ESPACES DE DIRICHLET

I. LE CAS ÉLÉMENTAIRE

PAR

A. BEURLING et J. DENY [1]

The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J.

Introduction

Cet article est une introduction à l'étude d'une classe d'espaces fonctionnels dont nous allons donner la définition générale.

On appelle *contraction* du plan complexe C toute transformation T qui diminue la distance : $|T\zeta_1 - T\zeta_2| \leqslant |\zeta_1 - \zeta_2|$ pour tout couple de nombres complexes ζ_1 et ζ_2; une contraction est dite *normale* si elle conserve l'origine de C. L'ensemble des points de C invariants par une contraction normale est évidemment convexe et fermé, et il contient l'origine.

La *projection* T_E sur un ensemble convexe fermé E de C contenant l'origine, c'est-à-dire la transformation qui, à tout point ζ de C fait correspondre l'unique point de E dont la distance à ζ soit minimum, est évidemment une contraction normale; la projection $T_{\mathcal{J}}$ sur le segment unité $0 \leqslant \operatorname{Re} \zeta \leqslant 1$ de l'axe réel jouera un rôle particulièrement important ($\operatorname{Re} \zeta$ désigne la partie réelle de ζ), mais on utilisera aussi la contraction $\zeta \to \operatorname{Re}^+ \zeta$ qui est la projection sur l'axe réel positif, et la contraction $\zeta \to |\zeta|$ qui n'est pas une projection, mais laisse invariant l'axe réel positif.

Soit X un espace de Hausdorff localement compact, sur lequel il existe une mesure de Radon positive ξ partout dense (tout ouvert non vide de X est de mesure strictement positive pour ξ); on désigne par C l'espace des fonctions continues à valeurs complexes et à support compact.

---

(1) This research was partly supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under contract No. AF 18 (600)-1109. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government.

Soit $D = D(X, \xi)$ un espace hilbertien complet de fonctions définies presque partout (pour la mesure ξ) sur X, à valeurs complexes, sommables (pour la mesure ξ) sur tout compact de X. On dira que D *est un espace de Dirichlet si les trois axiomes suivants sont vérifiés :*

(a) *Pour tout compact K de X il existe un nombre fini $A(K)$ tel que*

$$\int_K |u(x)|\, d\xi(x) \leqslant A(K)\, \|u\|$$

pour tout élément $u \in D$.

(b) $\mathcal{C} \cap D$ *est dense dans* $\mathcal{C}$ *et dans* D.

(c) *Pour toute contraction normale T du plan complexe et tout élément $u \in D$, on a $Tu \in D$ et $\|Tu\| \leqslant \|u\|$.*

L'espace de Dirichlet « classique » est obtenu de la manière suivante; soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, indéfiniment dérivables, à support compact dans un domaine ω de R^m; la racine carrée de l'intégrale de Dirichlet

$$\|u\|^2 = \int |\operatorname{grad} u(x)|^2\, dx$$

est une norme hilbertienne sur $\mathcal{D}$; muni de cette norme, $\mathcal{D}$ n'est pas complet, mais si m est supérieur à 2, ou, pour $m \leqslant 2$, si le complémentaire de ω n'est pas « trop petit », $\mathcal{D}$ peut être complété en lui ajoutant des fonctions convenables, définies presque partout dans ω; l'espace obtenu satisfait aux trois axiomes précédents (X étant le domaine ω et ξ la mesure de Lebesgue sur ω).

On sait que l'espace de Dirichlet classique $\hat{\mathcal{D}}_\omega$ est engendré par les potentiels de Green d'énergie finie; ces potentiels peuvent être définis directement, sans utiliser explicitement le « noyau de Green »; ce sont les fonctions $u \in \hat{\mathcal{D}}_\omega$ telles qu'il existe une mesure de Radon μ sur ω satisfaisant à;

$$(u, \varphi) = \int \bar{\varphi}\, d\mu \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{C} \cap \hat{\mathcal{D}}_\omega,$$

(u, φ) désignant le produit scalaire des éléments u et φ de $\hat{\mathcal{D}}_\omega$. Une telle fonction u est appelée *potentiel engendré par* μ. Cette définition s'étend sans modification à tout espace de Dirichlet D. L'opérateur linéaire Δ qui, à tout potentiel $u \in D$, associe la mesure μ qui engendre ce potentiel possède des propriétés remarquables; on l'appellera le *Laplacien généralisé* associé à l'espace D, bien que, dans le cas classique, il s'agisse du Laplacien ordinaire multiplié par un facteur négatif.

L'étude générale des espaces de Dirichlet peut donc être considérée comme un exposé de la théorie du potentiel sans noyau. Nous nous proposons de développer cette étude dans un autre travail, et de déterminer explicitement tous les espaces de

Dirichlet qui satisfont en outre à quelques conditions simples; un cas particulièrement intéressant est celui où X est un groupe abélien G, où ξ est la mesure de Haar sur G, et où la norme est invariante par les translations de G; il est alors possible de caractériser les transformées de Fourier des fonctions u de D : ce sont les fonctions de carré sommable par rapport à une fonction de poids « définie négative » réelle, dont l'inverse est intégrable sur tout compact.

Nous démontrerons dans le cas général un théorème d'équilibre et un théorème du balayage, et nous mettrons l'accent sur un résultat bien connu en électrostatique, qui mérite d'être exploité systématiquement dans des cas plus généraux, le *principe des condensateurs*, dont voici l'énoncé : étant donnés un compact E et un fermé F de X, il existe un potentiel réel u dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1, égales à 1 dans l'intérieur de E, égales à 0 dans l'intérieur de F, et dont la mesure associée est positive sur E, négative sur F, nulle hors de E et F.

Outre ces développements de théorie du potentiel, nous donnerons des applications à des théories variées, telles que celles de l'analyse harmonique, des équations aux dérivées partielles, des probabilités.

Nous avons jugé utile de mettre en évidence dans un article préliminaire quelques propriétés remarquables des espaces de Dirichlet en traitant un cas simple; celui où l'espace de base X n'a qu'un nombre fini de points, la mesure ξ étant constituée par la masse $+1$ en chacun de ces points.

Des exemples montreront que même ce cas élémentaire n'est peut-être pas sans intérêt, mais notre but est surtout de donner un aperçu des méthodes de démonstration que nous utiliserons dans le cas général. Cependant nous n'hésiterons pas à donner, lorsqu'elles sont particulièrement simples, des démonstrations qui ne s'appliquent qu'au cas particulier envisagé ici.

1. Formes de Dirichlet

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel (isomorphe à C^n) des fonctions u à valeurs complexes, définies sur l'ensemble X constitué par n points x_i $(i=1, 2, \dots, n)$. On note $\int u(x)\,dx$ la somme des nombres $u(x_i)$, qu'on peut considérer comme l'intégrale de la fonction u par rapport à la mesure constituée par la masse $+1$ en chacun des points $x_i \in X$. De même si A est une fonction définie sur l'espace produit $X \times X$, on note $\iint A(x, y)\,dx\,dy$ la somme des nombres $A(x_i, x_j)$. On désignera par la même lettre A l'opérateur linéaire qui, à toute $u \in \mathcal{E}$, associe la fonction

$$A\,u(x) = \int A(x, y)\,u(y)\,dy.$$

Soit H une forme hermitienne sur $\mathcal{E}$; on peut lui associer une fonction Δ, définie sur l'espace produit $X \times X$, telle que

$$H(u) = \iint \Delta(x, y)\, \bar{u}(x)\, u(y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Par définition la fonction Δ possède la symétrie hermitienne: $\Delta(x, y) = \overline{\Delta(y, x)}$ et l'opérateur Δ défini par $\Delta u(x) = \int \Delta(x, y)\, u(y)\, dy$ est hermitien; on l'appellera le *laplacien associé à la forme H.*

DÉFINITION 1. *La forme hermitienne H est appelée forme de Dirichlet si on a*

$$H(Tu) \leqslant H(u)$$

pour toute contraction normale T du plan complexe.

