 + Z^k = 0.$$

Son développement au voisinage de l'origine se calcule de proche en proche:

$$Z(x) = x + \frac{k+6}{72(k^2-1)} x^{k+1} - \frac{(k-2)(k-3)(k-4)(k+6)}{12^4 (k-1)^2 (k+1)(4k^2-1)} x^{2k+1} + \cdots;$$

le rayon du cercle de convergence, qui est coupure essentielle, a comme carré

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{12}+\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2k}\right)}.$$

Pour $k=1$, cette expression est nulle. Pour $k=2, 3, 4, 5$, elle est négative: elle est en effet le carré du rayon du cercle orthogonal à un triangle d'arcs de cercle d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{k}$, ce cercle est imaginaire pour les valeurs de k considérées; le développement s'arrête au second ou au troisième terme, et se ramène par une transformation linéaire de la variable à l'un des polynomes considérés précédemment. Pour $k=6$, le rayon de convergence est infini; le développement n'est autre que le développement à l'origine de la fonction $\sigma(x; 0, -4)$. Pour $k>6$, le rayon de convergence décroît; lorsque k croît de 6 à ∞, l'expression donnée de ce rayon décroît constamment de la valeur ∞ à la valeur 1.

Il est clair que, pour obtenir l'intégrale de l'équation (25) et par suite celle de l'équation XII pour k fini, il suffit dans la définition de la fonction de Schwarz $t(x)$, de substituer aux deux intégrales de l'équation hypergéométrique

$$t(1-t)\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}t\right)\frac{dz}{dt}-\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{k^2}\right)\frac{z}{4}=0$$

choisies par Halphen deux intégrales distinctes arbitraires z et z_1. Les fonctions $u(x)=z^{\frac{12}{k-6}}$, $y(x)=\frac{6}{z}\frac{dz}{dx}$ sont les intégrales générales des équations (25) et XII. Elles admettent pour $k>6$ une droite ou une circonférence mobile comme coupure essentielle, et ne sont définies que dans la région variable du plan située d'un côté de la droite, à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence. L'intégrale générale $y(x)$ est méromorphe dans cette région: elle admet les pôles de la fonction $t(x)$ comme pôles simples de résidu $\frac{k-6}{2}$. Quand elle est définie à l'extérieur de sa coupure, elle est régulière et nulle au point $x=\infty$, et admet au voisinage un développement de la forme

$$y=-\frac{6}{x+A}+\frac{\alpha}{(x+A)^3}+\frac{\beta}{(x+A)^4}+\cdots,$$

dans lequel la constante A et les coefficients α, β sont arbitraires.

L'intégrale générale $u(x)$ est holomorphe dans la région où elle est définie, sauf en général au point $x=\infty$, comme le montre le développement en produit infini déduit de la série précédente:

$$u=(x+A)^{\frac{12}{6-k}}\, e^{\frac{\alpha}{6-k}\cdot\frac{1}{(x+A)^2}+\frac{2\beta}{3(6-k)}\cdot\frac{1}{(x+A)^3}+\cdots}$$

Si elle est définie à l'intérieur de sa coupure, ou si la coupure est une droite, elle est uniforme. Si elle est définie à l'extérieur de sa coupure, elle n'est pas uniforme en général; une détermination de l'intégrale, suivie le long d'un chemin qui tourne une fois autour de la coupure dans le sens direct, est multipliée par $e^{2\pi i\frac{12}{6-k}}$. Quand la coupure circulaire se réduit à un point, $x=0$, l'intégrale se réduit à l'une des intégrales particulières $u=x^{\frac{6+k}{6-k}}(x+C)$, $u=x^{\frac{12}{6-k}}$, dont les déterminations, suivies le long d'un chemin qui tourne autour du point $x=0$, sont multipliées par le même facteur. Les intégrales de cette seconde catégorie ont un nombre de branches égal au dénominateur de la fraction irréductible égale à $\frac{12}{6-k}$; elles sont uniformes pour $k=7, 8, 9, 10, 12, 18$.

Pour $k=\infty$, l'intégrale générale de l'équation III est encore donnée par l'expression $y(x)=\frac{6}{z}\frac{dz}{dx}$, comme on peut le vérifier par un calcul direct. Elle admet une droite ou une circonférence mobile comme coupure essentielle, et est *holomorphe* dans la région où elle est définie. Quand elle est définie à l'extérieur de sa coupure, elle est nulle au point $x=\infty$, et admet au voisinage un développement de même forme que précédemment. La fonction $Y=\int y\,dx=6\log z$ est l'intégrale générale de l'équation

$$Y^{\mathrm{IV}}=2\,Y'\,Y'''-3\,Y''^2, \tag{29}$$

qui peut être déduite de l'équation (25) par un passage à la limite pour $k=\infty$. Si l'intégrale $Y(x)$ est définie à l'intérieur de sa coupure elle y est holomorphe et uniforme. Si elle est définie à l'extérieur de sa coupure, elle n'est pas holomorphe au point $x=\infty$; et est une fonction multiforme avec période, comme le montre son développement en série: une détermination de l'intégrale, suivie le long d'un chemin qui tourne une fois autour de la coupure dans le sens direct, est augmentée de la période $-12\pi i$, comme les déterminations de l'intégrale particulière $Y=-6\log x+\frac{C}{x}$.

Pour $k=\infty$, les nombres m, n, p sont $2, 3, \infty$: on peut choisir les intégrales z et z_1 de façon que leur quotient soit celui de deux périodes distinctes de l'intégrale elliptique admettant $1-t$ comme invariant absolu; la fonction de Schwarz correspondante est la fonction modulaire $J(x)$ de M. Klein. M. Klein a souvent aussi considéré les fonctions de Schwarz aux nombres $2, 3, k$: on sait qu'elles sont fonctions uniformes de la fonction $J(x)$. Les fonctions $u(x)$ sont des fonctions thétafuchsiennes, ou analogues à des fonctions thétafuchsiennes, et M.

POINCARÉ les signale à ce point de vue dans ses *Mémoires* des *Acta mathematica:* par les substitutions $\left(x, \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}\right)$ d'un groupe fuchsien, dont le polygone fondamental est un triangle d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{k}$, la fonction u est multipliée par $(\gamma_i x + \delta_i)^{\frac{12}{k-6}}$. L'exposant est entier pair, et la fonction u est thétafuchsienne pour $k = 7, 8, 9, 12$. M. POINCARÉ a d'ailleurs indiqué des solutions uniformes de l'identité (28) plus générales que les fonctions X, Y, Z.

La fonction v, définie par l'équation $y = -\frac{k+6}{2}\frac{v'}{v}$, et rendue homogène de degré $\frac{12}{6+k}$, satisfait à la même équation aux dérivées partielles que la fonction u. L'intégrale générale homogène de dégré $\frac{12}{6+k}$ de l'équation (26) est donc $v(x) = z^{-\frac{12}{k+6}} = u^{\frac{6-k}{6+k}}$, u désignant une intégrale homogène de degré $\frac{12}{6-k}$. Cette intégrale $v(x)$ admet, pour $k > 6$, une coupure circulaire mobile, et est définie à l'intérieur ou à l'extérieur de cette coupure, suivant les valeurs des constantes d'intégration. Dans les deux cas, elle admet comme points critiques algébriques les zéros de l'intégrale correspondante $u(x)$: autour de chaque point critique, et dans l'ensemble de la région où elle est définie, elle acquiert un nombre de déterminations égal au dénominateur de la fraction irréductible égale à $\frac{12}{k+6}$.

Nous avons ainsi obtenu l'intégrale homogène de degré $\frac{12}{6-N}$ de l'équation aux dérivées partielles (26), pour les valeurs de N entières, positives ou négatives, à l'exception des cinq valeurs: $0, \pm 1, \pm 6$.

13. L'équation $y''' = 2yy'' - 3y'^2$ est l'exemple le plus simple d'une équation dont l'intégrale générale a une coupure essentielle mobile, et n'est définie que dans une région du plan variable avec les constantes d'intégration. Il y a des exemples classiques d'équations du second ordre, dont l'intégrale générale a des points essentiels isolés mobiles. Ainsi l'équation

$$y'' = y'^2\left(\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} + \frac{1}{\lambda\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right) \quad (g_2, g_3, \lambda \text{ constantes numériques})$$

a comme intégrale générale $y = p[\lambda \log(Ax + B); g_2, g_3]$; si $2\pi i\lambda$ est période de la fonction elliptique p, cette intégrale générale est uniforme et admet le point $x = -\frac{B}{A}$ comme point essentiel isolé. Mais d'après un résultat établi par M. PAINLEVÉ, l'intégrale générale d'une équation du second ordre, algébrique en y'', y', y, ne peut admettre une coupure; et il est vraisemblable que cette intégrale ne peut admettre non plus un ensemble parfait, discontinu de points singuliers mobiles. Nous avons vu déjà que la théorie des groupes automorphes a mis en évidence des équations de la forme

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + y'^3 F(y),$$

$F(y)$ désignant une fonction rationnelle ou algébrique de y, dont l'intégrale présente de telles singularités.

Il est facile de former des équations différentielles du quatrième ordre, dont l'intégrale générale possède la même propriété que celles des équations (25) et (29). Considérons une fonction fuchsienne $y(x)$, admettant une coupure rectiligne ou circulaire, et dont $y = \infty$ soit une valeur singulière, la fonction modulaire d'HERMITE, ou la fonction $J(x)$ de M. KLEIN, par exemple: y satisfait à une équation du troisième ordre de la forme que nous venons de rappeler. La fonction $\int y\,dx$ satisfait à une équation différentielle algébrique du quatrième ordre: les intégrales de cette équation, définies à l'intérieur de leur coupure, sont uniformes; les intégrales, définies à l'extérieur de leur coupure, sont des fonctions multiformes. Dans le même ordre d'idées, M. KLEIN a formé des équations du troisième ordre, dont l'intégrale générale, pour certaines valeurs des constantes d'intégration, est définie seulement dans la région du plan comprise entre deux coupures circulaires concentriques, est holomorphe en tout point de cette région, et acquiert une infinité de déterminations autour du petit cercle.

L'équation XII, pour $k > 6$, est intéressante encore au point de vue de la notion de simplifiée. Il est évident que, si l'intégrale générale de la simplifiée d'une équation à points critiques fixes, a des singularités essentielles mobiles, il en est de même de l'intégrale générale de l'équation elle-même. Mais, pour les équations à points critiques fixes du second ordre que l'on a formées jusqu'ici, la réciproque est vraie. Nous avons l'exemple d'équations du troisième ordre dont la simplifiée $y''' = 0$ a son intégrale générale rationnelle, et dont l'intégrale générale a une coupure essentielle mobile.

Les fonctions X, Y, Z ont permis à HALPHEN d'intégrer différents systèmes d'équations jouissant d'une propriété d'invariance analogue à celle de l'équation XII. Le plus simple avait été indiqué par M. DARBOUX:

$$y'_2 + y'_3 = y_2 y_3, \quad y'_3 + y'_1 = y_3 y_1, \quad y'_1 + y'_2 = y_1 y_2.$$

L'équation III est l'équation transformée de ce système en $y_1 + y_2 + y_3$.[1] Les équations transformées en y_1 ou $y_1 + y_2$ et leurs simplifiées donnent lieu à la même remarque.

[1] HALPHEN a donné la représentation d'un système particulier d'intégrales y_1, y_2, y_3 au moyen de séries de la théorie des fonctions elliptiques (*Comptes Rendus*, 13 juin 1881): on en déduit un développement à loi de récurrence simple qui représente une intégrale de l'équation III.

