Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques

by

MICHEL DUFLO

Université Paris 7, Paris, France

Table des matières

–822908 Acta Mathematica 149. Imprimé le 25 Avril 1983

Introduction

Soit G un groupe de Lie. C'est un problème classique de décrire le dual unitaire $\hat{G}$ de G. G. W. Mackey [Ma] a proposé une méthode pour résoudre ce problème. Lorsque G contient un sous-groupe invariant fermé nilpotent connexe non central, et lorsque certaines conditions de régularité sont satisfaites, la méthode de Mackey réduit le calcul de $\hat{G}$ à celui du dual unitaire de groupes plus petits. En appliquant ce procédé autant de fois qu'il le faut, en supposant que les conditions de régularité sont toujours satisfaites, le calcul de $\hat{G}$ se ramène donc à celui du dual unitaire de certains groupes réductifs. Le but de cet article est de décrire, pour un groupe algébrique G, la paramétrisation de $\hat{G}$ qui en résulte.

Plus précisément, soit k un corps local de caractéristique 0 (i.e., k est égal à $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, ou à une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, cf. [Wel]), et soit $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique défini sur k. On note $G = \mathbf{G}_k$ le groupe des k-points de $\mathbf{G}$. C'est un groupe de Lie (sur k). Nous donnons une paramétrisation de $\hat{G}$ en fonction du dual unitaire projectif de certains sous-groupes réductifs de G.

Notre paramétrisation de G généralise celle de Kirillov [Ki] pour les groupes unipotents, et utilise donc le dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On note $G(g)$ le stabilisateur de g dans G, $\mathfrak{g}(g)$ son algèbre de Lie, ${}^{\mathrm{u}}G(g)$ le radical unipotent de $G(g)$ et ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{g}(g)$ son algèbre de Lie. A l'aide de la structure symplectique sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$, nous définissons un 2-cocycle d'ordre 2 sur le groupe réductif $G(g)/{}^{\mathrm{u}}G(g)$, et nous notons $Y^{\mathrm{irr}}(g)$ l'ensemble des classes de représentations projectives irréductibles de $G(g)/{}^{u}G(g)$ associées à ce cocycle. Nous définissons un ensemble de formes linéaires sur $\mathfrak{g}$, appelé l'ensemble des formes linéaires de type unipotent. Disons simplement ici que si $\mathbf{G}$ est unipotent, tout élément de $\mathfrak{g}^*$ est de type unipotent, et que si $\mathbf{G}$ est réductif, 0 est le seul élément de $\mathfrak{g}^*$ de type unipotent. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des couples (g, τ) où g est une forme sur $\mathfrak{g}$ de type unipotent, et où τ est un élément de $Y^{\mathrm{irr}}(g)$. Le groupe G opère naturellement dans $\mathscr{C}$. A tout élément (g, τ) de $\mathscr{C}$, nous allons associer une classe de représentations unitaires irréductible $T_{g,\tau}$ de G, et nous montrerons que l'application $(g, \tau) \mapsto T_{g,\tau}$ induit une bijection de $\mathscr{C}/G$ sur $\hat{G}$.

Lorsque **G** est unipotent, $\mathscr{E}$ est égal à $\mathfrak{g}^*$, et la bijection ci-dessus n'est autre que celle de Kirillov [Ki] (pour $k=\mathbf{R}$) et de Moore [Moo] (pour $k=\mathbf{Q}_p$).

Supposons G résoluble connexe et déployé sur k. Lorsque $k=\mathbf{R}$, Bernat [Be] paramétrise $\hat{G}$ (en fait $\hat{G}_0$, où G_0 est la composante neutre de G) à l'aide de $\mathfrak{g}^*$. Lorsque $k=\mathbf{Q}_p$, Howe [Ho] paramétrise $\hat{G}$ en utilisant $\mathfrak{u}^*$, où $\mathfrak{u}$ est l'algèbre de Lie du radical unipotent de G. Contrairement aux apparences et bien que nous utilisions des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$, notre paramétrisation est essentiellement identique à celle de Howe, et diffère de celle de Bernat.

Nous donnons deux constructions des représentations $T_{g,\tau}$. Dans tous les cas, on est amené à appliquer la théorie de Mackey à un sous-groupe invariant unipotent de G. Il faut pour cela calculer une certaine obstruction cohomologique, ce qui est fait dans [Du1] pour $k=\mathbf{R}$, et dans Lion et Perrin [Li-Pe] dans le cas général. Rappelons que dans cette affaire, la représentation métaplectique joue un grand rôle. Un des points importants de notre construction est la définition de $Y^{\mathrm{irr}}(g)$, qui incorpore toutes les obstructions cohomologiques intervenant dans les applications successives de la théorie de Mackey.

Si l'on étudie les groupes de Lie réels, il n'est pas naturel de se restreindre aux groupes algébriques. Si G est un groupe de Lie réel ayant un nombre fini de composantes connexes et localement isomorphe à un groupe algébrique, il n'est pas difficile d'adapter notre méthode pour obtenir encore une paramétrisation de $\hat{G}$. Si G est un groupe de Lie quelconque, d'une part la théorie de Mackey n'est pas applicable sans précautions, et d'autre part, la notion de forme de type unipotent n'a pas de sens. Cependant, les idées exposées ici, convenablement modifiées, restent très utiles dans l'étude de $\hat{G}$. Pour une description de ces résultats, je renvoie les lecteurs à mon article [Du4], qui contient aussi un résumé du présent travail.

Considérons une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Notons $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Pour toute forme linéaire g sur $\mathfrak{g}$ de type unipotent, et pour tout idéal primitif ξ de $U(\mathfrak{g}(g)/{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{g}(g))$ nous construisons un idéal primitif $I_{g,\xi}$ de $U(\mathfrak{g})$, généralisant la construction de Dixmier [Di1] lorsque $\mathfrak{g}$ est unipotente. Si G est un groupe de Lie algébrique connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, G opère dans l'ensemble $\mathscr{F}$ des paires (g, ξ) comme ci-dessus, et I définit une application de $\mathscr{F}/G$ dans l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$. Grâce aux travaux de Dixmier et Moeglin sur l'analogue de la théorie de Mackey, on montre que cette application est surjective et de fibre finie. (Il est probable que c'est une bijection.)

La comparaison des représentations $T_{g,\tau}$ et des idéaux primitifs $I_{g,\xi}$ permet, dans le cas réel, le calcul du caractère infinitésimal des représentations $T_{g,\tau}$.

Je suis heureux de remercier Colette Moeglin et David Wigner pour d'utiles conversations qui m'ont aidé dans ce travail.

Chapitre I. Formes linéaires de type unipotent

Sous-algèbres coisotropes

1. Dans ce chapitre, k est un corps de caractéristique 0, $\mathbf{G}$ un groupe algébrique linéaire défini sur k, G un sous-groupe d'indice fini du groupe $\mathbf{G}_k$ des k-points de G. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie sur k qui est l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$.

Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ est dite algébrique s'il existe un sous-groupe algébrique $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ défini sur k dont $\mathfrak{b}$ est l'algèbre de Lie. Si $\mathbf{B}$ est un tel sous-groupe, on note ${}^u\mathbf{B}$ son radical unipotent. Il est défini sur k. On note ${}^u\mathfrak{b}$ son algèbre de Lie, et l'on dit que c'est le radical unipotent de $\mathfrak{b}$. Rappelons que l'on dit que $\mathbf{B}$ est réductif si ${}^u\mathbf{B}$ est le groupe $\{1\}$. Rappelons qu'en général, d'après [Mos], $\mathbf{B}$ admet des sous-groupes réductifs maximaux définis sur k, que deux tels sous-groupes sont conjugués par un élément de ${}^u\mathbf{B}_k$, et que si $\mathbf{R}$ est un tel sous-groupe, le groupe $\mathbf{B}_k$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbf{R}_k \times {}^u\mathbf{B}_k$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ de $\mathbf{R}$ sera appellée un facteur réductif de $\mathfrak{b}$.

2. Si $\mathbf{G}$ opère dans une variété algébrique $\mathbf{V}$ définie sur k par une action rationnelle définie sur k, on note $\mathbf{G}(v)$ le stabilisateur dans $\mathbf{G}$ d'un point v de $\mathbf{V}$. Si v est un k-point, on note $G(v)$ le stabilisateur de v dans G. C'est un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{G}(v)_k$. On note $\mathfrak{g}(v)$ l'algèbre de Lie correspondante. Tout ceci s'applique en particulier aux représentations adjointes dans les idéaux $\mathbf{G}$-invariants de $\mathfrak{g}$ et dans leurs duals.

On note $\mathfrak{a}^*$ le dual d'un espace vectoriel $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{b}$ est un sous-espace de $\mathfrak{a}$ et si $a \in \mathfrak{a}^*$, on note $a|\mathfrak{b}$ la restriction de a à $\mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{c}$ est un sous-espace de $\mathfrak{b}$ et si x est un endomorphisme de $\mathfrak{a}$ stabilisant $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, on note $x_{\mathfrak{b}/\mathfrak{c}}$ l'endomorphisme de $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ qui s'en déduit.

Si g est un élément de $\mathfrak{g}^*$, on note B_g la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ définie par la formule $B_g(X, Y)=g([X, Y])$. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, l'algèbre $\mathfrak{g}(g|\mathfrak{b})$ est égale à l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à B_g.

3. *Définition.* Soient g un élément de $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{b}$ est coisotrope (ou coisotrope relativement à g s'il y a ambiguité) si l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à B_g est contenu dans $\mathfrak{b}$.

Des exemples extrêmes de sous-algèbres coisotropes sont les polarisations (ce sont les sous-algèbres égales à leur orthogonal), et l'algèbre $\mathfrak{g}$ elle-même.

4. Soient g un élément de $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Nous poserons $b=g|\mathfrak{b}$, nous noterons $\mathfrak{b}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{b}^g$ l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à B_g. Remarquons que $\mathfrak{b}^g \cap \mathfrak{b}$ est égal à $\mathfrak{b}(b)$, de sorte que c'est une sous-algèbre de $\mathfrak{b}$. D'autre part, $\mathfrak{b}(b)g$ est un sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ contenu dans $\mathfrak{b}$.

LEMME. *L'algèbre $\mathfrak{b}$ est coisotrope si et seulement si $\mathfrak{b}(b)g$ est égal à $\mathfrak{b}^\perp$.*

Dans ce cas, notons ω l'ensemble des $g' \in g+\mathfrak{b}^\perp$ tels que $\dim \mathfrak{g}(g')$ soit minimum (quand g' parcourt $g+\mathfrak{b}^\perp$). C'est un ouvert de Zariski de $g+\mathfrak{b}^\perp$ contenant g. L'algèbre $\mathfrak{b}$ est coisotrope relativement à un point g' de $g+\mathfrak{b}^\perp$ si et seulement si g' est dans ω. L'algèbre $\mathfrak{b}(b)$ est algébrique. Notons $\mathbf{B}(b)$ le sous-groupe algébrique connexe de $\mathbf{G}$ d'algèbre $\mathfrak{b}(b)$. Alors ω est l'ensemble des k-points de l'orbite $\mathbf{B}(b)g$.

Démonstration. Toutes ces propriétés sont bien connues pour les polarisations (cf. [Be] ch. IV, § 3) et les démonstrations s'étendent sans difficultés. C.Q.F.D.

5. *Définition.* On dit que la sous-algèbre coisotrope $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de Pukanszky si, dans les notation du lemme 4, ω est égal à $g+\mathfrak{b}^\perp$.

Remarque. Supposons que $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de Pukanszky. Alors on a ${}^u\mathbf{B}(b)_k g=g+\mathfrak{b}^\perp$. En effet, soit $\mathbf{R}$ un sous-groupe réductif maximal de $\mathbf{B}(b)$ défini sur k. Le groupe $\mathbf{R}_k$, qui agit par affinités dans $g+\mathfrak{b}^\perp$ laisse fixe un point g' de $g+\mathfrak{b}^\perp$. La condition de Pukanszky montre que $g+\mathfrak{b}^\perp$ est l'ensemble des k-points de l'orbite de g' sous l'action du groupe unipotent ${}^u\mathbf{B}(b)$. Mais cet ensemble est égal à l'orbite de g' sous l'action du groupe ${}^u\mathbf{B}(b)_k$, d'où notre assertion.

6. *Définition.* On dit que la sous-algèbre coisotrope $\mathfrak{b}$ est de type unipotent si elle vérifie les conditions suivantes : elle est algébrique, elle vérifie la condition de Pukanszky, et il existe un facteur réductif de $\mathfrak{b}$ stabilisant la restriction de g à ${}^u\mathfrak{b}$.

7. *Définition.* On dit que la sous-algèbre coisotrope $\mathfrak{b}$ est de type fortement unipotent si elle est algébrique et si l'on a $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}(g)+{}^u\mathfrak{b}$.

8. *Définition.* On dit que la sous-algèbre de type unipotent $\mathfrak{b}$ est acceptable si la dimension de ses facteurs réductifs est maximale (quand $\mathfrak{b}$ parcourt l'ensemble des sous-algèbres de type unipotent relativement à g).

9. *Remarques.* Il est évident qu'une algèbre coisotrope unipotente est de type fortement unipotent.

Montrons qu'une algèbre de type fortement unipotent est de type unipotent. Il suffit pour cela de voir qu'elle vérifie la condition de Pukanszky. Notons ${}^{\mathrm{u}}\mathbf{B}$ le sous-groupe algébrique connexe d'algèbre ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$. L'ensemble ω du lemme 4 est égal à l'ensemble des k-points de l'orbite de g sous l'action du groupe unipotent $\mathbf{B}(b) \cap {}^{\mathrm{u}}\mathbf{B}$. C'est donc un fermé de Zariski. Il est donc égal à $g+\mathfrak{b}^{\perp}$.

Remarquons d'autre part qu'une algèbre coisotrope algébrique $\mathfrak{b}$ vérifiant la condition de Pukanszky et la relation $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}(b)+{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$, est de type fortement unipotent. C'est le cas en particulier des polarisations vérifiant la condition de Pukanszky. En effet, soit $\mathbf{R}$ un sous-groupe réductif maximal de $\mathbf{B}(b)$ défini sur k, et soit $\mathfrak{r}$ son algèbre de Lie. Le groupe $\mathbf{R}_k$, qui agit par affinités dans $g+\mathfrak{b}^{\perp}$, laisse fixe un point g' de $g+\mathfrak{b}^{\perp}$. La condition de Pukanszky montre que g et g' sont conjugués par $\mathbf{B}(b)_k$. On peut donc supposer que $\mathbf{R}$ a été choisi fixant g. Alors $\mathfrak{g}(g)$ contient $\mathfrak{r}$. Comme on a $\mathfrak{b}=\mathfrak{r}+{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$, on obtient $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}(g)+{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$, ce qui prouve notre assertion.

Formes de type unipotent

10. *Définition.* Un élément g de $\mathfrak{g}^*$ est dit de type unipotent si les deux conditions suivantes sont réalisées.

(U_1) Il existe un facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$ contenu dans $\ker g$.

(U_2) Il existe une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à g.

11. *Exemples.* Si $\mathfrak{g}$ est unipotente, tout élément de $\mathfrak{g}^*$ est de type unipotent (c'est évident). Si $\mathfrak{g}$ est réductive, 0 est l'unique forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ de type unipotent (cela résulte des lemmes 13 et 14 ci-dessous). Le cas des algèbres résolubles est étudié au n° 25.

12. *Remarque.* La condition (U_1) entraine que g s'annule sur tous les facteurs réductifs de $\mathfrak{g}(g)$, car ils sont tous conjugués par $G(g)$.

13. Dans ce n° on suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple. On note K la forme de Killing, au moyen de laquelle on identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$. Cela a donc un sens de dire qu'un élément de $\mathfrak{g}^*$ est semi-simple, ou nilpotent. On fixe g dans $\mathfrak{g}^*$.

LEMME. *La condition* (U_1) *est vérifiée si et seulement si g est nilpotente.*

Démonstration. Soit S un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{g}(S)=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b}$ est semi-simple, et où $\mathfrak{a}$ est le centre de $\mathfrak{g}(S)$. De plus $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont orthogonaux pour K, et la restriction de K à $\mathfrak{a}$ est non dégénérée (cf. [Bou2] ch. VII, § 1). Soit X l'élément de $\mathfrak{g}$ correspondant à g. Ecrivons $X=S+N$, où S est semi-simple, N nilpotent, et où S et X

commutent. Avec les notations ci-dessus, N est dans $\mathfrak{b}$, de sorte que $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\mathfrak{g}(X)$. De plus, on a $K(X, \mathfrak{a})=K(S, \mathfrak{a})$. Mais si X vérifie la condition (U_1), cela implique $S=0$. C.Q.F.D.

14. Les notations sont celles du n° 13.

LEMME. *Soit* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre coisotrope relativement à* g.

(i) (*Dixmier* [Di2]) *L'algèbre* $\mathfrak{b}$ *est parabolique.*

(ii) *L'algèbre* $\mathfrak{b}$ *est de type fortement unipotent si et seulement si* $\mathfrak{g}(g)$ *est un facteur réductif de* $\mathfrak{b}$. *Dans ce cas,* g *est semi-simple.*

Démonstration de (ii). Supposons $\mathfrak{b}$ de type fortement unipotent. Alors ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}g$ contient $\mathfrak{b}^{\perp}$. Mais comme $\mathfrak{b}$ est parabolique, ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}^{\perp}$ ont même dimension. On a donc ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}(g)=\{0\}$, et donc $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}(g)\oplus {}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$. Ceci entraine que $\mathfrak{g}(g)$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}$. La réciproque est évidente. C.Q.F.D.

Techniques de récurrence

15. Soit $\mathfrak{u}$ un idéal unipotent G-invariant de $\mathfrak{g}$ et soit $u \in \mathfrak{u}^*$. On pose $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(u)$, $\mathbf{H}=\mathbf{G}(u)$. On note $\mathbf{U}$ le sous-groupe unipotent de G d'algèbre $\mathfrak{u}$. On pose $U=\mathbf{U}_k$. Comme U n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini, U est un sous-groupe de G. On pose $H=G(u)$.

16. Les notations sont celles du n° 15. Soit g un elément de $\mathfrak{g}^*$ dont la restriction à $\mathfrak{u}$ est égale à u. On pose $h=g|\mathfrak{h}$.

LEMME (cf. [Pu] p. 500–501). *On a* $\mathbf{H}(h)=\mathbf{G}(g)\mathbf{U}(u)$, $H(h)=G(g)\,U(u)$, *et* $\mathfrak{h}(h)=\mathfrak{g}(g)+\mathfrak{u}(u)$. *On a* $U(u)\,g=g+(\mathfrak{h}+\mathfrak{u})^{\perp}$.

17. Les notations sont celles du n° 16.

LEMME. (i) *Soit* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *coisotrope relativement à* g. *On pose* $\mathfrak{c}=(\mathfrak{b}+\mathfrak{u})\cap\mathfrak{h}$. *Alors* $\mathfrak{c}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{h}$ *coisotrope relativement à* h. *Si* $\mathfrak{b}$ *vérifie la condition de Pukanszky (resp. est algébrique, de type unipotent, de type fortement unipotent, acceptable), il en est de même de* $\mathfrak{c}$. *Si* $\mathfrak{b}$ *est de type unipotent, il existe un facteur réductif de* $\mathfrak{b}$ *contenu dans* $\mathfrak{c}$, *et l'on a* ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{c}=({}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}+\mathfrak{u})\cap\mathfrak{h}$.

(ii) *Soit* $\mathfrak{c}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{h}$, *coisotrope relativement à* h. *Alors l'algèbre* $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}+\mathfrak{u}$ *est coisotrope relativement à* g. *Si* $\mathfrak{c}$ *vérifie la condition de Pukanszky (resp. est algébrique, de type unipotent, de type fortement unipotent, acceptable), il en est de même de* $\mathfrak{b}$.

Démonstration. (i) Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ comme dans l'énoncé. Il est facile de vérifier que $\mathfrak{c}$ est coisotrope, et que si $\mathfrak{b}$ est algébrique, ou vérifie la condition de Pukanszky, il en est de même de $\mathfrak{c}$.

Supposons $\mathfrak{b}$ de type unipotent. Soit $\mathfrak{r}$ un facteur réductif de $\mathfrak{b}$ stabilisant la restriction de g à ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace $\mathfrak{r}$-stable de $\mathfrak{u}$, supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{b}+\mathfrak{u}$. Soit g' un élément de $\mathfrak{g}^*$, nul sur $\mathfrak{m}$, et dont la restriction à $\mathfrak{b}$ est égale à celle de g. Il existe, d'après la condition de Pukanszky, un élément x de $\mathbf{B}(b)_k$ tel que $xg=g'$. D'autre part, $\mathfrak{r}$, stabilisant la restriction de g' à ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$ et à $\mathfrak{m}$, stabilise la restriction de g' à $\mathfrak{u}$. Remplaçant $\mathfrak{r}$ par $x^{-1}\mathfrak{r}$, on voit que l'on peut de plus choisir $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{r}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}+\mathfrak{u}$ stabilisant la restriction de g à ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}+\mathfrak{u}={}^{\mathrm{u}}(\mathfrak{b}+\mathfrak{u})$. Donc $\mathfrak{r}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{c}$, ce qui entraine l'égalité ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{c}=\mathfrak{h}\cap{}^{\mathrm{u}}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$. Naturellement, $\mathfrak{r}$ stabilise la restriction de g à ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{c}$, et donc $\mathfrak{c}$ est de type unipotent.