On peut dire, d'une façon imagée, qu'une forme de Dirichlet est une forme hermitienne « diminuée » par toutes les contractions normales du plan complexe.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une forme hermitienne D sur $\mathcal{E}$ soit une forme de Dirichlet, il faut et il suffit qu'elle ait l'expression suivante:*

$$D(u) = \iint S(x, y)\, |u(x) - u(y)|^2\, dx\, dy + \int m(x)\, |u(x)|^2\, dx, \tag{2}$$

où m et S sont des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$, uniquement déterminées si on suppose $S(x, y) = S(y, x)$, $S(x, x) = 0$ pour tout couple $x, y \in X$.

La condition est évidemment suffisante, par définition des contractions normales; montrons qu'elle est nécessaire : soit

$$D(u) = \iint \Delta(x, y)\, \bar{u}(x)\, u(y)\, dx\, dy$$

une forme de Dirichlet. La symétrie par rapport à l'axe réel étant une contraction normale du plan complexe, on a, pour toute $u \in \mathcal{E}$, $D(u) \leqslant D(\bar{u}) \leqslant D(u)$, d'où $D(u) = D(\bar{u})$, ce qui entraîne que les nombres $\Delta(x, y)$ sont tous réels.

Soient f_x et f_y les fonctions caractéristiques des ensembles réduits aux points *distincts* x et y; posons $u = f_x - f_y$, d'où $|u| = f_x + f_y$; écrivant $D(|u|) \leqslant D(u)$ il vient $2\Delta(x, y) \leqslant -2\Delta(x, y)$, donc les nombres réels $\Delta(x, y)$ sont $\leqslant 0$.

Posons
$$S(x, y) = -\tfrac{1}{2}\Delta(x, y) \quad \text{si } x \neq y$$
$$S(x, x) = 0 \quad \text{pour tout } x,$$
$$m(x) = \int \Delta(x, y)\, dy \quad \text{pour tout } x;$$

la forme D prend alors l'expression (2), et il reste seulement à prouver que les nombres $m(x)$ sont tous $\geqslant 0$, ce qui est aisé en appliquant l'inégalité $D(T_J u) < D(u)$ à la fonction u égale à $1+\varepsilon$ en x $(\varepsilon > 0)$, à 1 ailleurs (rappelons que T_J désigne la projection sur le segment unité du plan complexe).

Il résulte de l'expression (2) que toute forme de Dirichlet est définie ou semi-définie positive, ce qui est d'ailleurs une conséquence évidente du fait qu'elle est diminuée par la contraction $T(\zeta)=0$.

Voici un énoncé équivalent au théorème 1, qui sera utile par la suite:

REMARQUE 1. *Pour que l'opérateur linéaire Δ soit le laplacien associé à une forme de Dirichlet, il faut et il suffit que la fonction associée Δ, définie sur l'espace produit $X \times X$, soit à valeurs réelles et satisfasse à*

$$\Delta(x, y) \leqslant 0 \quad \textit{pour tout } x \neq y$$

$$\int \Delta(x, y)\, dy \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

On démontrera facilement le résultat suivant:

REMARQUE 2. *Pour qu'une forme hermitienne soit diminuée par la contraction $\zeta \to |\zeta|$ il faut et il suffit qu'elle ait l'expression* (2), *où les nombres $S(x, y)$ sont réels $\geqslant 0$ et les nombres $m(x)$ sont réels quelconques.*

Une telle forme n'est pas nécessairement une forme de Dirichlet, même si on la suppose définie ou semi-définie positive.

On va donner un énoncé plus précis du théorème 1; voici d'abord quelques notations préliminaires:

Soit E un ensemble fini, et soit A une fonction définie sur l'ensemble produit $E \times E$, à valeurs réelles $\geqslant 0$, et symétrique $[A(x, y) = A(y, x)]$; on dira que E est *A-connexe* si, pour tout couple $x, y \in E$, il existe une suite de points de E ayant x et y pour « extrémités », $x = z_0$, $z_1, \ldots, z_k = y$, tels que tous les nombres $A(z_{i-1}, z_i)$ soient strictement positifs $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Ajoutons maintenant un $(n+1)$-ème point x_0 à l'ensemble donné X, et appelons X^* le nouvel ensemble ainsi obtenu. Posons $S(x, x_0) = S(x_0, x) = \frac{1}{2} m(x)$ pour tout $x \in X$, $S(x_0, x_0) = 0$. Prolongeons à X^* toute fonction u de $\mathcal{E}$ en posant $u(x_0) = 0$. Dans ces conditions on peut énoncer:

THÉORÈME 1'. *Pour qu'une forme hermitienne D sur E soit une forme de Dirichlet, il faut et il suffit qu'elle ait l'expression suivante:*

$$D(u) = \int_{X^*} \int_{X^*} S(x, y)\, |u(x) - u(y)|^2\, dx\, dy$$

où S est une fonction à valeurs réelles $\geqslant 0$, symétrique, définie sur l'espace produit $X^* \times X^*$.

Pour que la forme D soit définie positive, il faut et il suffit que l'espace prolongé X^* soit S-connexe.

La démonstration est immédiate à partir des définitions et du théorème 1. Observons que si X^* n'est pas S-connexe, mais si X l'est, les seules fonctions qui annulent la forme D sont les constantes. Plus généralement, si X^* n'est pas S-connexe, les fonctions qui annulent D sont constantes sur chacune des « composantes S-connexes » de X^*; en particulier elles sont nulles sur la composante S-connexe du point x_0.

REMARQUE 3. *Soit D une forme de Dirichlet définie positive sur X; pour tout couple de points x et y de l'espace complété X^* on définit deux nombres:*

$$q(x, y) = \sup_{D(u) \leq 1} |u(x) - u(y)|$$

$$p(x, y) = \inf_{\mathfrak{S}} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{S(z_{i-1}, z_i)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

où $\mathfrak{S}$ désigne une suite de points $x = z_0, z_1, \ldots, z_k = y$ de X^*; ces fonctions p et q sont des distances sur X^*, satisfaisant à l'inégalité $q(x, y) \leqslant p(x, y)$ pour tout couple $x, y \in X^*$.