Signalons une équation formée[1] autrefois par JACOBI et qui offre une particularité analogue:

$$(30) \qquad y^2(yy''' + 3y'y'')^2 = y''^2(16y^3y'' - \pi^2).$$

La simplifiée de cette équation, obtenue en supprimant $-\pi^2$, a comme intégrale générale $y = (Ax + B)e^{\frac{Cx+D}{Ax+B}}$, A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires: cette intégrale générale admet donc le point essentiel isolé $x = -\frac{B}{A}$. L'intégrale générale de l'équation (30) a au contraire une coupure essentielle mobile. Des intégrales particulières sont les expressions $\frac{\pi}{2K}, \frac{\pi}{2kK}, \frac{\pi}{2k'K}$, suivant les notations de JACOBI, considérées comme fonctions du rapport des périodes de l'intégrale elliptique. La première fonction, par exemple, est définie par la série

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2e^{i\pi x} + 2e^{4i\pi x} + 2e^{9i\pi x} + \cdots,$$

et définie seulement dans la région du plan où cette série converge, c'est-à-dire au-dessus de l'axe réel, qui est pour la fonction une coupure essentielle. D'ailleurs d'une intégrale particulière $y = f(x)$, on déduit l'intégrale générale $y = \frac{Cx + D}{\sqrt{AD - BC}} f\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right)$: elle admet comme coupure la circonférence ou la droite définie par l'équation

$$\text{partie imaginaire de } \frac{Ax + B}{Cx + D} = 0.$$

Enfin l'exemple de ces diverses équations montre que la théorie des groupes automorphes ne permet pas seulement d'intégrer les équations différentielles de la forme classique que vérifient les fonctions fuchsiennes et kleinéennes: elle est utile encore à l'intégration d'autres équations du troisième ordre, de forme toute différente. Il serait d'ailleurs intéressant de rechercher a priori des fonctions $f(x)$ qui, par les substitutions $\left(x, \frac{\alpha_i x + \beta_i}{\gamma_i x + \delta_i}\right)$ d'un groupe automorphe, soient altérées de façon simple et deviennent $\varphi[f(x), \gamma_i x + \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i]$; les fonctions $f(x)$ pour lesquelles la fonction φ est homogène de degré zéro en $\gamma_i x + \delta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, vérifient des équations différentielles du troisième ordre, transcendantes en général.

14. La solution du problème que nous avons posé dans ce chapitre présente aux n^os 10 et 11 trois lacunes. D'autre part je n'ai pu décider si les équations (18) et (20) ont leur intégrale générale uniforme. Avant d'insister sur la difficulté que présente la solution de cette question, il est utile de faire quelques remarques au sujet des équations réduites que nous avons intégrées.

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 36.

D'après la manière dont elle a été obtenue, l'équation réduite

$$(17) \qquad y''' = a y^{\lambda} y'' + b y^{\lambda-1} y'^2 + c y^{2\lambda} y' + d y^{3\lambda+1}$$

admet le groupe de transformations à deux paramètres x_0 et α $\left(x, y;\ x_0 + \alpha^{\lambda} x, \frac{y}{\alpha}\right)$; l'intégration de cette équation doit donc se ramener à celle d'une équation du premier ordre, suivie de deux quadratures. En effet la fonction u ne change pas par ce groupe de transformations, la fonction v définie par l'équation $\frac{dy}{y} = uv\,du$ ne change pas non plus, et ces deux fonctions sont liées par l'équation différentielle

$$(31) \quad \frac{dv}{du} = [(\lambda + 1)(2\lambda + 1)u^3 - [(\lambda + 1)a + b]u^2 - cu - d]v^3 + [(4\lambda + 3)u - a]v^2.$$

Inversement, nous avons intégré directement onze équations réduites; nous déduisons de cette intégration l'intégration des équations du premier ordre correspondantes: u et v sont exprimés en fonction de la variable $x_0 + \alpha^{\lambda} x$ et d'une constante d'intégration. u^2 et v dans le cas de l'équation XIII, u et v dans les dix autres cas sont des fonctions uniformes de x, et de la constante d'intégration si elle est convenablement choisie: dans les onze cas, la relation établie entre v et u, ou entre v et u^2, par l'équation différentielle (31) est ainsi uniformisée. Les cas d'intégrabilité de l'équation

$$(32) \qquad y' = Py^3 + Qy^2 + Ry + S,$$

P, Q, R, S désignant des fonctions de x, sont assez particuliers:[1] il peut être intéressant d'en ajouter quelques-uns.

L'équation transformée en u^2 de l'équation XIII, en u de chacune des dix autres équations réduites que nous avons intégrées, est une équation du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme, et de la forme *simplifiée*, puisqu'elle ne change pas si l'on change x en $x_0 + \alpha^{\lambda} x$. L'étude des intégrales d'une équation du second ordre et du premier degré au voisinage d'une valeur singulière se ramène ainsi au problème de la formation des simplifiées, et par suite au problème de Briot et Bouquet. Mais ici l'équation simplifiée est le résultat de l'élimination de y^{λ} entre les deux équations

[1] Voir Appell, *Journal de Liouville*, 1889; Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. IV, note VI. Dans le 62^e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, M. R. Liouville intègre par une quadrature l'équation renfermant les mêmes termes que l'équation (31), sous deux conditions entre les six coefficients: parmi les quatorze équations réduites de la forme (17) que nous avons à considérer, les équations VIII et XIII sont les seules dont les équations transformées satisfont aux deux conditions de M. Liouville.

$$(33)\begin{cases}\dfrac{u''}{y^{2\lambda}}+[3(\lambda+1)u-a]\dfrac{u'}{y^{\lambda}}+(\lambda+1)(2\lambda+1)u^3-[(\lambda+1)a+b]u^2-cu-d=0,\\[2ex] \dfrac{u'''}{y^{2\lambda}}+\dfrac{(\lambda+3)uu''+3(\lambda+1)u'^2-au''}{y^{\lambda}}+3(\lambda+1)^2u^2u'-[(\lambda+2)a+2b]uu'-cu'=0.\end{cases}$$

Rendue rationnelle en u''', u'', u', elle est du second degré en u''': elle n'est donc pas de celles que nous avons formées précédemment. Ici encore, de l'intégrale générale de chacune des équations réduites, nous déduisons l'intégrale générale de l'équation transformée en u, et nous remarquons d'abord que les fonctions classiques qui permettent d'intégrer les équations simplifiées du troisième ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est uniforme, ne suffisent pas à intégrer celles du second degré. Pour intégrer celles-ci, il faut ajouter aux fonctions que nous avons énumérées des fonctions thétafuchsiennes et même des fonctions plus générales, ainsi que la transcendante définie par l'équation de Riccati $y'=y^2+x$, ou celle définie par l'équation linéaire $t''+xt=0$.

M. Painlevé a indiqué un procédé de réduction[1] des équations simplifiées du troisième ordre dont l'intégrale générale $u(x)$ est uniforme, de degré quelconque: si l'on pose $\dfrac{d}{du}\log\dfrac{dx}{du}=w$, la fonction $w(u)$ satisfait à une équation différentielle du premier ordre, et les intégrales de cette équation ne peuvent avoir de points critiques mobiles, puisque l'intégrale générale $u(x)$ est uniforme, où elles aient une valeur finie.[2] Si l'équation simplifiée considérée est du second degré en u''', l'équation du premier ordre est elle-même du second degré en $\dfrac{dw}{du}$; dans le cas où la valeur $w=\infty$ n'est pas racine impaire du discriminant, et l'on peut évidemment considérer ce cas comme le cas général, cette équation n'a pas de points critiques mobiles: et l'on sait ramener l'intégration d'une équation à points critiques fixes du premier ordre à une quadrature ou à l'intégration d'une équation de Riccati. Mais, dans l'équation du premier ordre obtenue à partir de l'une des équations simplifiées que nous considérons ici, la valeur $w=\infty$ est racine impaire du discriminant; la transformation qui chasse le radical conduit, non à une équation de Riccati, mais à une équation de la forme (32), par exemple à l'équation (31). Les équations simplifiées, transformées des équations réduites de la forme (17) dont l'intégrale générale est uniforme, échappent donc au procédé de réduction indiqué par M. Painlevé.

L'intégration de l'équation (32) se ramène néanmoins à une quadrature ou à l'intégration d'une équation de Riccati, dans le cas où ses intégrales acquièrent

[1] *Acta mathematica*, 1902, p. 74, 78.

[2] Cf. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 70.

un même nombre fini de déterminations autour des points critiques mobiles, sauf un nombre fini ou un ensemble dénombrable d'entre elles.[1] Tel est le cas des équations (31) transformées des équations réduites VIII et XIII: les intégrales de ces équations ont respectivement quatre et trois branches, sauf trois d'entre elles, et sont définies par les équations

$$\frac{v\left[v(u^2-1)+\frac{2}{3}\right]^3}{\left[v(u^2-1)+\frac{1}{2}\right]^4}=C, \quad \frac{v\left[v(u^2-4)+1\right]^2}{\left[v(u^2-4)+\frac{2}{3}\right]^3}=C.$$

Parmi les équations (31) correspondant aux équations réduites que nous avons intégrées, il en est au contraire dont l'intégrale générale acquiert autour des points critiques mobiles une infinité de déterminations. Soient par exemple l'équation réduite II, $y'''=2yy''+2y'^2$, et l'équation correspondante

$$\frac{dv}{du}=(6u^3-6u^2)v^3+(7u-2)v^2. \tag{34}$$

On peut démontrer que l'intégrale générale de l'équation (34) acquiert une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles au moyen des expressions de u et v en fonction du paramètre x que nous possédons implicitement: nous allons donner une démonstration fondée sur la méthode de continuité. Il est clair que le caractère de l'intégrale n'est pas altéré au point de vue que nous considérons, si l'on effectue dans l'équation la substitution $\left[u, v; \varepsilon u, \frac{1}{\varepsilon(t+2u)}\right]$, quel que soit le nombre ε différent de zéro. Or, pour les petites valeurs de ε, l'intégrale générale de l'équation transformée

$$\frac{dt}{du}=-7\varepsilon u+\frac{6\varepsilon u^2(1-\varepsilon u)}{t+2u} \tag{34 bis}$$

peut être développée suivant les puissances de ε:

$$t=C+\varepsilon\left(-\frac{7u^2}{2}+6\int\frac{u^2\,du}{2u+C}\right)+\varepsilon^2(\cdots).$$

[1] Le cas où toutes les intégrales de l'équation (32) sont algébriques peut soulever des difficultés analogues à celles que nous signalons plus loin. Remarquons que, dans ce cas, toute intégrale générale $u(x)$ de l'équation simplifiée correspondante est fonction rationnelle de x, ou de e^{ax}, ou fonction elliptique de x, ou de $a\log x+\beta$, a et β désignant des constantes. Tels sont en effet les résultats obtenus par M. Picard dans la détermination des équations de la forme $u''=u'^2a(u)$, $a(u)$ désignant une fonction algébrique de u, dont l'intégrale générale est uniforme, avec cette restriction que la fonction $e^{\int a(u)\,du}$ n'ait pas de points singuliers transcendants (*Traité d'Analyse,* t. III, p. 66). M. Painlevé a établi que les résultats de M. Picard sont encore complets si l'on lève cette restriction.

Si ε est assez petit, ce développement converge dans le plan des u sur la circonférence de centre $\frac{-C}{2}$ et de rayon $\frac{|C|}{4}$ par exemple, et quand le point u décrit cette circonférence autant de fois qu'on veut. Chaque fois l'intégrale qui figure dans le coefficient de ε est augmentée d'une même quantité. D'ailleurs les points singuliers fixes de l'équation (34 bis) sont $u = 0$, $u = \frac{1}{\varepsilon}$, $u = \infty$: l'intégrale générale acquiert donc une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles. Les déterminations correspondantes de l'intégrale générale de l'équation (34) ont des points critiques dans le cercle de centre $\frac{-C\varepsilon}{2}$ et de rayon $\frac{|C\varepsilon|}{4}$: ces points critiques mobiles admettent comme point-limite le point singulier fixe $u = 0$.

Assurément l'intégration de l'équation (34) se ramène à celle de l'équation de Riccati $y' = y^2 + x$, nous avons ramené aussi l'intégration de l'équation XII à celle d'une équation linéaire du second ordre; et de même toutes les équations réduites que nous avons intégrées, et par suite les équations (31) correspondantes, sont *réductibles* au sens le plus général du mot.[1] Il est possible encore que toute équation de la forme (32), transformée d'une équation simplifiée du troisième ordre et du second degré dont l'intégrale générale est uniforme, soit réductible, et s'intègre par les fonctions classiques, ou se ramène à une équation linéaire. Mais quand l'intégrale générale acquiert une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles, l'intégration directe d'une telle équation est aléatoire, et il peut n'être plus avantageux de la considérer. En effet, pour en obtenir la réduction, on est amené[2] à rechercher une intégrale rationnelle d'une équation aux dérivées partielles: c'est là un problème pour la solution duquel on ne possède aucune méthode générale, aboutissant nécessairement après un nombre limité d'opérations.