Supposons $\mathfrak{b}$ de type fortment unipotent. Soit $\mathfrak{r}$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$. D'après le lemme 16, c'est un facteur réductif de $\mathfrak{h}(h)$. Comme on a $\mathfrak{b}=\mathfrak{r}+{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$, on a $\mathfrak{b}+\mathfrak{u}=\mathfrak{r}+{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}+\mathfrak{u}$, et donc $\mathfrak{c}=\mathfrak{r}+{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{c}$. Donc $\mathfrak{c}$ est de type fortement unipotent.

De ce qui précède, on déduit que la dimension maximale d'un facteur réductif d'une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à g est minorée par celle relativement à h. Nous verrons dans la démonstration de (ii) qu'elle est en fait égale, ce qui entraine que si $\mathfrak{b}$ est acceptable, $\mathfrak{c}$ l'est aussi.

(ii) Soient $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{b}$ comme dans le lemme. Il est facile de voir que $\mathfrak{b}$ est coisotrope relativement à g. Il résulte du lemme 16 que si $\mathfrak{c}$ vérifie la condition de Pukanszky, il en est de même de $\mathfrak{b}$. Il est clair qu'un facteur réductif de $\mathfrak{c}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}$, ce qui entraine les autres assertions de l'énoncé. C.Q.F.D.

18. Les notations sont celles du n° 16.

LEMME. *La forme g est de type unipotent (resp. vérifie la condition* (U_1), *vérifie la condition* (U_2)) *si et seulement s'il en est de même de h.*

Démonstration. D'après le lemme 16, $\mathfrak{g}(g)$ et $\mathfrak{h}(h)$ ont des facteurs réductifs communs, ce qui démontre l'assertion relative à la condition (U_1). L'assertion relative à la condition (U_2) résulte du lemme 17. C.Q.F.D.

19. Les notations sont celles du n° 15.

LEMME. *On suppose que* $\mathfrak{u}$ *est le radical unipotent de* $\mathfrak{g}$, *et que l'on a* $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. *Alors il existe une, et une seule, forme linéaire g sur* $\mathfrak{g}$ *de type unipotent qui prolonge u, et l'on a* $\mathfrak{g}(g)=\mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{r}$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}$. Soit g la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ prolongeant u et dont la restriction à $\mathfrak{r}$ est nulle. On vérifie immédiatement que g ne dépend pas du choix de $\mathfrak{r}$, que $\mathfrak{g}(g)=\mathfrak{g}$, et que g est de type unipotent. Réciproquement, soit g une forme sur $\mathfrak{g}$ prolongeant u et de type unipotent. Posons $r=g|\mathfrak{r}$. On a $\mathfrak{g}(g)=\mathfrak{r}(r)+\mathfrak{u}$, ce qui entraine que r vérifie la condition (U_1). Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de type fortement unipotent relativement à g. Comme $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{g}(g)$, $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{u}$. Donc $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à r, et r vérifie la condition (U_2). Il résulte du n° 11 que r est nulle. C.Q.F.D.

20. Soit g un élément de $\mathfrak{g}^*$. Nous construisons dans ce numéro une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$, acceptable relativement à g. La construction est canonique, de sorte que nous appelerons $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre acceptable canonique. Elle est invariante par tout automorphisme de $\mathfrak{g}$ stabilisant g, et donc en particulier par $G(g)$.

La construction se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\dim\mathfrak{g}=0$, la construction est évidente. On suppose $\dim\mathfrak{g}>0$, et la construction faite pour les algèbres de dimension strictement inférieure. On note $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, on pose $u=g|\mathfrak{u}$, et on emploie les notations $\mathfrak{h}$ et h des n° 15 et 16. On distingue deux cas.

1^er^ *cas.* $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. On pose alors $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}$, et il est évident que $\mathfrak{b}$ est acceptable.

2^e^ *cas.* $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{c}$ la sous-algèbre acceptable canonique relativement à h. On pose $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}+\mathfrak{u}$. Alors $\mathfrak{b}$ est acceptable relativement à g d'après le lemme 17.

Remarquons que si g est de type unipotent, la sous-algèbre acceptable canonique est de type fortement unipotent (cela résulte des lemmes 17 et 19). En particulier, g admet une sous-algèbre de type fortement unipotent invariante par $G(g)$. Ce résultat joue un rôle essentiel au chapitre III.

21. En procédant de manière analogue au n° 20, les lemmes 18 et 19 permettent (en principe) de déterminer l'ensemble des formes de type unipotent sur $\mathfrak{g}$ par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

22. A la fin du n° 20, nous avons vu un cas particulier du lemme ci-dessous, qui se démontre de manière analogue par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

LEMME. *Soit g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$. Toute sous-algèbre de type unipotent relativement à g est de type fortement unipotent.*

23. Le lemme suivant donne caractérisation différente des formes de type unipotent.

LEMME. *Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On suppose qu'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de type unipotent relativement à g, et un facteur réductif $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{b}$ stabilisant la restriction de g à ${}^u\mathfrak{b}$ sur lequel g s'annule. Alors g est de type unipotent.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{r}$ comme dans l'énoncé. Dans le n° 9 nous avons montré que $\mathfrak{g}(g)$ contient un conjugué $x\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{r}$ par un élément x de $\mathbf{B}(b)_k$. Donc $x\mathfrak{r}$ est contenu dans le noyau de g et g vérifie la condition (U_1). Il résulte du n° 9 que $\mathfrak{b}$ est de type fortement unipotent, et donc g est de type unipotent. C.Q.F.D

24. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal unipotent de $\mathfrak{g}$ sur lequel g s'annule. Posons $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ et notons g' l'élément de $\mathfrak{g}'^*$ déduit de g par passage au quotient. Comme $\mathfrak{q}$ est contenu dans $\mathfrak{g}(g)$, toute sous-algèbre coisotrope $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contient $\mathfrak{q}$. On vérifie facilement que l'application $\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b}/\mathfrak{q}$ est bijective entre les ensembles d'algèbres coisotropes (resp. algébriques, de type unipotent, de type fortement unipotent, acceptables) relativement à g et g'. De même, g est de type unipotent si et seulement s'il en est de même de g'.

Formes de type unipotent pour les algèbres résolubles

25. Dans ce n°, on suppose $\mathfrak{g}$ résoluble, et on note $\mathfrak{u}$ son radical unipotent.

PROPOSITION. (i) *La condition (U_2) est toujours vérifiée. Donc un élément g de $\mathfrak{g}^*$ est de type unipotent si et seulement s'il vérifie la condition (U_1).*

(ii) *L'application de restriction de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{u}$ induit une bijection entre l'ensemble des G-orbites de type unipotent dans $\mathfrak{g}^*$, et l'ensemble des G-orbites dans $\mathfrak{u}^*$.*

Démonstration. (i) D'après le n° 20, il suffit de montrer que toute sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de type unipotent relativement à un élément g de $\mathfrak{g}^*$ est de type fortement unipotent. Soit $\mathfrak{r}$ un facteur réductif de $\mathfrak{b}$ stabilisant la restriction de g à ${}^u\mathfrak{b}$. Comme $\mathfrak{r}$ est abélien, on voit que $\mathfrak{r}$ est contenu dans $\mathfrak{b}(g|\mathfrak{b})$. Notre assertion résulte alors du n° 9.

(ii) Montrons que deux formes g et g' sur $\mathfrak{g}$, de type unipotent, et dont les restrictions u et u' à $\mathfrak{u}$ sont dans la même G-orbite, sont elles aussi dans la même G-orbite. On peut supposer que l'on a $u=u'$. Soit $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(u)$, et soit $\mathfrak{r}$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}(u)$. Le radical unipotent de $\mathfrak{h}$ est égal à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{u}=\mathfrak{u}(u)$. Notons h et h' les restrictions de g et g' à $\mathfrak{h}$. D'après le lemme 18, h et h' sont de type unipotent, et d'après le lemme 19, h et h' sont égales. Il résulte du lemme 16 que g et g' sont conjugués par U (cf. n° 15) et donc par G.

Réciproquement, soit $u \in \mathfrak{u}^*$. Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(u)$, et soit $\mathfrak{r}$ une composante réductive de $\mathfrak{h}$. On a $\mathfrak{h} + \mathfrak{u} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{u}$. Soit g un élément de $\mathfrak{g}^*$ nul sur $\mathfrak{r}$ et prolongeant u. Alors g est de type unipotent. C.Q.F.D.

Une partition de l'ensemble des orbites de la représentation coadjointe

26. Soit g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$. Nous notons $L(g)$ l'ensemble des formes linéaires λ sur $\mathfrak{g}(g)$ dont la restriction au radical unipotent ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{g}(g)$ de $\mathfrak{g}(g)$ est égale à celle de g. Si $\mathfrak{r}$ est une composante réductive de $\mathfrak{g}(g)$, la restriction est une bijection de $L(g)$ sur $\mathfrak{r}^*$. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des couples (g, λ) où g est une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et où λ est un élément de $L(g)$. Le groupe G opère naturellement dans $\mathscr{D}$.

Soit (g, λ) un élément de $\mathscr{D}$. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de type unipotent relativement à g. Soit f un élément de $\mathfrak{g}^*$ dont la restriction à ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$ est égale à celle de g, et dont la restriction à $\mathfrak{g}(g)$ est égale à λ. Un tel élément f existe, par définition de $L(g)$.

PROPOSITION. (i) *L'orbite Gf de f dans $\mathfrak{g}^*$ ne dépend pas des choix de $\mathfrak{b}$ et f. On la note $O_{g,\lambda}$.*

(ii) *L'application $(g, \lambda) \mapsto O_{g,\lambda}$ induit une bijection de $\mathscr{D}/G$ sur $\mathfrak{g}^*/G$.*

Démonstration. (i) Soit $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$. Montrons qu'il existe un conjugué f' de f tel que l'on ait $f'|\mathfrak{u} = g|\mathfrak{u}$ et $f'|\mathfrak{b} = f|\mathfrak{b}$.

Considérons un élément g' de $\mathfrak{g}^*$ tel que l'on ait $g'|\mathfrak{b} = g|b$, et $g'|\mathfrak{u} = f|\mathfrak{u}$. Un tel élément existe car, comme $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{b}$ est contenu dans ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$, f et g ont même restriction à $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{b}$. Posons $b = g|\mathfrak{b}$. Comme $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de Pukanszky, il existe $x \in {}^{\mathrm{u}}\mathbf{B}(g)_k$ tel que l'on ait $xg = g'$. Posons $x^{-1}f = f'$. Il est clair que f' et g ont même restriction à $\mathfrak{u}$. Pour démontrer que f et f' ont même restriction à $\mathfrak{b}$, on va montrer que l'on a $f(xX) = f(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{b}$. On écrit $x = \exp Y$ avec $Y \in {}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}(b)$, de sorte que l'on a $xX = X + [Y, X] + \frac{1}{2}[Y, [Y, X]] + \ldots = X + [Y, X']$, avec $X' \in \mathfrak{b}$. On a $f([Y, X']) = g([Y, X']) = 0$, car, comme $\mathfrak{b}$ est égal à $\mathfrak{b}(b) + {}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$, ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}(b)$ est contenu dans ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$, et $[Y, X']$ est dans ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$. Comme G contient le groupe ${}^{\mathrm{u}}\mathbf{B}(b)_k$, f et f' sont conjugués sous l'action de G, ce qui prouve notre assertion.

Nous pouvons donc supposer de plus que f et g ont même restriction u à $\mathfrak{u}$. On emploie les notations $\mathfrak{h}$, H, h et $\mathfrak{c}$ des n° 15, 16 et du lemme 17 (i). On pose $k = f|\mathfrak{h}$. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ comme dans le n° 20. On distingue deux cas.

1^er^ *cas.* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. D'après le lemme 19, $\mathfrak{b}$ est égal à $\mathfrak{g}$, de sorte que f est déterminé sans ambiguité.

2^e *cas.* $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. L'hypothèse de récurrence montre que l'orbite Hk de k dans $\mathfrak{h}^*$ ne dépend pas des choix faits. Le lemme 16 montre qu'il en est de même de f.

(ii) La démonstration de la bijectivité de l'application $\mathscr{D}/G \to \mathfrak{g}^*/G$ se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ comme ci-cessus. Je laisse les détails au lecteur.

27. Disons que deux éléments f et f' de $\mathfrak{g}^*$ sont u-équivalents s'il existe (g, λ) et (g, λ') dans $\mathscr{D}$ tels que l'on ait $f \in O_{g,\lambda}$ et $f' \in O_{g,\lambda'}$. On notera que chaque classe d'u-équivalence contient exactement une orbite de type unipotent, et que l'ensemble des orbites dans une classe d'u-équivalence donnée (disons celle qui contient un élément g de type unipotent donné) est en bijection avec l'ensemble des orbites de $G(g)$ dans $L(g)$.

Exemple. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, deux éléments f et f' de $\mathfrak{g}^*$ sont u-équivalents si et seulement si leurs restrictions au radical unipotent sont conjuguées sous l'action de G.

28. Soit $(g, \lambda) \in \mathscr{D}$. Soit $f \in O_{g,\lambda}$. On choisit un facteur réductif $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}(g)$, et on note μ la restriction de λ à $\mathfrak{r}$.

PROPOSITION. (i) *On a* $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f) = \dim \mathfrak{g}(g) + \dim \mathfrak{r}/\mathfrak{r}(\mu)$. *En particulier, si f est régulier, il en est de même de μ.*

Dans la suite de la proposition, on suppose le corps de base algébriquement clos.

(ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f admet une polarisation résoluble.*

(b) *μ admet une polarisation résoluble.*

(c) *μ est régulier.*

(iii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f admet une polarisation résoluble vérifiant la condition de Pukanszky.*

(b) *μ admet une polarisation résoluble vérifiant la condition de Pukanszky.*

(c) $\mathfrak{r}(\mu)$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{r}$.

(iv) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f vérifie la condition* (U_2).

(b) *μ vérifie la condition* (U_2).

(c) $\mathfrak{r}(\mu)$ *est réductive.*

Démonstration. (i) Soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre acceptable canonique relativement à g (cf. n° 20). On choisit f tel que $f|\mathfrak{g}(g)$ soit égal à λ et $f|^{u}\mathfrak{b}$ à $g|^{u}\mathfrak{b}$. Montrons que $\mathfrak{b}$ est aussi la sous-algèbre acceptable canonique relativement à f. On le fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{u}$, f et g ont même restriction u à $\mathfrak{u}$. On emploie les notations $\mathfrak{h}$, H, h, k, $\mathfrak{c}$ de la démonstration de la proposition 26 (i). On distingue deux cas.

1[er] *cas*. $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. Alors on a $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}$ d'après le lemme 19, et $\mathfrak{b}$ est l'algèbre acceptable caninique relativement à f d'après le n° 20.

2[e] *cas*. $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$. On voit facilement que l'on a $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}+\mathfrak{u}$ et que $\mathfrak{c}$ est la sous-algèbre acceptable canonique relativement à h. L'hypothèse de récurrence montre que $\mathfrak{c}$ est la sous-algèbre acceptable canonique relativement à k, et donc, d'après le n° 20, que $\mathfrak{b}$ est la sous-algèbre acceptable canonique relativement à f.

Posons $b'=f|\mathfrak{b}$. Comme b et b' ont même restriction à ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}$, on a ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}(b)={}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}(b')$. Comme $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de Pukanszky relativement à g et à f, on a ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}f={}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}g=\mathfrak{b}$, et donc $\dim{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}(f)=\dim{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}(g)$.

Pour démontrer la proposition (i), il suffit donc de démontrer que l'on a $\mathfrak{g}(f)+{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}(b)=\mathfrak{g}(g)(\lambda)+{}^{\mathrm{u}}\mathfrak{b}(b)$. Il est facile de montrer que chacune de ces deux algèbres est égale à $\mathfrak{b}(b')$, d'où le résultat.

(ii) Pour l'équivalence de b et c, voir par exemple [Di1]], 1.12.18. On démontre l'équivalence de a et b par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. On choisit f comme dans la démonstration de (i). On emploie les mêmes notations. On distingue les deux mêmes cas. Dans le premier cas, on a $f=\lambda$, et le résultat est évident. Plaçons nous dans le second cas. Alors f admet une polarisation résoluble si et seulement si il en est de même de k (cf. [Di1], 1.12.13). L'hypothèse de récurrence permet de conclure.

(iii) L'équivalence de b et c est démontrée en [Du3], II.7. L'équivalence de a et b se montre comme en (ii) ci-dessus.

(iv) Le fait que b entraine c résulte du lemme 14 (ii), et la réciproque est facile. Compte tenu du lemme 17, l'équivalence de a et b se montre comme en (ii).

Remarque. Avec les notations de la démonstration, on a $G(f){}^{\mathrm{u}}B(b)=G(g)(\lambda){}^{\mathrm{u}}B(b)$. On peut le démontrer par recurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

Chapitre II. Extensions des représentations des groupes unipotents

1. Ce chapitre est surtout destiné à faciliter la rédaction et la lecture du suivant, en introduisant les conventions et les notations, et en rappelant les résultats dont nous aurons alors besoin.

Conventions

2. Dans tout ce chapitre, k est égal soit à $\mathbf{R}$, soit à $\mathbf{Q}_p$ (le cas des groupes sur un corps local de caractéristique 0 se ramène à celui-là par restriction du corps des scalaires). On fixe un caractère unitaire non trivial $\varkappa$ de k. Si $\mathfrak{a}$ est un espace vectoriel sur k de dimension finie, l'application $a \mapsto \varkappa \circ a$ est un isomorphisme de groupes localement compacts de $\mathfrak{a}^*$ sur $\hat{\mathfrak{a}}$ (cf. [We1]).

Soit A un groupe localement compact séparable. Par représentation unitaire de A nous entendons représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert séparable. Soit π une représentation unitaire d'un sous-groupe fermé B de A dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. On note $\mathrm{Ind}_B^A(\pi)$ la représentation induite. Dans cet article, nous la réaliserons toujours par translations à gauche dans l'espace des fonctions α sur A, à valeurs dans $\mathscr{H}$, mesurables, vérifiant les relations

$$\alpha(xy) = \delta(y)^{1/2}\pi(y^{-1})\,\alpha(x) \quad \text{pour } x \in A,\ y \in B, \quad \text{et} \quad \int_{A/B} |\alpha(x)|^2\,dx < \infty$$

(cf. [Be] ch. V par exemple). Ici, δ est le quotient des fonctions module de A et de B.

Représentations des groupes unipotents

3. Dans tout ce chapitre, $\mathbf{U}$ est un groupe algébrique unipotent défini sur k. On note $\mathfrak{u}$ son algèbre de Lie (sur k). On pose $U = \mathbf{U}_k$. C'est un groupe localement compact, homéomorphe à $\mathfrak{u}$ par l'application exponentielle.

A tout élément u de $\mathfrak{u}^*$, la théorie de Kirillov (cf. [Ki] et [Moo]) associe un élément T_u de $\hat{U}$. Il nous faut rappeler quelques détails de cette construction.

Soit $u \in \mathfrak{u}^*$. On choisit une polarisation $\mathfrak{l}$ relativement à u (il en existe). Notons $\mathbf{L}$ le sous-groupe unipotent de $\mathbf{U}$ d'algèbre $\mathfrak{l}$, et posons $L = \mathbf{L}_k$. On note $T_{u|\mathfrak{l}}$ le caractère unitaire de L défini par la formule $T_{u|\mathfrak{l}}(\exp X) = \varkappa(u(X))$ pour tout $X \in \mathfrak{l}$. Nous dirons dans la suite que $T_{u|\mathfrak{l}}$ est le caractère de L associé à $u|\mathfrak{l}$. On note $\mathscr{H}(\mathfrak{l})$ l'espace de la représentation induite $\mathrm{Ind}_L^U(T_{u|\mathfrak{l}})$, et on note $T_{u|\mathfrak{l}}$ cette représentation.

Alors, la représentation $T_{u|\mathfrak{l}}$ est irréductible et sa classe d'équivalence ne dépend pas de $\mathfrak{l}$. On la note T_u. De plus, l'application $u \mapsto T_u$ induit un isomorphisme d'espaces boreliens de $\mathfrak{u}^*/U$ sur $\hat{U}$. C'est même un isomorphisme d'espaces topologiques ([Br] et [Ho]) mais nous n'aurons pas à utiliser ce fait.