En effet p est une distance sur X^*, car p^2 en est évidemment une. D'autre part x et y étant donnés, il existe une fonction u de $\mathcal{E}$ avec $D(u) = 1$, telle que

$$q(x, y) = |u(x) - u(y)| \leqslant |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)| \leqslant q(x, z) + q(z, y)$$

pour tout $z \in X^*$; donc q est une distance sur X^*. Enfin si $\{x = z_0, z_1, \ldots, z_k = y\}$ est une suite de $k+1$ points de X^*, tous distincts, satisfaisant à

$$p^2(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{S(z_{i-1}, z_i)}$$

on a, pour toute fonction u de $\mathcal{E}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz):

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leqslant \sum_{i=1}^{k} |u(z_{i-1}) - u(z_i)| \\ &\leqslant \left[\sum_{i=1}^{k} S(z_{i-1}, z_i) \, |u(z_{i-1}) - u(z_i)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{S(z_{i-1}, z_i)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sqrt{D(u)} \, p(x, y) \end{aligned}$$

d'où résulte la proposition énoncée. Pour des raisons évidentes on peut appeler $q(x, y)$ la *distance extrémale* entre les points x et y.

Observons encore que les nombres $p(x, y)$ et $q(x, y)$ peuvent être définis dans le cas plus général d'une forme de Dirichlet qui n'est pas nécessairement définie positive, à condition d'admettre éventuellement la valeur $+\infty$; pour que la forme en question soit définie positive, il faut et il suffit qu'on ait $q(x, x_0) < \infty$ pour tout $x \in X$, ou, ce qui revient au même, $p(x, x_0) < \infty$ pour tout $x \in X$; cela exprime manifestement que X^* est S-connexe.

Terminons ce paragraphe par une définition:

DÉFINITION 2. *On appelle semi-norme (resp. norme) de Dirichlet la racine carrée d'une forme de Dirichlet quelconque (resp. définie positive). L'espace $\mathcal{E}$, muni d'une norme de Dirichlet, est appelé espace de Dirichlet sur X.*

2. Principe des condensateurs

On se donne une forme hermitienne *définie positive* sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}$:

$$H(u) = \iint \Delta(x, y)\, \bar{u}(x)\, u(y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Normé par $\|u\| = [H(u)]^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{E}$ est un espace hilbertien (unitaire) qu'on appellera H; on notera

$$(u, v) = \iint \Delta(x, y)\, \bar{v}(x)\, u(y)\, dx\, dy$$

le produit scalaire associé à la norme.

On appellera Δ le laplacien associé à H; rappelons qu'il est défini par

$$\Delta u(x) = \int \Delta(x, y)\, u(y)\, dy.$$

DÉFINITION 3. *On dit que le principe des condensateurs est satisfait si, quels que soient les sous-ensembles disjoints E (non vide) et F de X, il existe une fonction réelle u de $\mathcal{E}$ satisfaisant à:*

(a) $u(x) = 1,\ \Delta u(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in E$,

(b) $u(x) = 0,\ \Delta u(x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in F$,

(c) $0 \leqslant u(x) \leqslant 1,\ \Delta u(x) = 0$ *pour tout* $x \notin E \cup F$.

Pour donner une définition plus voisine de l'énoncé d'électrostatique rappelé dans l'introduction (théorème des condensateurs) il conviendrait d'appeler *noyau* associé à l'espace H l'opérateur linéaire G inverse du laplacien, qui existe puisque la forme H est définie positive. Toute fonction u de $\mathcal{E}$ peut alors s'écrire $u = Gf$, avec $f = \Delta u$, et être considérée comme le G-potentiel engendré par f. On évitera de parler du noyau, sauf au paragraphe 6 qui lui est consacré.

Le cas particulier où l'ensemble F est vide est l'énoncé du principe d'équilibre:

DÉFINITION 4. *On dit que le principe d'équilibre est satisfait si, quel que soit le sous-ensemble E de X, il existe une fonction réelle u de $\mathcal{E}$ satisfaisant à:*

$$\text{(a)}\quad u(x)=1,\ \Delta u(x)\geqslant 0 \quad \textit{pour tout } x\in E,$$

$$\text{(b)}\quad 0\leqslant u(x)\leqslant 1,\ \Delta u(x)=0 \quad \textit{pour tout } x\notin E.$$

Une telle fonction u, si elle existe, est unique; on l'appelle *potentiel d'équilibre* de E.

THÉORÈME 2. *Pour que l'espace H soit un espace de Dirichlet, il faut et il suffit que le principe des condensateurs soit satisfait.*

Supposons en effet que H soit un espace de Dirichlet. Soient E et F deux sous-ensembles disjoints de X, E non vide. L'ensemble

$$\mathcal{A}=\{v\,|\,\mathrm{Re}\ v\geqslant 1 \text{ sur } E,\quad \mathrm{Re}\ v\leqslant 0 \text{ sur } F\}$$

est un sous-ensemble fermé, convexe, non vide de H; soit u l'*unique* élément de A dont la norme soit minimum; si $T_\mathfrak{J}$ désigne la projection sur le segment-unité, on a $T_\mathfrak{J} u\in\mathcal{A}$ et $\|T_\mathfrak{J} u\|\leqslant\|u\|$, d'où $u=T_\mathfrak{J} u$, et par conséquent u est réel compris entre 0 et 1, $u=1$ sur E, $u=0$ sur F.

Soit alors w une fonction de H satisfaisant à $\mathrm{Re}\ w\geqslant 0$ sur E, $\mathrm{Re}\ w\leqslant 0$ sur F; on a par définition $\|u+hw\|\geqslant\|u\|$ pour tout h réel $\geqslant 0$, d'où $\mathrm{Re}\,(u,w)\geqslant 0$, ou encore, en posant $\Delta u=f$:

$$\mathrm{Re}\int f(x)\,\bar{w}(x)\,dx\geqslant 0.$$

L'arbitraire dans le choix de w permet de conclure que la fonction f est réelle $\geqslant 0$ sur E, $\leqslant 0$ sur F, nulle hors de E et F; la condition est donc nécessaire.

Supposons inversement que le principe des condensateurs soit vérifié. La fonction u satisfaisant aux conditions de la définition 3 lorsque E est réduit à un point x et que F est le complémentaire de E n'est autre que f_x, fonction caractéristique de l'ensemble $E=\{x\}$; donc, d'après la condition (b) de la définition 3, $\Delta(x,y)=\Delta f_x(y)$ est réel $\leqslant 0$ pour tout $y\neq x$. D'autre part la fonction satisfaisant aux hypothèses de la définition 4 pour $E=X$ est la fonction φ identique à 1; on doit donc avoir $\Delta\varphi(x)\geqslant 0$ pour tout x (condition (a) de la définition 4), d'où $\int\Delta(x,y)\,dy\geqslant 0$ pour tout x. Ces inégalités entraînent que H est un espace de Dirichlet (remarque 1 du paragraphe 1). La condition est donc suffisante.

Il est intéressant d'observer que dans la première partie de la démonstration on a seulement utilisé le fait que *la contraction* $T_\mathfrak{I}$ *diminue la norme dans* H; cette seule hypothèse entraîne donc que H est un espace de Dirichlet. La contraction $\zeta \to |\zeta|$ ne possède pas cette propriété « universelle » de la contraction $T_\mathfrak{I}$ (voir § 1, remarque 2).

3. Principe de l'enveloppe convexe

Donnons-nous comme précédemment un espace hilbertien H, obtenu en munissant $\mathcal{E}$ d'une norme $\|u\|$ telle que

$$\|u\|^2 = \iint \Delta(x, y)\, \bar{u}(x)\, u(y)\, dx\, dy.$$

On note (u, v) le produit scalaire associé, Δ le laplacien associé.

DÉFINITION 5. *On appelle spectre d'une fonction* u *de* H *et on note* $\sigma(u)$ *l'ensemble des points* $x \in X$ *en lesquels* $\Delta u(x)$ *est différent de* 0.