15. Enfin les équations transformées en u de certaines équations réduites nous donnent l'exemple d'équations dont l'intégrale générale est uniforme, et dont l'intégrale singulière a des points critiques mobiles. Rappelons les principes de la théorie des intégrales singulières.

Considérons une équation du premier ordre

$$P(y', y, x) = 0, \tag{35}$$

P désignant un polynome en y' et y, à coefficients analytiques en x; supposons, pour fixer les idées, que ce polynome soit du second degré en y', indécomposable

[1] Voir Drach, *Thèse*, Paris, 1898; Painlevé, Conférence faite au Congrès d'Heidelberg, 1904.

[2] Cf. nº 16.

pour des valeurs arbitraires de y', y et x, et qu'il ne renferme en facteur aucun polynome en y. Soit $R(y,x)$ son discriminant: le polynome en y $R(y,x)$ peut se décomposer en plusieurs facteurs. L'équation obtenue en égalant à zéro un facteur $K(y,x)$ indécomposable et d'ordre impair, représente ou bien un lieu geométrique de points de rebroussement des courbes intégrales, ou bien une enveloppe des courbes intégrales: dans le second cas, la fonction $y(x)$, définie par l'équation $K(y,x)=0$, est une intégrale *singulière* de l'équation (35). Il est clair que, si l'équation (35) n'a pas de points critiques mobiles, les facteurs de la seconde sorte peuvent seuls exister.

Considérons une équation différentielle d'ordre supérieur, soit

$$P(y'',y',y,x)=0: \tag{36}$$

P désigne un polynome en y'',y',y à coefficients analytiques en x, du second degré en y'', indécomposable pour des valeurs arbitraires de y'',y',y,x, et ne renferme en facteur aucun polynome en y' et y. Soit $K(y',y,x)$ un facteur indécomposable et d'ordre impair du discriminant: si l'équation (36) a ses points critiques fixes, toute intégrale non singulière de l'équation $K(y',y,x)=0$ est nécessairement intégrale de l'équation (36). Elle en est une intégrale *singulière.* Ainsi nous avons rencontré l'équation

$$y''^2+4y'^3+2(xy'-y)=0 \tag{B, I}$$

dont l'intégrale générale est uniforme. L'équation du premier ordre $y=xy'+2y'^3$ admet l'intégrale générale $y=Cx+2C^3$, qui est intégrale de l'équation (B, I): d'ailleurs l'intégrale singulière de l'équation du premier ordre, définie par l'équation $y^2+\frac{2x^3}{27}=0$, n'est pas intégrale de l'équation du second ordre. Chacune des équations (B) et (C) du n° 9 fournit un exemple analogue.

Mais, au voisinage d'un point $x_0, y_0, y'_0, \ldots$ d'une intégrale singulière, le coefficient différentiel n'est pas fonction holomorphe de $x-x_0, y-y_0, y'-y'_0, \ldots$ On ne peut pas obtenir, à l'aide de l'équation aux variations, des intégrales infiniment voisines de cette intégrale singulière dans un domaine où elle est holomorphe, en choisissant arbitrairement et d'une manière indépendante les valeurs $y, y', \ldots$ de l'intégrale et de ses dérivées au point x_0 de ce domaine, à l'intérieur de cercles suffisamment petits de centres $y_0, y'_0, \ldots$ Toute intégrale infiniment voisine d'une intégrale singulière est une intégrale singulière, non une intégrale générale. Il résulte que l'intégrale singulière peut avoir des propriétés différentes de celles de l'intégrale générale. En particulier il y a des équations dont l'intégrale générale est uniforme, et dont l'intégrale singulière a des points critiques; telle est l'équation de Clairaut que nous venons de considérer.

Parmi les équations d'ordre supérieur au premier, il existe de même des équations dont l'intégrale générale est uniforme et dont l'intégrale singulière a des points critiques fixes. M. APPELL en a rencontré des exemples dans une théorie toute différente.[1] L'équation

$$3x^2y''^2-2(3xy'+y)y''+4y'^2=0$$

a comme intégrale générale $y=A^2x^2+ABx+B^2$, et comme intégrales singulières $y=Cx^{\frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}}$.

Il existe d'autre part des équations dont l'intégrale générale est uniforme ou a ses points critiques fixes, et dont l'intégrale singulière a des points critiques mobiles. Ainsi l'équation

$$y''=-\left(y^3+\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)y'-\frac{\partial P_2}{\partial x}+yy'\sqrt{4y'+y^4+4P_2},$$

P_2 désignant un polynome du second degré en y à coefficients analytiques en x, admet l'intégrale première

$$\sqrt{4y'+y^4+4P_2}=y^2+C,\ \text{d'où}\ 4y'+4P_2=2Cy^2+C^2.$$

Les points critiques de l'intégrale générale ne peuvent être que des points singuliers des coefficients du polynome P_2, ou le point $x=\infty$: ils sont fixes. Mais l'intégrale singulière a évidemment des points critiques algébriques mobiles.

L'intégrale singulière d'une équation du troisième ordre, dont l'intégrale générale est uniforme, ou a ses points critiques fixes, peut avoir des points critiques non algébriques mobiles. Ainsi l'équation du second ordre

$$y''=2yy'+2iy'\sqrt{y'-y^2-1}$$

a son intégrale générale entière: $y=e^{2Ax+B}+\frac{A^2-1}{4A}$: l'intégrale singulière $y=\operatorname{tg}(x+C)$ a des pôles mobiles. Si dans cette équation l'on pose $y=z'$, on obtient une équation du troisième ordre en z dont l'intégrale générale est entière, et dont l'intégrale singulière a des points critiques logarithmiques mobiles.

Considérons encore l'équation transformée en $u=\frac{y'}{y^{\lambda+1}}$ d'une équation réduite de la forme (17). Un calcul facile montre que le discriminant de cette équation transformée renferme le facteur simple

$$4u''-\frac{u'^2[3(\lambda+1)u-a]^2}{(\lambda+1)(2\lambda+1)u^3-[(\lambda+1)a+b]u^2-cu-d}$$

[1] *Journal de Crelle,* 1889.

et qu'elle admet les intégrales de l'équation du second ordre obtenue en annulant ce facteur comme intégrales singulières, quelle que soit la nature, uniforme ou multiforme, de l'intégrale générale. En particulier l'équation en u transformée de l'équation réduite

$$y''' = 2yy'' + 2y'^2, \text{ d'où } y' = y^2 + Ax + B,$$

a, comme cette équation réduite, son intégrale générale méromorphe. Elle admet comme intégrales singulières les intégrales de l'équation

$$\frac{u''}{u'^2} = \frac{(3u-1)^2}{6u^2(u-1)}.$$

La fraction du second membre ayant un pôle double, ces intégrales ne sont pas uniformes, d'après une proposition établie[1] par M. Painlevé. Reprenons le calcul de M. Painlevé pour en préciser la conclusion. Remplaçons l'équation du second ordre par le système

$$u' = v, \quad v' = \frac{v^2(3u-1)^2}{6u^2(u-1)}.$$

Faisons dans ce système la substitution $(u, v; \varepsilon u, \varepsilon^2 v)$, et développons l'intégrale générale du système transformé

$$u' = \varepsilon v, \quad v' = \frac{-v^2}{6u^2} + \varepsilon(\cdots)$$

suivant les puissances du paramètre ε:

$$u = u_0 + \varepsilon \,.\, 6u_0^2 \log(x + C) + \varepsilon^2(\cdots), \quad v = \frac{6u_0^2}{x+C} + \varepsilon(\cdots),$$

u_0 et C désignant des constantes arbitraires. Si ε est assez petit, ce développement converge dans le plan des x sur une circonférence de centre mobile, $x = -C$, dont le rayon, le centre une fois fixé, peut être choisi aussi petit qu'on veut, et qui peut être décrite un nombre quelconque de fois. L'intégrale générale acquiert ainsi une infinité de déterminations formant une suite unilinéaire; le centre de la circonférence est un point critique tout à fait analogue à un point critique logarithmique.[2]

Signalons enfin le cas de l'équation (30): l'intégrale générale de cette équation possède une coupure circulaire mobile, et est uniforme dans la région du

[1] *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXVIII, p. 274.

[2] Voir Boutroux, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* p. 95 et suiv.

plan située à l'intérieur ou à l'extérieur de cette coupure; au contraire l'intégrale singulière, définie par l'équation $Ay^2 = (Ax+B)^2 + \frac{\pi^2}{16}$, est algébrique.

16. D'après la manière même dont a été obtenue l'équation

$$(18) \qquad y''' = y^\lambda y'' - (\lambda + 1) y^{\lambda - 1} y'^2, \qquad \lambda \text{ entier positif,}$$

ses intégrales ne possèdent ni points critiques algébriques, ni pôles. On a remarqué souvent que les équations de la forme $y'' = P(y', y, x)$, P désignant un polynome en y' et y à coefficients analytiques en x, dont les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles, sont linéaires: dans l'étude des équations du second ordre et du premier degré, la difficulté que nous rencontrons ici, ne se présentait pas.

L'étude de l'équation (18) peut être remplacée par celle du système

$$(37) \qquad \frac{dv}{du} = (\lambda+1)(2\lambda+1)u^3v^3 + [(4\lambda+3)u - 1]v^2,$$

$$\frac{dx}{du} = v e^{-\lambda \int uv\,du}.$$

Si l'intégrale générale $y(x)$ est uniforme, il en est de même de la fonction u, définie par l'équation $y' = uy^{\lambda+1}$. Inversement, si la fonction $u(x)$, définie par le système précédent, est uniforme, les deux équations (33) font correspondre à cette fonction une fonction y^λ uniforme.

L'intégrale générale de l'équation du premier ordre (37) acquiert autour des points critiques mobiles une infinité de déterminations: comme pour l'équation (34), on peut démontrer ce résultat par la méthode de continuité. Cette méthode permet aussi d'établir que l'équation (37) est irréductible au sens le plus général du terme: $R(v, u)$ désignant le second membre de l'équation (37), il suffit de montrer que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial I}{\partial u} + R\frac{\partial I}{\partial v} + 2\frac{\partial R}{\partial v}I + \frac{\partial^3 R}{\partial v^3} = 0$$

n'admet pas d'intégrale I rationnelle en v et u. L'application des théories exactes à l'équation (37) ne donne donc que des résultats négatifs.

Il sera intéressant d'élucider le cas de l'équation (18), et de savoir si l'application de la première méthode de M. Painlevé, c'est-à-dire l'introduction dans l'équation d'un paramètre convenablement choisi, suffit à montrer que l'intégrale générale n'est pas uniforme, ou s'il faut au contraire, pour mettre en évidence des points critiques ou des lignes critiques d'une nature particulière, avoir recours à un artifice plus subtil de la théorie des fonctions.[1]

Équations à points critiques fixes de la forme $y''' = R(y'', y', y, x)$, où R désigne une fraction rationnelle en y'', y', y à coefficients analytiques en x.

17. On sait depuis longtemps que, si l'équation $y' = R(y, x)$, R désignant une fraction rationnelle en y à coefficients analytiques en x, a ses points critiques fixes, la fraction R est un polynome du second degré en y. De même, si une équation d'ordre n, rationnelle en $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$, algébrique ou analytique en $y^{(n-2)}, \ldots y', y, x$, a ses points critiques fixes, les degrés en $y^{(n-1)}$ des coefficients des différentes puissances de $y^{(n)}$ sont limités. Par exemple, dans l'équation

$$y''^2 + A(y', y, x)\, y'' + B(y', y, x) = 0, \tag{38}$$

les fonctions A, B rationnelles en y', sont des polynomes de degrés 2 et 4.

