# WEIERSTRASS ÜBER POINCARÉS THEORIE DER FUCHSSCHEN FUNKTIONEN,

mitgeteilt von

L. SCHLESINGER IN GIESSEN.

## I.

Vorbemerkung. Eine Abschrift des nachstehenden Artikels von der Hand des damaligen Sekretärs von L. Kronecker fand sich im Nachlaß von L. Fuchs unter der aus der Zeit von Kroneckers Redaktion stammenden Korrespondenz des Crelleschen Journals; sie trägt von Kroneckers Hand die Überschrift „Weierstraß an Thomé". Aus anderen Briefen in dieser selben Korrespondenz geht hervor, daß Weierstraß diesen Artikel auf Ersuchen Kroneckers für Thomé aufgeschrieben hatte. In einem Briefe von Weierstraß an die Journalredaktion vom 28. Juni 1888 heißt es: „Den beiliegenden Brief bitte ich nach genommener Einsicht an Herrn Thomé befördern zu wollen. Ich habe mir darin große Mühe gegeben, ihn zu überzeugen, daß er nicht wohl daran tun werde, eine Polemik mit Poincaré zu beginnen, von der kein Ende abzusehen ist und aus welcher er nach meiner Überzeugung nicht als Sieger hervorgehen würde. Natürlich steht es jetzt bei Ihnen und bei ihm, ob die jüngst von Thomé eingesandte Notiz so, wie sie ist, oder wesentlich umgestaltet im Journal abgedruckt werden soll; als Mitherausgeber könnte ich meine Zustimmung zur Aufnahme des Artikels in seiner jetzigen Gestalt nicht geben."

Es handelt sich dabei jedenfalls um eine ursprüngliche Form des im 103. Bande des Crelleschen Journals, S. 346—347 abgedruckten Aufsatzes von L. W. Thomé: „Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen."

## WEIERSTRASS AN THOMÉ.

Poincaré hat den Anstoß zu seinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen ohne Zweifel durch Hermites Integration der Laméschen Differentialgleichung erhalten. Hermite substituiert für die unabhängige Variable eine bestimmte elliptische Funktion, deren Argument $u$ die unabhängige Veränderliche in der transformierten Differentialgleichung wird, und zeigt dann, daß das allgemeine Integral der letzteren eine eindeutige Funktion von $u$ ist, welche sich durch eine Jacobische Funktion $H(u)$ ausdrücken läßt. Bekanntlich hat man bald nachher gefunden, daß es eine wohlumgrenzte Klasse auf ähnliche Weise durch elliptische Transzendenten integrierbarer linearer Differentialgleichungen gibt. In den von ihm als „fonctions fuchsiennes" bezeichneten neuen Transzendenten hat sodann Poincaré diejenigen Funktionen erkannt, welche für eine beliebige lineare Differentialgleichung mit rationalen (oder auch algebraischen) Koeffizienten dasselbe leisten, wie die elliptischen Funktionen für eine besondere Klasse solcher Differentialgleichungen.

Ist nämlich irgend eine lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung gegeben, deren Koeffizienten algebraische Funktionen einer unabhängigen Variablen $x$ sind, wo sich dann sämtliche Koeffizienten rational durch $x$ und eine algebraische Funktion $y$ dieser Größe ausdrücken lassen, so existieren, wie Poincaré gezeigt hat, stets zwei bestimmte „fonctions fuchsiennes" einer unabhängigen Variablen $u$, welche durch dieselbe Gleichung wie $x$ und $y$ mit einander verbunden sind und, für $x$, $y$ in die Differentialgleichung eingeführt, bewirken, daß das allgemeine Integral der so transformierten Differentialgleichung eine eindeutige Funktion von $u$ wird. Die für $x, y$ substituierten Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(u)$ sind Transzendenten, welche die charakteristische Eigentümlichkeit besitzen, daß sie sich nicht ändern, wenn für $u$ bestimmte lineare Funktionen dieser Größe gesetzt werden, und daß umgekehrt jeder Wert von $u'$, der für einen beliebigen Wert $u$ die beiden Gleichungen

$$\varphi(u') = \varphi(u), \quad \psi(u') = \psi(u) \tag{1}$$

befriedigt, eine lineare Funktion von $u$ ist. Sucht man diejenigen Werte von $u'$, welche der Gleichung $\varphi(u') = \varphi(u)$ genügen, so sind auch sie alle lineare Funktionen von $u$; setzt man dieselben in $\psi(u')$ ein, so erhält man alle Werte, welche $\psi(u)$ als Funktion von $\varphi(u)$ betrachtet annehmen kann. Poincaré hat aber die Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(u)$ nicht bloß definiert, sondern sie auch explizit in einer Form, welche die genannte charakteristische Eigenschaft derselben zu erkennen gibt, wirklich dargestellt.