Le spectre est donc le « support » de la fonction $f = \Delta u$. Une fonction $u \in H$ est bien déterminée par les valeurs qu'elle prend sur son spectre (c'est immédiat).

DÉFINITION 6. *On dit que le principe de l'enveloppe convexe est vérifié si, quelle que soit la fonction* u *de* H, *l'ensemble des valeurs* $u(x)$ *est contenu dans le plus petit polygone convexe du plan complexe contenant l'origine et les valeurs prises par* u *sur son spectre.*

On peut dire: pour toute fonction u de H, l'image de X par u est contenue dans l'enveloppe convexe de l'ensemble constitué par l'origine du plan complexe et l'image du spectre.

Une conséquence de ce principe est le *principe du maximum classique* : le maximum du module de toute fonction u de H est atteint sur le spectre de u.

THÉORÈME 3. *Pour que l'espace* H *soit un espace de Dirichlet, il faut et il suffit que le principe de l'enveloppe convexe soit satisfait.*

Supposons en effet que H soit un espace de Dirichlet. Soit $u \in H$, de spectre $\sigma(u)$; soit P_u l'enveloppe convexe de l'ensemble constitué par 0 et les nombres $u(x)$, avec $x \in \sigma(u)$: soit T la contraction normale qui consiste à projeter sur P_u tout point du plan complexe. Comme on a $Tu(x) = u(x)$ pour tout $x \in \sigma(u)$, on peut écrire:

$$(u, Tu) = \int \Delta u(x)\, \overline{Tu(x)}\, dx = \int \Delta u(x)\, \overline{u(x)}\, dx = \|u\|^2$$

d'où $$\|u - Tu\|^2 = \|u\|^2 - 2 \operatorname{Re}(u, Tu) + \|Tu\|^2 = -\|u\|^2 + \|Tu\|^2$$

et cette dernière quantité est $\leqslant 0$ puisque T est une contraction normale; on a donc $Tu = u$, ce qui prouve que le principe de l'enveloppe convexe est satisfait; la condition est donc nécessaire.

Supposons inversement que le principe de l'enveloppe convexe soit satisfait. Observons d'abord que cela entraîne que toute fonction $u \in H$ à laplacien réel est réelle (il suffit de le vérifier lorsque $\Delta u = f_x$, fonction caractéristique de $\{x\}$; dans ce cas on a $u(x) = \|u\|^2 > 0$, donc u est à valeurs réelles $\geqslant 0$).

Soient alors E et F deux ensembles disjoints, avec E non vide. Si u est l'élément de norme minimum de l'ensemble convexe

$$\mathcal{A} = \{v \mid \operatorname{Re} v \geqslant 1 \text{ sur } E, \quad \operatorname{Re} v \leqslant 0 \text{ sur } F\}$$

on montre, comme pour le théorème 2, qu'on a

$$\operatorname{Re} \int \Delta u(x)\, \bar{w}(x)\, dx \geqslant 0$$

pour toute fonction w de H avec $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ sur E, $\operatorname{Re} w \leqslant 0$ sur F; cela entraîne que Δu est réelle, $\geqslant 0$ sur E, $\leqslant 0$ sur F, nulle hors de E et F; donc u est réelle et son spectre est contenu dans la réunion de E et F.

Comme u est la fonction de norme minimum de l'ensemble convexe $\mathcal{A}$, on a $\|u^2\| \leqslant \operatorname{Re}(u, v)$ pour toute $v \in \mathcal{A}$; en particulier si on prend $v = 1$ sur E, $v = 0$ sur F, il vient

$$\int u(x)\, \Delta u(x)\, dx \leqslant \int_E \Delta u(x)\, dx.$$

Puisque u est réelle et $\geqslant 1$ sur l'ensemble des points où Δu est > 0, $\leqslant 0$ sur l'ensemble des points où Δu est < 0, la relation précédente est nécessairement une égalité, et on a: $u(x) = 1$ pour tout $x \in E \cap \sigma(u)$, $u(x) = 0$ pour tout $x \in F \cap \sigma(u)$; le principe de l'enveloppe convexe entraîne qu'on a $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$ pour tout x, et par suite que u satisfait aux conditions de la définition 3; le principe des condensateurs est donc vérifié, et le théorème 2 montre que H est un espace de Dirichlet; la condition est donc suffisante.

4. Potentiels purs; principe du balayage

Soit H l'espace hilbertien obtenu en munissant $\mathcal{E}$ d'une norme hilbertienne $\|u\|$; soit Δ le laplacien associé.

DÉFINITION 7. *On dira qu'un élément u de H est un potentiel pur si la fonction Δu est réelle $\geqslant 0$.*

Si on appelle noyau l'opérateur linéaire G inverse de Δ, cela revient à dire que u est le G-potentiel engendré par une fonction positive.

LEMME 1. *Pour que $u \in H$ soit un potentiel pur, il faut il suffit qu'on ait*

$$\|u+v\| \geqslant \|v\|$$

pour toute $v \in H$ avec Re $v \geqslant 0$.

La condition est évidemment nécessaire; montrons qu'elle est suffisante: si $\|u+v\| \geqslant \|u\|$ pour toute v avec Re $v \geqslant 0$, on a, en remplacant v par $h v$ (avec $h > 0$), et en faisant tendre h vers 0:

$$\operatorname{Re} \int \Delta u(x)\, \bar{v}(x)\, dx = \operatorname{Re}\,(u, v) \geqslant 0$$

cela entraîne que Δu est réelle $\geqslant 0$.

LEMME 2. *Si la contraction $\zeta \to |\zeta|$ diminue la norme de tout élément de H, les potentiels purs sont réels* $\geqslant 0$.

En effet le lemme 1 montre que u est l'unique élément de norme minimum de l'ensemble convexe $\{v \mid \operatorname{Re}\,(v-u) \geqslant 0\}$; comme $|u|$ est dans cet ensemble et a une norme $\leqslant \|u\|$ par hypothèse, on a $u = |u|$, d'où le résultat.

On obtiendrait évidemment des énoncés analogues en remplaçant la contraction $\zeta \to |\zeta|$ par toute autre contraction transformant le plan complexe en l'axe réel positif et laissant invariants les points de cet axe, par exemple la contraction $\zeta \to \operatorname{Re}^+ \zeta$; d'autre part on sait que si la contraction $T_\jmath$ diminue la norme, toute contraction normale diminue la norme, donc les potentiels purs sont réels $\geqslant 0$, ce qui peut se voir directement en observant qu'on a $\operatorname{Re}^+(\zeta) = \lim\limits_{n \to \infty} n\, T_\jmath(\zeta/n)$.

LEMME 3. *Si la contraction $\zeta \to |\zeta|$ diminue la norme de tout élément de H, l'enveloppe inférieure de deux potentiels purs est un potentiel pur.*

Soient en effet u et v deux potentiels purs; soit f l'élément de norme minimum de l'ensemble fermé convexe non vide

$$\mathcal{B} = \{w \mid \operatorname{Re}\, w \geqslant \inf\,(u, v)\}.$$

Pour toute $g \in H$ avec Re $g \geqslant 0$ on a $f + g \in \mathcal{B}$, donc $\|f+g\| \geqslant \|f\|$ et par suite f est un potentiel pur (lemme 2).

