LES CONGRUENCES PLANES DE CONIQUES QUI N'ONT QUE DEUX POINTS FOCAUX

PAR

RENÉ LAGRANGE

à Dijon

Introduction

J'ai montré dans un article paru il y a quelques années que les congruences de courbes du plan se prêtent à des développements semblables à ceux de l'espace lorsqu'on substitue la condition d'un contact d'ordre supérieur à 1 avec l'enveloppe, à celle d'un contact simple, et ai appliqué cette idée aux congruences de cercles.[1] Bien entendu, les résultats s'appliquent par transformation projective aux congruences de coniques qui ont deux points fixes distincts. Lorsque les deux points donnés sont confondus, c'est-à-dire lorsque les coniques sont tangentes en un point fixe, une étude analogue peut être aisément faite à l'aide de paraboles ayant une direction asymptotique donnée. Il m'a paru intéressant de déterminer les formules générales concernant les coniques ayant deux points fixes quelconques, à distance finie ou non, et distincts ou confondus. Il se trouve que celles-là sont assez remarquables.

La correspondance entre les éléments focaux associés fournit une intéressante transformation de contact de l'espace, lorsque les deux points focaux de chaque conique engendrent deux domaines à deux dimensions.

Les congruences dont un des points focaux décrit une courbe sont celles qui se décomposent en une simple infinité de faisceaux de coniques, chaque faisceau étant formé de coniques tangentes en un même point A, et passant en outre par les deux points fixes de la famille. On montre en particulier que, lorsque 4 coniques du même faisceau de sommet A varient en osculant leurs vraies enveloppes, les 4 droites focales issues de A forment un faisceau de birapport constant, et les courbures de ces 4

[1] « Cf. Sur les congruences de cercles du plan », *Bull. Sc. Math.*, t. 71 (1947), p. 1–23.

coniques en A ont également un birapport constant. On voit aussi que les congruences dont les 2 points focaux A et A' décrivent deux courbes sont celles constituées par une simple infinité de tels faisceaux, dont le sommet A décrit une certaine conique Γ de la famille en question, tandis que la tangente de contact AD du faisceau enveloppe une autre conique Γ' bitangente à Γ aux deux points fixes de la famille. La congruence se décompose d'une deuxième manière en faisceaux de coniques tangentes, dont le sommet A' décrit la même courbe Γ, et dont la tangente de contact $A'D'$ enveloppe Γ'.

Ces résultats sont établis dans les chapitres II et III de cet article, tandis que le premier chapitre est consacré à une étude succincte du nombre des points focaux variables des courbes algébriques de degré donné, et ayant un certain nombre de points simples ou multiples fixes. On établit ainsi que, dans des conditions générales, les seules congruences de courbes qui n'ont que deux points focaux variables sont des congruences de courbes unicursales, n'ayant aucun point multiple mobile. On voit également que, si un point régulier de la courbe est point focal multiple dans la congruence, il décrit généralement une courbe au lieu d'un domaine à deux dimensions.

Chapitre I

Sur les congruences de courbes algébriques

§ 1. Soit

$$f(x, y;\, \alpha, \beta) = 0 \tag{1}$$

l'équation cartésienne de la congruence de courbes C. Les points focaux d'une courbe C sont les points où C a un contact d'ordre supérieur à 1 avec son enveloppe dans une certaine famille de courbes (1) à un paramètre. Ces points sont les points d'intersection de (1) avec la courbe Γ d'équation[1]

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, f\right)}{D(\alpha, \beta)} - \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y}, f\right)}{D(\alpha, \beta)} = 0. \tag{2}$$

Multiplier f par un facteur $\lambda(\alpha, \beta)$ remplace (2) par une combinaison linéaire de (2) et (1).

Nous supposons que (1) est algébrique et de degré m. Le dégré de Γ est alors généralement $3m-2$, et le nombre des points focaux est a priori inférieur ou égal à

[1] *loc. cit.*, p. 1.

$m(3m-2)$. On observe également que tout point multiple d'ordre p de (1) est un point multiple d'ordre $p-1$ au moins pour (2), et compte donc pour $p(p-1)$ points au moins dans l'intersection des deux courbes.

Soit d'autre part

$$\varphi(x, y; \alpha, \beta) \equiv \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a_i(\alpha, \beta) x^{p-i} y^i$$

l'ensemble des termes de f qui sont de plus bas, ou de plus haut, degré. Dans le premier cas, si $p>0$, C passe par un point fixe, pris pour origine des coordonnées, avec p branches en ce point; dans le second cas, $p=m$. L'ensemble des termes de plus bas, ou de plus haut, degré de (2) est

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \varphi\right)}{D(\alpha, \beta)} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \varphi\right)}{D(\alpha, \beta)},$$

ou, compte tenu de l'identité d'homogénéité de φ

$$p\varphi \equiv x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{1}{p}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{D(\alpha, \beta)} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, x\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{D(\alpha, \beta)}\right] = \frac{1}{p} \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{D(\alpha, \beta)} \left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

soit enfin

$$\varphi(x, y) \frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{D(\alpha, \beta)}. \tag{3}$$

Ce déterminant fonctionnel se développe suivant

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (p-i) \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} x^{p-i-1} y^i & \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} k \frac{\partial a_k}{\partial \alpha} x^{p-k} y^{k-1} \\ \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (p-i) \frac{\partial a_i}{\partial \beta} x^{p-i-1} y^i & \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} k \frac{\partial a_k}{\partial \beta} x^{p-k} y^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\substack{i,k=0 \\ i \neq k}}^{p} \binom{p}{i} \binom{p}{k} (p-i) k \frac{D(a_i, a k)}{D(\alpha, \beta)} x^{2p-i-k-1} y^{i+k-1}.$$

Ordonné, ça s'écrit

$$p^2 \left\{\frac{D(a_0, a_1)}{D(\alpha, \beta)} x^{2p-2} + (p-1) \frac{D(a_0, a_2)}{D(\alpha, \beta)} x^{2p-3} y + \left[\frac{(p-1)(p-2)}{2} \frac{D(a_0, a_3)}{D(\alpha, \beta)} + \frac{p(p-1)}{2} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{D(a_1, a_2)}{D(\alpha, \beta)}\right] x^{2p-4} y^2 + \cdots + \frac{D(a_{p-1}, a_p)}{D(\alpha, \beta)} y^{2p-2}\right\}.$$

On voit de proche en proche que ces termes ne s'évanouissent tous que lorsque tous les $\dfrac{D(a_i, a_k)}{D(\alpha, \beta)}$ sont nuls, donc si tous les coefficients a_i sont fonctions d'un seul, autrement dit si les p branches représentées par $\varphi = 0$ ne dépendent que d'un paramètre essentiel.

Si φ est l'ensemble des termes de plus haut degré, (3) montre ainsi que le degré de Γ est généralement $3m-2$, et que C et Γ ont m points communs à l'infini.

Si O est un point multiple fixe, d'ordre p, de C, Γ l'admet comme point multiple d'ordre au moins égal à $3p-2$, et d'ordre $3p-2$ en général; en outre, p des tangentes à Γ en O sont les tangentes de C en ce point. L'intersection de C et Γ compte au moins pour $p(3p-2)+p = p(3p-1)$ points en ce point fixe O.

Par exemple, pour un point de rebroussement fixe de première espèce, mais de tangente variable, on a $p=2$, et C et Γ s'y coupent en 10 points. D'ailleurs, φ est ici de la forme

$$\varphi = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 \qquad a_0 a_2 = a_1^2,$$

donc

$$\frac{1}{4} \frac{D\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{D(a_0, a_1)}{D(\alpha, \beta)} x^2 + \frac{D(a_0, a_1)}{D(\alpha, \beta)} xy + \frac{D(a_1, a_2)}{D(\alpha, \beta)} y^2 =$$

$$= \frac{D(a_0, a_1)}{D(\alpha, \beta)} \left[x^2 + \frac{2a_1}{a_0} xy + \frac{a_1^2}{a_0^2} y^2\right] = \frac{1}{a_0} \frac{D(a_0, a_1)}{D(\alpha, \beta)} \varphi(x, y),$$

et (3) se réduit à

$$\frac{4}{a_0} \frac{D(a_0, a_1)}{D(\alpha, \beta)} \varphi(x, y)^2.$$

En plaçant Oy sur la tangente à la courbe C considérée, l'intersection en ce point O est analogue à celle de deux courbes dont les termes de degré minimum sont respectivement x^2 et x^4, et compte bien pour 10 points au moins confondus en O. Ce calcul a supposé $\dfrac{D(a_0\, a_1)}{D(\alpha, \beta)} \neq 0$. On peut observer que l'on peut alors remplacer a_0, qui n'est pas identiquement nul, par 1, en divisant f par a_0; les termes du quatrième degré de Γ disparaissent; on n'a plus la même courbe Γ, mais les points d'intersection avec C n'ont pas changé; au contraire, on peut toujours multiplier f par un facteur λ qui rende $\dfrac{D(a_0, a_1)}{D(\alpha, \beta)} \neq 0$, pourvu que la tangente de rebroussement ait une direction variable.

§ 2. Admettons que les courbes C soient de degré m et aient q points fixes, d'ordres respectifs $p_1, p_2, \dots p_q$ $(p_i \geq 1)$; on peut également supposer, pour l'examen qui suit, qu'ils sont à distance finie sans restriction de la généralité. Parmi les points doubles fixes, admettons même qu'il puisse y avoir des points de rebroussement de première espèce, et soit $R\,(R \geq 0)$ leur nombre. Dans les conditions de la discussion précédente, les points focaux variables à distance finie sont généralement au nombre de

$$m(3m-2)-m-\sum_{i=1}^{q} p_i(3p_i-1)=3m(m-1)-\sum_{i=1}^{q} p_i(3p_i-1).$$

Certains d'entre eux sont multiples si C a des points multiples mobiles, avec un ordre au moins égal à $p(p-1)$ pour un point mobile d'ordre p; nous considérons un tel point focal comme la réunion de $p(p-1)$ points focaux simples confondus, et le nombre N des points focaux simples variables de C, à distance finie, est ainsi

$$N=3m(m-1)-\sum_{i=1}^{q} p_i(3p_i-1). \tag{4}$$

D'autre part, exprimer qu'un point donné à tangentes quelconques est un point multiple d'ordre p_i demande $\dfrac{p_i(p_i+1)}{2}$ conditions; si c'est un des R points de rebroussement, il faut ajouter une condition. La fixation des q points fixes en question impose donc à C

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{p_i(p_i+1)}{2}+R$$

conditions. Le nombre des coefficients essentiels de C est $\dfrac{m(m+3)}{2}$, et, pour que ces courbes aient deux coefficients variables au moins, il faut et il suffit qu'il existe un nombre entier $h \geq 0$ tel que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{p_i(p_i+1)}{2}+R=\frac{m(m+3)}{2}-2-h.$$

Associée à (4), cette relation nous fournit ainsi le système

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{q} p_i(3p_i-1)=3m(m-1)-N,\\&\sum_{i=1}^{q} p_i(p_i+1)=m(m+3)-4-2(R+h),\end{aligned}\right. \tag{5}$$

ou, par des combinaisons évidentes,

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{q} p_i=3m-3-\frac{6(R+h)-N}{4},\\&\sum_{i=1}^{q} p_i^2=m^2-1-\frac{2(R+h)+N}{4}.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

La première équation (5) montre que N *est nécessairement pair*, et, en posant $N=2n$, (6) s'écrit

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{q} p_i = 3m - 3 - \frac{3(R+h)-n}{2}, \\ \sum_{i=1}^{q} p_i^2 = m^2 - 1 - \frac{R+h+n}{2}; \end{cases}$$

on voit de plus que n *et* $R+h$ *ont la même parité.*

Compte tenu au besoin des points multiples mobiles de C, d'ordres respectifs $p'_1, p'_2, \ldots p'_{q'}$ $(p'_j \geq 2)$, le genre de C est

$$\gamma = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{p_i(p_i-1)}{2} - \sum_{j=1}^{q'} \frac{p'_j(p'_j-1)}{2} =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}\left(m^2 - \sum_{i=1}^{q} p_i^2\right) - \tfrac{1}{2}\left(3m - \sum_{i=1}^{q} p_i\right) - \sum_{j=1}^{q'} \frac{p'_j(p'_j-1)}{2},$$

ou, compte tenu de (7),

$$(8) \qquad \gamma = \frac{n-R-h}{2} - \sum_{j=1}^{q'} \frac{p'_j(p'_j-1)}{2}.$$

Dans les conditions générales où nous nous sommes placés, nous pouvons donc énoncer le

Théorème I. *Le nombre N des points focaux mobiles, distincts ou confondus, est pair, et le genre de C est au plus égal à* $\frac{N}{4}$.