4. Soit $u \in \mathfrak{u}^*$, et soient $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ deux polarisations relativement à u. D'après Lion-Perrin [Li-Pe], il existe un opérateur d'entrelacement canonique, que nous noterons

$F_{\mathfrak{l}',\mathfrak{l}}$ de $\mathcal{H}(\mathfrak{l})$ sur $\mathcal{H}(\mathfrak{l}')$. Il est défini par la propriété suivante : il existe une mesure invariante sur $L'/L\cap L'$ telle que, pour tout élément α de $\mathcal{H}(\mathfrak{l})$ lisse et à support compact modulo L, on ait :

$$F_{\mathfrak{l}',\mathfrak{l}}\,\alpha(x) = \int_{L'/L'\cap L} \alpha(xy)\, T_{u|\mathfrak{l}'}(y)\, dy$$

pour tout $x \in U$.

5. Les notations sont celles du n° 3. Soit H un groupe opérant dans $\mathfrak{u}$ par des automorphismes. En composant avec l'exponentielle, H opère dans U. On suppose que H stabilise u. Soit $x\in H$. On note $A(x)$ l'opérateur de $\mathcal{H}(\mathfrak{l})$ dans $\mathcal{H}(x\mathfrak{l})$ défini par la formule $A(x)\,\alpha(y)=\alpha(x^{-1}(y))$ pour tout $\alpha\in\mathcal{H}(\mathfrak{l})$ et tout $y\in U$. On définit un opérateur unitaire $S'_{u,\mathfrak{l}}(x)$ dans $\mathcal{H}(\mathfrak{l})$ en posant $S'_{u,\mathfrak{l}}=\|A(x)\|^{-1}F_{\mathfrak{l},x\mathfrak{l}}A(x)$. Plus généralement, si on a choisi un modèle (noté encore T_u) de T_u dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et si P est un opérateur d'entrelacement de $\mathcal{H}(\mathfrak{l})$ sur $\mathcal{H}$, on pose encore $S'_{u,\mathfrak{l}}(x)=PS'_{u,\mathfrak{l}}(x)\,P^{-1}$.

D'après [Li-Pe], $S'_{u,\mathfrak{l}}$ est une représentation projective de H dans $\mathcal{H}$, et, pour tout $x\in H$ et tout $y\in U$, on a

$$S'_{u,\mathfrak{l}}(x)\,T_u(y)\,S'_{u,\mathfrak{l}}(x)^{-1} = T_u(x(y)).$$

Le groupe métaplectique

6. Soit $\mathfrak{m}$ un espace vectoriel symplectique non nul sur k, i.e. un espace vectoriel non nul de dimension finie muni d'une forme bilinéaire B alternée non dégénérée. On note $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}+kE$, où le crochet est ainsi défini $[v+tE, v'+t'E]=B(v,v')\,E$. On note $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ le groupe des automorphismes symplectiques de $\mathfrak{m}$. Il opère dans $\mathfrak{n}$ par la formule $x(v+tE)=xv+tE$. On note $\mathbf{N}$ le groupe unipotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$; on pose $N=\mathbf{N}_k$. Le groupe $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ opère dans N.

On note E^* l'élément de $\mathfrak{n}^*$ nul sur $\mathfrak{m}$ et tel que $E^*(E)=1$. Il est stable par l'action de $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$. On pose $T=T_{E^*}$, et on choisit un modèle de T dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})^{\sim}$ l'ensemble des opérateurs A unitaires dans $\mathcal{H}$ tels qu'il existe $x\in\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ tel que l'on ait $AT(y)A^{-1}=T(x(y))$ pour tout $y\in N$. L'élément x est uniquement déterminé par A. On note $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ le groupe des commutateurs de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})^{\sim}$. On le munit de la topologie de la convergence forte. D'après, Shale [Sh] pour $k=\mathbf{R}$, et Weil [We2] en général, l'application $A\mapsto x$ de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ dans $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ est un homorphisme surjectif, et son noyau a deux éléments. Nous noterons S la représentation identique

$(S(\hat{x})=\hat{x})$ de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ dans $\mathscr{H}$. Le groupe $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ s'appelle le groupe métaplectique, et la représentation S la représentation métaplectique, associés à $\mathfrak{m}$.

Soit $\mathfrak{l}$ une polarisation en E^*. Posons $S'_{\mathfrak{l}}=S'_{E^*,\mathfrak{l}}$. C'est une représentation projective de $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ dans $\mathscr{H}$ (cf. le n° 5). Soit $\hat{x}\in\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ un élément dont l'image dans $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ sera notée x. Alors il existe un nombre complexe de module 1, noté $\varphi_{\hat{x}}(\mathfrak{l})$ tel que l'on ait

$$S(\hat{x}) = \varphi_{\hat{x}}(\mathfrak{l})\, S'_{\mathfrak{l}}(x).$$

Si $\mathfrak{p}$ est un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{p}+kE$ est une polarisation en E^*, et nous poserons $\varphi_{\hat{x}}(\mathfrak{p})=\varphi_{\hat{x}}(\mathfrak{p}+kE)$.

Donc, si $\hat{x}\in\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$, $\varphi_{\hat{x}}$ est une fonction sur l'espace des sous-espaces lagrangiens de $\mathfrak{m}$, à valeurs dans les nombres complexes de module 1. Cette fonction a été calculée par Lion (pour $k=\mathbf{R}$) et par Perrin (pour $k=\mathbf{Q}_p$) (cf. [Li], [Pe], ou [Li-Ve]).

L'application $\hat{x}\mapsto(x, \varphi_{\hat{x}})$ de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ dans le produit de $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ par l'ensemble des fonctions à valeurs complexes sur l'ensemble des lagrangiens de $\mathfrak{m}$ est injective. Dans la suite, nous identifierons $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ et son image par cette application, ce qui veut dire que nous noterons (x, φ) l'élément $\hat{x}$ de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ dont l'image dans $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ est x, et tel que $\varphi_{\hat{x}}=\varphi$. Soient (x, φ) et (x', φ') des éléments de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$. La fonction φ'' telle que l'on ait $(x, \varphi)(x', \varphi')=(xx', \varphi'')$ est calculée dans les références ci-dessus.

Remarquons qu'avec ces notations. l'élément non trivial du noyau de la projection de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ sur $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ s'écrit $(1, -1)$, et que la représentation métaplectique S vérifie la relation

$$S(x, \varphi) = \varphi(\mathfrak{l})\, S'_{\mathfrak{l}}(x)$$

quels que soient (x, φ) dans $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m})$ et la polarisation $\mathfrak{l}$.

7. Soit $\mathfrak{m}$ un espace vectoriel de dimension finie sur k, muni d'une forme bilinéaire alternée B (nous ne supposons plus que B est non dégénérée). Soit H un groupe opérant linéairement dans $\mathfrak{m}$ en préservant B. Notons $\mathfrak{m}^{\perp}$ le noyau de B. Alors B induit une structure symplectique sur $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp}$, invariante par l'action de H. Si $\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}^{\perp}$, le groupe $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp})$ a été défini au n° 6. Si $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^{\perp}$, nous posons $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp})=\{\pm 1\}$. Nous noterons $H^{\mathfrak{m}}$ l'ensemble des couples (x, m) où $x\in H$ et $m\in\mathrm{Mp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp})$ ont même image dans $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp})$. Soit $m\in\mathrm{Mp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp})$. Si $\mathfrak{l}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{l}/\mathfrak{m}^{\perp}$ est un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp}$, et nous poserons $\varphi_m(\mathfrak{l})=\varphi_m(\mathfrak{l}/\mathfrak{m}^{\perp})$.

On peut donc décrire $H^{\mathfrak{m}}$ comme l'ensemble des couples (x, φ), où $x\in H$, et où φ

est une fonction à valeurs complexes sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{m}$, tels que, notant $\bar{x}$ l'image de x dans $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp})$, et identifiant comme ci-dessus φ à une fonction sur l'ensemble des lagrangiens de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp}$, l'on ait $(\bar{x}, \varphi) \in \mathrm{Mp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\perp})$.

On remarquera que l'on a $H^{\mathfrak{m}} = H^{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}$ pour tout sous-espace $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{m}$ H-invariant contenu dans $\mathfrak{m}^{\perp}$. D'autre part, $H^{\mathfrak{m}}$ est un revêtement d'ordre deux de H, naturellement muni d'une topologie si H lui-même est un groupe topologique.

Soit Γ un sous-groupe de H opérant trivialement dans $\mathfrak{m}$. Alors l'application $\gamma \mapsto (\gamma, 1)$ de Γ dans $H^{\mathfrak{m}}$ est un homomorphisme et identifie Γ à un sous-groupe de $H^{\mathfrak{m}}$.

8. Les notations sont celles du n° 7. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace vectoriel H-invariant de $\mathfrak{m}$. On suppose que l'orthogonal $\mathfrak{a}^{\perp}$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{m}$ est contenu dans $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^{\perp}$. Les groupes $H^{\mathfrak{m}}$ et $H^{\mathfrak{a}}$ sont définis. Un élément de $H^{\mathfrak{a}}$ s'écrit (x, ψ), où $x \in H$, et où ψ est une fonction sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{k}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{k}+\mathfrak{m}^{\perp}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal dans $\mathfrak{m}$.

LEMME. (i) *Soient* $(x, \varphi) \in H^{\mathfrak{m}}$ *et* $(x, \psi) \in H^{\mathfrak{a}}$. *Le nombre* $\varphi(\mathfrak{k}+\mathfrak{m}^{\perp})\psi(\mathfrak{k})^{-1}$ *ne dépend pas du sous-espace totalement isotrope maximal* $\mathfrak{k}$ *de* $\mathfrak{a}$. *On le note* $\varphi\psi^{-1}$.

(ii) *Soient* (x, φ), $(x', \varphi') \in H^{\mathfrak{m}}$ *et* (x, ψ), $(x', \psi') \in H^{\mathfrak{a}}$. *On pose* $(x, \varphi)(x', \varphi') = (xx', \varphi'')$ *et* $(x, \psi)(x', \psi') = (xx', \psi'')$. *On a* $\varphi''\psi''^{-1} = (\varphi\psi^{-1})(\varphi'\psi'^{-1})$.

Démonstration. On peut déduire ces résultats des formules de [Li-Ve] calculant $\varphi(\mathfrak{l})\varphi(\mathfrak{l}')^{-1}$ lorsque $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ sont deux sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{m}$, et des formules analogues pour ψ, en fonction de l'indice de Maslov. Pour la commodité du lecteur, j'écris une démonstration n'utilisant que les définitions du n° 6.

Compte tenu des remarques du n° 7, on peut supposer que $\mathfrak{m}^{\perp}$ est nul, ce que nous faisons ci-dessous. On suppose de plus que $\mathfrak{m}$ est non nul (sinon les résultats sont évidents). On adopte les notations du n° 6. On pose $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}+kE$. C'est une sous-algèbre de $\mathfrak{n}$, coisotrope relativement à E^*. On note B le sous-groupe correspondant de N. Le sous-espace $\mathfrak{a}^{\perp}$ de $\mathfrak{m}$ est contenu dans $\mathfrak{a}$, et c'est un idéal de $\mathfrak{b}$. Posons $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^{\perp}+kE_1$, notons N_1 le groupe correspondant, et T_1 la représentation unitaire irréductible correspondante de N_1 (construite comme au n° 6). Dans l'espace $\mathscr{H}_1$ de T_1, le groupe $\mathrm{Mp}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^{\perp})$ opère par la représentation métaplectique que nous noterons S_1. Nous notons encore S_1 la représentation de $H^{\mathfrak{a}}$ obtenue par composition. Notons $A^{\perp}$ le sous-groupe de B correspondant à $\mathfrak{a}^{\perp}$. Alors N_1 s'identifie naturellement à $B/A^{\perp}$; on note encore T_1 la représentation de B obtenue par composition. Comme $\mathfrak{b}$ contient des polarisations relativement à E^*, le théorème d'induction par étage montre que T est égale à $\mathrm{Ind}_B^N T_1$. Dans la suite, nous notons $\mathscr{H}$ l'espace de la représentation $\mathrm{Ind}_B^N T_1$, comme défini au n° 2.

Soit x un élément de H. Soit P un opérateur unitaire dans l'espace $\mathscr{H}_1$ tel que l'on ait $PT_1(y)P^{-1}=T_1(x(y))$ pour tout $y\in B$. Il existe une constante $c>0$ telle que la formule $(P^{\sim}\alpha)(y)=cP\alpha(x(y))$, (avec $\alpha\in\mathscr{H}$, et $y\in N$), définisse un opérateur unitaire $P^{\sim}$ dans $\mathscr{H}$. Il est facile de voir que $P^{\sim}$ verifie la relation $P^{\sim}T(y)P^{\sim-1}=T(x(y))$ pour tout $y\in N$.

Soit $\mathfrak{l}$ une polarisation en E^*, contenue dans $\mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{l}_1=\mathfrak{l}/\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{n}_1$, polarisation relativement à E_1^*. Au n° 6, nous avons défini la représentation projective $S_{\mathfrak{l}}'$ de $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m})$ dans $\mathscr{H}$. Par composition, on obtient une représentation projective de H dans $\mathscr{H}$ notée encore $S_{\mathfrak{l}}'$. De manière analogue, on obtient une représentation projective $S_{\mathfrak{l}_1}'$ de H dans $\mathscr{H}_1$. On vérifie (c'est essentiellement une application du théorème d'induction par étages) que l'on a $S_{\mathfrak{l}_1}'(x)^{\sim}=S_{\mathfrak{l}}'(x)$ pour tout $x\in H$.

Par définition de φ et de ψ, si $(x,\varphi)\in H^{\mathfrak{m}}$ et si $(x,\psi)\in H^{\mathfrak{a}}$, on a $\varphi(\mathfrak{l})\,S_{\mathfrak{l}}'(x)=S(x,\varphi)$ et $\psi(\mathfrak{l})\,S_{\mathfrak{l}_1}'(x)=S_1(x,\psi)$. De la seconde relation, on tire $\psi(\mathfrak{l})\,S_{\mathfrak{l}}'(x)=S_1(x,\psi)^{\sim}$, et de la première $S_1(x,\psi)^{\sim}=\psi(\mathfrak{l})\,\varphi(\mathfrak{l})^{-1}S(x,\varphi)$.

Les deux assertions du lemme résultent de cette formule. C.Q.F.D.

9. Les notations sont celles du n° 7. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace vectoriel H-invariant de $\mathfrak{m}$. Notons $\mathfrak{b}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{m}$. Il est aussi H-invariant, de sorte que sont définis les groupes $H^{\mathfrak{m}}$, $H^{\mathfrak{a}}$, et $(H^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}$. Des éléments typiques de ces groupes s'écrivent (x,φ), (x,ψ) et (x,ψ,θ), où $x\in H$, et où φ, ψ et θ sont des fonctions sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ respectivement. Si $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{c}$ sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ respectivement, alors $\mathfrak{k}+\mathfrak{c}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathfrak{m}$.

LEMME. (i) *Soient $(x,\varphi)\in H^{\mathfrak{m}}$ et $(x,\psi,\theta)\in(H^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}$. Le nombre $\varphi(\mathfrak{k}+\mathfrak{c})\,\psi(\mathfrak{k})^{-1}\theta(\mathfrak{c})^{-1}$ ne dépend pas des sous-espaces totalement isotropes maximaux $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ respectivement. On le note $\varphi\psi^{-1}\theta^{-1}$.*

(ii) *Soient (x,φ), $(x',\varphi')\in H^{\mathfrak{m}}$ et (x,ψ,θ), $(x',\psi',\theta')\in(H^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}$. On pose $(x,\varphi)(x',\varphi')=(xx',\varphi'')$ et $(x,\psi,\theta)(x',\psi',\theta')=(xx',\psi'',\theta'')$. On a $\varphi''\psi''^{-1}\theta''^{-1}=(\varphi\psi^{-1}\theta^{-1})(\varphi'\psi'^{-1}\theta'^{-1})$.*

Démonstration. Le lemme 8, appliqué au sous-espace $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{m}$, permet de se ramener au cas où $\mathfrak{m}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. De plus nous pouvons supposer que $\mathfrak{m}^{\perp}$ est nul. Changeons les notations et posons $\mathfrak{a}=\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{b}=\mathfrak{m}_2$. Alors $\mathfrak{m}$ est somme directe de $\mathfrak{m}_1$ et de $\mathfrak{m}_2$, et $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ sont des espaces symplectiques dans lesquels H opère. Nous pouvons supposer $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ non nuls (sinon le lemme est évident). Comme dans le n° 6, on peut définir l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_1$, que l'on peut identifier à une sous-algèbre de $\mathfrak{n}$, le groupe N_1, la représentation irréductible T_1 de N_1 dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_1$, et la représentation métaplectique S_1 de $\mathrm{Mp}(\mathfrak{m}_1)$. Si $\mathfrak{l}_1$ est une polarisation dans l'algèbre $\mathfrak{n}_1$, on définit la représentation projective $S'_{\mathfrak{l}_1}$ de $\mathrm{Sp}(\mathfrak{m}_1)$. Nous notons par les mêmes lettres les représentations de $H^{\mathfrak{m}_1}$, et la représentation projective de H, obtenues par composition. On fait de même pour $\mathfrak{n}_2, N_2$, etc .... On considère N_1 et N_2 comme des sous-groupes de N. On a $N=N_1N_2$, et T est équivalente à la représentation obtenue dans le produit tensoriel $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ par la formule $T(n_1n_2)=T_1(n_1)\otimes T_2(n_2)$. Soient $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$ des polarisations dans $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$, et posons $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_1+\mathfrak{l}_2$. C'est une polarisation dans $\mathfrak{n}$. On vérifie facilement que l'on a $S'_{\mathfrak{l}}(x)=S'_{\mathfrak{l}_1}(x)\otimes S'_{\mathfrak{l}_2}(x)$ pour tout $x\in H$.

Soient $(x,\varphi)\in H^{\mathfrak{m}}$, et $(x,\varphi_1,\varphi_2)\in(H^{\mathfrak{m}_1})^{\mathfrak{m}_2}$. On a $(x,\varphi_i)\in H^{\mathfrak{m}_i}$ pour $i=1$ et 2. Appliquant la définition de φ, φ_1, φ_2, on trouve $\varphi_1(\mathfrak{l}_1)\varphi_2(\mathfrak{l}_2)\varphi(\mathfrak{l})^{-1}S(x,\varphi)=S_1(x,\varphi_1)\otimes S_2(x,\gamma_2)$. Le lemme résulte facilement de cette formule. C.Q.F.D.

Extensions des représentations des groupes unipotents

10. Les notations sont celles du n° 5. L'espace $\mathfrak{u}$ est muni de la forme bilinéaire alternée B_u, de sorte que le groupe $H^{\mathfrak{u}}$ est défini comme au n° 7. Pour $(x,\varphi)\in H^{\mathfrak{u}}$, on pose $S_{u,\mathfrak{l}}(x,\varphi)=\varphi(\mathfrak{l})\,S'_{u,\mathfrak{l}}(x)$.

PROPOSITION (Lion-Perrin [Li-Pe]). (i) *Soit $(x,\varphi)\in H^{\mathfrak{u}}$. L'opérateur $S_{u,\mathfrak{l}}(x,\varphi)$ ne dépend pas du choix de la polarisation $\mathfrak{l}$ en $\mathfrak{u}$. On le note $S_u(x,\varphi)$.*

(ii) *S_u est une représentation de $H^{\mathfrak{u}}$. Elle vérifie :*

$$S_u(x,\varphi)\,T_u(y)\,S_u(x,\varphi)^{-1}=T_u(x(y))$$

pour tout $(x,\varphi)\in H^{\mathfrak{u}}$ et tout $y\in U$.

Lorsque $k=\mathbf{R}$, une définition équivalente de S_u se trouve dans [Du1].

11. La démonstration du lemme ci-dessous m'a été indiquée par D. Wigner.

LEMME. *Soit U comme au n° 2. Soient V un groupe localement compact séparable, F un sous-groupe central fini de V, et π un homomorphisme de V sur U de* *noyau F. Il existe dans V un sous-groupe fermé, et un seul, tel que la restriction de π à ce sous-groupe soit un isomorphisme de ce sous-groupe sur U.*

Remarque. Dans les conditions du lemme, nous identifierons en général U au sous-groupe de V qui lui est canoniquement isomorphe.

Démonstration. Si $k=\mathbf{R}$, le résultat est clair. Nous supposons ci-dessous que k est égal à $\mathbf{Q}_p$. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{u}$.

On étudie d'abord le cas où $\mathfrak{u}$ est de dimension 1. On a alors une extension centrale

$$1 \to F \to V \to \mathbf{Q}_p \to 1.$$

Montrons que V est commutatif. Comme $\mathbf{Q}_p$ est réunion de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}_p$ (le groupe des entiers p-adiques), il suffit de montrer qu'une extension centrale finie de $\mathbf{Z}_p$ est commutative. Soit W une telle extension. Soit w un élément de W dont la projection sur $\mathbf{Z}_p$ est égale à 1. Le sous-groupe de W engendré par F et W est abélien, et dense dans W. Donc W est abélien. Soit n l'ordre de F. On considère le morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbf{F} & \to & V & \to & \mathbf{Q}_p & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathbf{F} & \to & V & \to & \mathbf{Q}_p & \to & 0 \end{array}$$

où les groupes sont notés additivement, et où chaque flêche verticale est la multiplication par n. La première flêche est nulle, la troisième est un isomorphisme. Le lemme du serpent montre que l'image de la seconde flêche est un supplémentaire de F dans V. Comme $\mathbf{Q}_p$ n'a pas de caractère non trivial d'ordre fini, on voit que V contient au plus un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Q}_p$ par la projection.