La fonction $\inf\,(u, f) = \dfrac{u+f}{2} - \dfrac{|u-f|}{2}$ est dans $\mathcal{B}$; tenant compte des relations $\|\,|u-f|\,\| \leqslant \|u-f\|$ (puisque la contraction $\zeta \to |\zeta|$ diminue la norme) et

$$(u+f,\, |u-f|) \geqslant (u+f,\, u-f)$$

(puisque $u+f$ est un potentiel pur), il vient:

$$4\|\inf(u,f)\|^2=\|u+f\|^2+\||u-f|\|^2-2(u+f,|u-f|)$$
$$\leqslant\|u+f\|^2+\|u-f\|^2-2(u+f,u-f)=4\|f\|^2.$$

On a donc $\|\inf(u,f)\|\leqslant\|f\|$ et, d'après la définition de f comme élément de norme minimum, $\inf(u,f)=f$. On a de même $\inf(v,f)=f$, d'où $f\leqslant\inf(u,v)$; mais comme f est dans $\mathcal{B}$ il vient finalement $f=\inf(u,v)$ d'où le lemme.

DÉFINITION 8. *Si les potentiels purs sont réels, on dit que le principe du balayage est satisfait si, quel que soit le potentiel pur u et le sous-ensemble E de X, il existe un potentiel pur u' satisfaisant à*

(a) *$\Delta u'$ est nulle hors de E.*

(b) *$u'(x)\leqslant u(x)$ pour tout $x\in X$.*

(c) *$u'(x)=u(x)$ pour tout $x\in E$.*

Le potentiel u' s'il existe, est unique; on l'appelle *potentiel balayé* de u sur E.

DÉFINITION 9. *L'espace H est appelé espace de Gauss-Poincaré s'il satisfait aux trois conditions suivantes;*

(a) *les potentiels purs sont réels $\geqslant 0$;*

(b) *le principe du balayage est satisfait;*

(c) *le principe de l'équilibre est satisfait.*

THÉORÈME 4. *Pour que l'espace H soit un espace de Dirichlet, il faut et il suffit que ce soit un espace de Gauss-Poincaré.*

Supposons en effet que H soit un espace de Dirichlet; on sait que les potentiels purs sont réels $\geqslant 0$ (lemme 2) et que le principe d'équilibre est satisfait (théorème 2); montrons que le principe du balayage est satisfait.

Si u est un potentiel pur et si E est un sous-ensemble de X, l'unique élément u' de norme minimum de l'ensemble fermé convexe non vide

$$\mathcal{U}=\{v\,|\,\mathrm{Re}\;v\geqslant u\quad\text{sur }E\}$$

satisfait aux conditions de la définition 8. En effet si $\mathrm{Re}\;w$ est $\geqslant 0$ sur E, on a $u'+hw\in\mathcal{U}$ pour tout h réel >0, d'où $\|u'+hw\|\geqslant\|u'\|$ et finalement (pour h tendant vers 0)

$$\mathrm{Re}\int\Delta u'(x)\,\bar{w}(x)\,dx=\mathrm{Re}\;(u',w)\geqslant 0$$

ce qui entraîne $\Delta u'\geqslant 0$, $\Delta u'=0$ hors de E. Evidemment le potentiel pur u' est $\geqslant u$ sur E; il reste à vérifier qu'on a $u'\leqslant u$ partout; or, d'après le lemme 3, $f=\inf(u,u')$

est un potentiel pur, donc $\|f\| \leqslant \|u'\|$; comme f est dans $\mathcal{U}$ il est identique à l'élément de norme minimum u'. La condition est donc nécessaire.

Supposons inversement que H soit un espace de Gauss-Poincaré; comme les potentiels purs sont réels la fonction Δ associée au laplacien est à valeurs réelles.

Soit u le potentiel pur engendré par la fonction caractéristique f_x de l'ensemble $\{x\}$ $(\Delta u = f_x)$, soit u' le potentiel balayé sur le complémentaire de $\{x\}$; par définition du balayage $u - u' = h f_x$, où h est une constante strictement positive; on a donc $\Delta(x, y) = \Delta f_x(y) \leqslant 0$ pour tout $y \neq x$.

Enfin le potentiel d'équilibre de l'espace X tout-entier étant la fonction φ identique à 1, on a $\Delta \varphi(x) \geqslant 0$ pour tout x, d'où $\int \Delta(x, y)\, dy \geqslant 0$ pour tout x.

Ces propriétés sont caractéristiques du laplacien associé à un espace de Dirichlet (remarque 1, § 1); la condition est donc suffisante.

Dans la première partie de la démonstration, on a seulement utilisé la contraction $\zeta \to |\zeta|$ pour prouver que dans un espace de Dirichlet le principe du balayage est satisfait; on peut donc énoncer, compte tenu de la remarque 2 (§ 1):

REMARQUE 4. *Pour que la contraction $\zeta \to |\zeta|$ diminue la norme des éléments de H, il faut et il suffit que les potentiels purs soient réels $\geqslant 0$ et que le principe du balayage soit satisfait.*

Une autre démonstration du principe du balayage lorsque la contraction $\zeta \to |\zeta|$ diminue la norme consiste à utiliser le *principe de domination*, conséquence facile du « principe de l'enveloppe inférieure » (lemme 3), que nous nous bornons à énoncer:

REMARQUE 5. *Si la contraction $\zeta \to |\zeta|$ diminue la norme des éléments de H, et si u et v sont deux potentiels purs tels que $u \leqslant v$ sur le spectre $\sigma(u)$, alors $u \leqslant v$ partout.*

5. Systèmes linéaires associés à une forme de Dirichlet

On se donne une forme hermitienne H sur $\mathcal{E}$

$$H(u) = \int \Delta(x, y)\, \bar{u}(x)\, u(y)\, dx\, dy \tag{1}$$

et on appelle Δ le laplacien associé; on notera I l'opérateur-identité sur $\mathcal{E}$.

DÉFINITION 10. *On dira qu'un opérateur linéaire A sur $\mathcal{E}$ est positif s'il transforme toute fonction réelle $\geqslant 0$ en une fonction réelle $\geqslant 0$; on dira que A est sousmarkovien si, en outre, il transforme toute fonction réelle $\leqslant 1$ en une fonction réelle $\leqslant 1$.*

On évitera de confondre opérateur positif et opérateur hermitien positif; pour que A soit positif, il faut et il suffit que la fonction associée $A(x, y)$ soit à valeurs réelles $\geqslant 0$; pour que A soit sous-markovien, il faut et il suffit qu'on ait en outre $\int A(x, y)\,dy \leqslant 1$ pour tout $x \in X$, ou encore $A\varphi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in X$, φ désignant la fonction identique à 1 sur X.

Evidemment si A est sous-markovien, il en est de même de A^n pour tout entier $n \geqslant 0$.