La méthode introduite par M. Painlevé pour former des conditions nécessaires pour qu'une équation ait ses points critiques fixes, a eu pour résultat important de limiter le degré en y de l'équation $y'' = R(y', y, x)$, R désignant un polynome du second degré en y', à coefficients rationnels ou algébriques en y, analytiques en x: les pôles, ou les points de ramification $y = a(x)$ de la fraction R sont d'ordre 1, et par suite son degré d'infinitude pour $y = \infty$ est 3 au plus. La même méthode limite sans difficulté nouvelle[2] le degré en y d'une équation non résolue en y'' et de degré donné en y'': par exemple, si les fonctions A, B de l'équation (38) sont rationnelles en y, et si l'on suppose que l'intégrale générale de cette équation ait ses points critiques fixes, l'intégrale singulière pouvant avoir des points critiques mobiles, les pôles $y = a(x)$ des fractions A et B sont d'ordres 5 et 10 au plus. Dans une équation algébrique en $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$,

---

[1] Dans les *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, M. Boutroux étudie les intégrales des équations de la forme (32), quand ces intégrales acquièrent une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles. Sur des exemples simples, et par application systématique de la méthode de continuité, M. Boutroux étudie la fonction multiforme en elle-même, les points critiques, les permutations de ses déterminations. Les recherches de M. Boutroux apportent une contribution utile à l'étude de l'équation (37), et par suite à celle de l'équation (18).

[2] Toutefois on utilise une proposition d'une nature un peu différente: m et n désignant deux nombres entiers, si les fonctions y^m, $(y-1)^n$ sont analytiques et uniformes dans un certain domaine, la fonction y est elle-même uniforme dans ce domaine.

le degré des coefficients en $y^{(n-2)}$ est limité de même, en fonction du degré en $y^{(n)}$ de la relation algébrique établie par l'équation entre $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$.[1]

Admettons un instant qu'il soit démontré que l'équation (18) n'a pas son intégrale générale uniforme. Ce résultat achève de limiter le degré en y de l'équation à points critiques fixes

$$(2) \qquad y''' = P(y'', y', y, x),$$

P désignant un polynome en y'', y', y à coefficients analytiques en x. Il montre que ce n'est pas une hypothèse arbitraire de supposer que la fonction P est un polynome en y, plutôt qu'une fonction transcendante; par la nature des choses, on doit attendre de cette hypothèse des simplifications: de même qu'il est plus simple d'étudier les équations du premier ordre algébriques en y' et y, que celles qui établissent entre y' et y une relation transcendante.

C'est d'ailleurs dans le cas de l'équation (2) que le problème de la formation des équations réduites au voisinage d'une valeur singulière est le plus difficile. Dans tout autre cas, ce problème n'offre pas de difficulté d'analyse nouvelle, et offre des difficultés arithmétiques moindres. Il est à prévoir que d'une façon générale le degré en y des coefficients de l'équation (8) est ainsi limité: tout pôle $y = a(x)$ de la fonction $B(y', y, x)$ (pour y' arbitraire) est simple, et $y = a(x_0)$ est pôle du coefficient $b(y, x_0)$ de l'équation simplifiée; tout pôle $y = a(x)$ de $C(y', y, x)$ est double au plus, si $y = a(x_0)$ est pôle double de $c(y, x_0)$, simple si $y = a(x_0)$ est pôle simple de $c(y, x_0)$; les fonctions $a_i(y, x)$ sont des polynomes du second degré en y.

J'ai démontré la proposition suivante: soit $y = a(x)$ un pôle des fonctions a_i, B, C de l'équation (8) pour y' arbitraire; si $y = a(x_0)$ n'est pas pôle des coefficients $b(y, x_0)$, $c(y, x_0)$ de la simplifiée, l'intégrale générale a des points critiques mobiles autour desquels elle acquiert une infinité de déterminations.

Remarquons que la proposition analogue n'est pas exacte pour les équations du second ordre: l'intégrale de l'équation $y'' = \frac{1}{y^3}$, définie par la relation $Ay^2 = (Ax + B)^2 + 1$, n'a que deux déterminations.

---

[1] Les nombres 5 et 10 sont en désaccord avec un nombre donné par M. PAINLEVÉ (*Acta mathematica*, 1902, p. 73), et qui est exact si l'on considère des équations dont l'intégrale générale et l'intégrale singulière ont leurs points critiques fixes. Nous adoptons ici une hypothèse plus rationnelle: les intégrales singulières de deux équations transformées algébriques de même ordre ne se correspondent pas par la transformation; il se peut que l'une des équations ait une intégrale singulière, et que l'autre n'en ait pas.

Si l'on suppose la valeur $y = \infty$ régulière pour la simplifiée, la proposition énoncée limite le degré d'infinitude pour $y = \infty$ des différentes fractions qui figurent dans l'équation (8); en particulier, le degré d'infinitude des fractions a_i est 2 au plus.

Une autre conséquence est la suivante. Supposons que les deux entiers N_1, N_2 relatifs dans la simplifiée à un pôle $y = a(x)$ de l'équation complète soient N et $(n+1)N$, et que N soit positif. Pour étudier les intégrales au voisinage de la valeur $a(x)$, faisons la transformation $y = a(x) + z^N$: la valeur $z = 0$ est régulière pour la simplifiée de l'équation transformée. Si $z = 0$ était un pôle de cette équation transformée, l'intégrale générale acquerrait une infinité de déterminations autour des points critiques mobiles, et la fonction z^N ne saurait avoir ses points critiques fixes. En particulier, non seulement $y = a(x)$ n'est pas un pôle des fractions $a_i(y, x)$, mais encore $y = a(x)$ est une intégrale de chacune des équations du premier ordre $y' + a_i(y, x) = 0$.

18. Formons comme application les équations à points critiques fixes dont la simplifiée a comme intégrale une fonction fuchsienne ou kleinéenne. Soit

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + y'^3 F(y)$$

cette simplifiée. Supposons la valeur $y = \infty$ régulière: la fonction $F(y)$ a au moins trois pôles. Dans l'équation complète figurent des dénominations, au nombre de trois au plus, de la forme $y' + hy^2 + ky + l$, h, k, l désignant des fonctions analytiques de x, et chaque valeur singulière $y = a(x)$ doit vérifier chacune des conditions

$$a' + ha^2 + ka + l = 0.$$

A la vérité ces résultats ne dépendent de la proposition précédente qu'en ce qui concerne les pôles auxquels correspond un entier N fini; mais l'extension en est facile aux pôles auxquels correspond un nombre infini. Effectuons sur la fonction y une transformation homographique, de façon que trois des valeurs singulières $a(x)$ deviennent des constantes: h, k, l seront nuls, les autres valeurs singulières seront aussi des constantes, nous pourrons réunir les dénominateurs en y' en un seul, et l'équation prendra la forme

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + y'^3 F(y) + y'^2 \Sigma \frac{B}{y-a} + Cy'' + Dy' + \frac{P(y)}{y'}.$$

Les fonctions B, C, D satifont aux conditions:

$$2C + \Sigma B = 0,$$

$$\text{pour chaque pôle, } B + \left(1 - \frac{1}{N}\right) C = 0.$$

$P(y)$ est un polynome du quatrième degré en y à coefficients analytiques en x, qui admet comme racines simples les valeurs $y = a$ auxquelles correspond un entier N égal à 2, et comme racines doubles les autres.

Si la fonction $F(y)$ a au moins quatre pôles, et si l'on écarte le cas où elle en a quatre et où les quatre entiers correspondants sont égaux à 2, le polynome $P(y)$ a au moins cinq racines, il est donc identiquement nul. Si C était différent de zéro, les entiers N, qui sont plus grands que 1, devraient satisfaire à l'équation arithmétique $\sum \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 2$, ce qui est impossible. L'équation complète se réduit donc à

$$y''' = \frac{3}{2} \frac{y''^2}{y'} + y'^3 F(y) + D y'.$$

Si la fonction $F(y)$ a trois pôles, on sait que les entiers correspondants sont liés par l'inégalité $\sum \frac{1}{N} < 1$, donc C est nul: un seul des entiers peut être égal à 2, donc P est nul. Nous sommes ramenés à la même forme.

L'équation se réduit à son équation simplifiée par le changement de variable $\varphi(x) = X$ déterminé par l'équation

$$\varphi''' = \frac{3}{2} \frac{\varphi''^2}{\varphi'} + D\varphi',$$

ou par le système

$$\varphi' = \frac{1}{u^2}, \quad u'' + \frac{D}{2} u = 0.$$

L'intégrale de l'une des équations considérées se déduit donc de l'intégrale de la simplifiée de cette équation par l'intégration d'une équation linéaire suivie d'une quadrature.

Il est tout aussi simple de former les équations à points critiques fixes admettant une simplifiée dont l'intégrale générale a des points essentiels isolés mobiles. Ces équations se ramènent au système formé par l'une des cinq dernières quadratures (12) et par une équation du second ordre en z' de la forme

$$z''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{z''^2}{z'} + \frac{n+1}{n \lambda^2} z'^3 + A z'' + B z' + \frac{H}{z'};$$

ou bien au système formé par la quadrature $z = \int \frac{dy}{y}$, et par une équation du second ordre en z', qui peut avoir un, deux ou trois pôles en z'. Dans tous les cas, l'équation du second ordre en z' a ses points critiques fixes, et par suite est une équation connue. Réciproquement d'ailleurs, si dans le premier système les intégrales de l'équation en z' n'ont comme points singuliers mobiles que des pôles dont les résidus sont les quotients par $2\pi i$ de périodes de l'intégrale elliptique correspondante, l'équation transformée en y a ses points critiques fixes; son intégrale admet les pôles de z' comme points essentiels isolés. Si dans le second système les intégrales de l'équation en z' n'ont comme points singuliers mobiles que des pôles dont les résidus sont des nombres entiers, l'équation transformée en y a ses points critiques fixes; son intégrale admet comme points essentiels isolés les pôles multiples de z'.

J'ai donné précédemment des exemples d'équations à points critiques fixes dont l'intégrale générale a une coupure essentielle mobile, tandis que l'intégrale générale de la simplifiée a ses singularités non polaires fixes, ou possède un point essentiel isolé mobile. Je n'ai pas formé d'équation dont l'intégrale générale possède un point essentiel isolé mobile sans que l'intégrale générale de la simplifiée présente la même singularité. Il est possible qu'il n'en existe pas. D'une façon générale, les propriétés et les singularités d'une équation à points critiques fixes «se reflètent, en quelque sorte, dans celles de la simplifiée en s'affaiblissant».[1] Mais une différence apparaît ici entre les équations dont l'intégrale générale possède un point essentiel isolé mobile, et celles dont l'intégrale possède une coupure mobile.[2]

19. Considérons enfin la simplifiée

$$y''' = \frac{PQ'' - QP''}{PQ' - QP'} y' y'' - \frac{P'Q'' - Q'P''}{PQ' - QP'} \frac{y'^3}{2}: \tag{14}$$

P et Q désignent deux polynomes du quatrième degré en y à coefficients constants, P', Q', P'', Q'' leurs dérivées par rapport à y, et les racines du polynome $PQ' - QP'$ sont supposées simples et finies. Les équations à points critiques fixes admettant cette équation simplifiée sont nécessairement de la forme

$$(39) \quad \begin{cases} y''' = \sum \dfrac{(y' - a'_i)(y'' - a''_i)}{y - a_i} + \sum \dfrac{A_i (y' - a'_i)^3 + B_i (y' - a'_i)^2 + C_i (y' - a'_i)}{y - a_i} + \\ \qquad\qquad + D y'' + E y' + \Pi (y - a_i) \sum \dfrac{F_i}{y - a_i}. \end{cases}$$

[1] Painlevé, *Notice*, p. 75.