Supposons maintenant la dimension de $\mathfrak{u}$ strictement positive, et le résultat établi pour les algèbres unipotentes de dimension inférieure. Choisissons une sous-algèbre invariante $\mathfrak{u}'$ de codimension 1 de $\mathfrak{u}$, et une sous-algèbre supplémentaire $\mathfrak{u}''$. Notons U' et U'' les sous-groupes correspondants de U, de sorte que U est isomorphe au produit semi-direct $U'U''$. L'hypothèse de récurrence permet de relever U' et U'' en des sous-groupes $\tilde{U}'$ et $\tilde{U}''$ de V. L'unicité du relèvement entraine que $\tilde{U}'$ est invariant, et donc que $\tilde{U}'\tilde{U}''$ est un sous-groupe de V qui, évidemment, convient. C.Q.F.D.

12. Soit U comme au n° 2. Soit G un groupe localement compact séparable contenant U comme sous-groupe invariant fermé. Alors G opère dans U par automorphismes intérieurs, et ceux-ci sont analytiques (pour la structure de groupe analytique de U sur k), d'après [Bou1], p. 225. Donc G opère dans $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}^*$. Il opère aussi dans U.

LEMME. *Soit $u \in \mathfrak{u}^*$. Le stabilisateur de T_u dans G est le groupe $G(u)\,U$.*

Démonstration. Soit A un automorhisme du groupe localement compact U. Montrons que A est restriction à U d'un automorphisme $\bar{A}$ du groupe algébrique $\mathbf{U}$, défini sur k. D'après [Bou1], p. 225, A est analytique. Comme U est unipotent, il existe un unique automorphisme $\bar{B}$ de $\mathbf{U}$ induisant le même automorphisme de $\mathfrak{u}$ que A. Notons B la restriction de $\bar{B}$ à U. Il faut montrer que A et B sont égaux. C'est évident si $k=\mathbf{R}$. On suppose $k=\mathbf{Q}_p$. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{u}$. Supposons d'abord U abélien, et notons le additivement. Soit $x \in U$. Si n est assez grand, $p^n x$ est voisin de 0, de sorte que : $A(p^n x)=B(p^n x)$. On en déduit $p^n A(x)=p^n B(x)$, et $A(x)=B(x)$. Si U n'est pas abélien, soit Z le centre de U. L'hypothèse de récurrence montre que A et B sont égaux sur Z et U/Z, et donc sont égaux.

Par transport de structure, on a $T_{Au}={}^{A}T_u$. Il en résulte que ${}^{A}T_u$ est égal à T_u si et seulement si Au appartient à Uu. C.Q.F.D.

13. Soient G et U comme au n° 12. On fixe un sous-groupe Γ du centre de G, et un caractère unitaire η de Γ. Soit $u \in \mathfrak{u}^*$. Notons χ_u le caractère de $U(u)$ correspondant à $u|\mathfrak{u}(u)$. On dit que u est η-admissible si χ_u et η ont même restriction à $\Gamma \cap U$. (Ceci est toujours le cas si $\Gamma \cap U=\{1\}$).

On note $\mathfrak{q}$ le noyau de u dans $\mathfrak{u}(u)$, $\mathbf{Q}$ le sous-groupe unipotent correspondant de U, $Q=\mathbf{Q}_k$. Le groupe $G(u)$ opère dans $\mathfrak{u}$ en stabilisant la forme B_u. Le groupe $G(u)^{\mathfrak{u}}$ est donc défini. On le note H. D'après le lemme 11, H contient un unique sous-groupe isomorphe à $U(u)$ par la projection. Nous identifierons ce sous-groupe à $U(u)$. On note Γ' l'image réciproque de Γ dans H, et η' le caractère de Γ' défini par la formule $\eta'(\gamma, \pm 1)=\pm\eta(\gamma)$. Si u est η-admissible, il existe un unique caractère du groupe $\Gamma' U(u)$ qui prolonge χ_u et η'. Nous le notons encore η'.

On pose $G_1=H/Q$, $\Gamma_1=\Gamma' U(u)/Q$. Alors Γ_1 est un sous-groupe central de G_1. Si de plus u est η-admissible, on note η_1 le caractère de Γ_1 obtenu à partir de η' par passage au quotient.

14. Les notations sont celles du n° 13. Si E est une représentation unitaire de H dont la restriction à $U(u)$ est le caractère χ_u, et telle que l'on ait $E(1,-1)=-\mathrm{Id}$, on définit une représentation unitaire, notée $E \otimes S_u T_u$, du groupe $G(u)\,U$. Cette représentation opère dans le produit tensoriel de l'espace de E et de l'espace de T_u par la formule,

$$(E \otimes S_u T_u)(xy) = E(\hat{x}) \otimes S_u(\hat{x}) T_u(y),$$

où y est dans U, x dans $G(u)$, et $\hat{x}$ un représentant de x dans H. (On vérifie que cette définition a un sens, cf. [Li-Pe].)

Si T_1 est la représentation de G_1 déduite de E par passage au quotient, on pose

$$T_1 \otimes S_u T_u = E \otimes S_u T_u.$$

On considère la représentation

$$T = \mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(E \otimes S_u T_u).$$

Dans la proposition ci-dessous, on suppose que u est η-admissible (ce qui est toujours vrai si $U \cap \Gamma = \{1\}$).

PROPOSITION. (i) *L'application* $T_1 \mapsto T$ (*resp.* $E \mapsto T$) *induit une bijection entre l'ensemble des classes de représentations unitaires de* G_1 (*resp.* H) *dont la restriction à* Γ_1 (*resp.* $\Gamma'\mathrm{U}(u)$) *est un multiple de* η_1 (*resp.* η'), *sur l'ensemble des classes de représentations unitaires de* G *dont la restriction à* Γ *est un multiple du caractère* η, *et la restriction à* U *portée par l'orbite de* T_u *dans* $\hat{U}$ *sous l'action de* G.

Cette bijection induit des isomorphismes des espaces d'opérateurs d'entrelacement. En particulier, T *et* T_1 *ont des commutants isomorphes. Donc* T *est irréductible si et seulement s'il en est de même de* T_1.

(ii) *Supposons de plus que les orbites de* G *dans* $\mathfrak{u}^*$ *soient localement fermées. Toutes les représentations factorielles de* G *dont la restriction à* Γ *est un multiple de* η *sont obtenues par le procédé ci-dessus à partir d'un choix convenable d'un élément* η-*admissible* u *de* $\mathfrak{u}^*$.

Remarque. Cette proposition résume la « théorie de Mackey » pour le groupe unipotent U. Comme je l'ai dit dans l'introduction, le but de cet article est d'extraire de cette proposition le maximum d'informations sur le dual unitaire d'un groupe algébrique sur le corps k.

Démonstration. Compte tenu de la proposition 10, tout ceci provient de la théorie de Mackey [Ma], de ce que U est de type 1, et de ce que la bijection de Kirillov $\mathfrak{u}^*/U \to \hat{U}$ est un isomorphisme d'espaces boréliens. C.Q.F.D.

15. Les notations sont celles du n° 14. Soit B un sous-groupe fermé de G contenant ΓU. On note B_1 le groupe $B(u)^{\mathfrak{u}}/Q$; c'est un sous-groupe fermé de G_1 contenant Γ_1. Soit R_1 une représentation unitaire de B_1 dont la restriction à Γ_1 soit un multiple de η_1. On peut former la représentation $R=\mathrm{Ind}_{B(u)\,U}^{B}(R_1\otimes S_u\,T_u)$ de B, et la représentation $T'=\mathrm{Ind}_B^G(R)$ de G. D'autre part, on peut former la représentation $T_1=\mathrm{Ind}_{B_1}^{G_1}(R_1)$ de G_1 et la représentation $T=\mathrm{Ind}_{G(u)\,U}^{G}(T_1\otimes S_u\,T_u)$ de G.

PROPOSITION. *Les représentations T et T' sont équivalentes.*

Démonstration. Le théorème d'induction par étages montre que l'on a $T'=\mathrm{Ind}_{B(u)\,U}^{G}(R_1\otimes S_u\,T_u)$. Le même théorème montre qu'il suffit de démontrer que l'on a $T_1\otimes S_u\,T_u=\mathrm{Ind}_{B(u)\,U}^{G(u)\,U}(R_1\otimes S_u\,T_u)$. On est donc ramené à démontrer la proposition lorsque G est égal à $G(u)\,U$. Nous supposons ci-dessous que l'on a $G=G(u)\,U$. On a alors $T=T_1\otimes S_u\,T_u$ et $T'=\mathrm{Ind}_{B(u)\,U}^{G}(R_1\otimes S_u\,T_u)$.Nous noterons $\mathscr{K}$ l'espace de R_1 et $\mathscr{H}$ l'espace de T_u.

La représentation T est réalisée dans l'espace des fonctions α sur G_1 qui sont mesurables, à valeurs dans $\mathscr{K}\otimes\mathscr{H}$, et vérifient les relations

$$\alpha(\bar{z}\bar{v})=\tilde{\delta}(\bar{v})^{1/2}(R_1(\bar{v})^{-1}\otimes \mathrm{Id})\,\alpha(\bar{z}),$$

pour tout $\bar{z}\in G_1$ et tout $\bar{v}\in B_1$, et

$$\int_{G_1/B_1}|\alpha(\bar{z})|^2\,d\bar{z}<\infty.$$

Ici, $\tilde{\delta}$ est le quotient des fonctions modules de G_1 et B_1. La représentation T est donnée par la formule,

$$(T(xy)\,\alpha)\,(z)=\mathrm{Id}\otimes S_u(\hat{x})\,T_u(y))\,\alpha(\bar{x}^{-1}\bar{z})$$

où $x\in G(u)$, $y\in U$, $\hat{x}\in H$ est un élément représentant x, et $\bar{x}$ l'image de $\hat{x}$ dans G_1.

Compte tenu de la relation $G(u)\,U=G$, T' est réalisée dans l'espace des fonctions β sur $G(u)$ à valeurs dans $\mathscr{K}\otimes\mathscr{H}$, qui sont measurables, et qui vérifient les relations

$$\beta(zv)=\delta(v)^{1/2}(R_1(\bar{v})^{-1}\otimes S_u(\hat{v})^{-1})\,\beta(z),$$

pour $z\in G(u)$, $v\in B(u)$, $\hat{v}$ un élément de $B(u)^{\mathrm{u}}$ représentant v, $\bar{v}$ l'image de v dans B_1, et

$$\int_{G(u)/B(u)}|\beta(z)|^2\,dz<\infty.$$

Ice, δ est le quotient des fonctions modules de $G(u)$ et de $B(u)$. Soient $x\in G(u)$, $y\in U$, $z\in G(u)$. Ecrivant $y^{-1}x^{-1}z=x^{-1}zz^{-1}xy^{-1}x^{-1}z$, on obtient,

$$(T'(xy)\beta)(z) = (\mathrm{Id} \otimes T_u(z^{-1}xyx^{-1}z))\beta(x^{-1}z).$$

Etant donné α dans l'espace de la représentation T, nous posons, pour tout $z \in G(u)$

$$\beta(z) = (\mathrm{id} \otimes S_u(\hat{z})^{-1})\,\alpha(\bar{z}),$$

où $\hat{z}$ est un représentant de z dans H, et $\bar{z}$ son image dans G_1. Il est facile de vérifier que l'application $\alpha \mapsto \beta$ est un opérateur d'entrelacement unitaire et inversible entre T et T'. C.Q.F.D.

Application aux représentations de carré intégrable

16. Les notations sont celles du n° 14. On suppose Γ fermé dans G. On rappelle qu'une représentation irréductible T de G dont la restriction à Γ est un multiple de η est dite de carré intégrable modulo Γ si T intervient discrètement dans la représentation $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\eta)$. Nous noterons $\Delta = \Gamma \cap U$, $\mathbf{D}$ l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathbf{U}$, $\mathfrak{d}$ son algèbre de Lie, $D = \mathbf{D}_k$, $d = u|\mathfrak{d}$. On note $\mathfrak{u}_d^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{u}$ dont la restriction à $\mathfrak{d}$ est égale à d. C'est un sous-espace affine de $\mathfrak{u}^*$. On le munit d'une mesure de Haar.

PROPOSITION. *On suppose que Γ et ΓU sont fermés dans G.*

(i) *La groupe Γ_1 est fermé dans G_1.*

(ii) *Soit T_1 une représentation irréductible de G_1 dont la restriction à Γ_1 est un multiple de η_1. On pose $T = \mathrm{Ind}_{G(u)U}^G(T_1 \otimes S_u T_u)$. La représentation T est de carré intégrable modulo Γ si et seulement les conditions suivantes sont réalisées :*

(a) *T_1 est de carré intégrable modulo Γ_1,*

(b) *le sous-ensemble Gu de $\mathfrak{u}_d^*$ est de measure non nulle,*

(c) *D/Δ est compact.*

Remarques. (i) A des détails de notation près, cette proposition se trouve dans [Kl-Li] et dans [An1]. Pour la commodité du lecteur, nous écrirons cependant la démonstration.

(ii) Lorsque $k = \mathbf{R}$, la condition c est toujours vérifiée. Lorsque $k = \mathbf{Q}_p$, D/Δ est compact si et seulement si $D = \Delta$.

Démonstration. Le groupe $\Gamma U(u)$ est égal au stabilisateur de u dans le groupe ΓU. Il est donc fermé, ce qui entraine que Γ_1 est fermé.

On considère le groupe $V = \Gamma U$, et la représentation $\varrho_\eta = \mathrm{Ind}_\Gamma^V(\eta)$ de V. Notons $\hat{V}_\eta$ le sous-ensemble de $\hat{V}$ formé des représentations dont la restriction à Γ est un multiple de η, et μ_η la classe de mesures sur $\hat{V}_\eta$ qui est associée à la représentation ϱ_η. Notons $\tilde{T}_u$ l'élément de $\hat{V}_\eta$ qui prolonge la représentation T_u de U. Notons ω l'orbite sous G de $\tilde{T}_u$ dans $\hat{V}_\eta$, est ω' son complémentaire dans $\hat{V}_\eta$. A cette partition de $\hat{V}_\eta$ en ω et ω', correspond une décomposition $\varrho_\eta=\varrho\oplus\varrho'$ de ϱ_η en deux sous-représentations disjointes. Posons $\sigma_\eta=\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\eta)$. Comme σ_η est équivalente à $\mathrm{Ind}_V^G(\varrho_\eta)$, on voit que l'on a $\sigma_\eta=\sigma\oplus\sigma'$, où σ et σ' sont les représentations de G induites par ϱ et ϱ'. Comme ϱ et ϱ' sont stables par G, les restrictions de σ et σ' à V sont quasiéquivalentes à ϱ et ϱ' respectivement, de sorte que σ et σ' sont disjointes. On voit donc que T est de carré intégrable modulo Γ si et seulement si T intervient discrètement dans σ (ce qui implique en particulier que ϱ est non nul, c'est-à-dire que ω n'est pas de mesure nulle pour μ_η).

Supposons donc que $\mu_\eta(\omega)$ est non nul. La représentation σ est isomorphe à la représentation $\int_\omega \mathrm{Ind}_V^G(\xi)\, d\mu_\eta(\xi)$. Mais, pour ξ dans ω, toutes les représentations $\mathrm{Ind}_V^G(\xi)$ sont équivalentes à la représentation $\mathrm{Ind}_V^G(\tilde{T}_u)$. Donc, pour que T apparaisse discrètement dans σ, il faut et il suffit que T apparaisse discrètement dans $\mathrm{Ind}_V^G(\tilde{T}_u)$. Posons $\alpha=\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}^{G_1}(\eta_1)$. D'après la proposition 15, $\mathrm{Ind}_V^G(\tilde{T}_u)$ est équivalente à $\mathrm{Ind}_{G(u)U}^G(\alpha\otimes S_u T_u)$. Il résulte de la propositon 14 que T intervient discrètement dans $\mathrm{Ind}_V^G(T_u)$ si et seulement si T_1 intervient discrètement dans α.

Pour terminer la démonstration de la proposition, il reste à voir que $\mu_\eta(\omega)$ est non nul si et seulement si les conditions b et c sont vérifiées. Notons δ la restriction de η à Δ, et $\hat{U}_\delta$ le sous-ensemble de $\hat{U}$ formé des représentations dont la restriction à Δ est un multiple de δ. Notons μ_δ la mesure sur $\hat{U}_\delta$ associée à la représentation $\mathrm{Ind}_\Delta^U(\delta)$. L'application de restriction est un isomorphisme de $\hat{V}_\eta$ sur $\hat{U}_\delta$ qui transforme μ_η en μ_δ. Notons Ω l'orbite de T_u dans $\hat{U}_\delta$. Alors $\mu_\eta(\omega)$ est non nul si et seulement s'il en est de même de $\mu_\delta(\Omega)$.

Le groupe D est contenu dans le centre de U. Notons χ_d le caractère de D correspondant à d. Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que $\mu_\delta(\Omega)$ est non nul si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(b′) $\mu_{\chi_d}(\Omega)$ est non nul, où μ_{χ_d} est la classe de mesures sur $\hat{U}_{\chi_d}$ associée à la représentation $\mathrm{Ind}_D^U(\chi_d)$,

(c′) χ_d intervient discrètement dans la représentation $\mathrm{Ind}_\Delta^D(\delta)$.

Il est clair que les conditions c et c' sont équivalentes. D'autre part, l'application de Kirillov identifie $\mathfrak{u}_d^*/U$ et $\hat{U}_{\chi_d}$, et μ_{χ_d} est l'image de la mesure de Haar de $\mathfrak{u}_d^*$ ([Ki]). Les conditions b et b' sont donc équivalentes. C.Q.F.D.

Quelques propriétés de l'application $E \mapsto T$ du n° 14

17. On emploie les notations du n° 13. Soit $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{u}$ $G(u)$-invariante, et coisotrope relativement à u. On note D le sous-groupe correspondant de U, et d la restriction de u à $\mathfrak{d}$.

Rappelons que l'on a posé $H=G(u)^{\mathfrak{u}}$. Nous considérons aussi le groupe $G(u)^{\mathfrak{d}}$. Soit $x \in G(u)$, et soient (x, φ) et (x, ψ) des représentants de x dans $G(u)^{\mathfrak{u}}$ et $G(u)^{\mathfrak{d}}$ respectivement. Donc φ et ψ sont des fonctions sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{d}$ respectivement. Rappelons que le scalaire $\varphi\psi^{-1}$ a été défini au n° 8.

Soit E une représentation de H dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. On suppose comme au n° 14 que la restriction de E à $U(u)$ est le caractère χ_u, et que l'on a $E(1,-1)=-\mathrm{Id}$. Soit $(x, \psi) \in G(u)^{\mathfrak{d}}$ on pose

$$E'(x, \psi) = \varphi\psi^{-1}E(x, \varphi),$$

où (x, φ) est un représentant de x dans H. D'aprés le n° 8, E' est une représentation de $G(u)^{\mathfrak{d}}$, et nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la restriction de E' au sous-groupe $U(u)$ est égale à χ_u, et que l'on a $E'(1,-1)=-\mathrm{Id}$. Comme de plus, on a $G(u) \cap D = U(u)$, on peut définir, comme dans le n° 14, la représentation $E' \otimes S_d T_d$ du groupe $G(u)D$.

LEMME. *Les représentations* $E \otimes S_u T_u$ *et* $\mathrm{Ind}_{G(u)D}^{G(u)U}(E' \otimes S_d T_d)$ *du groupe* $G(u)U$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{l}$ une polarisation dans $\mathfrak{d}$, relativement à d. Comme $\mathfrak{d}$ est coisotrope, c'est une polarisation dans $\mathfrak{u}$ relativement à u. Utilisant comme modèle de T_u la représentation $T_{u,\mathfrak{l}}$ définie au n° 3, et comme modèle de T_d la représentation $T_{d,\mathfrak{l}}$, on voit, d'aprés el théorème d'induction par étages, que l'on peut identifier T_u et la représentation $\mathrm{Ind}_D^U(T_d)$. Notons $\mathscr{K}$ l'espace de la représentation T_d. La représentation T_u opère donc par translations à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathscr{L}$ formé des fonctions mesurables β sur U, à valeurs dans $\mathscr{K}$, vérifiant les relations

$$\beta(zt) = T_d(t)^{-1}\beta(z) \quad \text{pour } z \in U,\ t \in D, \quad \text{et} \int_{U/D} |\beta(z)|^2 dz < \infty.$$

Considérons la représentation $R=E \otimes S_u T_u$. Elle opère dans l'espace $\mathscr{F}$ des fonctions mesurables α sur U, à valeurs dans $\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$, qui vérifient les relations

$$\alpha(zt) = (\mathrm{Id} \otimes T_d(t)^{-1})\,\alpha(z) \quad \text{pour } z \in U,\ t \in D, \quad \text{et} \int_{U/D} |\alpha(z)|^2 dz < \infty.$$

On a

$$(R(y)\,\alpha)\,(z) = \alpha(y^{-1}z)$$
$$(R(x)\,\alpha)\,(z) = \left[(E(x,\varphi)^{-1} \otimes S_u(x,\varphi)^{-1})\,\alpha\right](z),$$

où z et y sont dans U, x dans $G(u)$, et (x,φ) un représentant de x dans H.