Lorsque $N=2n$ est fixé, le maximum de γ est $\frac{n}{2}$ si n est pair, et n'est atteint que si $R=h=q'=0$; C n'a alors que deux coefficients variables indépendants. Si n est impair, le maximum de γ est $\frac{n-1}{2}$, et correspond à $q'=0$, $R+h=1$, donc $R=1$, $h=0$ ou $R=0$, $h=1$. Par exemple, pour $N=2$, γ est nécessairement nul, et l'on a le

Théorème II. *Les seules congruences des courbes C en question, qui n'ont que 2 points focaux simples mobiles, distincts ou non, sont des congruences de courbes unicursales, sans point multiple mobile.*

Avec $N=4$, donc $n=2$, on peut avoir $\gamma=0$ ou $\gamma=1$; $\gamma=0$ si $R+h=2$, $q'=0$ ou $R=h=0$, $q'=1$, $p'_1=2$; $\gamma=1$ si $R=h=q'=0$.

§ 3. Examinons plus en détail le cas où N a sa plus petite valeur intéressante 2. Nous venons de voir que $R+h=1$, de sorte que (7) se réduit à

$$(9) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{q} p_i = 3m - 4, \\ \sum_{i=1}^{q} p_i^2 = m^2 - 2. \end{cases}$$

Par exemple, si C a un point multiple fixe d'ordre $m-1$, soit $p_1 = m-1$, (9) donne

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^{q} p_i = 2m-3, \\ \sum_{i=2}^{q} p_i^2 = 2m-3, \end{cases}$$

donc $\sum_{i=2}^{q} p_i(p_i-1) = 0$; elle ne peut avoir d'autre point multiple fixe sans se décomposer; les p_i autres que p_1 valent 1, et leur nombre

$$q-1 = 2m-3;$$

ainsi, *les courbes en question sont les courbes qui ont un point multiple fixe d'ordre* $m-1$ *et* $2m-3$ *points simples fixes.*

Si C a un point multiple fixe d'ordre $m-2$ ($m>3$), elle ne peut avoir que des points doubles au plus, sans se décomposer; soit s le nombre des points simples fixes, et d celui des point doubles fixes, de sorte que $q = 1+s+d$. (9) donne

$$\begin{cases} s+2d = 2m-2, \\ s+4d = 4m-6, \end{cases}$$

donc $s=2$, $d=m-2$.

Si C n'a que des points doubles et des points simples fixes[1], soit d et s leurs nombres respectifs. (9) s'écrit alors

$$\begin{cases} s+2d = 3m-4, \\ s+4d = m^2-2, \end{cases}$$

donc

$$s = -(m^2-6m+6), \qquad d = \frac{(m-1)(m-2)}{2};$$

s ne peut être positif que si m est compris entre 1 et 5, et les seules valeurs acceptables sont $m=3$ ou 4 si d n'est pas nul. L'ensemble de ces remarques permet de déterminer toutes les courbes C, de degré inférieur à 6, qui répondent à la question.

Les congruences de coniques sont celles dont les coniques ont deux points fixes. Pour les cubiques, le dernier cas[2] donne $s=3$, $d=1$. Pour les quartiques, le premier exemple ($p_1=m-1$) donne 1 point triple fixe, et 5 points simples fixes, tandis que le deuxième, ou le troisième, donne $s=2$, $d=3$. Avec $m=5$, on peut avoir soit 1 point quadruple fixe et 7 points simples fixes, soit 1 point triple, 2 points simples et 3 points doubles fixes.

---

[1] Il ne peut y avoir uniquement des points simples fixes si $m>2$.

[2] On verra au § 5 un exemple de cubiques n'ayant qu'un point multiple fixe (rebroussement à l'infini), avec $N=2$, mais les hypothèses générales admises au § 2 ne sont pas satisfaites.

§ 4. Les chapitres suivants étant consacrés aux coniques, donnons ici quelques précisions concernant les cubiques. Nous pouvons supposer que les 3 points simples fixes sont à l'infini, et le point double fixe à l'origine. L'équation (1) de la congruence est alors de la forme

$$f \equiv \varphi(x, y) + a(\alpha, \beta)\, x^2 + 2\, b(\alpha, \beta)\, x y + c(\alpha, \beta)\, y^2 = 0, \tag{10}$$

où φ est une forme cubique de coefficients donnés. (2) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{D(a x + b y, a x^2 + 2 b x y + c y^2)}{D(\alpha, \beta)} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{D(b x + c y, a x^2 + 2 b x y + c y^2)}{D(\alpha, \beta)} = 0,$$

ou, à l'aide de combinaisons évidentes dans les déterminants fonctionnels,

$$\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{D(a x + b y, b x + c y)}{D(\alpha, \beta)} \equiv [3 \varphi + 2(a x^2 + 2 b x y + c y^2)] \frac{D(a x + b y, b x + c y)}{D(\alpha, \beta)} = 0.$$

Γ se décompose en une cubique et un faisceau de deux droites. L'intersection de (10) et de cette cubique ne donne que les points fixes de la congruence, 6 à l'origine et 3 à l'infini. Les points focaux qui nous intéressent sont à l'intersection de (10) avec le faisceau

$$\frac{D(a, b)}{D(\alpha, \beta)} x^2 + \frac{D(a, c)}{D(\alpha, \beta)} x y + \frac{D(b, c)}{D(\alpha, \beta)} y^2 = 0, \tag{11}$$

ce qui fournit 4 points fixes à l'origine et les deux points focaux mobiles. L'équation différentielle des focales s'obtient en associant à (10) et (11) l'équation (10) différentiée par rapport à α et β, c'est-à-dire

$$x^2\, d a + 2\, x y\, d b + y^2\, d c = 0, \tag{12}$$

et en éliminant x, y entre ces trois équations. Grâce à l'homogénéité de (11) et (12), il suffit d'éliminer $\frac{y}{x}$ entre elles. Deux des déterminants fonctionnels de (11) ne sont pas identiquement nuls, sans quoi a, b, c seraient fonctions d'un seul paramètre, et il n'y aurait pas de congruence. On peut admettre par exemple que $\frac{D(a, b)}{D(\alpha, \beta)}$ n'est pas nul, et faire $a = \alpha$, $b = \beta$. (11) et (12) se réduisent alors à

$$\begin{cases} x^2 + c'_\beta\, x y - c'_\alpha\, y^2 = 0, \\ x^2\, d\alpha + 2\, x y\, d\beta + y^2\, d c = 0, \end{cases} \tag{13}$$

et l'équation cherchée est

$$(c'_\beta\, d\alpha - 2\, d\beta)(c'_\beta\, d c + 2\, c'_\alpha\, d\beta) + (d c + c'_\alpha\, d\alpha)^2 = 0. \tag{14}$$

Elle ne s'évanouit que si

$$4\, c'_\alpha + c'^2_\beta = 0, \tag{15}$$

qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les 2 points focaux soient confondus. Les congruences qui y satisfont sont celles que nous qualifions de «singulières».[1] L'intégrale générale de (15) dépend d'une fonction arbitraire, mais la résolution, qui n'offre aucune difficulté, ne nous est pas utile. Contentons-nous de montrer que *les congruences singulières sont celles formées par les cubiques qui ont les points fixes imposés et qui sont tangentes à une même courbe.*

En effet, le point focal double A a des coordonnées $x, y = \varrho x$, où ϱ désigne la racine double $\frac{y}{x}$ de la première équation (13), soit

$$\varrho = \frac{c'_\beta}{2\, c'_\alpha} = \frac{-2}{c'_\beta}; \tag{16}$$

et il s'agit de démontrer que, pour ce point, $\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} \equiv 0$. Or ce déterminant

$$\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} = \frac{D(x, \varrho x)}{D(\alpha, \beta)} = x \frac{D(x, \varrho)}{D(\alpha, \beta)},$$

x étant donné par (10) où l'on fait $y = \varrho x$, donc par

$$\varphi(1, \varrho)\, x + \alpha + 2\beta\varrho + c\varrho^2 = 0;$$

on en déduit

$$\varphi(1, \varrho) \frac{D(x, \varrho)}{D(\alpha, \beta)} = -\frac{D(\alpha + 2\beta\varrho + c\varrho^2, \varrho)}{D(\alpha, \beta)} = -\begin{vmatrix} 1 + c'_\alpha \varrho^2 & 2\varrho + c'_\beta \varrho^2 \\ \varrho'_\alpha & \varrho'_\beta \end{vmatrix},$$

où les deux éléments[2] de la première ligne sont nuls en vertu de (16). C. Q. F. D.

§ 5. Nous allons généraliser cette observation en démontrant que, *lorsque la courbe C de la congruence a un point focal multiple mobile, l'équation différentielle des variétés focales s'évanouit généralement en ce point, et celui-ci, s'il est régulier pour C, se déplace alors sur une courbe au lieu de former un domaine à deux dimensions.*

L'équation différentielle des variétés focales s'obtient en éliminant x et y entre les équations (1), (2) et

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\, d\beta = 0. \tag{17}$$

---

[1] *loc. cit.*, p. 4.

[2] Ces éléments sont justement $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial f}{\partial \beta}$, dont la nullité assure l'évanouissement de l'équation (17) des variétés focales.

On a un point focal multiple lorsque C et Γ sont tangentes, ou lorsqu'un point commun est multiple pour l'une d'elles; il s'agit en outre d'un point focal multiple non isolé dans la congruence. Si ce point A est un point multiple mobile de (1), on y a constamment $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, et la différentiation de (1) entraîne l'égalité (17) quels que soient $d\alpha$, $d\beta$, donc $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\frac{\partial f}{\partial \beta}=0$.

Supposons donc que A soit un point régulier de C; qu'il soit point multiple de Γ, ou point de tangence de C avec Γ, les dérivées partielles du premier membre de (2) par rapport à x et y sont proportionnelles à $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, ce qui s'écrit

$$(18)\quad \frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y}, f\right)}{D(x,y)}\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, f\right)}{D(\alpha,\beta)}-\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, f\right)}{D(x,y)}\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial y}, f\right)}{D(\alpha,\beta)}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f\right)}{D(\alpha,\beta)}-$$
$$-2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, f\right)}{D(\alpha,\beta)}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, f\right)}{D(\alpha,\beta)}=0.$$

(2) et (18) sont linéaires et homogènes en $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$, et ces deux équations simultanées entraînent généralement la nullité de ces deux dérivées, car les seules hypothèses faites n'entraînent généralement pas la nullité du déterminant des coefficients de $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$. S'il en est ainsi, (17) s'évanouit bien en A. La différentiation de (1) donne alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\equiv 0$$

pour le déplacement de ce point focal multiple dans la congruence, donc x et y sont liés si $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas simultanément nuls. Le lieu de A fait partie de l'enveloppe de la congruence. C. Q. F. D.