[2] Voir dans les *Leçons de Stockholm*, p. 440, quelques points de comparaison entre les fonctions qui possèdent un point essentiel isolé, celles qui possèdent une coupure, et celles qui admettent un ensemble parfait discontinu de points singuliers.

i prend les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$, et par suite les fonctions $a_i, A_i, B_i, C_i, D, E, F_i$ sont au nombre de trente-deux. Il est facile d'obtenir des conditions nécessaires pour que l'équation (39) ait ses points critiques fixes. D'une part la valeur $y = \infty$ doit être régulière:

$$\Sigma A_i = 0, \ \Sigma A_i a_i = -6, \ \Sigma A_i a_i^2 = -2 \Sigma a_i,$$
$$2D + \Sigma(B_i - 3A_i a'_i) = 0, \ \Sigma F_i = \Sigma F_i a_i = \Sigma F_i a_i^2 = 0:$$

ces conditions remplies, les intégrales de l'équation (39) ont des pôles mobiles, et admettent au voisinage de chacun d'eux un développement de la forme

$$y = \frac{\alpha}{x - x_0} + \beta + \gamma(x - x_0)^2 + \delta(x - x_0)^3 + \cdots\cdots,$$

dans lequel les trois coefficients α, β, γ sont arbitraires. Exprimons d'autre part que l'équation (39) admet des intégrales qui prennent en un point arbitraire x_0 la valeur singulière $a_i(x_0)$, et dont le développement au voisinage est holomorphe:

$$(40) \qquad y = a_i + \alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 + \gamma(x - x_0)^3 + \cdots\cdots,$$

et renferme deux coefficients arbitraires, les coefficients α et γ:

$$2A_i^2 + \sum \frac{A_i - A_j}{a_i - a_j} = 0 \ (j \text{ prend, sauf la valeur } i, \text{ les valeurs } 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

$$\left(-5\frac{A_i}{2} - \sum \frac{1}{a_i - a_j}\right) B_i + \sum \left(\frac{A_i}{2} + \frac{1}{a_i - a_j}\right) B_j + A'_i - A_i \sum \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} +$$
$$+ 3 \sum \frac{A_j(a'_i - a'_j)}{a_i - a_j} - 3\frac{A_i}{2} \sum_{i=1}^{i=6} A_i a'_i = 0,$$

$$\left(-2A_i - \sum \frac{1}{a_i - a_j}\right) C_i + \sum \frac{C_j}{a_i - a_j} - B_i^2 + B'_i - B_i \sum \frac{a'_i - a'_j}{a_i - a_j} +$$
$$+ \sum \frac{3A_j(a'_i - a'_j)^2 + 2B_j(a'_i - a'_j)}{a_i - a_j} - B_i D + E + \sum \frac{a''_i - a''_j}{a_i - a_j} = 0,$$

$$-a'''_i - B_i C_i + C'_i + \sum \frac{(a'_i - a'_j)(a''_i - a''_j - C_i)}{a_i - a_j} +$$
$$+ \sum \frac{A_j(a'_i - a'_j)^3 + B_j(a'_i - a'_j)^2 + C_j(a'_i - a'_j)}{a_i - a_j} + D(a''_i - C_i) +$$
$$+ E a'_i + F_i \Pi(a_i - a_j) = 0.$$

20. Désignons par (S) le système de ces trente et une équations entre les trente-deux fonctions à déterminer, et par (E) une équation de la forme (39) dont les coefficients satisfont au système (S). Nous allons démontrer que réci-

proquement les conditions obtenues sont suffisantes, et que les intégrales de l'équation (E) n'ont, en dehors des points singuliers des coefficients, d'autres points singuliers que des pôles.

Soit l'intégrale $y(x)$ définie par les conditions initiales arbitraires x_0, y_0, y'_0, y''_0: d'une façon précise x_0 est un point régulier pour les déterminations des coefficients que nous considérons, la valeur y_0 est finie et différente des six valeurs $a_i(x_0)$, les valeurs y'_0, y''_0 sont finies. D'après le théorème de CAUCHY, l'intégrale $y(x)$ est holomorphe dans un cercle de centre x_0. Prolongeons analytiquement les coefficients, et l'intégrale $y(x)$. Admettons que dans ce prolongement nous arrivions à un point X, où les coefficients soient holomorphes, et où l'intégrale $y(x)$ ne soit pas méromorphe: il suffit de montrer que cette hypothèse est absurde.

Supposons d'abord que sur un chemin λ, de longueur finie, aboutissant en X, et sur lequel les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes, l'intégrale $y(x)$ soit méromorphe, sauf en X, et supposons en outre que, quand x tend vers X sur le chemin λ, l'indétermination de $y(x)$ ne soit pas complète, mais qu'une aire du plan du point y ne fasse pas partie du domaine d'indétermination. Comme une transformation homographique effectuée sur y ne change pas la forme de l'équation (E), nous pouvons aussi bien supposer que sur le chemin λ $y(x)$ finisse par être borné.

Selon le principe de la méthode que M. PAINLEVÉ a appliquée aux équations (A), considérons des expressions rationnelles en y'', y', y, analytiques en x, qui prennent en un point arbitraire x des valeurs arbitraires quand on y remplace $y(x)$ par une intégrale ayant au point x l'un des valeurs $a_i(x)$ et admettant au voisinage un développement de la forme (40). Ce sont les expressions

$$(41)\qquad u=\frac{Py''-\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial y}y'^2+Ry'+S}{\Pi(y-a_i)},\quad v=\frac{Qy''-\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial y}y'^2+Ty'+W}{\Pi(y-a_i)},$$

où P et Q sont deux polynomes du quatrième degré en y dont le jacobien est $\Pi(y-a_i)$, et R, S, T, W des polynomes du cinquième degré en y, dont les coefficients sont déterminés par les conditions indiquées; d'ailleurs les coefficients des six polynomes P, Q, R, S, T, W sont holomorphes en tout point où les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes.

S'il existe sur le chemin λ, aussi près que l'on veut du point X, des points où u et v sont bornés, l'intégrale $y(x)$ est holomorphe en X. En effet l'on déduit des deux équations (41) les équations

$$(41 \text{ bis}) \qquad \begin{cases} \dfrac{y'^2}{2} + P_3 y' + Q_3 + Pv - Qu = 0 \\ y'' + P_2 y' + Q_2 + \dfrac{\partial P}{\partial y} v - \dfrac{\partial Q}{\partial y} u = 0, \end{cases}$$

P_3, Q_3, P_2, Q_2 désignant des polynomes en y dont le degré est égal à l'indice, et dont les coefficients sont holomorphes en tout point où les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes. Par suite y' et y'' sont aussi bornés aux points considérés. Si en certains d'entre eux, les six modules $|y - a_i(x)|$ sont supérieurs à un nombre positif fixe, l'intégrale $y(x)$ est, d'après le théorème de CAUCHY, holomorphe au voisinage de chacun de ces points dans un cercle de rayon fixe: ce cercle finit par contenir le point X. Admettons au contraire qu'en chacun des points considérés l'une des quantités $y - a_i(x)$ soit arbitrairement petite. Au moyen des équations (41 bis), l'on peut mettre les dérivées u' et v' sous la forme

$$u' = R_1 y' + S_1 + R_2 u + S_2 v,$$
$$v' = T_1 y' + W_1 + T_2 u + W_2 v,$$

$R_1, S_1, R_2, S_2, T_1, W_1, T_2, W_2$ désignant des polynomes en y dont le degré est égal à l'indice, et dont les coefficients sont holomorphes en tout point où les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes. Par suite les trois fonctions y, y', u satisfont à un système différentiel régulier pour y voisin de $a_i(x)$, et, d'après le théorème de CAUCHY, l'intégrale $y(x)$ est holomorphe au voisinage de chacun des points considérés dans un cercle de rayon fixe: ce cercle finit encore par contenir le point X. Toutefois le système différentiel auquel satisfont les trois fonctions y, y', u n'est pas holomorphe pour les valeurs de x, y qui annulent la fonction $P(y, x)$: de sorte que le raisonnement est en défaut, si la valeur $a_i(X)$ est racine du polynome $P(y, X)$. Il suffit dans ce cas de considérer le système auquel satisfont les trois fonctions y, y', v pour arriver à la même conclusion. La valeur $a_i(X)$ ne peut être racine des deux polynomes $P(y, X)$ et $Q(y, X)$, car elle serait alors racine multiple du polynome $\Pi[y - a_i(X)]$: ce qui ne peut avoir lieu en un point X où les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes.

Supposons que le module maximum des deux quantités u et v tende vers l'infini, quand x tend vers X sur le chemin λ. Si nous substituons dans l'expression de u' l'expression de y' en fonction de u, v, y, x tirée de la première des équations (41 bis), nous voyons que la dérivée logarithmique $\dfrac{u'}{u}$ est bornée aux points où $\dfrac{v}{u}$ est lui-même borné, et où d'après notre hypothèse u tend vers l'infini. Il est impossible que $\frac{v}{u}$ finisse par être borné: car il en serait de même de la dérivée logarithmique $\frac{u'}{u}$, et la fonction u ne pourrait croître indéfiniment. Il est impossible aussi que $\frac{u}{v}$ finisse par être borné. Il faut donc admettre que, quand x tend vers X, $\frac{u}{v}$ oscille indéfiniment dans son plan, et que sur le chemin λ il y a une infinité de segments sur chacun desquels $\left|\frac{u}{v}\right|$ passe de la valeur A à la valeur B, sans sortir de l'intervalle $A - B$, A et B désignant deux nombres positifs arbitraires. Or sur ces segments les dérivées logarithmiques $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$ sont bornées, la longueur de chacun d'eux est infiniment petite: $\left|\frac{u}{v}\right|$ s'écarte donc infiniment peu de la valeur initiale A et ne saurait atteindre la valeur B: cette dernière hypothèse est absurde.

Nous avons toutefois introduit une restriction: nous avons supposé que, quand x tendait vers le point transcendant X sur le chemin λ, l'intégrale $y(x)$ n'était pas complètement indéterminée. Notre discussion écarte déjà certaines singularités des fonctions classiques. Ainsi l'intégrale $y(x)$ ne peut avoir de points singuliers mobiles analogues au point singulier $x = 0$ de la fonction $e^{\frac{1}{x}}$, puisque cette fonction tend vers une limite quand la variable tend vers le point $x = 0$ sur un chemin qui ne coupe pas l'axe des quantités purement imaginaires et qui n'est pas tangent à cet axe. L'intégrale $y(x)$ ne peut admettre non plus une coupure mobile analogue à la coupure de la fonction modulaire, puisque la fonction modulaire tend vers une limite quand la variable tend vers un point d'abscisse rationnelle de l'axe réel sur un chemin normal à cet axe. Mais il existe des fonctions fuchsiennes et kleinéennes qui admettent une coupure essentielle, et qui sont complètement indéterminées quand la variable tend vers un point quelconque de cette coupure sur un chemin de longueur finie quelconque: telles sont les fonctions de SCHWARZ dont le triangle fondamental n'a aucun angle nul. Comme la fonction modulaire, ces fonctions fuchsiennes et kleinéennes vérifient une équation différentielle algébrique du troisième ordre, de forme classique, et, considérées comme intégrales de cette équation, admettent leur coupure comme singularité mobile: l'intégrale $y(x)$ pourrait admettre une coupure mobile de même nature. L'intégrale $y(x)$ pourrait posséder des points singuliers mobiles, isolés ou formant un ensemble parfait, et être complètement indéterminée quand la variable tend sur un chemin de longueur finie quelconque vers l'un quelconque de ces points. Enfin l'intégrale $y(x)$ pourrait posséder des singularités transcendantes et critiques.

Il est donc nécessaire de lever la restriction que nous avons introduite, et de supposer maintenant que l'intégrale $y(x)$ est complètement indéterminée quand l'on s'approche du point X sur un chemin de longueur finie quelconque. Parmi les chemins situés dans la région où les coefficients de l'équation (E) ont été prolongés analytiquement, et qui aboutissent au point X, nous pouvons choisir un chemin formé de segments rectilignes, par exemple la ligne polygonale dont les sommets sont les centres des cercles successifs construits dans le prolongement. Nous pouvons admettre que l'intégrale $y(x)$ est méromorphe le long de cette ligne polygonale depuis l'origine jusqu'au point X: sinon notre raisonnement s'appliquerait au premier point où l'intégrale $y(x)$ ne serait pas méromorphe. Nous pouvons enfin nous borner à considérer le dernier côté de cette ligne polygonale; nous appellerons ce dernier côté le chemin l: remarquons seulement qu'il suffirait, pour que la suite du raisonnement fût applicable, que le chemin l eût une tangente continue. Nous allons montrer que l'on peut par déformation continue substituer au chemin l un chemin de longueur finie, aboutissant en X, sur lequel les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes, et sur lequel, sauf en X, l'intégrale $y(x)$ est méromorphe, et tel en outre que, quand x tend vers X, le point y finisse par ne pas pénétrer dans un cercle de son plan: nous serons ramenés par là au cas précédent. Le centre de ce cercle peut être choisi arbitrairement en dehors des six points $a_i(X)$: comme une transformation linéaire effectuée sur y ne change pas la forme de l'équation (E), choisissons pour centre l'origine du plan des y.