Considérons la représentation $R'=\mathrm{Ind}_{G(u)D}^{G(u)U}(E'\otimes S_d T_d)$. Comme on a $G(u)\,U/G(u)\,D=U/D$, la représentation R' est aussi réalisée dans l'espace $\mathscr{F}$. Elle y opère par les formules :

$$(R'(y)\,\alpha)\,(z) = \alpha(y^{-1}z)$$
$$(R'(x)\,\alpha)\,(z) = c(E'(x,\psi)^{-1} \otimes S_d(x,\psi)^{-1})\,\alpha\,(x^{-1}zx),$$

où z et y sont dans U, x dans $G(u)$, (x,ψ) un représentant de x dans $G(u)^{\flat}$, et $c=|\det \mathrm{Ad}\,(x)_{\mathfrak{u}/\mathfrak{d}}|^{-1/2}$.

Comme les restrictions de R et R' à U sont égales, il nous reste à vérifier qu'il en est de même des restrictions à $G(u)$. Soit $x \in G(u)$. Soient (x,φ) et (x,ψ) des représentants dans h et $G(u)^{\flat}$ respectivement. On définit un opérateur unitaire $S''_d(x,\psi)$ dans $\mathscr{L}$ en posant

$$(S''_d(x,\psi)\,\beta)\,(z) = c^{-1}S_d(x,\psi)\,\beta(xzx^{-1}),$$

où c est défini comme ci-dessus. Pour démontrer que $R(x)$ et $R'(x)$ sont égaux, il nous suffit de prouver la relation suivante :

$$S_u(x,\varphi) = \varphi\psi^{-1}S''_v(x,\psi). \tag{†}$$

Rappelons que nous avons défini les représentations projectives $S'_{d,\mathfrak{l}}$ et $S'_{u,\mathfrak{l}}$ de $G(u)$ dans les espaces $\mathscr{K}$ et $\mathscr{L}$ respectivement (voir le n° 5). Il n'est pas très difficile de déduire du théorème d'induction par étages que l'on a

$$(S'_{u,\mathfrak{l}}(x)\,\beta)\,(z) = c^{-1}S'_{d,\mathfrak{l}}(x)\,\beta(xzx^{-1}), \quad \text{pour } \beta \in \mathscr{L},\ z \in U.$$

Je laisse la vérification au lecteur.

Utilisant la définition de $S_u(x,\varphi)$ et de $S_d(x,\psi)$ donnée au n° 10, on obtient la relation (†). C.Q.F.D.

18. On emploie les notations du n° 13. Soit $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{u}$, stable par $G(u)$. On note N le sous-groupe correspondant de U, n la restriction de u à $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{v}=\mathfrak{u}(n)$, V le sous-groupe correspondant de U, v la restriction de u à $\mathfrak{v}$.

Soit $x \in G(u)$. On notera $(x, \varphi) \in H = G(u)^{\mathfrak{u}}$, $(x, \lambda) \in G(u)^{\mathfrak{n}}$, $(x, \lambda, \theta) \in (G(u)^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{v}}$ des éléments représentant x. Donc φ, λ et θ sont des fonctions sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{v}$ respectivement. Rappelons que le scalaire $\varphi\lambda^{-1}\theta^{-1}$ a été défini au n° 9.

Soit E une représentation de H dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, telle que la restriction de E à $U(u)$ soit égale au caractère χ_u, et telle que l'on ait $E(1, -1) = -\mathrm{Id}$. Soit $(x, \lambda, \theta) \in (G(u)^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{v}}$. On pose

$$E''(x, \lambda, \theta) = \varphi\lambda^{-1}\theta^{-1}E(x, \varphi),$$

où (x, φ) est un représentant de x dans H. Il résulte du lemme 9 que E'' est une représentation de $(G(u)^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{v}}$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que la restriction de E'' à $U(u)$ (identifié à un sous-groupe de $(G(u)^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{v}}$) est le caractère χ_u, et que l'on a $E''(1, 1, -1) = -\mathrm{Id}$.

Remarquons que le groupe $G(u)\,V$ est le stabilisateur de n dans $G(u)\,U$, et que, identifiant V à un sous-groupe de $U(n)^{\mathfrak{n}}$, on a $(G(u)\,V)^{\mathfrak{n}} = G(u)^{\mathfrak{n}}V$. Comme au n° 14, on peut définir la représentation $E'' \otimes S_v T_v$ du groupe $G(g)^{\mathfrak{n}}V$. On vérifie que sa restriction à $U(u)$ est égale à χ_u, et que l'on a $(E'' \otimes S_v T_v)(1, -1) = -\mathrm{Id}$. On peut donc définir la représentation $(E'' \otimes S_v T_v) \otimes S_n T_n$ du groupe $G(u)\,VN$.

LEMME. *Les représentations* $E \otimes S_u T_u$ *et* $\mathrm{Ind}_{G(u)\,VN}^{G(u)\,U}((E'' \otimes S_v T_v) \otimes S_u T_u)$ *du groupe* $G(u)\,U$ *sont égales.*

Démonstration. Posons $\mathfrak{d} = \mathfrak{v} + \mathfrak{n}$. On emploie les notations du n° 17. Il résulte du lemme 17 et du théorème d'induction par étages qu'il suffit de démontrer la relation

$$E' \otimes S_d T_d = (E'' \otimes S_v T_v) \otimes S_n T_{\mathfrak{n}}$$

entre représentations du groupe $G(u)\,D$.

Choisissons des polarisations $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{n}$ relativement à n, et $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{v}$ relativement à v. On pose $\mathfrak{m} = \mathfrak{l} + \mathfrak{k}$. C'est une polarisation dans $\mathfrak{d}$ relativement à d. On note L, K et M les sous-groupes correspondants de U. On note χ le caractère unitaire de M correspondant à $u|\mathfrak{m}$, et χ' et χ'' les restrictions de χ à L et K respectivement.

On note $\mathscr{L}$ l'espace de la représentation T_n, réalisée comme la représentation $\mathrm{Ind}_D^N(\chi')$, comme au n° 3. C'est donc l'espace des fonctions numériques mesurables β sur N, vérifiant les relations

$$\beta(qz) = \chi(z)^{-1}\,\beta(q) \quad \text{pour } q \in N, \quad z \in L, \quad \text{et} \int_{N/L} |\beta(q)|^2\,dq < \infty.$$

De même, on note $\mathcal{K}$ l'espace de la représentation T_v, réalisée comme la représentation $\mathrm{Ind}_K^V(\chi'')$. C'est un espace de fonctions α sur V. On note $\mathcal{M}$ l'espace de la représentation $T_d = \mathrm{Ind}_M^D(\chi)$. C'est un espace de fonctions γ sur D.

Soient $\beta \in \mathcal{L}$, et $\alpha \in \mathcal{K}$. On définit une fonction γ sur $D = NV$ en posant, pour $p \in V$ et $q \in N$,

$$\gamma(qp) = \alpha(p)\beta(q).$$

On vérifie que l'application $(\alpha, \beta) \mapsto \gamma$ se prolonge en une isométrie, que nous noterons A, de $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}$.

Rappelons que nous identifions V à un sous-groupe de $U(n)^{\mathfrak{n}}$. Le groupe V opère dans $\mathcal{L}$ par la représentation S_v. Il résulte de [We2] que, pour $y \in V$, $\beta \in \mathcal{L}$, $q \in N$, on a

$$(S_n(y)\beta)(q) = \beta(y^{-1}qy).$$

Le groupe $D = VN$ opère dans $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}$ par la représentation $T_v \otimes S_n T_n$. Il est facile de voir que A entrelace les représentations $T_v \otimes S_n T_n$ et T_d.

Considérons la représentation $R = (E'' \otimes S_v T_v) \otimes S_n T_n$. Elle opère dans l'espace $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}$ par les formules suivantes. Soit $y \in D$. On a

$$R(y) = \mathrm{Id} \otimes (T_v \otimes S_n T_n)(y).$$

Soit $x \in G(u)$. Soient $(x, \lambda) \in G(u)^{\mathfrak{n}}$ et $(x, \lambda, \theta) \in (G(u)^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{v}}$ représentants de x. On a

$$R(x) = E''(x, \lambda, \theta) \otimes S_v(x, \lambda, \theta) \otimes S_u(x, \lambda).$$

Considérons la représentation $R' = E' \otimes S_d T_d$. Elle opère dans l'espace $\mathcal{H} \otimes \mathcal{M}$ par les formules suivantes. Soit $y \in D$. On a

$$R'(y) = \mathrm{Id} \otimes T_d(y).$$

Soit $x \in G(u)$, et soit (x, ψ) un représentant de x dans $G(u)^{\mathfrak{d}}$. On a

$$R'(x) = E'(x, \psi) \otimes S_d(x, \psi).$$

Nous allons démontrer que l'opérateur $\mathrm{Id} \otimes A$ entrelace les représentations R et R'. Nous avons déjà remarqué qu'il entrelace les restrictions de R et R' au groupe D. Pour voir qu'il entrelace les restrictions à $G(u)$, il suffit de démontrer l'assertion suivante. Soient x, (x, ψ), (x, λ) et (x, λ, θ) comme ci-dessus. Alors A transforme l'opérateur $\lambda(\mathfrak{l})^{-1}\theta(\mathfrak{k})^{-1}S_v(x, \lambda, \theta) \otimes S_n(x, \lambda)$ en l'opérateur $\psi(\mathfrak{m})^{-1}S_d(x, \psi)$. D'après le n° 10, et avec les notations de ce n°, on a $\psi(\mathfrak{m})^{-1}S_d(x, \psi) = S'_{d,\mathfrak{m}}(x)$, $\lambda(\mathfrak{l})^{-1}S_n(x, \lambda) = S'_{n,\mathfrak{l}}(x)$ et

$\theta(\mathfrak{k})^{-1}S_v(x,\lambda,\theta)=S'_{v,\mathfrak{k}}(x,\lambda)$. Remarquons que, puisque (x,λ) et x ont même image dans le groupe des automorphismes de $\mathfrak{v}$, on a $S'_{v,\mathfrak{k}}(x,\lambda)=S'_{v,\mathfrak{k}}(x)$. Finalement, la vérification de la relation (*) se remène à celle de la relation

$$S'_{v,\mathfrak{k}}(x)\otimes S'_{x,\mathfrak{l}}(x)=A^{-1}S'_{d,\mathfrak{m}}(x)A. \tag{**}$$

La relation (**) résulte facilement des définitions du n° 5. Je laisse les détails au lecteur. C.Q.F.D.

19. Les notations sont celles du n° 18. On pose $K=G(n)^{\mathfrak{n}}$.

Le groupe K contient le groupe V. On a $K(v)=G(u)^{\mathfrak{n}}N(n)$ et $V(v)=U(u)\,N(n)$. En effet, d'après le lemme I.16, on a $N(n)\,u=u+(\mathfrak{v}+\mathfrak{n})^{\perp}$, où $(\mathfrak{v}+\mathfrak{n})^{\perp}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{v}+\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{u}^*$.

Soit E une représentation de H dont la restriction à $U(u)$ est égale à χ_u et telle que l'on ait $E(1,-1)=-\mathrm{Id}$. On définit la représentation E'' de $(G(u)^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{v}}$ comme au n° 18. On note encore E'' la représentation du groupe $K(v)^{\mathfrak{v}}$ qui prolonge la représentation E'' de $(G(u)^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{v}}$ et le caractère χ_n de $N(n)$ correspondant à $u|\mathfrak{n}(n)$. On vérifie que la restriction de E'' au groupe $V(v)$ est le caractère χ_v correspondant à $u|\mathfrak{v}(v)$, et que l'on a $E''(1,-1)=-\mathrm{Id}$. Posons, comme au n° 14,

$$F=\mathrm{Ind}_{K(v)\,V}^{K}(E''\otimes S_v\,T_v).$$

On vérifie que la restriction de F à $N(n)$ est le caractère χ_n, et que l'on a $F(1,-1)=-\mathrm{Id}$. Comme au n° 14, on peut définir la représentation $\mathrm{Ind}_{G(n)\,N}^{G}(F\otimes S_n\,T_n)$.

THÉORÈME. *Les représentations* $\mathrm{Ind}_{G(u)\,U}^{G}(E\otimes S_u\,T_u)$ *et* $\mathrm{Ind}_{G(n)\,N}^{G}(F\otimes S_n\,T_n)$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Posons $W=\mathrm{Ind}_{G(n)\,N}^{G}(F\otimes S_n\,T_n)$. Il résulte du lemme 15, appliqué aux groupes N et $G(u)\,VN$, que l'on a

$$W=\mathrm{Ind}_{G(u)\,VN}^{G}((E''\otimes S_v\,T_v)\otimes S_n\,T_n).$$

Il résulte du théorème d'induction par étage que l'on a

$$W=\mathrm{Ind}_{G(u)\,U}^{G}(\mathrm{Ind}_{G(u)\,VN}^{G(u)\,U}((E''\otimes S_v\,T_v)\otimes S_n\,T_n)).$$

Le théorème résulte du lemme 18. C.Q.F.D.

Chapitre III. Représentations unitaires des groupes algébriques sur un corps local de charactéristique 0

Groupes de classe C_k

1. Notre but est de classer les représentations unitaires irréductibles du groupe des point rationnels d'un groupe linéaire algébrique défini sur un corps local de caractéristique 0, en supposant le problème résolu pour les groupes réductifs. Comme tout corps local de caractéristique 0 est extension de degré fini de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{Q}_p$, il suffit, par restriction du corps des scalaires, de supposer que le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}_p$. D'autre part pour les besoins du raisonnement par récurrence, et parce que cela ne demande guère d'efforts supplémentaires, nous considérerons une classe de groupes un peu plus large.

Dans tout ce chapitre, k désigne un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}_p$.

2. *Définition.* Un groupe de classe C_k est un triplet $(G, F, \mathbf{G})$, où G est un groupe localement compact, F un sous-groupe fini du centre de G, $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique défini sur k. On suppose que G/F est un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{G}_k$, dense pour la topologie de Zariski.

Comme G/F est d'indice fini dans $\mathbf{G}_k$, il est ouvert dans $\mathbf{G}_k$. Comme G/F et $\mathbf{G}_k$ sont localement isomorphes, G a une structure de groupe de Lie sur k, et son algèbre de Lie est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Nous noterons $\mathfrak{g}$ cette algèbre de Lie.

Un même groupe de Lie G sur k peut avoir plusieurs structures de groupe de classe C_k. Par exemple, si $k=\mathbf{R}$, on peut considérer $\mathbf{R}$ comme le groupe des points réels du groupe additifs, ou comme sous-groupe d'indice 2 du groupe des points réels du groupe multiplicatif. Bien que nous nous interessions aux représentations unitaires de G, certaines des notions que nous introduirons dépendent du choix d'une structure de classe C_k pour G.

3. Soient $(G, F, \mathbf{G})$ un groupe de classe C_k, $\mathfrak{a}$ un idéal G-invariant de $\mathfrak{g}$ et $a \in \mathfrak{a}^*$. Le groupe $G(a)$ stabilise la forme bilinéaire alternée B_a sur $\mathfrak{a}$, de sorte que le groupe $G(a)^{\mathfrak{a}}$ est défini (n° II.7). On note $H=G(a)^{\mathfrak{a}}$, F' l'image réciproque de F dans H, $\mathbf{H}$ l'adhérence de Zariski de $G(a)/F$ dans $\mathbf{G}(a)$. On vérifie que $(H, F', \mathbf{H})$ est un groupe de classe C_k.

4. Soit $(G, F, \mathbf{G})$ un groupe de classe C_k. Soit $\mathfrak{u}$ une sous-algèbre unipotente de $\mathfrak{g}$ (il est entendu que lorsque nous employons les notions « unipotent », « réductif », etc... nous considérons $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie du groupe algébrique $\mathbf{G}$). Soit $\mathbf{U}$ le sous groupe unipotent de $\mathbf{G}$ correspondant. Comme $\mathbf{U}_k$ n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini, G/F contient $\mathbf{U}_k$. D'après le lemme II.11, G contient un unique sous-groupe fermé, que nous noterons U, isomorphe à $\mathbf{U}_k$ par la projection de G sur G/F. Nous dirons que U est le sous-groupe de G correspondant à $\mathfrak{u}$, et nous identifierons U et $\mathbf{U}_k$.

5. Nous allons voir que le groupe U défini dans le n° 4 ne dépend que de $\mathfrak{u}$, et pas de la structure de groupe C_k sur G. (Ce n° peut être sauté sans inconvénient.) C'est évident si $k=\mathbf{R}$, car alors U est le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$.

On suppose ci-dessous que K est égal à $\mathbf{Q}_p$. Soient $(G, F, \mathbf{G})$ et $(G, F', \mathbf{G}')$ deux structures de groupe de classe C_k pour le même groupe de Lie G.

LEMME. (i) *Soit* $\mathbf{U}$ *un sous-groupe unipotent de* $\mathbf{G}$, *et soit* $\mathfrak{u}$ *son algèbre de Lie. Alors* $\mathfrak{u}$ *est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe unipotent* $\mathbf{U}'$ de $\mathbf{G}'$.

(ii) *Notons U (resp. U') le sous-groupe fermé de G isomorphe à* $\mathbf{U}_k$ *(resp.* $\mathbf{U}'_k$*) par la projection de G sur G/F (resp. G/F'). Alors $U=U'$.*

Démonstration. En modifiant G, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ (en prenant des sous-groupes ou des quotients d'indice fini), on se ramène au cas où G est un sous-groupe d'indice fini dans $\mathbf{G}_k$ et dans $\mathbf{G}'_k$, et où $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ sont irréductibles. Soient $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}'$ les centres de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ respectivement. Ces deux groupes ont pour algèbre de Lie le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$, et les groupes $\mathbf{G}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{G}'/\mathbf{Z}'$ sont isomorphes, car ce sont des sous-groupes de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, irréductibles, avec la même algèbre de Lie. On se ramène donc facilement au cas où $\mathfrak{g}$ est commutative, ce que nous supposons ci-dessous.

On écrit $\mathbf{G}=\mathbf{T}\times\mathbf{V}$, où $\mathbf{T}$ est un tore connexe défini sur k, et où $\mathbf{V}$ est unipotent. Si A est un groupe abélien, on note A^n l'image de A par l'application $a\mapsto a^n$. Considérons le groupe $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathbf{T}_k)^n$. Nous allons montrer qu'il est réduit à $\{1\}$. Choisissons une extension de degré fini k' de k sur laquelle $\mathbf{T}$ est déployée. Alors $\mathbf{T}_k$ est un sous-groupe de $\mathbf{T}_{k'}$, et $\mathbf{T}_{k'}$ est isomorphe à un produit fini de groupes $k'^{\times}$, de sorte qu'il suffit de montrer que l'on a $\bigcap(k'^{\times})^n=\{1\}$. On sait (cf. [Wel] p. 32–33) que $k'^{\times}$ est produit de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}$, à $\mathbf{Z}_p$, et d'un groupe fini. Notre assertion est donc démontrée. Il en résulte que l'on a $\bigcap(\mathbf{G}_k)^n=\mathbf{V}_k=\bigcap G^n$.

Ecrivons de même $\mathbf{G}'=\mathbf{T}'\times\mathbf{V}'$. On déduit de ce qui précède que l'on a $\mathbf{V}_k=\mathbf{V}'_k$. Il en résulte que $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ ont même algèbre de Lie. Notons la $\mathfrak{v}$. Il enrésulte qu'il existe un unique isomorphisme de $\mathbf{V}$ sur $\mathbf{V}'$ qui est l'identité sur $\mathbf{V}_k$. Les assertions du lemme sont maintenant évidentes.

6. Les notations sont celles du n° 4. On suppose de plus que $\mathfrak{u}$ est G-invariant. L'unicité de U montre que U est un sous-groupe invariant de G. On note F' l'image de F dans G/U, on pose $G'=G/U$, et on note $\mathbf{G}'$ l'adhérence de Zariski de $\mathbf{G}'/\mathbf{F}'$ dans $\mathbf{G}/\mathbf{U}$. On voit facilement que $(G', F', \mathbf{G}')$ est un groupe de classe C_k.

7. Dans toute la suite de ce chapitre, $(G, F, \mathbf{G})$ est un groupe de classe C_k, Γ est un sous-groupe central de G, et η un caractère unitaire de Γ. On note $\hat{G}_\eta$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G dont la restriction à Γ est un multiple de η.