Remarque. Le point A en question étant régulier pour C, on peut admettre qu'au voisinage d'un tel point $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas nul, et, en résolvant (1) par rapport à y pour représenter la branche de C qui passe par A, que (1) est mis sous la forme

$$(19)\qquad y+g(x,\alpha,\beta)=0.$$

2) s'écrit alors

$$(20)\qquad \frac{D\left(\frac{\partial g}{\partial x}, g\right)}{D(\alpha,\beta)}\equiv\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial\alpha}\frac{\partial g}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial\beta}\frac{\partial g}{\partial\alpha}=0,$$

tandis que (18) se réduit à

$$\frac{D\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, g\right)}{D(\alpha, \beta)} \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0. \tag{21}$$

Notre proposition tombe en défaut si

$$\frac{D\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial g}{\partial x}\right)}{D(\alpha, \beta)} = 0 \tag{22}$$

au point A, c'est-à-dire si (22) est compatible avec (20). C'est ce qui se produit en particulier si (22) est une identité relativement à x, α, β de sorte que $x, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ soient des fonctions liées de ces 3 variables indépendantes. L'équation différentielle qui exprime cette liaison est du premier ordre en $\frac{\partial g}{\partial x}$, et montre que $\frac{\partial g}{\partial x}$ ne dépend que d'un paramètre essentiel, qu'on peut prendre pour α. g est alors de la forme

$$g(x, \alpha, \beta) = h(x, \alpha) + \beta,$$

avec $\frac{\partial h}{\partial \alpha} \neq 0$ afin d'avoir une congruence. $\frac{\partial g}{\partial \beta} = 1$, et l'équation différentielle des variétés focales ne s'évanouit pas en A. Ce point est déterminé par (20) et (21), qui s'écrivent

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial \alpha} = 0, \tag{23}$$

et sont supposées compatibles en x quel que soit α. Son abscisse est une racine multiple de $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \alpha} = 0$, supposée exister quel que soit α. Son ordonnée est fournie par (19), qui s'écrit

$$y = -h(x, \alpha) - \beta,$$

et l'ensemble de ses positions a bien 2 dimensions.

On voit ainsi que l'énoncé de notre proposition comporte effectivement des exceptions.

Par exemple, avec

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \alpha} = (x - \alpha)^2 k(x, \alpha),$$

on peut prendre pour (19) une équation de la forme

(24)
$$y+\varphi(x)+\beta+\int_{x_0}^{x}\int_{\alpha_0}^{\alpha}(x-\alpha)^2\,k(x,\alpha)\,dx\,d\alpha=0,$$

où $\varphi(x)$ est une certaine fonction de x.

Le point focal multiple A a l'abscisse $x=\alpha$, et ses coordonnées sont liées par l'équation

$$y+\varphi(x)+\beta+\int_{x_0}^{x}\int_{\alpha_0}^{x}(u-v)^2\,k(u,v)\,du\,dv=0,$$

qui fournit les points d'un ensemble à deux dimensions, à cause du paramètre β.

Précisons encore cet exemple, en faisant $\dfrac{\partial k}{\partial x}\equiv\varphi(x)\equiv 0$. En posant $k(\alpha)\equiv\theta'''(\alpha)$, (24) est de la forme

$$y+\beta+\frac{x^3}{3}\theta''-x^2(\alpha\,\theta''-\theta')+x(\alpha^2\,\theta''-2\,\alpha\,\theta'+2\,\theta)=0,$$

car on peut choisir $\theta(\alpha)$ de façon que $\theta(\alpha_0)=\theta'(\alpha_0)=\theta''(\alpha_0)=0$, et modifier le paramètre β de (24). C'est une famille de cubiques dont chaque courbe a un seul point focal, double, d'abscisse $x=\alpha$, puisque la première équation (23) se réduit à

$$\theta'''(\alpha)(x-\alpha)^2=0,\qquad \theta'''(\alpha)\neq 0.$$

Ces cubiques se déduisent de la famille à 1 paramètre fournie par $\beta=0$ à l'aide de la translation générale parallèle à Oy, et n'ont pas d'autre point fixe que le point de rebroussement à l'infini dans la direction Oy. Elles n'ont tout de même que deux points focaux mobiles à distance finie, car les conditions d'application de la formule (4) ne sont pas satisfaites. L'équation différentielle des focales est

$$d\beta+\left(\frac{x^3}{3}-\alpha\,x^2+\alpha^2\,x\right)\theta'''(\alpha)\,d\alpha=0,$$

où l'on fait $x=\alpha$, donc

$$d\beta+\frac{\alpha^3}{3}\theta'''(\alpha)\,d\alpha=0.$$

Chapitre II

Congruences de coniques ayant deux points fixes

§ 6. Nous supposerons que les 2 points fixes ω, ω' sont sur la droite $t=0$ d'un triangle de référence, et écrirons l'équation de la conique (C) sous la forme homogène

(1)
$$f(x,y,t;\,\alpha,\beta)\equiv\tfrac{1}{2}\,\varphi(x,y)+[a(\alpha,\beta)\,x+b(\alpha,\beta)\,y+c(\alpha,\beta)\,t]\,t=0,$$

où

$$\varphi(x, y) \equiv l x^2 + 2 m x y + n y^2$$

est une forme quadratique à coefficients constants. L'équation (2; I) se réduit à

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{D(a, ax+by+ct)}{D(\alpha, \beta)} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{D(b, ax+by+ct)}{D(\alpha, \beta)} = 0$$

ou

$$\frac{D(a, b)}{D(\alpha, \beta)} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{D(b, c)}{D(\alpha, \beta)} t \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{D(c, a)}{D(\alpha, \beta)} t \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

compte tenu de l'homogénéité de $f(x, y, t)$ ceci s'écrit

$$\frac{D(a, b)}{D(\alpha, \beta)} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{D(b, c)}{D(\alpha, \beta)} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{D(c, a)}{D(\alpha, \beta)} \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

C'est une droite, que nous appelons la *droite focale*. Nous poserons

$$A = \frac{D(b, c)}{D(\alpha, \beta)}, \quad B = \frac{D(c, a)}{D(\alpha, \beta)}, \quad C = \frac{D(a, b)}{D(\alpha, \beta)},$$

de sorte que la droite focale s'écrit

(2) $$A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

ou

(3) $$\frac{\partial f(A, B, C)}{\partial A} x + \frac{\partial f(A, B, C)}{\partial B} y + \frac{\partial f(A, B, C)}{\partial C} t = 0.$$

C'est la polaire du point (A, B, C) par rapport à (1). Nous poserons également

$$L = \frac{\partial f(A, B, C)}{\partial A}, \quad M = \frac{\partial f(A, B, C)}{\partial B}, \quad N = \frac{\partial f(A, B, C)}{\partial C},$$

de sorte que (3) s'écrit

(3′) $$L x + M y + N t = 0.$$

Les variétés focales sont fournies par le système que forment (1), (3′), et l'équation

(4) $$x\, da + y\, db + t\, dc = 0,$$

qui définit la famille de coniques à un paramètre dont l'enveloppe est osculatrice à (C) en l'un des deux points focaux. (3′) et (4) donnent

(5) $$\frac{x}{M\, dc - N\, db} = \frac{y}{N\, da - L\, dc} = \frac{t}{L\, db - M\, da},$$

et il suffit de porter ces valeurs de x, y, t dans (1) pour obtenir l'équation différentielle des focales

$$f(M\,dc - N\,db,\ \ N\,da - L\,dc,\ \ L\,db - M\,da) = 0. \tag{6}$$

Les deux points focaux sont distincts pourvu que la droite focale ne soit pas tangente à (1), donc pourvu que l'on n'ait pas

$$2f(A, B, C) \equiv LA + MB + NC = 0. \tag{7}$$

Ils sont hors de la droite $t=0$, à moins que (3′) ne passe par ω ou ω', c'est-à-dire que $\varphi(M, -L) = 0$. Ainsi, lorsque

$$\varphi(M, -L) \equiv (ln - m^2)\,[\varphi(A, B) + 2(aA + bB)\,C] + \varphi(b, -a)\,C^2 \equiv 0,$$

chaque courbe (C) n'a plus qu'un point focal variable. C'est ce qui se produit, par exemple, avec la famille des paraboles

$$2y + a(\alpha)\,x^2 + 2b(\alpha)\,x + c(\alpha, \beta) = 0 \qquad \frac{\partial c}{\partial \beta} \neq 0, \tag{8}$$

qui n'ont qu'un point focal au plus, dont l'abscisse est donnée par

$$a'(\alpha)\,x + b'(\alpha) = 0.$$

§ 7. Développons l'équation différentielle (6). Deux des déterminants fonctionnels A, B, C ne peuvent être identiquement nuls, sans quoi a, b, c ne dépendraient que d'un paramètre, et il n'y aurait pas de congruence. On peut supposer que A ou B n'est pas nul[1], et ce n'est pas une restriction de supposer que $A \neq 0$. b et c sont indépendants, et l'on peut choisir les paramètres $\alpha = -b$, $\beta = -c$; a est une certaine fonction de α, β. Avec ces paramètres, on voit tout de suite que

$$A = 1, \qquad B = \frac{\partial a}{\partial \alpha} = a'_\alpha, \qquad C = \frac{\partial a}{\partial \beta} = a'_\beta; \tag{9}$$

en posant

$$\bar{f} = f(A, B, C) = f(1, a'_\alpha, a'_\beta),$$

il vient

$$L = \frac{\partial \bar{f}}{\partial A} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial (1)}, \qquad M = \frac{\partial \bar{f}}{\partial B} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial a'_\alpha}, \qquad N = \frac{\partial \bar{f}}{\partial C} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial a'_\beta}.$$

Il s'agit de développer

$$f[N\,d\alpha - M\,d\beta,\ \ N a'_\alpha\,d\alpha + (N a'_\beta + L)\,d\beta,\ \ -(M a'_\alpha + L)\,d\alpha - M a'_\beta\,d\beta] = 0. \tag{10}$$

---

[1] C joue un rôle différent de A et B, à cause du rôle spécial de la droite $t=0$.