Pour étudier l'intégrale $y(x)$ au voisinage de la valeur $y=0$, prenons y comme variable, et posons $y''=ty'^2$: l'équation (E) peut être remplacée par le système

$$(E_1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-t\frac{dx}{dy},\ \frac{dt}{dy}=-2t^2+t\sum\frac{1}{y-a_i}+\sum\frac{A_i}{y-a_i}+\frac{dx}{dy}(\cdots\cdots),$$

la parenthèse désignant un polynome en $\frac{dx}{dy}\cdot$ Donnons-nous un nombre positif très grand A, un nombre positif très petit r, et admettons que A soit assez grand et r assez petit pour satisfaire à toutes les conditions que nous allons obtenir. Considérons un segment $y_1\,y_2$ décrit par le point $y(x)$ dans le cercle de centre $y=0$ et de rayon r, quand le point x décrit le segment $x_1\,x_2$ du chemin l, et supposons qu'il existe sur le segment $y_1\,y_2$, extrémités comprises, un point y_0 qui corresponde à un point x_0 du segment $x_1\,x_2$ où l'on ait $|t_0|=$ $=\left|\frac{y''_0}{y'^2_0}\right|\leq A$. Au point x_0, y'_0 est arbitrairement grand: sinon, y_0, y'_0, y''_0 seraient bornés, et $|y_0 - a_i(x_0)|$ supérieur à un nombre fixe; l'intégrale $y(x)$ serait holomorphe en x_0 dans un cercle de rayon fixe, et par conséquent serait holomorphe en X. Par suite, d'après un théorème de M. POINCARÉ, l'intégrale du système (E_1), transformée de l'intégrale $y(x)$ de l'équation (E), peut être développée suivant les puissances du paramètre $\frac{1}{y'_0}$. Posons $\frac{dx}{dy} = \frac{Y}{y'_0}$: le système transformé en x, Y, t se réduit pour $y'_0 = \infty$ au système

$$\frac{dx}{dy} = 0, \quad \frac{dY}{dy} = -tY, \quad \frac{dt}{dy} = -2t^2 + t\sum \frac{1}{y - a_i} + \sum \frac{A_i}{y - a_i},$$

qui est équivalent à l'équation simplifiée de l'équation (E), et dont par suite nous possédons implicitement l'intégrale générale. L'intégrale de ce système, définie par les conditions initiales $y = y_0$, $x = x_0$, $Y = 1$, $t = t_0$ est holomorphe au point y_0: si A est assez grand, r assez petit et x_0 assez proche de X, la valeur du rayon de convergence de cette intégrale au point y_0 donnée par le théorème de CAUCHY peut être limitée inférieurement en fonction de A seulement. Si r est inférieur à la moitié de cette limite inférieure, l'intégrale considérée, et par suite l'intégrale du système (E_1), transformée de l'intégrale $y(x)$, sont holomorphes dans le cercle de centre $y = 0$ et de rayon r, et sur la circonférence de ce cercle. Quand y varie dans ce domaine, la fonction $\frac{dx}{dy}$ est holomorphe et ne s'annule pas, d'après la relation $\frac{dx}{dy} = \frac{1 + \eta}{y'_0}$, où η désigne une fonction de $y, y_0, x_0, t_0, \frac{1}{y'_0}$, holomorphe en y dans le domaine considéré, nulle pour $\frac{1}{y'_0} = 0$ et holomorphe au voisinage de cette valeur: inversement, la fonction $y(x)$ est holomorphe quand x varie dans le domaine correspondant de son plan.

Désignons par δl et δs les longueurs des segments correspondants $x_1 x_2$ et $y_1 y_2$; et faisons décrire au point y le plus petit arc de la circonférence de centre $y = 0$ et de rayon r compris entre les points y_1 et y_2, soit $\delta\sigma$ la longueur de cet arc: le point x, d'après la relation $\frac{dx}{dy} = \frac{1 + \eta}{y'_0}$, décrit entre les deux points x_1 et x_2 un segment analytique régulier de longueur $\delta\lambda$, et l'intégrale $y(x)$ est holomorphe dans la région du plan comprise entre les deux segments δl et $\delta\lambda$ et sur le segment $\delta\lambda$. Les deux segments $\delta\lambda$ et δl sont de longueurs comparables: intégrons en effet l'égalité[1] $|dx| = \frac{(1 + \varepsilon)|dy|}{|y'_0|}$, quand y décrit le chemin δs, et

[1] Nous désignons par ε, ε_1, ε_2, ε_3 des quantités positives ou négatives dont on peut rendre les valeurs absolues aussi petites que l'on veut, en choisissant A assez grand, r assez petit et x assez proche de X sur le chemin l.

appliquons au second membre la formule de la moyenne; il vient $\delta l = \frac{(1+\varepsilon_1)\delta s}{|y'_0|}$; l'on obtient de même $\delta\lambda = \frac{(1+\varepsilon_2)\delta\sigma}{|y'_0|}$, et par suite $\frac{\delta\lambda}{\delta l} < \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon_3)$, car le rapport $\frac{\delta\sigma}{\delta s}$ ne peut surpasser $\frac{\pi}{2}$. Une première conséquence de cette inégalité est que le segment $\delta\lambda$ est à une distance arbitrairement petite du point x_1, et par suite, si x_1 est assez proche de X, est intérieur comme le segment δl au cercle de convergence des coefficients de l'équation (E) au point X: ces coefficients sont donc holomorphes dans la région du plan comprise entre les deux segments δl et $\delta\lambda$ et sur le segment $\delta\lambda$.

Substituons sur le chemin l le segment $\delta\lambda$ au segment δl, et faisons cette substitution pour tous les segments $y_1 y_2$ intérieurs au cercle de rayon r, sauf pour ceux sur lesquels on a constamment $\left|\frac{y''}{y'^2}\right| > A$: nous obtenons ainsi un chemin composé d'une infinité de segments analytiques réguliers, aboutissant en X, dont la longueur totale est finie, sur lequel les coefficients de l'équation (E) sont holomorphes, et sur lequel, sauf en X, l'intégrale $y(x)$ est méromorphe; le chemin correspondant décrit par le point y ne pénètre dans le cercle de rayon r que le long des segments exceptés. Parmi ces segments exceptés, les uns ne pénètrent pas dans le cercle de centre $y = 0$ et de rayon $\frac{r}{2}$; il est clair que nous pouvons les laisser de côté, car il suffit d'obtenir un cercle de rayon non nul dans lequel le point y ne pénètre pas. Il reste donc à considérer les segments $y_1 y_2$ sur lesquels on a constamment $\left|\frac{y''}{y'^2}\right| > A$ et qui pénètrent dans le cercle de rayon $\frac{r}{2}$: nous allons substituer à chacun d'eux une suite de segments tels que $\left|\frac{y''}{y'^2}\right|$ soit borné sur les parties de ces segments intérieures au cercle de rayon $\frac{r}{2}$: ce qui nous ramènera au cas précédent.

Pour étudier l'intégrale $y(x)$ sur le segment $x_1 x_2$ correspondant à l'un des segments $y_1 y_2$ considérés, prenons comme nouvelle variable $\frac{y'}{\sqrt{y''}} = z$; en un point quelconque x_0 du segment $x_1 x_2$, $|z_0|$ est très petit, plus petit que $\frac{1}{\sqrt{A}}$. En outre, au point x_0 l'intégrale $y(x)$ est holomorphe, et y''_0 n'est pas infini; mais, quand le point x_0 tend vers X, y''_0 tend vers l'infini: sinon, en certains des points x_0, y_0, y'_0, y''_0 seraient bornés, et $|y_0 - a_i(x_0)|$ supérieur à un nombre fixe; l'intégrale $y(x)$ serait holomorphe en chacun de ces points dans un cercle de rayon fixe, et par suite serait holomorphe en X. Il résulte d'abord qu'il est inutile, pour définir la fonction $z(x)$ sur le segment $x_1 x_2$, de considérer deux feuillets sur le plan de la variable x. D'autre part l'équation (E) peut être remplacée par le système

$$(E_2)\ \frac{dx}{dz}=\frac{1}{\sqrt{y''}}-\frac{z\sqrt{y''}}{2}\frac{d\frac{1}{y''}}{dz},\ \frac{dy}{dz}=z-\frac{z^2y''}{2}\frac{d\frac{1}{y''}}{dz},\ \frac{d\frac{1}{y''}}{dz}=-\frac{1}{y''}\left(1-\frac{zy''}{2}\frac{d\frac{1}{y''}}{dz}\right)\left[z\sum\frac{1}{y-a_i}+\right.$$
$$\left.+z^3\sum\frac{A_i}{y-a_i}+\frac{1}{\sqrt{y''}}(\cdots)\right],$$

qui est holomorphe par rapport à $\frac{1}{\sqrt{y''}}$ et z, si y'' est assez grand et z assez petit. Par suite l'intégrale du système (E_2), transformée de l'intégrale $y(x)$ de l'équation (E), peut être développée suivant les puissances du paramètre $\frac{1}{\sqrt{y''_0}}$. Posons $\frac{1}{y''}=\frac{Z}{y''_0}$: le système transformé en x, y, Z se réduit pour $y''_0=\infty$ au système

$$\frac{dx}{dz}=0,\ \frac{dy}{dz}=z-\frac{z^2}{2Z}\frac{dZ}{dz},\ \frac{dZ}{dz}=-Z\left(1-\frac{z}{2Z}\frac{dZ}{dz}\right)\left(z\sum\frac{1}{y-a_i}+z^3\sum\frac{A_i}{y-a_i}\right),$$

qui est encore équivalent à l'équation simplifiée de l'équation (E). L'intégrale de ce système, définie par les conditions initiales $z=z_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $Z=1$, est holomorphe, si A est assez grand, si r est assez petit, et si x_0 est assez proche de X, dans un cercle de centre $z=0$ et de rayon fixe, et par conséquent dans le cercle de centre $z=0$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{A}}$, qui contient le segment $z_1 z_2$: il en est de même de l'intégrale du système (E_2), transformée de l'intégrale $y(x)$.

D'ailleurs le segment $z_1 z_2$ n'est pas tout entier infiniment voisin du point $z=0$. En particulier, si l'on désigne par y_3 et y_4 les points où le segment $y_1 y_2$ rencontre pour la première fois et pour la dernière fois la circonférence de centre $y=0$ et de rayon $\frac{r}{2}$, il y a sur chacun des segments partiels $y_1 y_3$ et $y_2 y_4$ des points où $|z|$ est supérieur à un nombre fixe, et où par suite $\left|\frac{y''}{y'^2}\right|$ est inférieur à un nombre fixe. Supposons en effet que le segment $z_1 z_3$ soit tout entier intérieur au cercle de centre $z=0$ et de rayon $\varrho\left(<\frac{1}{\sqrt{A}}\right)$. On déduit du système (E_2) les deux équations $\frac{dx}{dz}=\frac{1+\eta}{\sqrt{y''_0}}$, $\frac{dy}{dz}=z(1+\eta_1)$, η et η_1 désignant des fonctions de $z-z_0$, $\frac{1}{\sqrt{y''_0}}$ et z, holomorphes et nulles pour $z=z_0=\frac{1}{\sqrt{y''_0}}=0$. Comme le segment $x_1 x_3$ est rectiligne, il résulte de la première équation que le segment $z_1 z_3$ est un segment analytique régulier, et que l'on peut rendre la variation de la tangente le long de ce segment aussi petite que l'on veut, en choisissant ϱ assez petit: la longueur du segment $z_1 z_3$ est au plus $2\varrho(1+\varepsilon)$, ε désignant une quantité arbitrairement petite. Il résulte alors de la seconde équation que le module $|y_3-y_1|$ ne peut surpasser $2\varrho^2(1+\varepsilon_1)$, ε_1 désignant une quantité arbitrairement petite. Or ce module est supérieur à $\frac{r}{2}$. Si ϱ est assez petit, mais fixe, il y a donc sur le segment $y_1 y_3$ des points y_5, et il y a de même sur le segment $y_2 y_4$ des points y_6, tels que les points correspondants z_5 et z_6 soient extérieurs au cercle de centre $z=0$ et de rayon ϱ.