Soit g un élément de $\mathfrak{g}^*$. Le groupe $G(g)^{\mathfrak{g}}$ est défini (n° II.7). On note ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{g}(g)$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}(g)$ et ${}^{\mathrm{u}}G(g)$ le sous-groupe correspondant de $G(g)$, ou de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ (malgré un certain abus de notations), comme défini au n° 4. On note χ_g le caractère unitaire de ${}^{\mathrm{u}}G(g)$ correspondant à la restriction de g à ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{g}(g)$. On note $Y(g)$ l'ensemble des classes de représentations unitaires τ de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ dont la restriction à ${}^{\mathrm{u}}G(g)$ est un multiple de χ_g, et telles que l'on ait $\tau(1,-1)=-\mathrm{Id}$. On note $Y^{\mathrm{irr}}(g)$ le sous-ensemble de $Y(g)$ formé des éléments irréductibles, et $Y(g,\eta)$ le sous-ensemble des éléments de $Y(g)$ dont la restriction à Γ (cf. n° II.7) est un multiple de η. On pose $Y^{\mathrm{irr}}(g,\eta)= Y^{\mathrm{irr}}(g)\cap Y(g,\eta)$. S'il est utile de faire figurer G dans la notation, nous écrivons $Y(g)=Y_G(g)$.

On remarquera que $Y(g)$ est toujours non vide, et que $Y(g,\eta)$ est non vide si et seulement si χ_g et η ont même restriction à $\Gamma\cap{}^{\mathrm{u}}G(g)$. Dans ce cas, nous dirons que g est η-admissible.

Soit $\mathbf{R}$ un facteur réductif de $\mathbf{G}(g)$, et notons R l'image réciproque dans G de $\mathbf{R}_k\cap G/F$. Alors $G(g)^{\mathfrak{g}}$ est produit semi-direct de $R^{\mathfrak{g}}$ et de ${}^{\mathrm{u}}G(g)$, et l'application de restriction identifie $Y(g)$ à l'ensemble des classes de représentations unitaires τ de $R^{\mathfrak{g}}$ telles que l'on ait $\tau(1,-1)=-\mathrm{Id}$.

Nous noterons $\mathscr{E}$ l'ensemble des couples (f,τ), où g est une forme *de type unipotent* sur $\mathfrak{g}$ (voir le chapitre I) et où τ est un élément de $Y^{\mathrm{irr}}(g)$. Nous noterons $\mathscr{E}_\eta$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ formé des couples (g,τ), où g est η-admissible de type unipotent, et où τ est dans $Y^{\mathrm{irr}}(g,\eta)$. Le groupe G opère naturellement dans $\mathscr{E}$ et dans $\mathscr{E}_\eta$.

Pour justifier ces définitions, disons que nous allons définir au n° 11 une bijection de $\mathscr{E}/G$ sur $\hat{G}$.

Remarque. Il résulte du lemme 5 que si $k=\mathbf{Q}_p$, l'ensemble $\mathscr{E}$ ne dépend que de la structure de groupe de Lie de G (et non pas du choix d'une structure de groupe de classe C_k). L'exemple donné à la fin du n° 2 montre qu'il n'en est pas de même si $k=\mathbf{R}$.

Techniques de récurrence

8. Soit $\mathfrak{u}$ une sous-algèbre unipotente G-invariante de $\mathfrak{g}$. Soit U le sous-groupe correspondant de G. Il est fermé et invariant (n° 4). On emploie les notations de n° II.13. De plus, on note $\mathbf{H}$ l'adhérence de Zariski de $G(u)/F$ dans $\mathbf{G}(u)$, on pose $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(u)$, on note F' l'image réciproque de F dans H, de sorte que $(H, F', \mathbf{H})$ est un groupe de classe C_k (n° 3) d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On note F_1 l'image de F' dans G_1, $\mathbf{G}_1$ l'adhérence de Zariski de G_1/F_1 dans H/Q, $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{h}/\mathfrak{q}$. Alors $(G_1, F_1, \mathbf{G}_1)$ est un groupe de classe C_k (n° 6) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$.

9. Les notations sont celles du n° 8. Soit g un élément de $\mathfrak{g}^*$.

LEMME. *Si g est η-admissible, il en est de même de sa restriction à* $\mathfrak{u}$.

C'est évident.

10. Les notations sont celles du n° 8. Ou suppose que u est η-admissible. Soit g un élément de $\mathfrak{g}^*$ prolongeant u. On pose $h=g|\mathfrak{h}$, et on note g_1 l'élément de $\mathfrak{g}_1^*$ obtenu par passage au quotient. Nous voulons comparer les ensembles $Y(g, \eta)$ et $Y(g_1, \eta_1)$. Dans ce but, nous commençons par comparer les groupes $G(g)^{\mathfrak{g}}$ et $G_1(g_1)^{\mathfrak{g}_1}$.

Comme $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}(h)$, nous notons encore Q le sous-groupe de $H(h)^{\mathfrak{h}}$ correspondant à $\mathfrak{q}$ (il est isomorphe à son image dans H par l'application naturelle de $H(h)^{\mathfrak{h}}$ dans H). Il est facile de voir qu'il y a un homomorphisme surjectif π de $H(h)^{\mathfrak{h}}$ sur $G_1(g_1)^{\mathfrak{g}_1}$, et que le noyau de π est Q.

De même, nous notons $U(u)$ le sous-groupe de $H(h)^{\mathfrak{h}}$ correspondant à $\mathfrak{u}(u)$. Le groupe H est égal à $G(u)^{\mathfrak{u}}$ et contient donc le groupe $G(g)^{\mathfrak{u}}$. Le groupe $H(h)^{\mathfrak{h}}$ contient donc le groupe $(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}$. Il résulte du lemme I.16 que l'on a

$$H(h)^{\mathfrak{h}} = (G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}} U(u). \tag{*}$$

Rappelons qu'un élément de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ (resp. $(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}$) est de la forme (x, φ) (resp. (x, ψ, θ)), où $x \in G(g)$, et où φ, ψ, et θ sont des fonctions sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{u}$, et $\mathfrak{h}$ respectivement (cf. le n° II.9).

Si τ est une représentation de $G(g)^{\mathfrak{g}}$, on pose, pour tout élément (x, ψ, θ) de $(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}$,

$$\tau'(x, \psi, \theta) = \varphi\psi^{-1}\theta^{-1}\tau(x, \varphi), \tag{**}$$

où (x, φ) est un représentant de x dans $G(g)^{\mathfrak{g}}$, et où le scalaire $\varphi\psi^{-1}\theta^{-1}$ est défini comme au n° II.9. Il est clair que $\tau'(x, \psi, \theta)$ ne dépend pas du choix de (x, φ). Il résulte du n° II.9 que la formule (**) définit une représentation de $(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}$.

LEMME. *Etant donné $\tau \in Y(g,\eta)$, il existe un unique élément $\tau_1 \in Y(g_1,\eta_1)$ tel que l'on ait $\tau_1(\pi(x,\psi,\theta))=\tau'(x,\psi,\theta)$ pour tout $(x,\psi,\theta)\in(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}$. L'application $\tau\mapsto\tau_1$ est une bijection de $Y(g,\eta)$* sur *$Y(g_1,\eta_1)$.*

Remarques. Les représentations τ et τ_1 opèrent dans le même espace, et engendrent la même algèbre d'opérateurs. Notons que le lemme dit en particulier que (sous l'hypothèse, rappelons-le, que la restriction de g à $\mathfrak{u}$ est égale à l'élément η-admissible u), g est η-admissible si et seulement g_1 est η_1-admissible.

Remarquons que l'application $\tau\mapsto\tau_1$ envoie toujours $Y(g)$ dans $Y(g_1)$, mais pas surjectivement. En fait, l'image consiste des représentations τ_1 de $G_1(g_1)^{\mathfrak{g}_1}$ telles que l'on ait $\tau_1(e,1)=-\mathrm{Id}$, où l'on a noté e l'image dans G_1 de l'élément $(1,-1)$ de H (notez que e est central). Cette assertion est le cas particulier du lemme correspondant à $\Gamma=\{1\}$.

Démonstration. Supposons $Y(g,\eta)$ non vide, et soit $\tau\in Y(g,\eta)$. Considérons le groupe $(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}\cap U(u)$; c'est le sous-groupe de $(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}$ correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(g)$. Il est donc noté $U(g)$. C'est un sous-groupe du sous-groupe ${}^{\mathfrak{u}}G(g)$ de $(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}$ d'algèbre de Lie ${}^{\mathfrak{u}}\mathfrak{g}(g)$. Montrons que τ' et χ_u ont même restriction à $U(g)$. Vu la définition de $Y(g)$ et de τ', ceci revient à l'assertion suivante : soit (x,ψ,θ) un élément du groupe $U(g)$, considéré comme sous-groupe de $(G(g)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{h}}$, et soit (x,φ) l'élément du groupe $U(g)$, considéré comme sous-groupe de $G(g)^{\mathfrak{g}}$, qui a la même image x dans $G(g)$. Alors on a $\varphi\psi^{-1}\theta^{-1}=1$. En effet, soient $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{d}$ des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{h}$ respectivement, invariants par $\mathfrak{u}(g)$. De tels sous-espaces existent, car $\mathfrak{u}(g)$ est unipotente. Alors on a $\psi(\mathfrak{k})=\varphi(\mathfrak{d})=\theta(\mathfrak{k}+\mathfrak{d})=1$. Ceci résulte des formules pour la représentation métaplectique [We2].

Il existe donc une représentation τ'', et une seule, de $H(h)^{\mathfrak{h}}$ qui prolonge τ' et χ_u. Il est facile de voir que τ'' provient par composition d'une unique représentation τ_1 de $Y(g_1,\eta_1)$, ce qui montre que g_1 est η_1-admissible, et que la représentation τ_1 du lemme existe.

Les autres assertions du lemme se démontrent de manière analogue. C.Q.F.D.

Construction des représentations $T_{g,\tau}$: première méthode

11. Les notations sont celles du n° 7. Pour toute forme linéaire g sur $\mathfrak{g}$ de type unipotent, et tout $\tau\in Y(g)$ nous allons associer une classe $T_{g,\tau}$ de représentations unitaires de G ayant les propriétés suivantes :

(1) Pour tout automorphisme a de $(G,F,\mathbf{G})$, on a : $T_{ag,{}^a\tau}={}^aT_{g,\tau}$;

(2) La restriction de $T_{g,\tau}$ à Γ est un multiple de η si et seulement si τ est dans $Y(g,\eta)$;

(3) $T_{g,\tau}$ et τ ont des commutants isomorphes;

(4) Soit $\tau' \in Y(g)$; l'espace des opérateurs d'entrelacement entre $T_{g,\tau}$ et $T_{g,\tau'}$ est isomorphe à l'espace des opérateures d'entrelacement entre τ et τ';

(5) Soient g' une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et $\tau' \in Y(g')$; on suppose que g et g' ne sont pas dans la même G-orbite; alors $T_{g,\tau}$ et $T_{g',\tau'}$ sont disjointes.

La construction se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est de dimension 0, on a $g=0$ et $G(g)=G$, et l'application $x \mapsto (x, 1)$ identifie G à un sous-groupe de $G(g)^{\mathfrak{g}}$. On définit $T_{g,\tau}$ comme la restriction de τ à G. Les propriétés (1) à (5) sont trivialement vérifiées.

On suppose la dimension de $\mathfrak{g}$ strictement positive, et la construction faite pour tous les groupes de classe C_k de dimension inférieure. Soient g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$ et $\tau \in Y(g)$. On note $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, on pose $u=g|\mathfrak{u}$, et on emploie les notations du n° 8. On distingue deux cas.

1[er] *cas*. $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. D'après le lemme I.19, on a $\mathfrak{g}(g)=\mathfrak{g}$ et $G(g)=G(u)$. L'application $x \mapsto (x, 1)$ identifie $G(g)$ à un sous-groupe de $G(g)^{\mathfrak{g}}$. Notons τ' la restriction de τ à $G(g)$. Le groupe $G(g)$ est d'indice fini dans G. On pose

$$T_{g,\tau} = \mathrm{Ind}_{G(g)}^{G}(\tau').$$

2[e] *cas*. $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. On définit $\tau_1 \in Y(g_1)$ comme dans le lemme 10. D'après les n° I.18 et I.24, la forme g_1 est de type unipotent. L'hypothèse de récurrence nous permet de construire la représentation T_{g_1,τ_1} de G_1. Appliquant le lemme 10 (dans le cas où $\Gamma=\{1\}$) et la propriété (2) au sous-groupe Γ_1 de G_1, on pose, comme dans le n° II.14,

$$T_{g,\tau} = \mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(T_1 \otimes S_u T_u).$$

Vérification des propriétés (1) à (5)

La première propriété est du « transport de structure ».

Les propriétés (2) à (4) se démontrent par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Dans le premier cas ci-dessus, elles sont évidentes, et dans le second résultent de la proposition II.14.

Démontrons la cinquième propriété. Soient (g,τ) et (g',τ') comme dans l'énoncé de cette propriété. Supposons $T_{g,\tau}$ et $T_{g',\tau'}$ non disjointes. Leur restriction à U sont non disjointes. Notons u et u' les restrictions de g et g' respectivement à $\mathfrak{u}$. Il résulte de la construction de $T_{g,\tau}$ que sa restriction à U est portée par l'orbite sous G de T_u dans $\hat{U}$. Un résultat analogue est valable pour $T_{g',\tau'}$. Les formes u et u' sont donc dans la même G-orbite. Quitte à remplacer g' par un conjugué, ce qui est possible grâce à la propriété (1), on peut supposer que l'on a $u=u'$. Nous voulons montrer que g et g' sont conjugués. Nous le faisons par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Comme ci-dessus, on distingue deux cas. Dans le premier cas, il résulte du lemme I.19 que l'on a $g=g'$. Dans le second cas, définissons $g_1' \in \mathfrak{g}_1^*$ et $\tau_1' \in Y(g_1')$ de manière évidente. Il résulte de la proposition II.14 que les représentations T_{g_1,τ_1} et $T_{g_1',\tau_1'}$ sont non disjointes. L'hypothèse de récurrence assure que g_1 et g_1' sont conjugués sous G_1. Notant h' la restriction de g' à $\mathfrak{h}$, il en résulte que h et h' sont conjugués par le groupe H, ou, ce qui revient au même, par le groupe $G(u)$. Il résulte du lemme I.16 que g et g' sont conjugués. C.Q.F.D.

12. Les notations sont celles des n° 7 et 11.

THÉORÈME. *L'application $(g,\tau)\mapsto T_{g,\tau}$ de $\mathscr{E}$ dans $\hat{G}$ induit une bijection de $\mathscr{E}/G$ sur $\hat{G}$. Cette bijection envoie $\mathscr{E}_\eta/G$ sur $\hat{G}_\eta$.*

Démonstration. Nous avons vu au n° 11 que l'application $(g,\tau)\mapsto T_{g,\tau}$ envoie injectivement $\mathscr{E}/G$ dand $\hat{G}$, et $\mathscr{E}_\eta/G$ dans $\hat{G}_\eta$. Réciproquement, soit $T\in G$. Nous allons montrer qu'il existe $(g,\tau)\in\mathscr{E}_\eta$ tel que T soit égal à $T_{g,\tau}$. Notons toujours U le groupe correspondant au radical unipotent $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$. Les orbites de G dans $\mathfrak{u}^*$ sont localement fermées, car ouvertes dans les orbites de $\mathbf{G}_k$ dans $\mathfrak{u}^*$. D'après la proposition II.14, et avec les notations de cette proposition, il existe un élément η-admissible $u\in\mathfrak{u}^*$, et un élément T_1 de $\hat{G}_1$ dont la restriction à Γ_1 est un multiple de η_1 tels que l'on ait $T=\mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(T_1\otimes S_u T_u)$. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, en distinguant deux cas comme dans le n° 11.

1^{er} *cas.* $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. Soit g l'unique forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$ qui prolonge u (lemme I.19). On a $G(g)=G(u)$. Notons τ l'unique élément de $Y(g)$ tel que $\tau(\hat{x})=T_1(\pi(\hat{x}))$ pour tout $\hat{x}\in G(g)^{\mathfrak{g}}$, où π est la projection de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ sur G_1 (remarquez que l'on a $G(g)^{\mathfrak{g}}=G(u)^{\mathfrak{u}}$). On a bien $T=T_{g,\tau}$, et $\tau\in Y(g,\eta)$.

2^e *cas.* $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$. L'hypothèse de récurrence nous montre qu'il existe (g_1,τ_1) dans $\mathscr{E}_{\eta_1}$ tel que l'on ait $T_1=T_{g_1,\tau_1}$. Soit g une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ dont la restriction à $\mathfrak{u}$ est égale à u, et dont la restriction à $\mathfrak{h}$ est la forme h déduite de g_1 par composition avec la projection de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}_1$. On définit $\tau\in Y(g,\eta)$ comme dans le lemme 10. Alors g est de type unipotent (lemme II.18), de sorte que (g,τ) est un élément de $\mathscr{E}_\eta$. De plus, on a $T=T_{g,\tau}$.

13. *Examples*. Si G est le groupe des points rationnels d'un groupe unipotent défini sur k, on a $\mathscr{E}=\mathfrak{g}^*$, et la paramétrisation de G donnée dans le théorème 12 n'est autre que celle de Kirillov (cf. [Ki] et [Moo]).

Si $\mathfrak{g}$ est réductive, $0=g$ est la seule forme de type unipotent, et l'on a $G(g)^{\mathfrak{g}}=G\times\{\pm 1\}$, de sorte que $\mathscr{E}$ s'identifie naturellement à $\hat{G}$, et que la paramétrisation de $\hat{G}$ du théorème 12 est tautologique.

Supposons que G est le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique résoluble connexe défini sur k. Soit $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$. Soit $u\in\mathfrak{u}^*$. Soit $g\in\mathfrak{g}^*$ un élément de type unipotent prolongeant u (son orbite est bien déterminée, cf. le n° I.25). Soit R une composante réductive définie sur k du groupe $G(g)$. Alors R est commutatif, et il existe une section ξ de $\mathbf{R}_k$ dans dans $G(g)^{\mathfrak{g}}$ ([Ho]). L'application $\tau\mapsto\tau\circ\xi=\chi$ est une bijection de $Y^{\mathrm{irr}}(g)$ sur l'ensemble des caractères unitaires de $\mathbf{R}_k$. Posons $T^{\xi}_{u,\chi}=T_{g,\tau}$ pour tout caractère unitaire χ de $\mathbf{R}_k$ (la notation souligne que la définition de $T^{\xi}_{u,\chi}$ dépend du choix d'une section ξ). On obtient la paramétrisation de $\hat{G}$ donnée Howe [Ho] (dans le cas ultramétrique).

Application aux représentations de carré intégrable

14. On emploie les notations du n° 11. On suppose de plus que Γ contient F et qu'il existe un sous-groupe algébrique $\mathbf{\Gamma}$ du centre de G, défini sur k, tel que Γ/F soit d'indice fini dans $\mathbf{\Gamma}_k$ (le cas intéressant est celui où Γ est le centre de G, mais pour les besoins du raisonnement par récurrence, il est commode de généraliser un peu).

THÉORÈME. *Soit $(g,\tau)\in\mathscr{E}$. La représentation $T_{g,\tau}$ de G est de carré intégrable modulo Γ si et seulement si la représentation τ de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ est de carré intégrable modulo Γ (rappelons que Γ est identifié à un sous-groupe de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ par l'application $\gamma\mapsto(\gamma,1)$).*

Ceci est encore équivalent à l'ensemble des deux conditions suivantes :

(a) *Le radical unipotent ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{g}(g)$ de $\mathfrak{g}(g)$ est égal à la partie unipotente du centre de $\mathfrak{g}$, et Γ contient ${}^{\mathrm{u}}G(g)$.*

(b) *Si R est un facteur réductif de $G(g)$ comme dans le* n° 7, *la restriction de τ à $R^{\mathfrak{g}}$ est de carré intégrable modulo $\Gamma\cap R^{\mathfrak{g}}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Le théorème est évident si dim $\mathfrak{g}$ est nulle. On suppose la dimension de $\mathfrak{g}$ strictement positive, et le résultat établi pour les groupes de classe C_k de dimension strictement inférieure. On considère les deux cas du n° 11. Dans le premier cas, il est évident que $T_{g,\tau}$ est de carré intégrable modulo Γ si et seulement s'il en est de même de τ. D'autre part, il est facile de vérifier (que ce soit dans le premier ou le deuxième cas) que τ est de carré intégrable modulo Γ si et seulement si les conditions (a) et (b) sont vérifiées.

On suppose maintenant que l'on se trouve dans le second cas du n° 11. On emploie les notations du n° II.16. Les conditions imposées à Γ impliquent que l'on a $\Delta=D$, et que les hypothèses de la proposition II.16 sont vérifiées. D'autre part, le groupe Γ_1 vérifie les conditions analogues à celles de Γ. Il résulte de la proposition II.16 que $T_{g,\tau}$ est de carré intégrable modulo Γ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(α) T_{g_1,τ_1} est de carré intégrable modulo Γ_1;

(β) Gu est de mesure non nulle pour la mesure de Haar de $\mathfrak{u}_{\mathfrak{d}}^*$.