Cette définition va nous conduire à une caractérisation utile des laplaciens associés à une forme de Dirichlet:

LEMME 4. *Pour que l'opérateur linéaire Δ soit le laplacien associé à une forme de Dirichlet, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel $a > 0$ et un opérateur sous-markovien symétrique A tels que l'on ait*

$$\Delta = a(I - A). \tag{2}$$

En effet si Δ est associé à une forme de Dirichlet, il suffit de choisir

$$a \geqslant \sup_{x \in X} \Delta(x, x),$$

et alors on a, d'après la remarque 1 (§ 1):

$$A(x, y) = -a^{-1}\Delta(x, y) \geqslant 0 \quad \text{pour } x \neq y,$$

$$A(x, x) = 1 - a^{-1}\Delta(x, x) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } x,$$

$$\int A(x, y)\,dy = 1 - a^{-1}\int \Delta(x, y)\,dy \leqslant 1 \quad \text{pour tout } x,$$

ce qui exprime que A est sous-markovien symétrique; donc la condition est nécessaire; la même remarque 1 montre que la condition est évidemment suffisante.

Proposons-nous maintenant d'étudier l'équation

$$u + \lambda\Delta u = f \tag{3}$$

où f est donnée dans $\mathcal{E}$; cette équation représente un système de n équations linéaires à n inconnues.

Si Δ est hermitien positif, l'équation (3) admet une solution et une seule $u = R_\lambda f$ pour tout $\lambda \geqslant 0$ et toute $f \in \mathcal{E}$; on va énoncer des propriétés importantes de R_λ lorsque Δ est le laplacien associé à une forme de Dirichlet.

THÉORÈME 5. *Pour que H soit une forme de Dirichlet, il faut et il suffit que $R_\lambda = (I + \lambda\Delta)^{-1}$ existe et soit sous-markovien pour tout $\lambda \geqslant 0$.*

Supposons en effet que H soit une forme de Dirichlet; comme Δ est hermitien positif, $R_\lambda = (I+\lambda\Delta)^{-1}$ existe pour tout $\lambda \geqslant 0$. Si f est donnée dans $\mathcal{E}$, $v_f^{(\lambda)} = R_\lambda f$ est l'unique élément de $\mathcal{E}$ qui rende minimum la fonctionnelle quadratique

$$F(u) = \lambda H(u) + \int |u(x) - f(x)|^2 dx,$$

car si on introduit la forme de Dirichlet définie positive $D_\lambda(u) = \int |u(x)|^2 dx + \lambda H(u)$ on peut écrire

$$F(u) = D_\lambda(u - v_f^{(\lambda)}) + F(v_f^{(\lambda)}).$$

Soit alors T une contraction normale du plan complexe, telle que $f = Tf$; on a évidemment $F(Tu) \leqslant F(u)$, donc $Tv_f^{(\lambda)} = v_f^{(\lambda)}$ d'après la propriété de minimum de $v_f^{(\lambda)}$. Si donc f est à valeurs réelles comprises entre 0 et 1 ($f = T_J f$), il en sera de même de $v_f^{(\lambda)} = R_\lambda f$, ce qui prouve que R_λ est sous-markovien. La condition est donc nécessaire.

Si inversement R_λ est sous-markovien pour tout $\lambda \geqslant 0$, l'opérateur Δ est limite, pour λ tendant vers 0, des opérateurs $(I - R_\lambda)/\lambda$ qui sont des laplaciens associés à des formes de Dirichlet, d'après le lemme 4; donc H, qui est limite de formes de Dirichlet, est elle-même une forme de Dirichlet, et la condition est suffisante.

Parallèlement à l'équation (3), on peut étudier l'équation

$$\Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

où t est un paramètre réel qu'on interprète comme le temps; cette équation, qui représente un système différentiel à coefficients constants, peut être appelée équation de diffusion relative à l'opérateur Δ.

La solution $u(x, t)$ de l'équation (4) qui satisfait à la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$, où f est donnée dans $\mathcal{E}$, est, comme il est bien connu,

$$u(x, t) = e^{-t\Delta} f(x).$$

Nous allons étudier les relations entre les propriétés de la forme (1) et celles de l'opérateur $e^{-t\Delta}$.

THÉORÈME 6. *Pour que H soit une forme de Dirichlet, il faut et il suffit que $e^{-t\Delta}$ soit sous-markovien pour tout nombre réel $t \geqslant 0$.*

Si en effet H est une forme de Dirichlet, le laplacien associé Δ est de la forme $a(I - A)$, où a est réel $\geqslant 0$ et A sous-markovien; donc $e^{-t\Delta} = e^{-ta} e^{taA}$ est un opérateur positif; d'autre part si φ désigne la fonction identique à 1 sur X, on a:

$$e^{-t\Delta}\varphi(x)=e^{-ta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n a^n A^n}{n!}\varphi(x)\leqslant e^{-ta}e^{ta}=1,$$

car A^n est sous-markovien pour tout $n\geqslant 0$; donc $e^{-t\Delta}$ est sous-markovien pour tout $t>0$, Δ est limite, pour t tendant vers 0, des opérateurs $(I-e^{-t\Delta})/t$, qui sont des laplaciens associés à des formes de Dirichlet (lemme 4); la forme H étant limite de formes de Dirichlet est elle-même une forme de Dirichlet, et la condition est suffisante.

Remarquons que les théorèmes 5 et 6 se déduisent immédiatement l'un de l'autre grâce aux formules connues:

$$e^{-t\Delta}=\lim_{k\to\infty}(R_{\frac{t}{k}})^k;\qquad R_\lambda=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-t\left(\Delta+\frac{I}{\lambda}\right)}dt.$$

Outre les équations (3) et (4) il serait intéressant d'étudier, lorsque Δ est le laplacien associé à une forme de Dirichlet, les propriétés particulières de l'équation « hyperbolique »

$$\Delta u+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

et de l'équation de « Schroedinger »

$$\Delta u+(f-\lambda)u=0 \tag{5}$$

où f est >0; parmi les problèmes liés à cette équation, signalons notamment la recherche des fonctions f pour lesquelles le spectre de (5) est constitué par n nombres donnés.

Pour achever ce paragraphe, nous allons réunir en un seul énoncé les principaux résultats obtenus jusqu'à présent:

Soit H un espace hilbertien obtenu en munissant $\mathcal{E}$ d'une norme hilbertienne; soit Δ le laplacien associé; les huit propositions suivantes sont équivalentes:

I. *H est un espace de Dirichlet.*

II. *La norme dans H a l'expression suivante:*

$$\|u\|^2=\iint S(x,y)\,|u(x)-u(y)|^2\,dx\,dy+\int m(x)\,|u(x)|^2\,dx,$$

où les nombres $S(x,y)$ et $m(x)$ sont tous $\geqslant 0$.

III. *Le laplacien est de la forme $\Delta=a(I-A)$, où a est réel >0 et A sous-markovien.*

IV. *Le principe de l'enveloppe convexe est satisfait.*

V. *Le principe des condensateurs est satisfait.*

VI. *H est un espace de Gauss-Poincaré.*

VII. *L'opérateur $e^{-t\Delta}$ est sous-markovien pour tout nombre $t>0$.*

VIII. *L'opérateur $(I+\lambda\Delta)^{-1}$ est sous-markovien pour tout nombre $\lambda>0$.*

6. Noyau associé à un espace de Dirichlet

Soit D un espace de Dirichlet, dont la norme $\|u\|$ est définie par

$$\|u\|^2 = D(u) = \iint \Delta(x, y)\, \bar{u}(x)\, u(y)\, dx\, dy,$$

et soit Δ le laplacien associé.

On appellera *noyau* associé à D l'opérateur linéaire $G=\Delta^{-1}$, autrement dit l'inverse du laplacien; G existe, car la forme D est définie positive.