Compte tenu de

$$M a'_\alpha + L = \frac{\partial f}{\partial A} A + \frac{\partial f}{\partial B} B = 2f - \frac{\partial f}{\partial C} C = 2f - N a'_\beta,$$

$$N a'_\beta + L = \frac{\partial f}{\partial A} A + \frac{\partial f}{\partial C} C = 2f - \frac{\partial f}{\partial B} B = 2f - M a'_\alpha,$$

le coefficient de $d\alpha^2$ dans (10) s'écrit

$$f(N,\, N a'_\alpha,\, N a'_\beta - 2f) = N^2 f - 2f \frac{\partial f(N,\, N a'_\alpha,\, N a'_\beta)}{\partial (N a'_\beta)} + f(0,\, 0,\, -2f) =$$

$$= 4f(0,\, 0,\, 1) f^2 - N^2 f,$$

que l'on peut écrire

$$f\left[2f \frac{\partial^2 f}{\partial C^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2\right].$$

Le coefficient de $d\beta^2$ est de même

$$f(-M,\, -M a'_\alpha + 2f,\, -M a'_\beta) = f(M,\, M a'_\alpha - 2f,\, M a'_\beta) = f\left[2f \frac{\partial^2 f}{\partial B^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2\right].$$

Enfin celui de $d\alpha\, d\beta$, grâce à un calcul plus compliqué, s'écrit

$$- M \frac{\partial f(N,\, N a'_\alpha,\, N a'_\beta - 2f)}{\partial N} + (2f - M a'_\alpha) \frac{\partial f(N,\, N a'_\alpha,\, N a'_\beta - 2f)}{\partial (N a'_\alpha)} - M a'_\beta \times$$

$$\times \frac{\partial f(N,\, N a'_\alpha,\, N a'_\beta - 2f)}{\partial (N a'_\beta - 2f)} = - M\left(N \frac{\partial f}{\partial A} - 2f \frac{\partial^2 f}{\partial A\, \partial C}\right) + (2f - MB)\left(N \frac{\partial f}{\partial B} - 2f \frac{\partial^2 f}{\partial B\, \partial C}\right) -$$

$$- MC\left(N \frac{\partial f}{\partial C} - 2f \frac{\partial^2 f}{\partial C^2}\right) = - MN\left(A \frac{\partial f}{\partial A} + B \frac{\partial f}{\partial B} + C \frac{\partial f}{\partial C}\right) + 2fM\left(N + A \frac{\partial^2 f}{\partial A\, \partial C} +\right.$$

$$\left. + B \frac{\partial^2 f}{\partial B\, \partial C} + C \frac{\partial^2 f}{\partial C^2}\right) - 4f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial B\, \partial C} = 2f\left(M \frac{\partial f}{\partial C} - 2f \frac{\partial^2 f}{\partial B\, \partial C}\right) = -2f\left(2f \frac{\partial^2 f}{\partial B\, \partial C} - \frac{\partial f}{\partial B} \frac{\partial f}{\partial C}\right).$$

Avec ces trois expressions remarquables, (10) s'écrit

$$(11)\quad f\left\{\left[2f \frac{\partial^2 f}{\partial C^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2\right] d\alpha^2 - 2\left[2f \frac{\partial^2 f}{\partial B\, \partial C} - \frac{\partial f}{\partial B} \frac{\partial f}{\partial C}\right] d\alpha\, d\beta + \left[2f \frac{\partial^2 f}{\partial B^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2\right] d\beta^2\right\} = 0,$$

ou encore

$$(11')\qquad f\left\{2f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial C^2} db^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial B\, \partial C} db\, dc + \frac{\partial^2 f}{\partial B^2} dc^2\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial C} db - \frac{\partial f}{\partial B} dc\right)^2\right\} = 0.$$

On vérifie ainsi que l'équation différentielle des focales s'évanouit lorsque $f = 0$, c'est-à-dire lorsque les deux points focaux fusionnent. Réciproquement, si (11) s'évanouit, ou bien $f=0$, ou les 3 coefficients de la forme quadratique entre accolades s'annulent; dans ce dernier cas, l'élimination de $\frac{\partial f}{\partial B}$ et $\frac{\partial f}{\partial C}$ entre les 3 équations ainsi fournies donne

$$f^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}\frac{\partial^2 f}{\partial C^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial B\,\partial C}\right)^2\right]=0,$$

ou

$$f^2(2\,n\,c-b^2)=-f^2(\alpha^2+2\,n\,\beta)=0,$$

donc $f=0$, car $\alpha^2+2\,n\,\beta$ ne peut être identiquement nul. Il est ainsi établi qu'avec ces familles de coniques, *les seules congruences singulières sont celles dont les deux points focaux sont constamment confondus.*

Par exemple, l'équation différentielle des variétés focales des paraboles (8) est

$$\left(a'\,x^2+2\,b'\,x+\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)d\,\alpha+\frac{\partial c}{\partial \beta}d\,\beta=0,$$

où x est l'abscisse du point focal, et ne s'évanouit que si ce point est rejeté à l'infini, donc si $a'(\alpha)\equiv 0$. Ces congruences singulières sont les congruences de paraboles égales.

§ 8. Pour une congruence singulière, le pôle (A, B, C) de la droite focale est sur (C), donc sur la droite focale, et c'est le point focal double. En conservant les notations particulières du paragraphe précédent, $a(\alpha,\beta)$ est tel que

$$f=f(1,\,a'_\alpha,\,a'_\beta)\equiv\tfrac{1}{2}\,\varphi(1,\,a'_\alpha)+(a-\alpha\,a'_\alpha-\beta\,a'_\beta)\,a'_\beta=0. \tag{12}$$

C'est une équation aux dérivées partielles de Clairaut. Dans l'espace cartésien de coordonnées α, β, a, l'intégrale générale est une surface développable, donc $\frac{D(a'_\alpha,\,a'_\beta)}{D(\alpha,\,\beta)}=0$; conformément au théorème général du paragraphe 5, ceci exprime que le point focal double décrit une courbe, d'ailleurs quelconque, puisque l'intégrale générale de (12) enveloppe un plan obtenu en remplaçant a'_α et a'_β par deux fonctions arbitraires d'un paramètre. Ne pourrait faire exception que l'intégrale singulière de (12); mais celle-ci s'obtient en annulant $\frac{\partial f}{\partial a'_\alpha}$, et $\frac{\partial f}{\partial a'_\beta}$, de sorte que (A, B, C), annulant $f(A, B, C)$ et deux de ses dérivées partielles, serait un point multiple de (C); cette solution est à rejeter si l'on écarte tout naturellement les congruences formées uniquement de couples de droites.

§ 9. Application aux équations différentielles du premier ordre

Dans ce qui suit, la droite $t=0$ est considérée comme la droite de l'infini du plan, et t est remplacé par 1 dans les équations homogènes en x, y, t.

Considérons alors l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=z(x, y), \tag{13}$$

et son prolongement

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=p+qz,$$

où l'on pose $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$. En un point A, de coordonnées x, y, la droite D de pente[1] z définit, avec A, un élément de contact. X, Y étant les coordonnées courantes, les coniques de la famille qui sont tangentes à D en A ont l'équation

$$f(X, Y) \equiv f(X, Y, 1) \equiv \tfrac{1}{2}\varphi(X-x, Y-y)+\lambda[z(x, y)(X-x)-(Y-y)]=0. \tag{14}$$

Nous choisissons celle qui est osculatrice en A à l'intégrale de (13) qui passe en ce point. λ est défini par l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial X\,\partial Y}z+\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}z^2+\left[\frac{\partial f(X, Y)}{\partial Y}\right]_A (p+qz)=0,$$

ou

$$\varphi(1, z)-\lambda(p+qz)=0. \tag{15}$$

D'autre part, le développement de (14) est

$$\tfrac{1}{2}\varphi(X, Y)-\tfrac{1}{2}\varphi'_x X-\tfrac{1}{2}\varphi'_y Y+\tfrac{1}{2}\varphi(x, y)+\lambda z X-\lambda Y+\lambda(y-zx)=0,$$

donc les coefficients a, b, c de la conique (1) sont ici

$$\begin{cases} a=\lambda z-\tfrac{1}{2}\varphi'_x \\ b=-\lambda-\tfrac{1}{2}\varphi'_y \\ c=\lambda(y-zx)+\tfrac{1}{2}\varphi(x, y), \end{cases} \tag{16}$$

et les paramètres α, β sont les variables x, y. Nous savons d'avance que A est l'un des deux points focaux, donc la droite focale est de la forme

$$L(X-x)+M(Y-y)=0. \tag{17}$$

[1] Dans tous les cas, D est la droite qui joint A au point de coordonnées $(1, z, 0)$.

La forme des expressions de a et b, et l'équation (15) suggèrent la combinaison

$$aq-bp=\lambda(p+qz)+\tfrac{1}{2}(p\varphi_y'-q\varphi_x')=\varphi(1,z)+\tfrac{1}{2}(p\varphi_y'-q\varphi_x').$$

$aq-bp$ est d'autre part le coefficient de C dans l'expression

$$\begin{aligned}Lq-Mp&=(lA+mB+aC)q-(mA+nB+bC)p\\&=(lq-mp)A+(mq-np)B+(aq-bp)C,\end{aligned}$$

et, en développant $p\varphi_y'-q\varphi_x'$ dans l'expression de $aq-bp$, il vient

$$Lq-Mp=(lq-mp)(A-Cx)+(mq-np)(B-Cy)+\varphi(1,z)C. \tag{18}$$

Calculons $A-Cx$ et $B-Cy$. On a d'abord

$$A-Cx=\frac{D(b,c)}{D(x,y)}+x\frac{D(b,a)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial a}+x\dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial c}{\partial y}+x\dfrac{\partial a}{\partial y}\end{vmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial x}+x\frac{\partial a}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(c+ax)-a=\frac{\partial}{\partial x}[\lambda y+\tfrac{1}{2}\varphi(x,y)-\tfrac{1}{2}x\varphi_x']-a\\&=\frac{\partial}{\partial x}[-by-\tfrac{1}{2}\varphi(x,y)]-a=-y\frac{\partial b}{\partial x}-\lambda z,\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial c}{\partial y}+x\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(c+ax)=\frac{\partial}{\partial y}[-by-\tfrac{1}{2}\varphi(x,y)]=-y\frac{\partial b}{\partial y}+\lambda,$$

donc

$$A-Cx=\lambda\begin{vmatrix}\dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y}\\[2ex] -z & 1\end{vmatrix};$$

on a de même

$$B-Cy=\frac{D(c,a)}{D(x,y)}+y\frac{D(b,a)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial c}{\partial x}+y\dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial c}{\partial y}+y\dfrac{\partial b}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y}\end{vmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial x}+y\frac{\partial b}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(c+by)=-\frac{\partial}{\partial x}[\lambda zx-\tfrac{1}{2}\varphi(x,y)+\tfrac{1}{2}y\varphi_y']=-\frac{\partial}{\partial x}[ax+\tfrac{1}{2}\varphi(x,y)]=\\&=-\left(x\frac{\partial a}{\partial x}+\lambda z\right),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}+y\frac{\partial b}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(c+by)-b=-\frac{\partial}{\partial y}[ax+\tfrac{1}{2}\varphi(x,y)]-b=-x\frac{\partial a}{\partial y}+\lambda,$$

donc

$$B - Cy = \lambda \begin{vmatrix} -z & 1 \\ \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

D'ailleurs, les expressions (16) de a et b donnent

$$\frac{\partial a}{\partial x} + z \frac{\partial b}{\partial x} = \lambda p - (l + mz),$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} + z \frac{\partial b}{\partial y} = \lambda q - (m + nz),$$

et l'on peut encore écrire

$$B - Cy = \lambda z \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \\ -z & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} l + mz - \lambda p & m + nz - \lambda q \\ -z & 1 \end{vmatrix} = \lambda z \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \\ -z & 1 \end{vmatrix},$$

car l'avant dernier déterminant est nul grâce à (15). On a de même

$$C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial a}{\partial x} & -\dfrac{\partial a}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \\ l + mz - \lambda p & m + nz - \lambda q \end{vmatrix},$$

et les expressions ainsi trouvées pour $A - Cx$, $B - Cy$, C donnent

$$\frac{Lq - Mp}{\lambda} = [lq - mp + (mq - np)z] \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \\ -z & 1 \end{vmatrix} + (p + qz) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \\ l + mz & m + nz \end{vmatrix} - \\ - \varphi(1, z) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \\ p & q \end{vmatrix}.$$

On vérifie tout de suite que les coefficients de $\dfrac{\partial b}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial b}{\partial y}$ sont nuls, donc $Lq - Mp = 0$, et l'équation (17) de la droite focale a la forme remarquable

$$p(X - x) + q(Y - y) = 0. \tag{19}$$

Ainsi, *la droite focale est la tangente au déplacement de A qui conserve la direction de D.*

Si l'on construit la surface S, d'équation $z = z(x, y)$ dans l'espace cartésien de x, y, z, les droites focales sont les tangentes aux projections des lignes de niveau de S. On observe également *que la droite focale ne dépend pas des directions asymptotiques de la famille de coniques considérée.*