Comme $\mathbf{G}_k u$ est réunion finie de conjugués de Gu, la condition (α) est équivalente à la condition : $\mathfrak{g}u=\mathfrak{d}^{\perp}$, où $\mathfrak{d}^{\perp}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{d}$ dans $\mathfrak{u}^*$. Passant aux orthogonaux dans $\mathfrak{u}$, on voit que ceci est encore équivalent à la condition :

(β′) $\mathfrak{u}(g)=\mathfrak{d}$.

L'hypothèse de récurrence montre que la condition (α) est équivalente à l'ensemble des deux conditions suivantes :

(a$_1$) Le radical unipotent de $\mathfrak{g}_1(g_1)$ est égal à la partie unipotente du centre de $\mathfrak{g}_1$; et Γ_1 contient ${}^{\mathrm{u}}G_1(g_1)$.

(b$_1$) Si R_1 est un facteur réductif de $G_1(g)$ comme dans le n° 7, la restriction de τ_1 à $R_1^{g_1}$ est de carré intégrable modulo $\Gamma_1 \cap R_1^{g_1}$.

Il résulte du n° 10 que les conditions (b) et (b$_1$) sont équivalentes.

La condition (a$_1$) est équivalente à la condition : $\Gamma U(u)$ contient ${}^{\mathrm{u}}G(g)\,U(u)$, ou encore à la condition : ${}^{\mathrm{u}}G(g)$ est contenu dans $\Gamma U(g)$. On voit donc que la condition a est équivalente à l'ensemble des conditions (a$_1$) et (β′), C.Q.F.D.

15. Lorsque $k=\mathbf{R}$ et lorsque G est unimodulaire, Anh [An2] a montré que, si G a des représentations de carré intégrable modulo Γ, il a une structure bien particulière. Notamment, le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{u}$ est égal à la partie unipotente du centre de $\mathfrak{g}$, et si g est une forme de type unipotent telle que ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{g}(g)$ soit égal à $\mathfrak{z}$, on a (en notant comme d'habitude u la restriction de g au radical unipotent $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$) $\mathfrak{u}(u)=\mathfrak{z}$. De plus, il existe un facteur réductif $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{u}(u)$.

Il en résulte que si g' est un élément de type unipotent de $\mathfrak{g}$ ayant même restriction à $\mathfrak{z}$ que g, alors g et g' sont conjugués (par U), et que si g et g' ont même restriction à $\mathfrak{u}$, ils sont égaux.

Dans les conditions du théorème 14, G centralise $\mathfrak{z}$, de sorte que l'on a $G=G(u)\,U$, et $G(u)=G(g)$, $G(u)^{\mathfrak{u}}=G(g)^{\mathfrak{g}}$. La représentation $T_{g,\tau}$ est donc égale à la représentation $\tau \otimes S_u T_u$.

Tous ces résultats sont encore valables lorsque $k=\mathbf{Q}_p$. En fait, ils résultent de la proposition purement algébrique ci-dessous (visiblement inspirée par le travail d'Anh). Comme nous n'allons pas utiliser le contenu de ce n°, j'en renvoie la démonstration à un article ultérieur qui devrait contenir une étude plus approfondie des algèbres en question.

PROPOSITION. (*Dans cette proposition k est un corps quelconque de caractéristique* 0.) *Soit* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique* **G** *linéaire défini sur k. Soit g une forme de type unipotent sur* $\mathfrak{g}$.

(i) *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) ${}^{\mathfrak{u}}\mathfrak{g}(g)$ *est contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$;

(b) *il existe* $f \in \mathfrak{g}^*$ *dans la classe d'u-équivalence de g* (cf. n° I.26) *tel que* ad $\mathfrak{g}(f)$ *soit une sous-algèbre abélienne et semi-simple de l'algèbre de Lie des automorphismes de* $\mathfrak{g}$.

(ii) *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *est unimodulaire et que la condition a est vérifiée. Soit* $\mathfrak{u}$ *le radical unipotent de* $\mathfrak{g}$ *et soit* $\mathfrak{z}$ *le centre de* $\mathfrak{u}$. *Alors* $\mathfrak{z}$ *est égal à la partie unipotente du centre de* $\mathfrak{g}$. *Posons* $u=g|\mathfrak{u}$. *On a* $\mathfrak{z}={}^{\mathfrak{u}}\mathfrak{g}(g)=\mathfrak{u}(u)$ *et* $\mathfrak{g}(g)=\mathfrak{g}(u)$. *De plus, on a* $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(u)+\mathfrak{u}$.

Une autre méthode de construction des représentations $T_{g,\tau}$

16. Les notations sont celles du n° 7. On fixe une forme g de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et τ dans $Y(g)$.

Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de type unipotent relativement à g et invariante par $G(g)$. Il existe de telles algèbres, d'après le n° 20. Nous notons $\mathfrak{v}$ le radical unipotent de $\mathfrak{b}$, V le sous-groupe correspondant de G, et l'on pose $B=G(g)\,V$. D'après le n° I.22, on a $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}(g)+\mathfrak{v}$. Le groupe B est fermé dans G, car, à des groupes finis près, B/F est égal au groupe des points rationnnels d'un sous-groupe algébrique de **G**, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$.

On note v la restriction de g à $\mathfrak{v}$. Le groupe $G(g)$ opère dans $\mathfrak{v}$ en laissant stable v, de sorte que le groupe $G(g)^{\mathfrak{v}}$ est défini. Sont définies aussi la représentation T_v de V, et la représentation S_v de $G(g)^{\mathfrak{v}}$ dans l'espace de la représentation T_v.

Rappelons qu'un élément de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ (resp. $G(g)^{\mathfrak{v}}$) s'écrit sous-la forme (x, φ) (resp. (x, ψ)), où φ (resp. ψ) est une fonction sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{v}$), et où x est dans $G(g)$.

Soit $(x, \psi) \in G(g)^{\mathfrak{v}}$. Soit (x, φ) un élément de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ représentant x. On définit le scalaire $\varphi\psi^{-1}$ comme au n° II.8. On pose

$$\tilde{\tau}(x, \psi) = \varphi\psi^{-1}\tau(x, \varphi).$$

Il résulte du n° II.8 que ceci ne dépend pas du choix de (x, φ), et que $\tilde{\tau}$ est une représentation du groupe $G(g)^{\mathfrak{v}}$.

On définit une représentation, notée $\tilde{\tau} \otimes S_v T_v$, du groupe B dans le produit tensoriel de l'espace de τ et de l'espace de T_v en posant

$$(\tilde{\tau} \otimes S_v T_v)(xy) = \tilde{\tau}(\hat{x}) \otimes S_v(\hat{x})\, T_v(y).$$

Ici, y est dans V, x dans $G(g)$, et $\hat{x}$ est un élément de $G(g)^{\mathfrak{v}}$ représentant x. On vérifie que cette définition ne dépend pas des choix faits et qu'elle donne effectivement une représentation.

On définit une représentation $T_{g, \tau, \mathfrak{b}}$ de G en posant

$$T_{g, \tau, \mathfrak{b}} = \operatorname{Ind}_B^G (\tilde{\tau} \otimes S_v T_v).$$

THÉORÈME. *On a* $T_{g,\tau} = T_{g, \tau, \mathfrak{b}}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Le théorème est évident si $\mathfrak{g}$ est nulle. On suppose donc la dimension de $\mathfrak{g}$ strictement positive, et le théorème établi pour tous les groupes de classe C_k de dimension inférieure. On note $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, on note u la restriction de g à $\mathfrak{u}$, et on emploie les notation du n° 8. On distingue deux cas.

1^er^ *cas.* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Dans ce cas, les groupes B et $G(g)$ sont égaux, et le résultat est évident (voir la construction de $T_{g,\tau}$ dans ce cas au n° 11).

2^e^ *cas.* $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. La démonstration comporte plusieurs étapes.

(1) On pose $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} + \mathfrak{u}$. Alors $\mathfrak{b}'$ est une sous-algèbre de type unipotent relativement à g, et $\mathfrak{b}'$ est $G(g)$ invariante. La représentation $T_{g, \tau, \mathfrak{b}'}$ est donc définie. Nous allons montrer que les représentations $T_{g, \tau, \mathfrak{b}}$ et $T_{g, \tau, \mathfrak{b}'}$ son égales.

On définit $\mathfrak{v}', v', G(g)^{\mathfrak{v}'}, \tilde{\tau}'$, etc... de manière analogue à plus haut. D'après le théorème d'induction par étage, il nous suffit de démontrer que les représentations $\tilde{\tau}' \otimes S_{v'} T_{v'}$ et $\operatorname{Ind}_B^{B'} (\tilde{\tau} \otimes S_v T_v)$ de B' sont égales. On remarque que l'on a $\mathfrak{v}' \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{v}$, $\mathfrak{v} + \mathfrak{g}(g) = \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{v}' + \mathfrak{g}(g) = \mathfrak{b}'$, de sorte que $\mathfrak{v}$ est un sous-espace de $\mathfrak{v}'$ totalement isotrope relativement à v'. On a $B = G(g)\, V$ et $B' = G(g)\, V'$. Notre assertion est donc une conséquence du lemme II.17, appliqué avec $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}'$ et $\mathfrak{n} = \mathfrak{v}$.

(2) D'après la première étape, nous pouvons supposer, et c'est ce que nous faisons, que $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{u}$. On pose $\mathfrak{c}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{b}'=\mathfrak{c}+\mathfrak{u}$. Alors $\mathfrak{b}'$ est une sous-algèbre de type unipotent relativement à g, invariante par $G(g)$, contenue dans $\mathfrak{b}$. Le même argument que dans la première étape montre que l'on a $T_{g,\tau,\mathfrak{b}}=T_{g,\tau,\mathfrak{b}'}$.

(3) D'après les deux étapes précédentes, nous pouvons supposer, et c'est ce que nous faisons, que l'on a $\mathfrak{b}=(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h})+\mathfrak{u}$. On pose $\mathfrak{c}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{c}/\mathfrak{q}$. L'algèbre $\mathfrak{b}_1$ est de type unipotent relativement à g_1 et invariante par $G_1(g_1)$ de sorte que la représentation $T_{g_1,\tau_1,\mathfrak{b}_1}$ de G_1 est définie. L'hypothèse de récurrence montre qu'elle est égale à T_{g_1,τ_1}.

Rappelons la définition de $T_{g_1,\tau_1,\mathfrak{b}_1}$. A partir de la représentation τ_1 de $G_1(g_1)$, on fabrique la représentation $\tilde{\tau}_1$ de $G_1(g_1)^{\mathfrak{v}_1}$, où $\mathfrak{v}_1$ est le radical unipotent de $\mathfrak{b}_1$. Posons $R_1=\tilde{\tau}_1\otimes S_{v_1}T_{v_1}$, où v_1 est la restriction de g_1 à $\mathfrak{v}_1$. C'est une représentation de B_1, et l'on a $T_{g_1,\tau_1,\mathfrak{b}_1}=\mathrm{Ind}_{B_1}^{G_1}(R_1)$. L'hypothèse de récurrence et la définition de $T_{g,\tau}$ (n° 11) montrent que l'on a $T_{g,\tau}=\mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(T_{g_1,\tau_1,\mathfrak{b}_1}\otimes S_u T_u)$. La proposition II.15 montre que l'on a $T_{g,\tau}=\mathrm{Ind}_B^G(R_1\otimes S_u T_u)$.

D'après le théorème d'induction par étages, et la définition de $T_{g,\tau,\mathfrak{b}}$, pour démontrer que $T_{g,\tau}$ et $T_{g,\tau,\mathfrak{b}}$ sont égales, il nous suffit de démontrer l'égalité suivante entre représentations de B :

$$R_1\otimes S_u T_u=\tilde{\tau}\otimes S_v T_v.$$

On pose $\mathfrak{w}=\mathfrak{v}\cap\mathfrak{c}$. On a $\mathfrak{v}=\mathfrak{w}+\mathfrak{u}$. Notre assertion résulte du lemme II.18, appliqué avec $\mathfrak{v}=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{w}=\mathfrak{v}$, et $\mathfrak{u}=\mathfrak{n}$. C.Q.F.D.

Propriétés fonctorielles de l'application $(g,\tau)\mapsto T_{g,\tau}$

17. Les notations sont celles du n° 7. On fixe une forme de type unipotent dans $\mathfrak{g}^*$ et τ dans $Y(g)$. Soit $\mathfrak{u}$ un idéal unipotent, invariant par G, de $\mathfrak{g}$ (on ne suppose pas que $\mathfrak{u}$ est le radical unipotent). On emploie les notations des n° 8, 10 et 11. En particulier, la représentation $T_{g,\tau}$ de G et la représentation T_{g_1,τ_1} de G_1 son définies. Comme au n° II.14 on considère la représentation $\mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(T_{g_1,\tau_1}\otimes S_u T_u)$.

THÉORÈME. *On a* $T_{g,\tau}=\mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(T_{g_1,\tau_1}\otimes S_u T_u)$.

Remarque. Lorsque $\mathfrak{u}$ est le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, le théorème est vrai par définition de $T_{g,\tau}$.

Démonstration. On choisit une sous-algèbre $\mathfrak{b}_1$ de $\mathfrak{g}_1$, de type unipotent relativement à g_1. On note $\mathfrak{c}$ l'image réciproque de $\mathfrak{b}_1$ dans $\mathfrak{h}$, et l'on pose $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}+\mathfrak{u}$. D'après le théorème 16 on a $T_{g,\tau}=T_{g,\tau,\mathfrak{b}}$ et $T_{g_1,\tau_1}=T_{g_1,\tau_1,\mathfrak{b}_1}$. La troisième étape de la démonstration du théorème 16 montre que l'on a $T_{g,\tau,\mathfrak{b}}=\mathrm{Ind}^G_{G(u)\,U}(T_{g_1,\tau_1,\mathfrak{b}_1}\otimes S_u T_u)$. C.Q.F.D.

18. Nous allons faire une seconde démonstration du théorème 17. Elle n'est pas fondamentalement différente de la première, et elle est plus longue. Mais elle ne repose pas sur le théorème 16 (dont l'emploi n'était d'ailleurs pas très naturel), ce qui nous permettra de la reproduire dans une situation voisine (au n° 19) où l'analogue du théorème 16 n'est pas disponible.

Seconde démonstration du théorème 17. On la fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Le théorème est évident si la dimension de $\mathfrak{g}$ est nulle. On suppose la dimension de $\mathfrak{g}$ strictement positive, et le théorème établi pour les groupes de classe C_k de dimension strictement inférieure. On distingue deux cas.

1$^{\text{er}}$ *cas*. $\dim \mathfrak{g}_1=\dim \mathfrak{g}$. Dans ce cas $\mathfrak{u}$ est un idéal central de $\mathfrak{g}$ de dimension inférieure ou égale à 1. On a $G_1=G(u)\times\{\pm 1\}$, et $G(u)$ est un sous-groupe d'indice fini de G, contenant $G(g)$. Le théorème signifie que $T_{g,\tau}$ est la représentation induite par la représentation analogue, que nous noterons $T^{G(u)}_{g,\tau}$, du groupe $G(u)$. Cela est immédiat sur les définitions du n° 11.

2$^{\text{e}}$ *cas*. $\dim \mathfrak{g}_1 \neq \dim \mathfrak{g}$. Nous noterons $\check{\mathfrak{u}}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$. Notons $\check{u}$ la restriction de g à $\check{\mathfrak{u}}$. De manière analogue au n° 8 et 10, on définit les objets $\check{\mathfrak{h}}$, $\check{\mathfrak{q}}$, $\check{U}$, $\check{H}$, $\check{Q}$, $\check{G}_1$, $\check{\mathfrak{g}}_1$, $\check{g}_1$, $\check{\tau}_1$. Par définition, $T_{g,\tau}$ est égale à la représentation $\mathrm{Ind}^G_{G(\check{u})\,\check{U}}(T_{\check{g}_1,\check{\tau}_1}\otimes S_{\check{u}} T_{\check{u}})$. Notons E la représentation de $G(\check{u})^{\check{\mathfrak{u}}}$ obtenue à partir de la représentation $T_{\check{g}_1,\check{\tau}_1}$ par composition avec la projection de $G(\check{u})^{\check{\mathfrak{u}}}$ sur $\check{G}_1$. Posons $\mathfrak{v}=\check{\mathfrak{u}}(u)$, et notons E'' la représentation de $(G(\check{u})^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{v}}$ obtenue par la formule $E''(x,\lambda,\theta)=\varphi\lambda^{-1}\theta^{-1}E(x,\varphi)$ (cf. le n° II.18). Notons V le groupe correspondant à $\mathfrak{v}$, et posons $F=\mathrm{Ind}^H_{H(\check{u})\,V}(E''\otimes S_v T_v)$, où v est la restriction de $\check{u}$ à $\mathfrak{v}$. Il résulte du théorème II.19 que l'on a $T_{g,\tau}=\mathrm{Ind}^G_{G(u)\,U}(F\otimes S_u T_u)$. Notons F_1 la représentation de G_1 obtenue à partir de F par passage au quotient. Il nous reste à démontrer l'assertion

$$F_1 = T_{g_1,\tau_1}. \tag{*}$$

Posons $\mathfrak{u}_1=\mathfrak{v}/\mathfrak{q}$, notons u_1 la restriction de g_1 à $\mathfrak{u}_1$. On pose $H_1=G_1(u_1)^{\mathfrak{u}_1}$, $\mathfrak{q}_1=\ker g_1\cap\mathfrak{u}_1(u_1)$, Q_1 le sous-groupe correspondant, $G_2=H_1/Q_1$, $\mathfrak{g}_2$ son algèbre de Lie, g_2 l'élément de $\mathfrak{g}_2^*$ déduit de g_1, τ_2 l'élément de $Y(g_2)$ défini comme au n° 10. L'hypothèse de récurrence montre que l'on a $T_{g_1,\tau_1}=\mathrm{Ind}^{G_1}_{G_1(u_1)\,U_1}(T_{g_2,\tau_2}\otimes S_{u_1} T_{u_1})$.

Composant avec la projection de $(G(\check{u})^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{v}} \to G_2$, on obtient à partir de $T^{\cdot}_{g_2, \tau_2}$ une représentation de $(G(\check{u})^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{v}}$ que nous noterons E'. Pour démontrer la relation (*), il suffit de montrer que l'on a $E' = E''$. Pour cela, nous devons comparer les représentations $T_{\check{g}_1, \check{\tau}_1}$ du groupe $\check{G}_1$ et $T_{\check{g}_2, \check{\tau}_2}$ du groupe G_2. Ces deux groupes sont des revêtements du groupe $G(\check{u})/\check{Q}$. On a $\check{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_2$ et $\check{g}_1 = g_2$. On écrit les éléments de $\check{G}_1$ (resp. G_2) sous la forme $\pi(x, \varphi)$ (resp. $\pi(x, \lambda, \theta)$) où π est la projection, où φ, λ, θ sont des fonction sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\check{\mathfrak{u}}$, $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ respectivement, et x un élément de $G(\check{u})$. On écrit les éléments de $G_1(g_1)^{\mathfrak{g}_1}$ (resp. $G_2(g_2)^{\mathfrak{g}_2}$) sous la forme $\pi(x, \varphi, \gamma)$ (resp. $\pi(x, \lambda, \theta, \gamma)$), où $\pi, \varphi, \lambda, \theta$ sont comme ci-dessus, x est dans $G(g)$, et γ une fonction sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{g}_2$. On vérifie que l'on a

$$\tau_2(\pi(x, \lambda, \theta, \gamma)) = \varphi\theta^{-1}\lambda^{-1}\check{\tau}_1(\pi(x, \varphi, \gamma)).$$

On vérifie, en utilisant les définitions de $T_{\check{g}_1, \check{\tau}_1}$ et T_{g_2, τ_2} données au n° 11, que l'on a

$$T_{g_2, \tau_2}(\pi(x, \lambda, \theta)) = \varphi\lambda^{-1}\theta^{-1}T_{\check{g}_1, \check{\tau}_1}(\pi(x, \varphi)).$$

Il est clair que ceci est équivalent à la relation $E' = E''$. C.Q.F.D.

Comparaison avec la méthode des orbites « classique »

19. J'ai construit dans [Du3] un ensemble de représentations unitaires d'un groupe de Lie réel quelconque G. Lorsque G admet une structure de groupe de classe $C_{\mathbf{R}}$, les représentations irréductibles ainsi construites suffisent à analyser la représentation régulière $L^2(G)$. La construction de [Du3] généralise aussi la théorie de Kirillov pour les groupes nilpotents, mais de manière différente que celle du présent article. Celle de [Du3] est classique, en ce sens qu'elle généralise les constructions de Bernat, Auslander-Kostant, Kirillov, Pukanszky (pour ne citer qu'eux) pour des classes variées de groupes de Lie (e.g. résolubles, compacts, etc.), ce qui n'est pas le cas de celle adoptée ici (voir le n° 13). Nous comparons ci-dessous ces deux constructions. Nous commençons par rappeler un minimum de choses de [Du3].