Ist nun $f(u)$ das allgemeine Integral der transformierten Differentialgleichung, so hat dasselbe die Form

$$f(u) = C_1 f_1(u) + \cdots + C_n f_n(u),$$

wo $f_1(u), \ldots, f_n(u)$ sämtlich eindeutige Funktionen von $u$ sind und die folgende charakteristische Eigenschaft besitzen:

Substituiert man für $u$ irgend eine der genannten linearen Funktionen $u'$, so ist:

$$f_\lambda(u') = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} f_\mu(u) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

und somit

$$f(u') = \sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu f_\nu(u),$$

wo $C'_1, \ldots, C'_n$ bestimmte homogene lineare Funktionen der Größen $C_1, \ldots, C_n$ sind. (Um alle diese Funktionensysteme $C'_1, \ldots, C'_n$ zu erhalten, braucht man übrigens nur eine bestimmte Anzahl derselben zu kennen; die übrigen gehen dann aus diesen durch Zusammensetzung hervor.)

In jedem Falle nun, wo sich die Funktionen $f_\nu(u)$ wirklich darstellen lassen, — was mittels konvergenter Potenzreihen stets möglich ist —, können auch die zu jeder Substitution ($u'$ für $u$) gehörigen Konstanten $c_{\lambda\mu}$ ohne Schwierigkeit bestimmt werden, und es ist dann die zu der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung gehörige Gruppe hergestellt. Poincaré glaubt aber — mit Recht —, daß man sich nicht mit der Darstellung der Funktionen $f_\nu(u)$ durch Potenzreihen begnügen dürfe, sondern sich bemühen müsse, sie in einer Form darzustellen, welche ihre charakteristische Eigenschaft in Evidenz setzt. Mit anderen Worten, Poincaré möchte, nach Herstellung einer vollständigen Gruppe von Substitutionen $\left(u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} \text{ für } u\right)$, die zur Bildung einer Funktion $\varphi(u)$ oder eines Funktionenpaars $\varphi(u)$, $\psi(u)$ gebraucht wird, — eine Aufgabe, die er allgemein gelöst hat —, auf die allgemeinste Weise (unabhängig von der Theorie der linearen Differentialgleichungen) ein System von eindeutigen Funktionen $f_\nu(u)$ definieren und analytisch darstellen, dem die in den Gleichungen

$$f_\lambda(u') = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} f_\mu(u) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

enthaltenen Eigenschaften zukommen, und zwar so, daß diese sich in dem Ausdrucke der Funktion zu erkennen geben. Hat man ein solches Funktionensystem und setzt

$$x = \varphi(u), \quad z = \sum_{\mu} C_\mu f_\mu(u),$$

so besteht zwischen $x$ und $z$ stets eine Differentialgleichung von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu \frac{d^\nu z}{dx^\nu} = 0,$$

in der $P_0, P_1, \ldots, P_n$ algebraische Funktionen von $x$ sind.

Bis jetzt hat aber Poincaré sein Ziel noch nicht vollständig erreicht, sondern nur für den Fall, daß dem Fundamentalsystem $f_\nu(u)$ eine Differentialgleichung mit lauter regulären Integralen entspricht. Es steht indes zu erwarten, daß die Schwierigkeiten, welche die Poincarésche Theorie bis jetzt noch darbietet, sich künftig werden beseitigen lassen.

Ich muß aber zur Vermeidung von Mißverständnissen bemerken, daß ich nicht im entferntesten der Meinung bin, es werde jemals der in der Theorie der linearen Differentialgleichungen bisher eingeschlagene Weg ganz verlassen werden; ich bin vielmehr überzeugt, daß die auf diesem Wege erhaltenen Resultate stets ihren vollen Wert bewahren und für viele Untersuchungen als unentbehrlich sich erweisen werden. Wenn z. B. die in einer Differentialgleichung vorkommenden Konstanten numerisch gegebene Größen sind, so würde die Bestimmung der in den Poincaréschen Funktionen vorkommenden Konstanten in den meisten Fällen praktisch so gut wie unmöglich. Aber es gibt auch interessante und wichtige Untersuchungen, für welche die Poincarésche Integrationsmethode als außerordentlich vorteilhaft sich erweist, indem es nämlich in vielen Fällen nur darauf ankommt, zu wissen, daß sich eine gegebene Differentialgleichung in der angegebenen Weise durch eine bestimmte Gattung Poincaréscher Funktionen integrieren lasse, ohne daß es wirklich nötig wäre, die darin vorkommenden Konstanten durch die Konstanten der Differentialgleichung auszudrücken. Es würde mich aber zu weit führen, darauf näher einzugehen. Ich möchte aber noch folgendes bemerken, wobei ich aber nur eine Differentialgleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $x$ sind, ins Auge fasse.