§ 10. Les coordonnées du deuxième point focal A' de (14) sont de la forme

$$X = x + \varrho q, \quad Y = y - \varrho p,$$

avec

$$f(x + \varrho q, \ y - \varrho p) = 0.$$

Grâce à l'expression (15) de λ, il vient

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\varrho q, \ -\varrho p) + \lambda \varrho (p + qz) = \frac{\varrho^2}{2}\varphi(q, \ -p) + \varrho \varphi(1, z) = 0.$$

A' est déterminé par la racine

$$\varrho = -2\frac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, \ -p)}. \tag{20}$$

On a ainsi

$$X = x - 2q\frac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, \ -p)}, \qquad Y = y + 2p\frac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, \ -p)}. \tag{21}$$

La pente de la tangente focale en A' est

$$Z = \frac{dY}{dX} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial X}}{\dfrac{\partial f}{\partial Y}} = \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varphi(X - x, \ Y - y)}{\partial (X - x)} + \lambda z}{-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varphi(X - x, \ Y - y)}{\partial (Y - y)} + \lambda},$$

donc, grâce à (21), puis à (15),

$$Z = \frac{-\dfrac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, \ -p)}\dfrac{\partial \varphi(q, \ -p)}{\partial q} + \lambda z}{\dfrac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, \ -p)}\dfrac{\partial \varphi(q, \ -p)}{\partial(-p)} + \lambda} = \frac{-(p + qz)\dfrac{\partial \varphi(q, \ -p)}{\partial q} + z\varphi(q, \ -p)}{(p + qz)\dfrac{\partial \varphi(q, \ -p)}{\partial(-p)} + \varphi(q, \ -p)};$$

nous nous plaçons dans le cas général où A' est distinct de A, c'est-à-dire où $\varphi(1, z) \neq 0$. En remplaçant $\varphi(q, \ -p)$ par

$$\varphi(q, \ -p) = \tfrac{1}{2}\left[q\frac{\partial \varphi(q, \ -p)}{\partial q} - p\frac{\partial \varphi(q, \ -p)}{\partial(-p)}\right],$$

et en écrivant φ'_q, φ'_{-p} pour $\dfrac{\partial \varphi(q, \ -p)}{\partial q}$, $\dfrac{\partial \varphi(q, \ -p)}{\partial(-p)}$, il vient enfin

$$Z = -\frac{(q\varphi'_q + p\varphi'_{-p})z + 2p\varphi'_q}{q\varphi'_q + p\varphi'_{-p} + 2q\varphi'_{-p}z}. \tag{22}$$

L'élimination de x et y entre (21) et (22) détermine l'équation differentielle

$$\frac{dY}{dX} = Z(X, Y) \tag{23}$$

associée à (13), tout au moins si $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ n'est pas identiquement nul. Ce cas d'exception sera examiné au chapitre suivant. Posons

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = P, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = Q;$$

la droite focale associée à (23) et au point A' est AA'; on a donc l'équation

$$P(x - X) + Q(y - Y) = 0,$$

dont la comparaison avec (19) établit l'existence d'un facteur μ grâce auquel

$$P = \mu p, \quad Q = \mu q. \tag{24}$$

L'homologue de la première équation (21), formée avec les éléments de (23), est

$$x = X - 2Q \frac{\varphi(1, Z)}{\varphi(Q, -P)} = X - \frac{2q}{\mu} \frac{\varphi(1, Z)}{\varphi(q, -p)},$$

et sa comparaison avec (21) donne

$$\mu = -\frac{\varphi(1, Z)}{\varphi(1, z)}. \tag{25}$$

(24) s'écrit donc

$$P = -\varphi(1, Z) \frac{p}{\varphi(1, z)}, \quad Q = -\varphi(1, Z) \frac{q}{\varphi(1, z)}. \tag{26}$$

L'ensemble des formules (21), (22), (26) est une transformation de contact de l'espace de x, y, z. L'expression (22) de Z étant homogène et de degré zéro en p, q, la fonction génératrice de cette transformation s'en déduit en y remplaçant $-p$ et q par les quantités proportionnelles $Y - y$ et $X - x$. C'est donc

$$\begin{aligned} H(X, Y, Z; x, y, z) \equiv & \left[(X - x) \frac{\partial \varphi(X - x, Y - y)}{\partial X} - (Y - y) \frac{\partial \varphi(X - x, Y - y)}{\partial Y}\right](Z + z) + \\ & + 2(X - x) \frac{\partial \varphi(X - x, Y - y)}{\partial Y} Zz - 2(Y - y) \frac{\partial \varphi(X - x, Y - y)}{\partial X} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

On peut encore lui donner la forme remarquable

$$\left(m Zz + l \frac{Z + z}{2}\right)(X - x)^2 + (n Zz - l)(X - x)(Y - y) - \left(m + n \frac{Z + z}{2}\right)(Y - y)^2 = 0. \tag{27'}$$

L'équation aux différentielles totales de la transformation est de la forme

$$dZ - P dX - Q dY - \mu(dz - p dx - q dy) = 0, \tag{28}$$

avec

$$\frac{P}{\mu p} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial X}}{\dfrac{\partial H}{\partial x}} = 1,$$

car H est fonction de $X-x$; μ est donc le facteur défini par (24).

Remarque. μ vaut également $-\dfrac{\dfrac{\partial H}{\partial z}}{\dfrac{\partial H}{\partial Z}}\cdot$ La comparaison avec (25) donne

$$\frac{\varphi(1, Z)}{\varphi(1, z)} = \frac{(X-x)\dfrac{\partial \varphi(X-x, Y-y)}{\partial X} - (Y-y)\dfrac{\partial \varphi(X-x, Y-y)}{\partial Y} + 2(X-x)\dfrac{\partial \varphi(X-x, Y-y)}{\partial Y} Z}{(X-x)\dfrac{\partial \varphi(X-x, Y-y)}{\partial X} - (Y-y)\dfrac{\partial \varphi(X-x, Y-y)}{\partial Y} + 2(X-x)\dfrac{\partial \varphi(X-x, Y-y)}{\partial Y} z},$$

ou, en revenant aux variables p, q,

$$\frac{\varphi(1, Z)}{\varphi(1, z)} = \frac{q\varphi'_q + p\varphi'_{-p} + 2q\varphi'_{-p} Z}{q\varphi'_q + p\varphi'_{-p} + 2q\varphi'_{-p} z}.$$

Compte tenu de l'expression (22) de Z et de l'homogénéité de φ, il vient encore

$$\frac{\varphi(q\varphi'_q + p\varphi'_{-p} + 2q\varphi'_{-p} z,\ -(q\varphi'_q + p\varphi'_{-p})z - 2p\varphi'_q)}{\varphi(1, z)} = (q\varphi'_q + p\varphi'_{-p} + 2q\varphi'_{-p} Z) \times \\ \times (q\varphi'_q + p\varphi'_{-p} + 2q\varphi'_{-p} z);$$

compte tenu de (22) lui-même, le second membre s'écrit

$$(q\varphi'_q + p\varphi'_{-p})^2 - 4pq\varphi'_q\varphi'_{-p} = (q\varphi'_q - p\varphi'_{-p})^2 = 4\varphi(q, -p)^2.$$

Dans l'égalité ainsi obtenue, p, q et z ont des valeurs indépendantes; en y remplaçant q et $-p$ par x et y, on obtient ainsi l'identité remarquable en x, y, z

$$\varphi[x\varphi'_x - y\varphi'_y + 2zx\varphi'_y,\ 2y\varphi'_x - (x\varphi'_x - y\varphi'_y)z] \equiv 4\varphi(x, y)^2\varphi(1, z), \tag{29}$$

pour toute forme quadratique $\varphi(x, y)$, où $\varphi'_x = \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}$, $\varphi'_y = \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$. En posant $z = \dfrac{v}{u}$, on peut encore lui donner la forme

$$\varphi[(x\varphi'_x - y\varphi'_y)u + 2x\varphi'_y v,\ 2y\varphi'_x u - (x\varphi'_x - y\varphi'_y)v] \equiv 4\varphi(x, y)^2\varphi(u, v). \tag{29'}$$

§ 11. Conséquences. 1°. La forme de l'équation (19) de la droite focale montre que *tous les points focaux A' des équations différentielles*

$$\frac{dy}{dx} = G(z(x, y)), \tag{30}$$

associés à un même point A, sont situés sur une même droite, qui est la droite focale commune à toutes ces équations.

2°. Plus particulièrement, on déduit des expressions (21) que *toutes les équations* (30), *où $G(z)$ vérifie l'équation différentielle*

$$G'(z) = \frac{\varphi(1, G)}{\varphi(1, z)}, \tag{31}$$

associent, à chaque point A, un faisceau de coniques (C), osculatrices en A à leurs courbes intégrales, dont les deux points communs autres que ω, ω' sont les points focaux communs à toutes ces coniques.

En effet, la valeur de ϱ associée à une telle solution G de (31) est

$$\varrho = -2\frac{\varphi(1, G)}{\varphi(G'q, -G'p)} = -\frac{2}{G'^2}\frac{\varphi(1, G)}{\varphi(q, -p)} = -2\frac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, -p)}\frac{1}{G'},$$

tandis que les facteurs p, q dans (21) sont remplacés par $G'p$, $G'q$. Par exemple, avec la famille des cercles, $\varphi(1, z) \equiv 1 + z^2$, et (31) s'écrit

$$\frac{G'}{1+G^2} = \frac{1}{1+z^2},$$

dont l'intégrale générale est[1]

$$\text{Arc tg } G = \text{Arc tg } z + \text{const.}$$

Avec la famille des paraboles ayant une direction asymptotique donnée, par exemple $\varphi(x, y) \equiv x^2 = 0$, $\varphi(1, z)$ est égal à 1, et (31) se réduit à $G' = 1$; les équations différentielles en question sont les équations

$$\frac{dy}{dx} = z(x, y) + \text{const.}$$

3°. *Les équations différentielles dont la droite focale passe par un point fixe, pris pour point $x = y = 0$, sont les équations homogènes.*

(19) montre en effet que les fonctions $z(x, y)$ correspondantes sont les intégrales

[1] Cf. *loc. cit.*, p. 8.

de l'équation aux dérivées partielles $px+qy=0$. L'équation (23) associée est évidemment de même nature; d'ailleurs, avec $z=g\left(\frac{y}{x}\right)$, l'expression (22) de Z s'écrit, grâce à $\frac{q}{x}=\frac{-p}{y}$,

$$Z=-\frac{g\left(\frac{y}{x}\right)\left[x\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}-y\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right]-2y\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}}{x\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}-y\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}+2g\left(\frac{y}{x}\right)x\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}};$$

c'est une fonction de $\frac{y}{x}$, donc de l'expression égale $\frac{Y}{X}$.

4°. Plus généralement, *les équations différentielles dont les droites focales forment une famille à un paramètre sont les équations de Lagrange.*

La démonstration donnée dans l'article concernant les congruences de cercles[1] convient telle quelle. En voici une autre. La droite (19) ne dépendant que d'un paramètre, les trois termes p, q, $px+qy$ sont fonctions de ce seul paramètre. D'autre part, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ et $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ étant liés, il en est de même pour $px+qy-z$, donc la différence $z=(px+qy)-(px+qy-z)$ est également fonction de ce paramètre. z, supposé variable[2], peut être pris pour celui-ci, et (19) s'écrit

$$p(z)x+q(z)y+k(z)=0;$$

' équation différentielle correspondante est l'équation de Lagrange

$$xp\left(\frac{dy}{dx}\right)+yq\left(\frac{dy}{dx}\right)+k\left(\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

La réciproque est immédiate. L'équation différentielle associée est également de Lagrange, puisqu'elle a les mêmes droites focales. En écartant le cas des équations homogènes, qui ont été examinées plus haut, on peut écrire l'équation initiale

$$xg(z)+yh(z)+1=0.$$

La droite focale de l'équation associée

$$XG(Z)+YH(Z)+1=0,\qquad Z=\frac{dY}{dX},$$

[1] Cf. *loc. cit.*, p. 17.