En procédant comme précédemment, on peut dès lors remplacer les parties du segment $z_5 z_6$ intérieures au cercle de rayon ϱ par des segments de la circonférence. Le segment $x_1 x_2$ du chemin l est remplacé par une suite de segments analytiques réguliers, dont la somme a une longueur comparable à celle du segment primitif, et sur lesquels les coefficients de l'équation (E) et l'intégrale $y(x)$ sont holomorphes (sur les nouveaux segments z est holomorphe en x, et y est holomorphe en z). Le segment $y_1 y_2$ est remplacé aussi par une suite de segments: $\frac{y''}{y'^2}$ est borné sur les segments compris entre les points y_5 et y_6, et par suite sur tous les segments du nouveau chemin décrit par le point y qui sont intérieurs au cercle de centre $y=0$ et de rayon $\frac{r}{2}$. La démonstration est terminée.[1]

[1] Cette démonstration est à un double point de vue une extension de celle que M. Painlevé a constituée pour les équations (A); en définitive l'une et l'autre sont fondées sur le théorème de Cauchy, sur le théorème de M. Poincaré qui exprime la continuité des intégrales d'un système différentiel en fonction d'un paramètre contenu dans ce système, et par suite en fonction des conditions initiales, et sur la considération des dérivées logarithmiques, qui joue un rôle essentiel dans toutes les questions de croissance.

Dans la deuxième partie, nous démontrons que, le point X étant supposé transcendant pour l'intégrale $y(x)$, il existe des chemins de longueur finie aboutissant au point X, sur lesquels l'intégrale $y(x)$ n'est pas complètement indéterminée. Cette partie de la démonstration n'est pas applicable à l'équation différentielle classique que vérifient les fonctions fuchsiennes et kleinéennes (cette équation ne peut être transformée en un système de la forme (E_2), holomorphe pour $z=0$): nous avons vu qu'on ne doit pas s'en étonner. La deuxième partie de la démonstration est applicable au contraire à l'équation $y'''=2yy''-3y'^2$, et à l'équation XII: elle permet de montrer que, pour l'intégrale générale de chacune de ces équations, il existe des

21. Nous avons ainsi démontré que l'équation (E) a ses points critiques fixes, en nous servant seulement des conditions établies entre les coefficients par le système (S), et sans avoir intégré ce système. Effectivement, à l'opposé des systèmes différentiels qui déterminent les coefficients des équations (A), et dont l'intégration est très simple, le système (S) présente une grande complexité: et je n'en ai pas achevé l'intégration. Il renferme neuf équations algébriques entre les fonctions a_i et A_i. Si l'on regarde les a_i comme donnés, ces neuf équations entre les A_i sont compatibles, et ont cinq solutions: la résolution de ces équations revient en effet à la détermination de la forme $P'Q'' - Q'P''$ par la forme $PQ' - QP'$, c'est-à-dire à la détermination d'un faisceau biquadratique à une variable par sa jacobienne. Supposons les A_i exprimés en fonction des a_i par l'une des cinq solutions; il reste vingt-deux équations entre vingt-six fonctions inconnues. En écartant le cas où les rapports anharmoniques quatre à quatre des six fonctions a_i sont constants, cas qui ne conduit qu'à des équations banales, nous pouvons, par une transformation homographique de la fonction et un changement de variable, donner à quatre des fonctions a_i trois valeurs numériques et la valeur x. Pour déterminer les vingt-deux fonctions inconnues, nous avons alors un nombre égal d'équations. Ces équations forment un système différentiel du sixième ordre. Les coefficients de l'équation (E) ainsi réduite dépendent donc de six paramètres arbitraires.

D'autre part, si l'on considère l'équation simplifiée (14) dans laquelle les polynomes P et Q sont tels que le polynome $PQ' - QP'$ ait trois racines doubles, et si l'on forme les équations à points critiques fixes admettant cette équation simplifiée, on constate que ces équations se ramènent à l'équation du troisième ordre obtenue en différentiant l'équation (A, VI) pour éliminer l'un des quatre paramètres. J'ai démontré, au moyen du système (S), que l'équation (E) admet cette équation du troisième ordre comme dégénérescence. Il en résulte que l'équation (E) est une équation à points critiques fixes nouvelle. Mais deux cas peuvent encore se présenter: ou bien l'équation (E) se ramène à une équation irréductible du second ordre, ou plus probablement elle ne peut être remplacée par aucune équation plus simple.

Je renvoie à un Mémoire ultérieur la détermination de la classe d'équations irréductibles à laquelle appartient l'équation (E), et la détermination explicite des coefficients.

---

chemins de longueur finie aboutissant en un point quelconque de la coupure, et sur lesquels y tend vers l'infini. D'une façon générale, la deuxième partie de la démonstration, en raison du rôle qu'y joue l'équation simplifiée, permet de préciser la relation qui existe entre les singularités de l'intégrale de l'équation simplifiée et les singularités de l'intégrale de l'équation complète. Voir n° 18.

Equations à points critiques fixes du quatrième ordre et d'ordre supérieur.

22. Considérons l'équation à points critiques fixes

$$y^{\mathrm{IV}} = P(y''', y'', y', y, x), \tag{42}$$

où P désigne un polynome en y''', y'', y', y, à coefficients analytiques en x. Les degrés de ce polynome en y''', y'', y' se limitent sans difficulté nouvelle, si l'on admet que l'équation (18), pour $\lambda \geq 1$, n'a pas son intégrale générale uniforme; l'équation (42) a nécessairement la forme

$$y^{\mathrm{IV}} = Q(y,x)\,y''' + R(y,x)\,y'y'' + S(y,x)\,y'' + T(y,x)\,y'^3 + U(y,x)\,y'^2 + V(y,x)\,y' + W(y,x),$$

$Q, R, \ldots, W$ désignant des polynomes en y à coefficients analytiques en x. Pour limiter les degrés de ces polynomes en y, on rencontre la même difficulté que dans le cas des équations du troisième ordre: il faut décider si des équations telles que

$$y^{\mathrm{IV}} = \alpha\,(y\,y''' - 3\,y'\,y'') + \beta\,(y^2 y'' - 2\,y\,y'^2),$$

dont les intégrales n'ont ni points critiques algébriques, ni pôles, ont leur intégrale générale uniforme. Peut-être le procédé, qui permettra de résoudre la question pour les équations du troisième ordre, s'appliquera-t-il, aux équations du quatrième ordre et d'ordre supérieur, et donnera-t-il d'une façon générale la limitation suivante:[1] dans l'équation à points critiques fixes

$$y^{(n)} = P(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y, x),$$

où P désigne un polynome en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots y', y$, à coefficients analytiques en x, considérons chaque dérivée $y^{(i)}$ et la fonction y comme de poids égal à l'indice de dérivation augmenté d'une unité: le poids de chaque terme du second membre, ne peut surpasser le poids du premier membre, $n+1$.

Pour déterminer les équations à points critiques fixes de la forme (42), on est conduit à déterminer les équations réduites de la forme

$$y^{\mathrm{IV}} = a\,y\,y''' + b\,y'\,y'' + c\,y^2 y'' + d\,y\,y'^2 + e\,y^3 y' + f\,y^5, \tag{43}$$

a, b, c, d, e, f désignant des constantes, dont l'intégrale générale est uniforme. Cette sorte de problème se traite toujours par la même méthode, mais les diffi-

[1] A la vérité l'intégrale générale de l'équation $y^{\mathrm{IV}} = 2\,y'\,y''' - 3\,y''^2$, que nous écartons ici, n'a pas de points critiques mobiles, mais elle admet, pour certaines valeurs des constantes d'intégration, une ligne critique mobile (et le point critique $x = \infty$). Quand la ligne critique, qui est circulaire, se réduit à un point, l'intégrale générale se réduit à une intégrale particulière qui a un point critique mobile. Voir n° 12.

cultés arithmétiques croissent avec l'ordre différentiel. La détermination des équations de la forme

$$y'' = a y y' + b y^3$$

dont l'intégrale générale est uniforme, se ramène à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} = \frac{1}{2}.$$

La détermination des équations de la forme

$$y''' = a y y'' + b y'^2 + c y^2 y' + d y^4$$

dont l'intégrale générale est uniforme est liée à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} + \frac{1}{N''} = \frac{1}{1.2.3}.$$

De même la détermination des équations (43) dont l'intégrale générale est uniforme est liée à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} + \frac{1}{N''} + \frac{1}{N'''} = \frac{1}{1.2.3.4}.$$

Les équations réduites du deuxième et du troisième ordre, dont l'étude conduit aux équations (A), sont les équations simples dont l'intégrale s'exprime par les fonctions elliptiques, ou la fonction ζ:

$$y'' = 6 y^2, \; y'' = 2 y^3, \; y''' + 6 y'^2 = 0, \; y''' = 6 y^2 y', \; y''' = 12 y y'.$$

L'étude des équations (42) qui admettent l'équation réduite

$$y^{IV} + 12 y' y'' = 0, \text{ d'où } y''' + 6 y'^2 + C = 0,$$

ne donne pas d'équation nouvelle.

Si dans le second membre de l'équation (42), tous les termes sont de poids inférieur à 5, l'équation réduite est de la forme

$$y^{IV} = a y y'' + b y'^2 + c y^3,$$

ses intégrales ont en général des pôles doubles. L'étude de l'équation

$$y^{IV} = 12 (y y'' + y'^2), \text{ d'où } y''' = 12 y y' + C,$$

ne conduit encore à aucune équation nouvelle.

23. Citons enfin l'équation

$$y^{\mathrm{IV}} = 30\, y y'' - 60\, y^3; \tag{44}$$

les intégrales de cette équation ont deux familles de pôles doubles mobiles, et admettent au voisinage les développements

$$y = \frac{1}{(x - x_0)^2} + \alpha + \beta (x - x_0) + \cdots + \vartheta (x - x_0)^8 + \cdots,$$

les coefficients des puissances 0, 1 et 8 étant arbitraires, et

$$y = \frac{2}{(x - x_0)^2} + \alpha (x - x_0)^3 + \cdots + \lambda (x - x_0)^{10} + \cdots,$$

les coefficients des puissances 3 et 10 étant arbitraires. Ces développements polaires permettent, comme dans le cas des équations des deuxième et troisième ordre, de former des conditions nécessaires pour que les équations admettant l'équation (44) comme équation réduite n'aient pas de points critiques mobiles: elles se ramènent alors à la forme

$$y^{\mathrm{IV}} = 30\, y y'' - 60\, y^3 + \alpha y + \beta, \tag{45}$$

α, β désignant des paramètres arbitraires. J'ai obtenu pour cette équation une intégrale dépendant de trois constantes:

$$y = p\left(x + A; \frac{\alpha}{12}, \frac{-\beta}{24} + C\right) + p\left(x + B; \frac{\alpha}{12}, \frac{-\beta}{24} - C\right),$$

mais je n'ai pu décider si l'intégrale générale est une combinaison de fonctions uniformes classiques, n'est pas uniforme, ou est une fonction uniforme nouvelle. L'équation se ramène au troisième ordre en prenant y comme variable: pour $\alpha = \beta = 0$, elle se ramène même au second. Mais l'équation différentielle que vérifient les fonctions fuchsiennes et kleinéennes, se ramène de même, en permutant les rôles de la fonction et de la variable, à une équation de Riccati, et l'intérêt de ces fonctions n'en est pas diminué.

Signalons une analogie remarquable. Faisons dans l'équation (45) la transformation $y = \dfrac{u'^2 - u u''}{u^2}$: aux deux familles de pôles des intégrales de l'équation (45) correspondent deux familles de zéros, simples et doubles, des intégrales de l'équation transformée:

$$u u^{\mathrm{VI}} - 6 u' u^{\mathrm{V}} + 15 u'' u^{\mathrm{IV}} - 10 u'''^2 = \alpha (u u'' - u'^2) - \beta u^2. \tag{46}$$

Le premier membre est un invariant de la forme binaire en λ

$$u^{\mathrm{VI}} + 6\lambda u^{\mathrm{V}} + 15\lambda^2 u^{\mathrm{IV}} + 20\lambda^3 u''' + 15\lambda^4 u'' + 6\lambda^5 u' + \lambda^6 u.$$

C'est là un fait à rapprocher de ceux qu'a signalés M. Borel.[1] M. Borel a groupé un certain nombre d'équations dont l'intégrale générale est entière, et a remarqué qu'en séparant dans ces équations les termes de poids le plus élevé par rapport aux indices des dérivées, on obtient des invariants usuels de formes binaires telles que

$$u^{(n)} + n\lambda u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 u^{(n-2)} + \cdots + n\lambda^{n-1}u' + \lambda^n u. \tag{47}$$

Séparer les termes de poids le plus élevé équivaut à remplacer dans l'équation x par $x_0 + \alpha x$, et à faire tendre α vers zéro: l'équation réduite obtenue a son intégrale générale entière, si l'équation complète a elle-même son intégrale générale entière. Ainsi l'équation

$$u u^{\mathrm{VI}} - 6u'u^{\mathrm{V}} + 15u''u^{\mathrm{IV}} - 10u'''^2 = 0 \tag{48}$$

est le troisième terme d'une suite dont les deux premiers termes sont

$$uu'' - u'^2 = 0, \text{ d'où } u = e^{Ax+B},$$

$$uu^{\mathrm{IV}} - 4u'u''' + 3u''^2 = 0, \text{ d'où } u = e^{Ax+B}\sigma(x + C;\, 0, D).$$

L'équation (48) admet une intégrale entière dépendant de cinq constantes arbitraires

$$u = e^{Ax+B}\sigma(x + C;\, 0, E)\,\sigma(x + D;\, 0, -E).$$

Il est à remarquer que, si l'intégrale générale de l'une des équations (48) et (46) est une fonction entière à croissance régulière, le genre et l'ordre de cette fonction entière ne peuvent surpasser 2, d'après l'équation (45): la fonction exponentielle et la fonction σ suffisent-elles à l'exprimer?