Les potentiels purs dans D ne sont autres que les fonctions de la forme Gf, avec $f\geqslant 0$; il résulte donc du lemme 2 (par exemple) que *le noyau est positif.*

THÉORÈME 7. *Pour qu'un opérateur linéaire G sur $\mathcal{E}$ soit le noyau associé à un espace de Dirichlet, il faut et il suffit qu'il soit de la forme*

$$G = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

où a est un nombre réel >0 et A un opérateur sous-markovien symétrique n'admettant pas la valeur propre 1.

En effet si D est un espace de Dirichlet, le laplacien associé est de la forme $\Delta = a(I-A)$, où a est réel >0 et A sous-markovien symétrique (lemme 4); comme Δ est inversible, A n'admet pas la valeur propre 1. Le noyau G, inverse de Δ, satisfait à

$$aG(I-A) = I$$

d'où:

$$aG - aGA^p = \sum_{k=0}^{p-1} A^k:$$

comme G est positif, GA^p est positif et décroît lorsque p croît; la série $\sum A^k$ est donc convergente, et A^p, donc aussi GA^p, tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. On a donc $G=a^{-1}\sum A^k$, et la condition est nécessaire.

Soit inversement un nombre réel $a>0$ et un opérateur sous-markovien symétrique A n'ayant pas la valeur propre 1; la forme hermitienne D dont le laplacien associé est $\Delta = a(I-A)$ est une forme de Dirichlet (lemme 4), qui est définie positive; d'après la première partie de la démonstration la série $\sum A^k$ converge et $G=a^{-1}\sum A^k$ est le noyau associé à l'espace de Dirichlet défini par la forme D; la condition est donc suffisante.

THÉORÈME 8. *Si G est un noyau associé à un espace de Dirichlet, il en est de même de G^α, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.*

En effet l'inverse du noyau G est de la forme $\Delta = a(I-A)$, avec a réel >0 et A sous-markovien n'ayant pas la valeur propre 1; donc $\Delta^\alpha = a^\alpha (I-A)^\alpha$ s'écrit $a^\alpha (I - A_\alpha)$ avec

$$A_\alpha = \alpha A - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} A^2 + \cdots;$$

on vérifie aisément que cette série à coefficients tous positifs est convergente et représente un opérateur sous-markovien symétrique, n'ayant pas la valeur propre 1; donc Δ^α est le laplacien associé à un espace de Dirichlet (lemme 4) et son inverse G^α est le noyau correspondant.

Ce théorème peut encore s'énoncer : *si G est un noyau associé à un espace de Dirichlet, il existe une famille de noyaux G_α, $0 \leqslant a \leqslant 1$, associés à des espaces de Dirichlet, satisfaisant à*

$$G_0 = I, \quad G_1 = G, \quad G_\alpha G_\beta = G_{\alpha+\beta} \qquad (0 \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant \beta,\ \alpha+\beta \leqslant 1).$$

Un résultat analogue est bien connu en théorie newtonienne (formule de Marcel Riesz).

Signalons une intéressante expression du noyau G^α, facile à justifier:

$$G^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t\Delta} t^{\alpha-1}\, dt \qquad (0 < \alpha \leqslant 1).$$

Observons encore que si Δ est le laplacien associé à une forme de Dirichlet *semi-définie*, il en est de même de Δ^α, avec $0 < \alpha \leqslant 1$.

7. Problème de Dirichlet; fonction de Green

Soit H l'espace hilbertien obtenu en munissant $\mathcal{E}$ d'un produit scalaire (u, v); soit Δ le laplacien associé.

Si f est une fonction définie sur un sous-ensemble E de X, on appelle *problème de Dirichlet* (pour l'opérateur Δ et la donnée-frontière f sur E) la recherche de la fonction u satisfaisant à:

$$u(x) = f(x) \qquad \text{pour tout } x \in E$$

$$\Delta u(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \notin E$$

cette dernière condition pouvant s'écrire $\sigma(u) \subset E$.

Ce problème admet une solution et une seule : *la fonction u de norme minimum parmi celles qui sont égales à f sur E*; en effet, pour toute $v \in \mathcal{E}$ nulle sur E et tout nombre complexe h, on a $\|u+hv\| \geqslant \|u\|$, d'où $\int \Delta u(x)\,\bar{v}(x)\,dx = (u, v) = 0$ ce qui entraîne $\Delta u = 0$ hors de E; u est donc une solution du problème de Dirichlet, et c'est la seule.

La valeur en un point $x \in X$ de la solution du problème de Dirichlet pour la donnée-frontière f sur E est une fonctionnelle linéaire de f; il existe donc une fonction α_x définie sur E telle que la solution du problème de Dirichlet s'écrive

$$u(x) = \int f(y)\,\alpha_x(y)\,dy$$

quelle que soit la donnée f. La fonction $\alpha_x(y)$ des deux points $x \in X$ et $y \in E$ sera appelée *noyau de Poisson*; on notera parfois

$$\alpha_x(y) = P(x, y)$$

et la définition peut être étendue aux points $y \notin E$, en posant dans ce cas $P(x, y) = 0$. Si x est dans E, on a évidemment $P(x, y) = f_x(y)$, où f_x est la fonction caractéristique de $\{x\}$.

THÉORÈME 9. *Si H est un espace de Dirichlet, le noyau de Poisson $P(x, y)$ est $\geqslant 0$ et satisfait à $\int P(x, y)\,dy \leqslant 1$ pour tout $x \in X$; si u est un potentiel pur, la fonction*

$$u'(x) = \int P(x, y)\,u(y)\,dy$$

n'est autre que le potentiel balayé de u sur E.

La première partie de l'énoncé résulte immédiatement du principe de l'enveloppe convexe, qui entraîne que si f est une fonction définie sur E, à valeurs réelles comprises entre 0 et 1, la solution du problème de Dirichlet pour donnée-frontière f sur E est à valeurs réelles comprises entre 0 et 1. Pour achever, il suffit d'observer que la fonction u' de l'énoncé et le potentiel balayé de u sur E ont mêmes valeurs sur l'ensemble E qui contient leurs spectres; elles sont donc identiques.

On peut observer que la fonction $\int P(x, y)\,dy$ n'est autre que le potentiel d'équilibre de E.

On appellera *noyau de Green* du sous-ensemble Y de X le noyau G' défini sur l'espace produit $Y \times Y$ par

$$G'(x, y) = G(x, y) - G\,\alpha_x(y)$$

où $\alpha_x(y)$ est le noyau de Poisson relatif à l'ensemble E complémentaire de Y.

G' peut être défini sur $X \times X$ en posant $G'(x, y) = 0$ si x ou $y \in E$; avec cette convention on a le résultat suivant;

LEMME 5. *Soit $f \in \mathcal{E}$; si on pose $u = Gf$, on a la relation*

$$G' f(x) = u(x) - u'(x)$$

où u' est la solution du problème de Dirichlet pour la donnée-frontière u sur E.