[2] Pour les équations $\frac{dy}{dx}=\text{const.}$, il n'y a plus de droites focales, ni de vraies coniques C.

est

$$x\,G(Z)+y\,H(Z)+1=0.$$

On obtient donc $G(Z)$ et $H(Z)$ à l'aide des équations

$$\begin{cases} G(Z)=g(z)=g(z(Z)), \\ H(Z)=h(z)=h(z(Z)), \end{cases}$$

où $z(Z)$ est défini par l'équation (22), dans laquelle on fait $\dfrac{p}{q}=\dfrac{g(z)}{h(z)}$.

§ 12. Retour à la transformation de contact. Le prolongement de la transformation de contact obtenue au paragraphe 10 s'effectue plus aisément en substituant à la variable dépendante z la variable

$$\bar{z}=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\varphi(1,z)}. \tag{32}$$

$z=\psi(\bar{z})$ étant la fonction inverse, l'équation différentielle (13) est remplacée par

$$\frac{dy}{dx}=\psi(\bar{z}(x,y)). \tag{33}$$

$\psi(z)$ est définie par la forme quadratique φ; elle s'exprime donc par une tangente, une tangente hyperbolique, ou une homographie, suivant que les points fixes ω, ω' sont imaginaires conjugués, réels, ou confondus. C'est ainsi que, pour les cercles, $z=\operatorname{tg}\bar{z}$, comme il avait été fait dans le mémoire les concernant. Les dérivées partielles p et q sont remplacées par

$$\bar{p}=\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=\frac{p}{\varphi(1,z)},\qquad \bar{q}=\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}=\frac{q}{\varphi(1,z)};$$

Z, P, Q sont remplacés par $\bar{Z}$, $\bar{P}$, $\bar{Q}$, avec

$$\bar{Z}=\int_{z_0}^{Z}\frac{dz}{\varphi(1,z)},\qquad \bar{P}=\frac{P}{\varphi(1,Z)},\qquad \bar{Q}=\frac{Q}{\varphi(1,Z)},$$

et les formules (21), (26) deviennent

$$X=x-\frac{2\bar{q}}{\varphi(\bar{q},\,-\bar{p})},\qquad Y=y+\frac{2\bar{p}}{\varphi(\bar{q},\,-\bar{p})}, \tag{34}$$

$$\bar{P}=-\bar{p},\qquad \bar{Q}=-\bar{q}. \tag{35}$$

(22) s'écrit encore

$$\psi(\bar{Z}) = -\frac{(\bar{q}\,\varphi'_{\bar{q}} + \bar{p}\,\varphi'_{-\bar{p}})\,\psi(\bar{z}) + 2\,\bar{p}\,\varphi'_{\bar{q}}}{\bar{q}\,\varphi'_{\bar{q}} + \bar{p}\,\varphi'_{-\bar{p}} + 2\,\bar{q}\,\varphi'_{-\bar{p}}\,\psi(\bar{z})}, \tag{36}$$

où φ représente $\varphi(\bar{q}, -\bar{p})$, et c'est cette équation qui définit $\bar{Z}$ en fonction de $\bar{z}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$.

Désignons par $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$ les dérivées partielles secondes de $\bar{z}$ par rapport à x, y, et par $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{T}$ celles de $\bar{Z}$ par rapport à X, Y.

La différentiation de (35) donne

$$\begin{cases} \bar{R}\,dX + \bar{S}\,dY = -\bar{r}\,dx - \bar{s}\,dy, \\ \bar{S}\,dX + \bar{T}\,dY = -\bar{s}\,dx - \bar{t}\,dy, \end{cases}$$

donc, en particulier, grâce à (34),

$$\begin{cases} \bar{R}\left[1 - 2\frac{\bar{s}}{\varphi} + 2\,\frac{\bar{q}}{\varphi^2}(\bar{s}\,\varphi'_{\bar{q}} - \bar{r}\,\varphi'_{-\bar{p}})\right] + \bar{S}\left[2\frac{\bar{r}}{\varphi} - 2\,\frac{\bar{p}}{\varphi^2}(\bar{s}\,\varphi'_{\bar{q}} - \bar{r}\,\varphi'_{-\bar{p}})\right] = -\bar{r}, \\ \bar{R}\left[\quad -2\,\frac{\bar{t}}{\varphi} + 2\frac{\bar{q}}{\varphi^2}(\bar{t}\,\varphi'_{\bar{q}} - \bar{s}\,\varphi'_{-\bar{p}})\right] + \bar{S}\left[1 + 2\,\frac{\bar{s}}{\varphi} - 2\,\frac{\bar{p}}{\varphi^2}(\bar{t}\,\varphi'_{\bar{q}} - \bar{s}\,\varphi'_{-\bar{p}})\right] = -\bar{s}. \end{cases} \tag{37}$$

Le déterminant δ des coefficients de ce système d'équations en $\bar{R}$, $\bar{S}$ n'est pas nul si les deux points focaux décrivent des domaines à deux dimensions. Il est donné par

$$\varphi^2\delta = \varphi^2 + 4(\bar{r}\,\bar{t} - \bar{s}^2) + 2(\bar{s}\,\varphi'_{\bar{q}} - \bar{r}\,\varphi'_{-\bar{p}})\left(\bar{q} + 2\frac{\bar{q}\,\bar{s} - \bar{p}\,\bar{t}}{\varphi}\right) - 2(\bar{t}\,\varphi'_{\bar{q}} - \bar{s}\,\varphi'_{-\bar{p}})\left(\bar{p} + 2\,\frac{\bar{q}\,\bar{r} - \bar{p}\,\bar{s}}{\varphi}\right),$$

soit, après un calcul simple,

$$\varphi^2\delta = \varphi^2 - 2(\bar{q}\,\varphi'_{-\bar{p}}\,\bar{r} + \bar{p}\,\varphi'_{\bar{q}}\,\bar{t}) + 2(\bar{q}\,\varphi'_{\bar{q}} + \bar{p}\,\varphi'_{-\bar{p}})\,\bar{s} - 4(\bar{r}\,\bar{t} - \bar{s}^2). \tag{38}$$

La résolution de (37) donne ainsi les formules remarquables

$$\begin{cases} \delta\,\bar{R} = -\bar{r} + 2\,\bar{p}\,\varphi'_{\bar{q}}\,\dfrac{\bar{r}\,\bar{t} - \bar{s}^2}{\varphi^2}, \\ \delta\,\bar{S} = -\bar{s} + (\bar{q}\,\varphi'_{\bar{q}} + \bar{p}\,\varphi'_{-\bar{p}})\,\dfrac{\bar{r}\,\bar{t} - \bar{s}^2}{\varphi^2}, \\ \delta\,\bar{T} = -\bar{t} + 2\,\bar{q}\,\varphi'_{-\bar{p}}\,\dfrac{\bar{r}\,\bar{t} - \bar{s}^2}{\varphi^2}; \end{cases} \tag{39}$$

la dernière se déduit évidemment de la première par symétrie. On en déduit en particulier

$$\delta^2(\bar{R}\,\bar{T} - \bar{S}^2) = (\bar{r}\,\bar{t} - \bar{s}^2)\left[1 - 2\,\frac{\bar{q}\,\varphi'_{-\bar{p}}\,\bar{r} + \bar{p}\,\varphi'_{\bar{q}}\,\bar{t}}{\varphi^2} + 2\,\frac{\bar{q}\,\varphi'_{\bar{q}} + \bar{p}\,\varphi'_{-\bar{p}}}{\varphi^2}\,\bar{s} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\bar{q}\,\varphi'_{\bar{q}} + \bar{p}\,\varphi'_{-\bar{p}})^2 - 4\,\bar{p}\,\bar{q}\,\varphi'_{\bar{q}}\,\varphi'_{-\bar{p}}}{\varphi^4}(\bar{r}\,\bar{t} - \bar{s}^2)\right];$$

le dernier numérateur est $(\bar{q}\varphi'_{\bar{q}} - \bar{p}\varphi'_{-\bar{p}})^2 = 4\varphi^2$, donc le crochet n'est pas autre chose que δ, et il reste

$$\delta(\bar{R}\bar{T} - \bar{S}^2) = \bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2. \tag{40}$$

Par réciprocité, le déterminant formé avec $\bar{P}$, Q, $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{T}$ comme δ l'est avec $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}, \bar{t}$ est l'inverse de δ.

Chapitre III

Les congruences de coniques C dont l'un des points focaux reste sur une courbe

§ 13. Nous désignons par A' le point focal dont l'ensemble des positions est sur une courbe Γ, tandis que A dépend toujours de deux paramètres, et est associé, avec sa tangente focale D, à une certaine équation différentielle (13; II). Lorsqu'on se donne la congruence de coniques (1; II), les coniques de cette congruence qui admettent un point donné A pour point focal s'obtiennent en écrivant que A vérifie (1; II) et (3'; II), et en résolvant ce système d'équations d'inconnues α, β. Chaque solution fournit une valeur $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial f}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = z(x, y)$, et c'est une de ces équations, prolongée par continuité, que l'on considère.

Nous pouvons considérer la correspondance qui existe ici entre A, D et les éléments analogues A', D' comme un cas limite de la transformation de contact étudiée au paragraphe 10, où les fonctions $X(x, y, z, p, q)$ et $Y(x, y, z, p, q)$ sont liées. (28; II), ou $dZ = P\,dX + Q\,dY$, montre que Z est également lié à X et Y; en particulier, les droites D' associées à un même point A' coïncident; les coniques (C) qui passent par A', et qui sont naturellement tangentes à D', forment donc un faisceau tangent en A'. Ce premier résultat s'exprime par le

Théorème. *Les équations différentielles* $\dfrac{dy}{dx} = z(x, y)$, *dont les coniques* (C) *osculatrices à l'intégrale générale ont l'ensemble de leurs deuxièmes points focaux sur une courbe unique* Γ, *sont les équations dont la congruence des coniques* (C) *est formée par une simple infinité de faisceaux tangents.*

Les fonctions $z(r, y)$ correspondantes sont les intégrales de l'équation de Monge-Ampère fournie par $\dfrac{D(X, Y)}{D(x, y)} = 0$. En remplaçant l'inconnue z par la variable $\bar{z}$ du paragraphe 12, l'expression de ce déterminant fonctionnel δ est donnée par (38; II), et l'équation en question est

$$\text{(1)} \qquad \varphi(\bar{q}, -\bar{p})^2 - 2(\bar{q}\varphi'_{-\bar{p}}\bar{r} + \bar{p}\varphi'_{\bar{q}}\bar{t}) + 2(\bar{q}\varphi'_{\bar{q}} + \bar{p}\varphi'_{-\bar{p}})\bar{s} - 4(\bar{r}\bar{t} - \bar{s}^2) = 0.$$

D'après la façon même dont elle est formée, cette équation admet les 3 intégrales intermédiaires

$$X = \text{const.}, \quad Y = \text{const.}, \quad \bar{\bar{Z}} \text{ ou } Z = \text{const.}$$

et l'on sait que ses intégrales s'obtiennent par de simples élimination[1]. Toute intégrale vérifie deux équations aux derivées partielles du premier ordre, par exemple

$$\text{(2)} \qquad X = G(\bar{\bar{Z}}), \qquad Y = H(\bar{\bar{Z}}),$$

si l'on admet qu'il ne s'agit pas d'une intégrale où $Z = \text{const.}$ G et H sont deux fonctions arbitraires, qui déterminent le lieu Γ des points A', et, en chacun de ces points, le pente Z de la tangente focale D' associée. On sait également que

$$d\bar{\bar{Z}} = -\bar{p}\,dX - \bar{q}\,dY = -[\bar{p}G'(\bar{\bar{Z}}) + \bar{q}H'(\bar{\bar{Z}})]\,d\bar{\bar{Z}},$$

donc, $d\bar{\bar{Z}}$ n'étant pas nul,

$$\text{(3)} \qquad \bar{p}G'(\bar{\bar{Z}}) + \bar{q}H'(\bar{\bar{Z}}) + 1 = 0.$$

Avec cette restriction, l'intégrale générale $\bar{z}(x, y)$ de (1) s'obtient en éliminant $\bar{p}$ et $\bar{q}$ entre les trois équations (2), (3), compte tenu des expressions de X, Y, $\bar{\bar{Z}}$ que fournissent (34; II) et (36; II) en fonction de $x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}$.