24. On pourrait être tenté d'induire des remarques de M. Borel que les équations différentielles déduites de tous les invariants usuels ont leur intégrale générale entière, et on pourrait espérer obtenir par cette voie de nouvelles fonctions entières. Les équations déduites des discriminants des formes binaires (47) ont leur intégrale générale entière, mais ne définissent pas de fonctions nouvelles: l'intégrale générale s'exprime très simplement par la fonction exponentielle.

---

[1] *Comptes Rendus*, 8 février 1904.

Avant d'établir ce résultat, faisons quelques remarques générales au sujet de l'équation différentielle I_n obtenue en annulant un invariant quelconque de la forme (47). L'équation I_n est homogène par rapport à la fonction u et à ses dérivées, et ne change pas si l'on change u en $e^{\alpha x} u$, quel que soit le paramètre α, car cela revient[1] à former l'invariant correspondant en remplaçant dans la forme (47) λ par $\lambda + \alpha$: l'équation transformée de l'équation I_n en $\frac{u'^2 - u u''}{u^2}$ est donc d'ordre $n - 2$. On peut abaisser encore de deux unités l'ordre de cette transformée, en changeant de fonction et de variable, parce que l'équation I_n admet le groupe de transformations à deux paramètres $(x, \beta x + \gamma)$. En définitive l'intégration de l'équation I_n se ramène à l'intégration d'une équation d'ordre $n - 4$, suivie de quatre quadratures. D'autre part l'équation I_n est vérifiée si l'on annule dans la forme (47) les $\frac{n+1}{2}$ premiers termes, si n est impair; et les $\frac{n}{2} + 1$ premiers termes, si n est pair. L'équation I_n admet donc l'intégrale $u = P_k(x)$, et par suite l'intégrale $u = e^{Cx} P_k(x)$, $P_k(x)$ désignant un polynome en x de degré k à coefficients constants, et k le nombre entier $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n}{2} - 1$. Cette dernière intégrale dépend de $\frac{n+3}{2}$ ou $\frac{n}{2} + 1$ constantes: elle est l'intégrale générale pour $n = 2$ ou $n = 3$.

Le discriminant de la forme binaire (47) est une expression définie, au moins à un facteur numérique près: appelons D_n l'équation différentielle obtenue en l'annulant. Cette équation résulte de l'élimination de λ entre les deux équations algébriques

$$(49)\quad \begin{cases} u^{(n)} + (n-1)\lambda u^{(n-1)} + \dfrac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \lambda^2 u^{(n-2)} + \cdots + (n-1)\lambda^{n-1} u'' + \lambda^{n-1} u' = 0, \\ u^{(n-1)} + (n-1)\lambda u^{(n-1)} + \cdots \qquad\qquad + (n-1)\lambda^{n-2} u' + \lambda^{n-1} u = 0. \end{cases}$$

Or on obtient une intégrale de ce système d'équations dépendant de $n - 1$ constantes, en posant $\lambda = 0$, $u^{(n-1)} = 0$: une intégrale de l'équation D_n est donc $u = P_{n-2}(x)$. La fonction $u = e^{Cx} P_{n-2}(x)$ est encore une intégrale, quelle que soit la constante C, et par suite est l'intégrale générale. Pour obtenir les intégrales singulières, il faut annuler le discriminant par rapport à $u^{(n)}$ de l'équation

[1] On peut dire encore que le premier membre de l'équation I_n vérifie l'équation aux dérivées partielles qui exprime qu'un invariant est fonction des différences des racines de la forme dont il dérive: on retrouve ainsi les quatre conditions énoncées par M. Stephanos dans une Communication au Congrès de Rome (*Atti*, vol. II, p. 148). Au contraire l'équation (25) rentre dans le premier cas considéré par M. Stephanos (*ibid.*, p. 145). Tandis que les équations I_4 s'intègrent par quadratures, l'intégration de l'équation (25) dépend de l'intégration d'une équation linéaire du second ordre.

D_n, ou encore le discriminant par rapport à λ de la seconde équation (49): on obtient évidemment l'équation D_{n-1}. L'intégrale singulière de l'équation D_n est donc $u = e^{Cx} P_{n-3}(x)$, l'intégrale singulière de l'intégrale singulière est $u = e^{Cx} P_{n-4}(x)$, et ainsi de suite.

Si les équations D_n s'intègrent au moyen de la fonction exponentielle, les équations obtenues en ajoutant aux équations D_n des termes complémentaires, et dont l'intégrale générale est entière, peuvent définir des fonctions nouvelles. Ainsi, dans les équations transformées des équations (B) en $u = e^{\int y\,dx}$, et dont l'intégrale générale est entière, ou a ses points singuliers fixes, les termes de poids le plus élevé proviennent des termes $y''^2 + 4y'^3$, et sont par suite $(uu''' - u'u'')^2 - 4(u'u''' - u''^2)(uu'' - u'^2)$: les transcendantes définies par les équations (A) se rattachent à l'équation D_3. M. Borel a proposé d'appeler équations (P) les équations dont l'intégrale générale est entière; de même qu'on a été conduit par une extension de la classe des équations dont l'intégrale générale est uniforme, à considérer les équations à points critiques fixes, nous sommes amenés ici, pour des raisons connexes, par extension de la classe des équations (P), à considérer les équations dont l'intégrale générale a ses points singuliers fixes: ces équations sont la généralisation directe des équations linéaires.

Désignons d'une façon générale par u l'intégrale d'une telle équation (algébrique par rapport à la fonction et à ses dérivées, et analytique en x). M. Painlevé a démontré que l'intégrale générale de l'une des équations (A) ne peut, sauf pour des valeurs exceptionnelles des paramètres, s'exprimer par une fonction algébrique de u et de ses dérivées, analytique de x, l'ordre de l'équation différentielle qui définit u étant inférieur à 3:[1] les équations (B) fournissent la représentation la plus simple des intégrales des équations (A).

De même les équations différentielles de la suite

$$\begin{vmatrix} u'' & u' \\ u' & u \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u^{\mathrm{IV}} & u''' & u'' \\ u''' & u'' & u' \\ u'' & u' & u \end{vmatrix} = 0, \ldots$$

ont leur intégrale générale entière. Chaque déterminant est en effet un déterminant de Wronski, et l'équation obtenue en l'égalant à zéro équivaut à une relation linéaire et homogène à coefficients constants et arbitraires entre les éléments de la dernière ligne. L'intégrale générale s'exprime encore par la fonction exponentielle.

[1] *Comptes Rendus,* 10 novembre 1902.

25. Mais toutes les équations différentielles déduites des invariants usuels n'ont pas leur intégrale générale entière. Leurs intégrales n'ont pas de pôles; et si, au voisinage d'un point algébrique ou transcendant, le terme prépondérant du développement d'une intégrale est $(x + C)^r$, l'exposant r est entier positif. A ce point de vue, l'analogie ne va pas plus loin, comme nous allons le montrer sur un exemple.

Les invariants les plus simples à écrire sont ceux de la suite dont nous avons considéré trois termes, et dont le terme général fournit l'équation E_n:

$$u\,u^{(n)} - n\,u'\,u^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} u''\,u^{(n-2)} \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} \frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots 2}\left[u^{\left(\frac{n}{2}\right)}\right]^2 = 0,$$

n étant un entier pair. Pour $n > 6$, l'intégrale générale de cette équation a des points critiques transcendants.

Pour étudier les intégrales voisines de l'intégrale $u = x + C$, on peut faire la substitution $u = x + C + \alpha v$, et développer v suivant les puissances du paramètre α: pour que l'intégrale générale soit entière, ou même uniforme, il est nécessaire que tous les coefficients du développement $v_0, v_1, v_2, \ldots$ soient uniformes. v_0 est donné par l'équation

$$(x + C)\,v_0^{(n)} - n\,v_0^{(n-1)} = 0, \text{ d'où } v_0^{(n-1)} = H(x + C)^n;$$

v_0 est uniforme.

De même, pour étudier les intégrales voisines de l'intégrale $u = (x + C)^2$, faisons la substitution $u = (x + C)^2 + \alpha v$, et développons v suivant les puissances de α. v_0 est donné par l'équation

$$(x + C)^2 v_0^{(n)} - 2n(x + C)\,v_0^{(n-1)} + n(n-1)\,v_0^{(n-2)} = 0.$$

C'est une équation linéaire d'Euler, posons $v_0^{(n-2)} = (x + C)^r$: l'équation caractéristique est

$$r^2 - (2n + 1)r + n(n-1) = 0.$$

Pour que v_0 soit uniforme, il est nécessaire que les racines de cette équation soient entières, c'est-à-dire que $8n + 1$ soit carré parfait: sinon, v_0 a un point critique transcendant qui permute une infinité de déterminations. $8n + 1$ est carré parfait pour $n = 6$, mais non pour $n = 8$.

Pour $n > 6$, l'équation E_n admet l'intégrale particulière $u = (x + C)^3$, et on est conduit de même à considérer l'équation

$$r(r-1)(r-2)-3nr(r-1)+3n(n-1)r-n(n-1)(n-2)=0$$

ou

$$(r-n)[r^2-(2n+3)r+(n-1)(n-2)]=0.$$

Les racines de cette équation sont entières, si $24n+1$ est carré parfait. Elles ne sont entières ni pour $n=8$, ni pour $n=10$.

D'une façon générale, pour que l'équation $E_n (n>6)$ ait son intégrale générale uniforme, il est nécessaire d'abord que $8n+1$ et $24n+1$ soient carrés parfaits: il existe une *infinité* de nombres pairs n dépendant d'une équation de PELL, tels que les deux nombres $8n+1$ et $24n+1$ soient carrés parfaits; le plus petit est le nombre 210. Mais il est encore nécessaire que, dans l'étude des intégrales voisines des intégrales $u=(x+C)^4, (x+C)^5, \ldots (x+C)^{\frac{n}{2}-1}$, les équations en r formées comme précédemment aient toutes leurs racines entières: par exemple, pour l'équation E_{210}, il reste à considérer cent une équations, dont les degrés croissent de 4 à 104. Il n'est pas vraisemblable qu'il existe des valeurs de n, pour lesquelles toutes ces conditions successives soient remplies. De plus la nature des points critiques mis en évidence est telle qu'il n'est pas facile de déduire de l'intégrale générale une fonction méromorphe, ou uniforme.

Enfin la notion d'invariant usuel n'est pas précise, et l'on ne voit guère comment préciser le choix des invariants qui fournissent des équations (P). Posons

$$S=u\,u^{\mathrm{IV}}-4\,u'\,u'''+3\,u''^2,\quad T=u\,u''\,u^{\mathrm{IV}}+2\,u'\,u''\,u'''-u'^2\,u^{\mathrm{IV}}-u''^3-u\,u'''^2:$$

les équations I_4 sont de la forme $S^3+\alpha T^2=0$, α désignant un paramètre arbitraire, et s'intègrent par quadratures. Parmi elles, seules les équations $S=0$, $T=0$ et $S^3-27T^2=0$, ou D_4, ont leur intégrale générale uniforme.