En effet on a $G'(x, y) = G(x, y) - g(x, y)$, avec

$$g(x, y) = G\alpha_x(y) = \int G(y, z)\, \alpha_x(z)\, dz,$$

d'où

$$G' f(x) = u(x) - \iint G(y, z)\, \alpha_x(z)\, f(y)\, dy\, dz$$
$$= u(x) - \int u(z)\, \alpha_x(z)\, dz = u(x) - u'(x).$$

THÉORÈME 10. *Si H est un espace de Dirichlet sur X, le noyau de Green relatif à un sous-ensemble Y est le noyau associé à un espace de Dirichlet sur Y.*

Soit en effet $\mathfrak{F}$ l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur Y; prolongeons toute fonction $u \in \mathfrak{F}$ en une fonction $\hat{u} \in \mathcal{E}$ en posant $\hat{u}(x) = 0$ pour tout point x du complémentaire E de Y. Le nombre $\|u\|_Y = \|\hat{u}\|$ définit évidemment une norme de Dirichlet sur $\mathfrak{F}$, et le laplacien (sur $\mathfrak{F}$) associé à cette norme est défini par la fonction $\Delta'(x, y)$, restriction de $\Delta(x, y)$ à l'ensemble $Y \times Y$.

Tout revient donc à montrer que G' est l'inverse de Δ'; or, pour toute fonction u de $\mathfrak{F}$, on a, en posant $\Delta' u = f$ et $v = G\hat{f}$:

$$G' \Delta' u(x) = G' f(x) = v(x) - v'(x) \qquad (x \in Y)$$

où v' est la solution du problème de Dirichlet pour donnée-frontière v sur E (lemme 5). Or si on pose $f_1 = \Delta \hat{u} - \hat{f}$, il vient $v = \hat{u} - G f_1$, d'où $v' = (\hat{u})' - (G f_1)'$; mais $(\hat{u})'$, solution du problème de Dirichlet pour donnée-frontière $\hat{u} = 0$ sur E, est nulle; d'autre part $(G f_1)'$ est identique à $G f_1$, puisque le spectre de cette fonction est contenu dans E; finalement il vient $v - v' = \hat{u}$, d'où $G' \Delta' u = u$ pour toute $u \in \mathfrak{F}$ et G' est bien l'inverse de Δ'.

Il résulte du théorème 10 que le noyau de Green est symétrique, positif et de type positif, ce qu'il était aisé de vérifier directement.

8. Exemples

L'expression (2') des formes de Dirichlet fait songer à un schéma très simple d'électrodynamique qui va nous fournir un premier exemple d'espace de Dirichlet sur un espace fini. Considérons $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'espace ordinaire; on relie certains couples de points x_i, x_j par un fil électrique de résistance $R(x_i, x_j) = 1/S(x_i, x_j)$. Si on maintient les points x_i à des potentiels fixes $u(x_i)$, avec $u(x_0) = 0$, un courant électrique va circuler dans certains fils, et l'énergie électrodynamique du système n'est autre que

$$E(u) = \tfrac{1}{2}\int_{X^*}\int_{X^*} S(x, y)\,|u(x) - u(y)|^2\,dx\,dy,$$

où X^* est l'ensemble constitué par les $n+1$ points x_i (on a posé $S(x, y) = 0$ si les points x et y ne sont pas reliés directement par un fil).

Cette expression ayant la forme (2′), l'énergie $E(u)$ est donc une forme de Dirichlet sur l'ensemble des potentiels u. Pour que cette forme soit définie positive, il faut et il suffit, d'après le théorème 1′, que le système de fils soit *connexe*. La distance p, définie au paragraphe 1 (remarque 3) s'interprète ainsi : $p^2(x, y)$ est le minimum des résistances totales des chaînes constituées par des fils du système joignant x et y (directement ou non). Quant au nombre $q^2(x, x_0)$, c'est la résistance totale du système « entre les points x et x_0 » : en effet si on maintient les points x_0 et x aux potentiels respectifs 0 et u, les autres sommets étant libres, l'intensité totale du courant qui entre ou sort des sommets x_0 et x est $u/q^2(x, x_0)$.

Voici un autre exemple, tiré de considérations d'électrostatique : prenons n conducteurs isolés dans l'espace ordinaire, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sur lesquels des charges électriques sont réparties de façon que le potentiel total u ait une valeur constante $u(x_i)$ sur chacun des conducteurs x_i. Si on note $\mu(x_i)$ la masse totale des charges réparties sur x_i, l'énergie électrostatique du système peut s'exprimer par l'une ou l'autre des formes suivantes

$$\begin{aligned} E(u) &= \tfrac{1}{2}\iint A(x, y)\,u(x)\,u(y)\,dx\,dy \qquad (6)\\ &= \tfrac{1}{2}\iint B(x, y)\,\mu(x)\,\mu(y)\,dx\,dy, \end{aligned}$$

les intégrales étant étendues à l'ensemble X constitué par les n « points » x_i.

La forme (6) est une forme de Dirichlet, car il est bien connu que l'énergie totale du système est donnée par l'intégrale

$$E(u) = \frac{1}{8\pi}\int_{R^3} |\operatorname{grad} U(M)|^2\,dM,$$

où U est l'unique fonction définie continue dans R^3, nulle à l'infini, prenant la valeur $u(x_i)$ sur le conducteur x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, harmonique en dehors des conducteurs (pour éviter des complications inutiles, on supposera ces conducteurs bornés et limités par des surfaces « assez régulières ». Or si T est une contraction normale du plan complexe, et si V est défini comme U, mais à partir des données-frontière $Tu(x_i)$, on a, d'après les propriétés de la forme de Dirichlet classique (principe de Dirichlet, et propriété relative aux contractions, rappelée dans l'introduction):

$$E(Tu) = \frac{1}{8\pi}\int_{R^3} |\operatorname{grad} V(M)|^2\, dM \leqslant \frac{1}{8\pi}\int_{R^3} |\operatorname{grad} T\,U(M)|^2\, dM$$

$$\leqslant \frac{1}{8\pi}\int_{R^3} |\operatorname{grad} U(M)|^2\, dM = E(u).$$

Le fait que $E(u)$ soit une norme de Dirichlet entraîne des inégalités concernant d'une part les nombres $B(x, y)$ (*coefficients de potentiels* du système de conducteurs), d'autre part les nombres $A(x, x)$ (*coefficients de capacité*) et $A(x, y)$, avec $x \neq y$ (*coefficients d'induction*). On retrouve ainsi des résultats connus en électrostatique, notamment:

(a) les coefficients d'induction sont $\leqslant 0$,

(b) pour tout conducteur x on a $\sum_{i=1}^{n} A(x, x_i) \geqslant 0$,

(c) les coefficients de potentiels $B(x, y)$ sont tous $\geqslant 0$.

Les propriétés (a) et (b) traduisent les propriétés caractéristiques du « laplacien » A (remarque 1, § 1) et la propriété (c) exprime le fait que le « noyau » B est $\geqslant 0$ (voir § 6); il s'agit évidemment du laplacien et du noyau associés à l'espace de Dirichlet défini par la forme $2E(u)$.

Une variante du schéma précédent est obtenue en considérant un domaine ω du plan complexe, d'ordre de connexion $n+1$; appelons $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les composantes connexes de la frontière (on suppose qu'aucune d'elles n'est réduite à un point). Soit u la fonction harmonique dans ω, prenant les valeurs constantes $u(x_i)$ sur x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, avec $u(x_0) = 0$. L'intégrale de Dirichlet de cette fonction u (étendue à ω) est une forme de Dirichlet définie positive sur l'ensemble des fonctions numériques définies sur l'ensemble X constitué par les « points » $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La considération des coefficients de cette forme peut être utile dans l'étude du type conforme du domaine ω.