Si Z est une constante Z_0, on peut prendre, par exemple, $Y = G(X)$, qui définit Γ. $dZ = 0$ donne alors

$$p + qG'(X) = 0,$$

et on obtient $z(x, y)$ en éliminant p et q entre les trois équations

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} y + 2p\dfrac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, -p)} = G\left(x - 2q\dfrac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, -p)}\right), \\ p + qG'\left(x - 2q\dfrac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, -p)}\right) = 0, \\ (q\varphi'_q + p\varphi'_{-p})(z + Z_0) + 2q\varphi'_{-p}zZ_0 + 2p\varphi'_q = 0, \end{cases}$$

formées en utilisant (21; II) (22; II). On peut d'ailleurs observer que la deuxième de ces équations permet d'écrire la première

[1] Cf. Goursat, «*Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*», t. I, p. 62–71.

$$y - 2q \frac{\varphi(1, z)}{\varphi(q, -p)} G'(X) - G(X) = 0,$$

ou

$$y + G'(X)(X - x) - G(X) = 0. \tag{5}$$

Il suffit donc d'éliminer X entre (5) et ce que devient la troisième équation (4), homogène en p, q, lorsqu'on substitue à p et q les quantités proportionnelles $G'(X)$, -1.

§ **14.** La solution analytique du même problème conduit à d'intéressants résultats. Soit

$$X = X(\alpha), \quad Y = Y(\alpha) \tag{6}$$

le lieu Γ du point focal A'. α peut être choisi pour l'un des paramètres de la congruence, et la condition que (I; II) passe par (6) définit le coefficient c en fonction de $a(\alpha, \beta)$ et $b(\alpha, \beta)$ par

$$c = -\tfrac{1}{2}\varphi(X(\alpha), Y(\alpha)) - a(\alpha, \beta)\, X(\alpha) - b(\alpha, \beta)\, Y(\alpha). \tag{7}$$

En posant

$$U = \frac{\partial f(X, Y)}{\partial X} X'(\alpha) + \frac{\partial f(X, Y)}{\partial Y} Y'(\alpha) = \tfrac{1}{2} \frac{d\varphi(X(\alpha), Y(\alpha))}{d\alpha} + a X'(\alpha) + b\, Y'(\alpha), \tag{8}$$

les déterminants A, B du paragraphe 6 ont les expressions

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial \alpha} & -U - X\dfrac{\partial a}{\partial \alpha} - Y\dfrac{\partial b}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial b}{\partial \beta} & -X\dfrac{\partial a}{\partial \beta} - Y\dfrac{\partial b}{\partial \beta} \end{vmatrix} = U\frac{\partial b}{\partial \beta} + CX, \tag{9}$$

$$B = \begin{vmatrix} -U - X\dfrac{\partial a}{\partial \alpha} - Y\dfrac{\partial b}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial a}{\partial \alpha} \\ -X\dfrac{\partial a}{\partial \beta} - Y\dfrac{\partial b}{\partial \beta} & \dfrac{\partial a}{\partial \beta} \end{vmatrix} = -U\frac{\partial a}{\partial \beta} + CY; \tag{9'}$$

et l'équation qui exprime que la droite focale passe en A' s'écrit

$$\left(U\frac{\partial b}{\partial \beta} + CX\right)\frac{\partial f(X, Y, 1)}{\partial X} + \left(-U\frac{\partial a}{\partial \beta} + CY\right)\frac{\partial f(X, Y, 1)}{\partial Y} + C\frac{\partial f(X, Y, t)}{\partial t} = 0, \quad t = 1.$$

Le coefficient de C est

$$X\frac{\partial f}{\partial X} + Y\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial t} = 2f(X, Y, 1) = 0,$$

et il reste

$$\left(\frac{\partial b}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial X}-\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial Y}\right)U=0. \tag{10}$$

Si U était identiquement nul, la dérivation de $U=0$ par rapport à β donnerait

$$\frac{\partial a}{\partial \beta}X'(\alpha)+\frac{\partial b}{\partial \beta}Y'(\alpha)=0;$$

A' n'étant qu'exceptionnellement singulier sur Γ, il existerait un facteur θ tel que l'on ait

$$\frac{\partial b}{\partial \beta}=\theta X'(\alpha),\qquad \frac{\partial a}{\partial \beta}=-\theta Y'(\alpha),$$

et grâce auquel le facteur de U dans (10) devient

$$\theta\left[\frac{\partial f}{\partial X}X'(\alpha)+\frac{\partial f}{\partial Y}Y'(\alpha)\right]=\theta U=0.$$

Il suffit donc de remplacer (10) par la seule condition

$$\frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial Y}-\frac{\partial b}{\partial \beta}\frac{\partial f}{\partial X}\equiv\frac{\partial a}{\partial \beta}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(X,Y)}{\partial Y}+b\right]-\frac{\partial b}{\partial \beta}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(X,Y)}{\partial Y}+a\right]=0. \tag{11}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial X}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial Y}$ ne dépendant pas de β, cette équation exprime que la pente

$$-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial X}}{\dfrac{\partial f}{\partial Y}}=-\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial X}+a}{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial Y}+b}$$

de la tangente focale D' en A' ne dépend pas de β, donc que toutes les coniques (C) qui passent en A' sont tangentes en ce point; c'est ce que nous avons déjà démontré au paragraphe 13. En désignant par $-\frac{1}{r(\alpha)}$ la pente de D', on a

$$\frac{\partial b}{\partial \beta}=r(\alpha)\frac{\partial a}{\partial \beta} \tag{12}$$

d'où résulte

$$b=r(\alpha)a+s(\alpha); \tag{13}$$

observons que l'on a également

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial Y}+b=r(\alpha)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial X}+a\right),$$

donc

$$s(\alpha)=\frac{1}{2}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial X}-\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right). \tag{14}$$

Grâce à la dérivation de (7), on a

$$\frac{\partial c}{\partial\beta}=-\frac{\partial a}{\partial\beta}X-\frac{\partial b}{\partial\beta}Y, \tag{15}$$

et cette relation, jointe à (11), entraîne l'égalité des 3 rapports

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial X}}{\dfrac{\partial a}{\partial\beta}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial Y}}{\dfrac{\partial b}{\partial\beta}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial c}{\partial\beta}}=\lambda. \tag{16}$$

Pour écrire l'équation différentielle (6; II) des focales, formons d'abord les expressions de L, M, N. Grâce à (9) et (9′), il vient

$$L=f'_A(A,B,C)=f'_A\left(U\frac{\partial b}{\partial\beta}+CX,\ -U\frac{\partial a}{\partial\beta}+CY,\ C\right)=U\frac{\partial f(b'_\beta,\ -a'_\beta,\ 0)}{\partial b'_\beta}+C\frac{\partial f(X,Y,1)}{\partial X},$$

$$M=f'_B(A,B,C)=f'_B\left(U\frac{\partial b}{\partial\beta}+CX,\ -U\frac{\partial a}{\partial\beta}+CY,\ C\right)=U\frac{\partial f(b'_\beta,\ -a'_\beta,\ 0)}{\partial(-a'_\beta)}+C\frac{\partial f(X,Y,1)}{\partial Y},$$

$$N=f'_C(A,B,C)=f'_C\left(U\frac{\partial b}{\partial\beta}+CX,\ -U\frac{\partial a}{\partial\beta}+CY,\ C\right)=U\frac{\partial f(b'_\beta,\ -a'_\beta,\ 0)}{\partial t}+C\frac{\partial f(X,Y,1)}{\partial t},$$

ou, compte tenu de (12) et (13) pour l'expression de N,

$$\left\{\begin{aligned} L&=\frac{U}{2}\,\frac{\partial\varphi(b'_\beta,\ -a'_\beta)}{\partial b'_\beta}+C\,f'_X(X,Y,1),\\ M&=\frac{U}{2}\,\frac{\partial\varphi(b'_\beta,\ -a'_\beta)}{\partial(-a'_\beta)}+C\,f'_Y(X,Y,1),\\ N&=-s\,U\,a'_\beta \qquad\qquad +C\,f'_t(X,Y,1).\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Grâce à (16), il vient alors

$$L\frac{\partial b}{\partial\beta}-M\frac{\partial a}{\partial\beta}=\frac{U}{2}\left[\frac{\partial\varphi(b'_\beta,\ -a'_\beta)}{\partial b'_\beta}b'_\beta-\frac{\partial\varphi(b'_\beta,\ -a'_\beta)}{\partial(-a'_\beta)}a'_\beta\right]=U\varphi(b'_\beta,\ -a'_\beta);$$

grâce à (15) et $LX+MY+N=0$, on a de même

$$M\frac{\partial c}{\partial\beta}-N\frac{\partial b}{\partial\beta}=X\left(L\frac{\partial b}{\partial\beta}-M\frac{\partial a}{\partial\beta}\right)=U\varphi(b'_\beta,\ -a'_\beta)\,X,$$

$$N\frac{\partial a}{\partial\beta}-L\frac{\partial c}{\partial\beta}=Y\left(L\frac{\partial b}{\partial\beta}-M\frac{\partial a}{\partial\beta}\right)=U\varphi(b'_\beta,\ -a'_\beta)\,Y.$$

En posant

$$\nu = L\frac{\partial b}{\partial \alpha} - M\frac{\partial a}{\partial \alpha},$$

et en dérivant (7) par rapport à α, des calculs semblables donnent

$$M\frac{\partial c}{\partial \alpha} - N\frac{\partial b}{\partial \alpha} = -M\left(U + X\frac{\partial a}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial b}{\partial \alpha}\right) - N\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \nu X - UM,$$

$$N\frac{\partial a}{\partial \alpha} - L\frac{\partial c}{\partial \alpha} = N\frac{\partial a}{\partial \alpha} + L\left(U + X\frac{\partial a}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial b}{\partial \alpha}\right) = \nu Y + UL.$$

L'équation différentielle des focales devient ainsi

$$f[U\varphi X\,d\beta + (\nu X - UM)\,d\alpha,\;\; U\varphi Y\,d\beta + (\nu Y + UL)\,d\alpha,\;\; U\varphi\,d\beta + \nu\,d\alpha] = 0,$$

où φ désigne $\varphi(b'_\beta, -a'_\beta)$.