Es sei $u' = \dfrac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$ eine lineare Funktion von $u$, für welche

$$\varphi(u') = \varphi(u)$$

ist. Man bilde, unter $\tau$ eine reelle Veränderliche verstehend, eine Funktion $u_\tau$, welche für $\tau = 0$ in $u$, für $\tau = 1$ in $u'$ übergeht und in der Strecke $\tau = 0 \ldots 1$ stetig ist. Setzt man dann

$$\overline{x} = \varphi(u_\tau); \quad \overline{z} = \sum_\nu C_\nu f_\nu(u_\tau),$$

so besteht zwischen $\overline{z}$ und $\overline{x}$ die obige Differentialgleichung. Es beschreibt nun, wenn $\tau$ die Strecke $0 \ldots 1$ durchläuft, $\overline{x}$ eine von dem Punkte $x$ ausgehende und in demselben Punkte endende Linie; $z$ aber erhält im allgemeinen für $\tau = 1$ nicht den Anfangswert $z$ wieder, sondern verwandelt sich in

$$\sum_\nu C'_\nu f_\nu(u)$$

wo die $C'_\nu$ lineare Funktionen von den $C_\nu$ sind. Wenn man sich nun vorstellt, daß die Poincarésche Theorie vollkommen ausgebildet ist, was sie gegenwärtig noch nicht ist, so wird man es auch nicht für unmöglich halten, eine genügende

Anzahl von Funktionen $u'$ so auszuwählen, daß man auf die angegebene Weise fortfahrend zu einem System geschlossener Linien gelangt, von denen jede einen singulären Punkt einmal umwindet. Bestimmt man dann für jede der in Rede stehenden Funktionen $u'$ die zugehörigen Größen $c_{\lambda\mu}$, so kann man mittels derselben auch die Gleichung bilden, deren Wurzeln die Exponenten sind, deren Ableitung aus den Poincaréschen Ausdrücken Sie für unmöglich zu halten scheinen. Ich bin weit entfernt davon zu glauben, daß der angedeutete Weg zur Ermittelung jener Exponenten der direkteste und einfachste sei, verkenne auch nicht, daß noch viel zu tun sein wird, bevor man überhaupt ihn betreten kann. Es kommt mir bloß darauf an, Sie zu überzeugen, daß Sie nicht wohl daran tun würden, wenn Sie den Wert der Poincaréschen Theorie leugnen oder herabsetzen wollten, weil nicht sofort ersichtlich ist, wie dieselbe, gehörig ausgebildet, für die Lösung einer Aufgabe sich eignen werde, deren Erledigung Sie für die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Recht als unumgänglich notwendig betrachten.

## II.

Vorbemerkung. Das folgende ist einem Aufsatz entnommen, von dem sich eine Abschrift in dem Nachlaß von L. Fuchs vorfand. Dieser Aufsatz ist anscheinend ein Teil von Weierstraß' Gutachten über die Habilitationsschrift von L. Schlesinger, die im Bande 105 des Crelleschen Journals S. 181 abgedruckt ist.

Herr Dr. Schlesinger, der sich als Privatdozent der Mathematik zu habilitieren wünscht, hat . . . als Habilitationsschrift eine längere Abhandlung „Zur Theorie der Fuchsschen Funktionen" eingereicht. Dieselbe bezieht sich auf eine Klasse eindeutiger analytischer Funktionen eines Arguments, welche erst im letzten Dezennium in die Analysis eingeführt worden sind und deren Eigentümlichkeit darin besteht, daß eine solche Funktion ungeändert bleibt, wenn anstelle ihres Arguments bestimmte lineare Funktionen desselben gesetzt werden. Man wußte seit längerer Zeit, daß der sogenannten Modulfunktion diese Eigenschaft zukommt und charakteristisch für dieselbe ist. Sodann hat zuerst H. A. Schwarz an einem speziellen Beispiel und in allgemeinerer Weise L. Fuchs nachgewiesen, daß es lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten gibt, welche sich dadurch auszeichnen, daß der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen einer solchen Differentialgleichung durch Umkehrung zu einer nicht unter den Modulfunktionen begriffenen eindeutigen Funktion von der angegebenen Beschaffenheit führt. Darauf hat sich dann Poincaré die Aufgabe vorgelegt, auf die allgemeinste Weise ein System linearer

Funktionen einer Veränderlichen herzustellen, welche für irgend eine Funktion der in Rede stehenden Art das vollständige System der bei ihr möglichen Substitutionen bilden. Nach glücklicher Lösung dieses schwierigen Problems, zunächst unter der Einschränkung, daß die Koeffizienten der Substitutionen reelle Größen sein sollen, ist Poincaré auch dazu gelangt, die zu den gefundenen Substitutionen gehörigen Funktionen wirklich darzustellen, und hat so die Analysis mit einem weit ausgebreiteten Geschlecht neuer Transzendenten bereichert, welche er, um zu bezeugen, daß er durch die erwähnten Arbeiten von Fuchs zu seinen Untersuchungen angeregt worden sei, „fonctions fuchsiennes" genannt hat, ein anerkennenswertes Beispiel von Gerechtigkeitssinn und Bescheidenheit, das merkwürdigerweise gerade in Deutschland Tadel gefunden hat.

Berlin, 2. März 1889.

WEIERSTRASS.