Comme il se doit, le coefficient de $d\beta^2$ est nul, puisque l'une des variétés focales est $d\alpha = 0$, qui exprime que A' est fixe. Le coefficient de $d\alpha\,d\beta$ est

$$U\varphi[(\nu X - UM)f'_X(X, Y, 1) + (\nu Y + UL)f'_Y(X, Y, 1) + \nu f'_t(X, Y, 1)] =$$

$$= U^2\varphi(Lf'_Y - Mf'_X) = \lambda U^2\varphi\left(L\frac{\partial b}{\partial \beta} - M\frac{\partial a}{\partial \beta}\right) = \lambda U^3\varphi^2.$$

Celui de $d\alpha^2$ est

$$f(\nu X - UM, \nu Y + UL, \nu) = \nu U(Lf'_Y - Mf'_X) + U^2 f(-M, L, 0) = \lambda\nu U^2\varphi + \tfrac{1}{2}U^2\varphi(M, -L);$$

grâce à (16) et (17),

$$\varphi(M, -L) = \varphi\left(\frac{U}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial(-a'_\beta)} + \lambda C b'_\beta,\; -\frac{U}{2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial b'_\beta} - \lambda C a'_\beta\right) = \frac{U^2}{4}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial(-a'_\beta)},\; -\frac{\partial\varphi}{\partial b'_\beta}\right) + \lambda^2 C^2\varphi,$$

ou, à l'aide de l'identité

$$\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y},\; -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \equiv 4(ln - m^2)\,\varphi(x, y),$$

$$\varphi(M, -L) = (ln - m^2)\,U^2\varphi + \lambda^2 C^2\varphi.$$

Si $U^2\varphi$ était identiquement nul, l'équation différentielle des variétés focales s'évanouirait, et la congruence des coniques serait singulière. Ce cas étant naturellement écarté, nous pouvons diviser cette équation par $U^2\varphi$, et l'équation de la variété focale associée à A est

$$2\lambda U\varphi\,d\beta + [(ln - m^2)\,U^2 + \lambda^2 C^2 + 2\lambda\nu]\,d\alpha = 0. \tag{18}$$

Lorsqu'on se donne le lieu Γ de A', et la tangente focale D' associée à chaque point A', X, Y, r sont des fonctions connues de α, ainsi que s d'après (14). Il vient alors

$$\varphi = \varphi(b'_\beta, -a'_\beta) = \varphi(r, -1)\, a'^2_\beta,$$
$$U = f'_X X'(\alpha) + f'_Y Y'(\alpha) = f'_X (X' + r Y'),$$
$$C = (r a'_\alpha - b'_\alpha)\, a'_\beta = -(a r' + s')\, a'_\beta,$$

où $r' = r'(\alpha)$, $s' = s'(\alpha)$. Il reste à préciser la valeur de ν; (16) et (17) permettent d'écrire

$$\nu = L b'_\alpha - M a'_\alpha = \lambda C (a'_\beta b'_\alpha - b'_\beta a'_\alpha) + \frac{U}{2}\left(b'_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial b'_\beta} - a'_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial(-a'_\beta)}\right) =$$
$$= U\,[l b'_\alpha b'_\beta - m (a'_\alpha b'_\beta + b'_\alpha a'_\beta) + n a'_\alpha a'_\beta] - \lambda C^2 =$$
$$= U a'_\beta\,[l r b'_\alpha - m (r a'_\alpha + b'_\alpha) + n a'_\alpha] - \lambda C^2.$$

Le remplacement de b'_α par $r a'_\alpha + r' a + s'$ donne encore

$$\nu = U a'_\beta\,[\varphi(r, -1)\, a'_\alpha + (l r - m)(r' a + s')] - \lambda C^2.$$

Le coefficient de $d\alpha$ dans (18) devient

$$(l n - m^2)\, U^2 + 2 \lambda U a'_\beta\,[\varphi(r, -1)\, a'_\alpha + (l r - m)(r' a + s')] - \lambda^2 C^2 =$$
$$= f'^2_X \{(l n - m^2)(X' + r Y')^2 + 2\,[\varphi(r, -1)\, a'_\alpha + (l r - m)(r' a + s')](X' + r Y') - (r' a + s')^2\}.$$

Après division par f'^2_X, qui n'est pas nul si la congruence n'est pas singulière, (18) s'écrit enfin

$$(19) \quad 2 \varphi(r, -1)(X' + r Y')\, a'_\beta\, d\beta + \{(l n - m^2)(X' + r Y')^2 + 2\,[\varphi(r, -1)\, a'_\alpha +$$
$$+ (l r - m)(r' a + s')] \times (X' + r Y') - (r' a + s')^2\}\, d\alpha = 0.$$

C'est la forme générale, où l'on n'a pas précisé le choix du paramètre β. a'_β n'est pas identiquement nul, sans quoi $a'_\beta = b'_\beta = c'_\beta = 0$, et il n'y aurait pas de congruence. On peut donc faire $\beta = a$. (19) prend alors la forme simple

$$(20) \quad 2 \varphi(r, -1)(X' + r Y') \frac{d\beta}{d\alpha} + (l n - m^2)(X' + r Y')^2 + 2 (l r - m)(X' + r Y')(r' \beta + s') -$$
$$- (r' \beta + s')^2 = 0,$$

L'inconnue est la fonction $\beta(\alpha)$, et l'on voit que *sa détermination relève d'une équation de Riccati*. C'est le fait remarquable que met en évidence cette méthode, et deux conséquences intéressantes vont en découler.

§ 15. Tout d'abord, la pente de la droite focale AA' est $-\dfrac{L}{M}$: en faisant toujours $a=\beta$, $b'_\beta=r$, il vient

$$\frac{M}{L}=\frac{Cf'_Y+f'_X(X'+rY')(mr-n)}{Cf'_X+f'_X(X'+rY')(lr-m)}=\frac{Cr+(X'+rY')(mr-n)}{C+(X'+rY')(lr-m)},$$

tandis que $C=-(r'\beta+s')$. Cette pente est donc une fonction homographique de β, et la propriété caractéristique de l'équation de Riccati nous fournit le

Théorème I. *Si A_1, A_2, A_3, A_4 sont 4 points focaux associés à un même point focal A', le birapport des 4 droites focales $A'A_i$ $(i=1,2,3,4)$ est constant lorsque A' décrit Γ en même temps que les A_i décrivent leurs focales.*

Rappelons que chacune des 4 coniques (C_i) du faisceau de point double A' est osculatrice à son enveloppe en A_i, dans ce déplacement. Bien entendu, nous n'avons considéré $t=0$ comme étant la droite à l'infini que pour simplifier le langage, et les propriétés obtenus ne dépendent pas de cette hypothèse.

D'autre part, dans tout système de coordonnées trilinéaires (x, y, t) avec $t=1$, la courbure d'une courbe en un point est le produit d'une fonction déterminée de x, y, y'_x et de y''_{x^2}. Pour une conique (C), en A',

$$y'=-\frac{f'_X}{f'_Y}=-\frac{1}{r(\alpha)},$$

et y'' est donné par

$$f''_{X^2}+2f''_{XY}y'+f''_{Y^2}y'^2+f'_Yy''=0.$$

Ça s'écrit

$$\varphi\left(1,\ -\frac{1}{r}\right)+rf'_Xy''\equiv\frac{1}{r^2}\varphi(r,\ -1)+rf'_Xy''=0,$$

donc

$$y''=-\frac{1}{r^3}\varphi(r,\ -1)\frac{1}{\frac{1}{2}\varphi'_X+\beta}.$$

y'' est le seul terme de l'expression de la courbure qui contienne β, alors que les autres termes sont les mêmes pour toutes les coniques du faisceau en A'. Ainsi, cette courbure est une fonction homographique de β, et l'on a le

Théorème II. *Les courbures en A' de 4 coniques (C_i) du faisceau de point double A' ont un birapport constant quand celles-ci varient avec A' de manière à rester osculatrices à leurs enveloppes respectives.*

§ 16. Déterminons enfin les congruences de coniques (C) dont les deux points focaux décrivent chacun une courbe. Soit Γ le lieu du premier point focal A, et

A_0, A_1 deux positions particulières de ce point. Nous savons que toutes les coniques de la congruence qui passent en A_0 forment un faisceau tangent en A_0 à un droite D_0; soit de même D_1 la droite associée à A_1. A chaque point focal A', dont le lieu est également une courbe Γ', est associée une droite D' à laquelle sont tangentes toutes les coniques de la congruence qui passent par A'; l'une d'elles appartient au faisceau de point double A_0, l'autre au faisceau de point double A_1. Il en résulte que Γ' est le lieu des points de contact des coniques de ces deux faisceaux qui sont tangentes entre elles.

Lorsque les deux points fixes ω, ω' des coniques (C) sont distincts, une transformation projective peut les placer aux points cycliques. On est ainsi ramené à deux faisceaux de cercles tangents. Une inversion par rapport au sommet A_1 de l'un de ces faisceaux transforme ce faisceau en droites parallèles; on voit alors tout de suite que les points de contact avec les cercles de l'autre faisceau décrivent deux droites rectangulaires se coupant au sommet A_0 de ce faisceau de vrais cercles. Abstraction faite de l'inversion, on en déduit que le lieu obtenu avec deux faisceaux de cercles tangents se compose de deux cercles orthogonaux passant par les deux sommets A_0, A_1. Enfin, avec deux faisceaux de coniques (C), le lieu se compose de deux coniques (C) passant par A_0 et A_1; on voit en outre que les tangentes à ces deux coniques, en chacun de ces sommets, sont conjugées par rapport aux droites qui joignent ce sommet à ω et ω'.

Le cas où ω et ω' sont confondus s'en déduit par un passage à la limite. Des deux tangentes en A_0, l'une devient $A_0\omega$, et la conique correspondante, étant également tangente en ω à $t=0$, se décompose en les deux droites ωA_0, ωA_1. C'est la conique obtenue par la limite de l'autre conique qui est le lieu convenable.[1]

Ceci établi, désignons par Γ l'une des deux coniques, ou la seule vraie conique, qui constitue le lieu de A'; elle passe par A_0 et A_1, quels que soient ces deux points, donc c'est aussi le lieu du point focal A. Nous avons ainsi démontré que, en outre des congruences singulières, *les congruences de coniques* (C) *dont les deux points focaux*

[1] L'étude analytique de la condition de tangence établit, entre les paramètres des deux coniques dans leurs faisceaux respectifs, une relation biquadratique qui se décompose en deux relations homographiques. Cette décomposition s'explique par la solution obtenue avec les droites, parallèles à une direction donnée, tangentes à un faisceau de cercles tangents; le lieu étant formé par deux droites L, L', la considération d'une de ces droites, soit L, établit une correspondance homographique entre le cercle C du faisceau qui passe par un point de L, et la droite de l'autre faisceau, qui passe par le même point, et y est alors tangente à C. D'autre part, chacune des deux relations homographiques fournit un lieu du point de contact qui est du 4^e^ degré, mais ne peut être rien d'autre qu'une conique double. Quand ω' vient en ω, l'une de ces coniques doubles devient le faisceau double formé par les droites ωA_0, ωA_1 prises deux fois, et l'autre est une vraie conique double passant par A_0 et A_1.

décrivent deux courbes sont celles dont les deux points focaux décrivent une même conique Γ *de cette famille.*

Une telle congruence est une simple infinité de faisceaux de coniques (C) tangentes, dont le point de contact A décrit Γ, mais dont il reste à préciser la loi de variation de la tangente de contact D associée à A. En supposant que ω et ω' soient distincts, revenons aux congruences de cercles. Γ est un cercle, et les droites D sont les tangentes aux différents cercles (C) du faisceau, défini par un élément de contact particulier $A_1 D_1$, au point A, autre que A_1, commun à (C) et Γ. On observe tout de suite que ces droites D coupent Γ sous le même angle que D_1 et enveloppent le cercle tangent à D_1 et concentrique à Γ. La réciproque est immédiate. En revenant au cas général, et en passant à la limite pour le cas où $\omega' = \omega$, nous pouvons ainsi énoncer le

Théorème. *Les congruences non singulières de conique* (C), *dont les deux points focaux décrivent deux courbes, sont les congruences formées par une simple infinité de faisceaux tangents, dont le point de contact* A *décrit une conique* Γ *de la famille des* (C), *tandis que la tangente de contact* AD *enveloppe une conique bitangente à* Γ *en* ω, ω'; *cette bitangence devient un contact du troisième ordre en* ω *si* $\omega = \omega'$.