Dans ce n°, nous notons G un groupe de Lie réel quelconque. Soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Une forme $f \in \mathfrak{g}^*$ est dite bien polarisable s'il existe une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$ qui soit une polarisation résoluble vérifiant la condition de Pukanszky relativement à f, considéré comme élément de $(\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C})^*$. Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on note $X(f)$ l'ensemble des classes de représentation unitaires σ de $G(f)^{\mathfrak{g}}$ telles que l'on ait $\sigma(\exp X) = \exp(if(X))$

pour $X \in \mathfrak{g}(f)$, et $\sigma(1,-1)=-\mathrm{Id}$. On dit que f est admissible si $X(f)$ est non vide. Si f est un élément admissible et bien polarisable de $\mathfrak{g}^*$, et si $\sigma \in X(f)$, j'ai construit dans [Du3] une classe $R_{f,\sigma}$ de représentations unitaires de G, ayant même commutant que σ. (Dans [Du3], cette classe est notée $T_{f,\sigma}$, mais il est préférable de changer de notation pour éviter les confusions.)

Soit $\mathfrak{u}$ un idéal nilpotent G-invariant de $\mathfrak{g}$. On suppose que le sous-groupe analytique U de G correspondant est fermé. Soient f un élément admissible et bien polarisable de $\mathfrak{g}^*$, et $\sigma \in X(f)$. On pose $u=f|\mathfrak{u}$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(u)$, $H=G(u)^{\mathfrak{u}}$, $\mathfrak{q}=\ker u \cap \mathfrak{u}(u)$, Q le sous-groupe analytique correspondant. Le groupe Q est fermé (cf. [Du3] ch. IV). On pose $G_1=H/Q$, $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{h}/\mathfrak{q}$, on note $f_1 \in \mathfrak{g}_1^*$ l'élément déduit de f par restriction et passage au quotient. L'elément f_1 est admissible et bien polarisable, et on note σ_1 l'élément de $X(f_1)$ défini de manière analogue au n° 10 (cf. [Du3] ch. IV).

THÉORÈME. *On a* $R_{f,\sigma}=\mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(R_{f_1,\sigma_1} \otimes S_u T_u)$.

Démonstration. Lorsque $\mathfrak{u}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, ceci est vrai par définition des représentations $R_{f,\sigma}$ (cf. [Du3] ch. VI). Dans le cas général, la démonstration est analogue à la démonstration du théorème 17 faite au n° 18. C.Q.F.D.

20. Dans ce n°, $(G, F, \mathbf{G})$ est un groupe de classe $C_{\mathbf{R}}$. On suppose que le caractère $\varkappa$ de $\mathbf{R}$ (cf. N° II.2) est le caractère $x \mapsto e^{ix}$.

Soit g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}^*$, et soit $\lambda \in \mathfrak{g}(g)^*$ un élément ayant même restriction que g à ${}^{\mathrm{u}}\mathfrak{g}(g)$. Soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de type unipotent, canonique relativement à g (n° I.20). Notons $\mathfrak{v}$ son radical unipotent, et v la restriction de g à $\mathfrak{v}$, V le sous-groupe correspondant de G. Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ prolongenant v et λ (la restriction de f à $\mathfrak{b}$ est bien déterminée, et l'orbite de f est bien déterminée, cf. le n° 26). Dans ce qui suit, nous considérons $\mathfrak{g}(g)$ comme l'algèbre de Lie du groupe $G(g)^{\mathfrak{g}}$.

Montrons que f est admissible et bien polarisable si et seulement s'il en est de même de λ. La seconde assertion résulte du n° I.28. Nous avons vu dans ce n° que l'on a $G(g)(\lambda)\, V(v)=G(f)\, V(v)$. Soit B le groupe $G(g)\, V$, et soit b' la restriction de f à $\mathfrak{b}$. On a $G(f)\, V(v)=B(b')$. On peut définir le groupe $(B(b')^{\mathfrak{v}})^{\mathfrak{b}(\mathfrak{v})}$. C'est un ensemble d'éléments (x, ψ, θ) où $x \in B(b')$, ψ et θ sont des fonctions sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{b}(v)$ respectivement. L'application $\mathfrak{l} \mapsto \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}(g)$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces totalement isotropoes maximaux de $\mathfrak{b}(v)$ sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{g}(g)$, relativement à la forme bilinéaire déduite de λ. Un élément de $G(g)^{\mathfrak{g}}(\lambda)^{\mathfrak{g}(g)}$ s'écrit donc sous la forme (x, φ, θ), où x est dans $G(g)(\lambda)$, φ une fonction sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{g}$ (relativement à la forme bilinéaire déduite de g), et θ est comme plus haut. On remarque que si (x, φ, θ) est un tel élément, et si $(x, \psi, \theta) \in (B(b')^{\mathfrak{v}})^{\mathfrak{b}(v)}$ a même image dans $G(g)^{\mathfrak{g}(g)}$, le scalaire $\varphi\psi^{-1}$ est défini (n° II.8). Un élément de $G(f)^{\mathfrak{g}}$ s'écrit sous la forme (x, γ) où x est dans $G(f)$, et γ une fonction sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathfrak{g}$ relativement à la forme définie par f. Si $(x, \psi, \theta) \in (B(b')^{\mathfrak{v}})^{\mathfrak{b}(v)}$, représente le même élément x, le scalaire $\gamma\psi^{-1}\theta^{-1}$ a été défini au n° II.9.

Comme d'habitude, on identifie $V(v)$ à un sous-groupe de $(B(b')^{\mathfrak{v}})^{\mathfrak{b}(v)}$. Soit $\sigma \in X(f)$. Alors il existe une et une seule représentation, notée σ', du groupe $(B(b')^{\mathfrak{v}})^{\mathfrak{b}(v)}$ dont la restriciton à $V(v)$ est le caractère χ_v de différentielle $if|\mathfrak{b}(v)$, et telle que l'on ait

$$\sigma'(x, \psi, \theta) = \gamma\psi^{-1}\theta^{-1}\sigma(x, \gamma)$$

pour $(x, \psi, \theta) \in (G(f)^{\mathfrak{v}})^{\mathfrak{b}(v)}$, et $(x, \gamma) \in G(f)^{\mathfrak{g}}$ représentant x.

Soit $\tilde{\sigma} \in X(\lambda)$. Alors il existe une et une seule représentation, notée $\tilde{\sigma}''$, du groupe $(B(b')^{\mathfrak{v}})^{\mathfrak{b}(v)}$ dont la restriction à $V(v)$ est le caractère χ_v, et telle que l'on ait

$$\tilde{\sigma}''(x, \psi, \theta) = \varphi\psi^{-1}\tilde{\sigma}(x, \varphi, \theta).$$

Soit $\sigma \in X(f)$. Alors il existe un et un seul élément de $X(\lambda)$, que nous noterons $\tilde{\sigma}$, tel que l'on ait $\sigma' = \tilde{\sigma}''$, et l'application $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ est une bijection de $X(f)$ sur $X(\lambda)$.

On suppose ci-dessous que f est admissible et bien polarisable. Soit $\sigma \in X(f)$. On pose $\tau = R_{\lambda, \tilde{\sigma}}$. C'est une représentation de $G(g)^{\mathfrak{g}}$, et il résulte de [Du3] que c'est un élément de $Y(g)$.

THÉORÈME. *Les représentations $T_{g,\tau}$ et $R_{f,\sigma}$ de G sont égales.*

Démonstration. On démontre le théorème par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Lorsque la dimension de $\mathfrak{g}$ est nulle, c'est évident. On suppose la dimension de $\mathfrak{g}$ strictement positive et le résultat démontré pour les groupes de classe $C_{\mathbf{R}}$ de dimension strictement inférieure. On note $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, et u la restriction de g à $\mathfrak{u}$. Notons que la restriction de f à $\mathfrak{u}$ est égale à u (car $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{u}$). On emploie les notations $\mathfrak{g}_1$, G_1, g_1, f_1, τ_1, σ_1 des n° 8, 10 et 19. On distingue deux cas.

1^er^ *cas.* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Dans ce cas le théorème est évident.

2^e^ *cas.* $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. On a $R_{f,\sigma} = \mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(R_{f_1,\sigma_1} \otimes S_u T_u)$ d'après le théorème 19. On a $T_{g,\tau} = \mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(T_{g_1,\tau_1} \otimes S_u T_u)$ par définition de $T_{g,\tau}$. On vérifie que les éléments (g_1, τ_1)

et (f_1, σ_1) sont dans la même relation que les éléments (g, τ) et (f, σ). L'hypothèse de récurrence nous montre que l'on a $R_{f_1, \sigma_1} = T_{g_1, \tau_1}$. C.Q.F.D.

Chapitre IV. Idéaux primitifs

Notations

1. Jusqu'au n° 15, k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, $\mathbf{G}$ un groupe linéaire algébrique irréductible défini sur k, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On identifiera $\mathbf{G}$ et le groupe G de ses points rationnels. Toutes les algèbres de Lie considèrées sont de dimension finie sur k. Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie, on note $U(\mathfrak{a})$ son algèbre enveloppante, et $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{a})$ l'espace des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{a})$.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. Nous notons $Z(g)$ l'ensemble des idéaux bilatères ξ de $U(\mathfrak{g}(g))$, propres, et qui contiennent les éléments $X - g(X)$, où X parcourt le radical unipotent ${}^u\mathfrak{g}(g)$ de $\mathfrak{g}(g)$. On note $Z^{\text{prim}}(g)$ le sous-ensemble de $Z(g)$ formé des éléments primitifs. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples (g, ξ), où g est une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et ξ dans $Z^{\text{prim}}(g)$. Le groupe G opère dans $\mathscr{F}$. Le but de ce chapitre est de décrire une application de $\mathscr{F}/G$ dans $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$, surjective et de fibre finie.

Quelques rappels sur la théorie des idéaux primitifs

2. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, et soit π une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un espace vectoriel W. On note $t_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ la forme linéaire $X \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}})$ sur $\mathfrak{h}$. On note $\tilde{\pi}$ la représentation $X \mapsto \pi(X) + t_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(X)\operatorname{Id}$ de $\mathfrak{h}$ dans W. On appelle représentation induite, et on note $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ la représentation de $\mathfrak{g}$ obtenue par multiplication à gauche dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} W$, où $\mathfrak{h}$ opère dans W par la représentation $\tilde{\pi}$. (C'est la représentation « induite tordue » au sens de [Di1], ch. 5.)

Soit ξ un idéal dans $U(\mathfrak{h})$. Notons $a_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ l'automorphisme de $U(\mathfrak{h})$ prolongeant l'application $X \mapsto X - t_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(X)$ de $\mathfrak{h}$ dans $U(\mathfrak{h})$. On note $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\xi)$le plus grand idéal de $U(\mathfrak{g})$ contenu dans $U(\mathfrak{g})\, a_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(\xi)$. Si ξ est le noyau de π dans $U(\mathfrak{h})$, alors $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\xi)$ est le noyau de $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ (cf. [Di1], ch. 5).

Soit $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, et soit $I \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$. Alors $I \cap U(\mathfrak{k})$ est un idéal premier de $U(\mathfrak{k})$. Il existe un élément $J \in \operatorname{Prim}\ U(\mathfrak{k})$ tel que l'on ait $\bigcap_{x \in G} x(J) = I$. Si $J' \in \operatorname{Prim} u(\mathfrak{k})$ vérifie la même propriété, il existe $x \in G$ tel que $x(J) = J'$. L'orbite $G(J)$ de J dans $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{k})$ est donc bien déterminée. Nous dirons que c'est le support de $I \cap U(\mathfrak{k})$. Soit J dans le support de $I \cap U(\mathfrak{k})$. Soit $\mathfrak{h}$ le stabilisateur de J dans $\mathfrak{k}$. Alors il existe $\xi \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{h})$ tel que l'on ait $\xi \cap U(\mathfrak{k}) = J$, et $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\xi) = I$.

Ces résultats constituent l'analogue de la théorie de Mackey pour les idéaux primitifs. Ils sont démontrés dans [Moe-Re]. Notons que nous les utiliserons seulement lorsque $\mathfrak{k}$ est nilpotent. Dans ce cas, ils avaient été obtenus antérieurement par J. Dixmier et N. Berline (voir les références dans [Moe-Re]). Soit $G(J)$ le stabilisateur de J dans G. Pour avoir un analogue complet de la théorie de Mackey, il faudrait savoir que si $\xi' \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{h})$ vérifie les mêmes relations que ξ, alors il existe $x \in G(J)$ tel que l'on ait $x(\xi') = \xi$. Malheureusement ceci ne semble pas connu, et c'est pourquoi la théorie de ce chapitre est moins complète que la théorie correspondante du chapitre III.

3. Soit $\mathfrak{u}$ une algébre de Lie nilpotente. Sur le modêle de la théorie de Kirillov, J. Dixmier a défini une application $u \mapsto I_u$ de $\mathfrak{u}^*$ dans $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{u})$, qui induit une bijection de $\mathfrak{u}^*/U$ sur $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{u})$. Ici, U, est le groupe unipotent d'algèbre $\mathfrak{u}$. Rappelons la définition de I_u. Soit $u \in \mathfrak{u}^*$. On choisit une polarisation $\mathfrak{l}$ relativement à u. Soit ξ l'idéal de $U(\mathfrak{l})$ engendré par les éléments de la forme $X - u(X)$ où X parcourt $\mathfrak{l}$. L'idéal $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{u}}(\xi)$ est indépendant du choix de $\mathfrak{l}$, et il est primitif. On le note I_u (cf. [Di1], ch. 6).

4. Soient $\mathfrak{b}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{u}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{b}$, u un élément de $\mathfrak{u}^*$, et $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{b}$ contenue dans $\mathfrak{b}(u)$ et telle que l'on ait $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} + \mathfrak{u}$. Soit $X \in \mathfrak{s}$. Il existe un unique élément, noté $\theta(X)$, de $U(\mathfrak{u})/I_u$ tel que l'on ait, en notant $\theta(X)'$ un représentant de $\theta(X)$ dans $U(\mathfrak{u})$,

$$\theta(X)'(y \otimes 1) = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X_{\mathfrak{u}/\mathfrak{l}})(y \otimes 1) + (Xy - yX) \otimes 1$$

pour tout élément $y \otimes 1 \in \operatorname{Ind}_{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{u}}(u|\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ est une polarisation relativement à u, stable par $\operatorname{ad} X$. (Il existe de telles polarisations, et $\theta(X)$ ne dépend pas du choix de celles-ci.)

L'application θ est un homomorphisme, et si X appartient à $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{u}$, $\theta(X) + u(X)$ est égal à l'image de X dans $U(u)/I_u$.

Notons ζ_u l'idéal de $U(\mathfrak{s})$ engendré par les éléments $X - u(X)$, où X parcourt $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{u}$. On définit un homomorphisme r de $\mathfrak{b}$ dans $U(\mathfrak{s})/\zeta_u \otimes U(\mathfrak{u})/I_u$ en posant

$$r(X) = 1 \otimes \bar{X} \quad \text{si } X \in \mathfrak{u},$$

où $\bar{X}$ est l'image de X dans $U(\mathfrak{u})/I_u$,

$$r(X) = \bar{\bar{X}} \otimes 1 + 1 \otimes \theta(X) \quad \text{si } X \in \mathfrak{s},$$

où $\bar{\bar{X}}$ est l'image de X dans $U(\mathfrak{s})/\zeta_u$. Alors r se prolonge en un homomorphisme de $U(\mathfrak{b})$

dans $U(\mathfrak{s})/\zeta_u \otimes U(\mathfrak{u})/I_u$, noté encore r. De plus, r est surjectif, et son noyau est l'idéal $U(\mathfrak{b})I_u$.

Pour tout ceci, voir par exemple [Di1], ch. 10.

Notation. Si J est un idéal de $U(\mathfrak{s})$ qui contient ζ_1, nous noterons $J \circ I_u$ l'idéal $r^{-1}(J/\zeta_u \otimes U(u)/I_u)$ de $U(\mathfrak{b})$.

5. Soit $\mathfrak{u}$ un idéal unipotent de $\mathfrak{g}$, et soit $u \in \mathfrak{u}^*$. On pose $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(u)$, et l'on note ζ_u l'idéal de $U(\mathfrak{h})$ engendré par les éléments $X-u(X)$, où X parcourt $\mathfrak{u}(u)$.

THÉORÈME. (i) *Le stabilisateur de I_u dans $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{h}+\mathfrak{u}$.*

(ii) *L'application $J \mapsto \mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}+\mathfrak{u}}^{\mathfrak{g}}(J \circ I_u)$ est une surjection de l'ensemble des idéaux primitifs J de $U(\mathfrak{h})$ contenant ζ_u sur l'ensemble des idéaux primitifs I de $U(\mathfrak{g})$ tels que le support de $I \cap U(\mathfrak{u})$ soit égal à $G(I_u)$.*

Démonstration. (i) Voir [Di1], 6.2.8. (ii) résulte de (i) et des rappels ci-dessus. C.Q.F.D.

Construction d'idéaux primitifs

6. Pour toute forme linéaire g de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et tout ξ dans $Z(g)$, nous allons construire un idéal $I_{g,\xi}$ de $U(\mathfrak{g})$ de telle sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées.

(1) Pour tout automorphisme a de G, on a $I_{ag,a(\xi)}=a(I_{g,\xi})$.

(2) Soit $\mathfrak{z}$ un idéal unipotent de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}$ stabilise la restriction de g à $\mathfrak{z}$. Alors $I_{g,\xi}$ contient $X-g(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{z}$.

(3) Si ξ est primitif, il en est de même de $I_{g,\xi}$.

La construction se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est nulle, la construction est évidente. On suppose la dimension de $\mathfrak{g}$ strictement positive, et la construction faite pour toutes les algèbres de Lie algébriques de dimension inférieure. Soient g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et $\xi \in Z(g)$. Soit $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$. On note u la restriction de g à $\mathfrak{u}$. On emploie les notations du n° 5. Nous distinguons deux cas.

1^er^ *cas*. $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. On a alors $\mathfrak{g}(g)=\mathfrak{g}$ (n° I.19). On pose $I_{g,\xi}=\xi$.

2^e^ *cas*. $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$. On note h la restriction de g à $\mathfrak{h}$. D'après le n° I.18, h est de type unipotent. D'après le n° I.16, on a $\mathfrak{h}(h)=\mathfrak{g}(g)+\mathfrak{u}(u)$, de sorte qu'il existe un élément et un seul, que nous noterons ξ', de $Z(h)$, tel que l'on ait $\xi' \cap U(\mathfrak{g}(g))=\xi$. L'hypothèse de récurrence nous fournit l'idéal $I_{h,\xi'}$ de $U(\mathfrak{h})$. Celui-ci contient ζ_u d'après la propriété (2). On peut donc poser :

$$I_{g,\xi} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}+\mathfrak{u}}^{\mathfrak{g}}(I_{h,\xi'} \circ I_u).$$

Vérification des propriétés (1) à (3)

La première propriété est du transport de structure. La dernière se démontre par récurrence grâce au théorème 5. La seconde est claire sur la définition.

7.

THÉORÈME. *L'application* $(g, \xi) \mapsto I_{g,\xi}$ *induit une surjection de* $\mathscr{F}/G$ *sur* Prim $U(\mathfrak{g})$.

Démonstration. Elle se fait par récurrence en utilisant le théorème 5.

Remarques. Nous reviendrons plus bas sur la question de l'injectivité de l'application $\mathscr{F}/G \to \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{g})$.

Le théorème ci-dessus ramène en partie l'étude de Prim $U(\mathfrak{g})$ à celle des ensembles $Z^{\mathrm{prim}}(g)$. Si $\mathfrak{r}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$, l'application $\xi \mapsto \xi \cap U(\mathfrak{r})$ est une bijection de $Z^{\mathrm{prim}}(g)$ sur Prim $U(\mathfrak{r})$. Les ensembles Prim $U(\mathfrak{r})$, d'autre part, commencent à être assez bien connus : bien qu'il y ait eu des progrès remarquables depuis sa parution, je me contenterai de renvoyer le lecteur à l'exposé [Bor].

8. Nous donnons une seconde construction des idéaux $I_{g,\xi}$. Soient g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et $\xi \in Z(g)$. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de type unipotent relativement à g (n° I.20). On note $\mathfrak{v}$ le radical unipotent de $\mathfrak{b}$, et v la restriction de g à $\mathfrak{v}$. On a $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}(g)+\mathfrak{v}$. Comme ξ est dans $Z(g)$, l'idéal $\xi \circ I_v$ de $U(\mathfrak{b})$ est défini (n° 4). On pose

$$I_{g,\xi,\mathfrak{b}} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(\xi \circ I_v).$$

THÉORÈME. *On a* $I_{g,\xi,\mathfrak{b}}=I_{g,\xi}$.

Démonstration. Elle est analogue à celle du théorème III.16.

9. Soient g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et $\xi \in Z(g)$. Soit $\mathfrak{u}$ un idéal unipotent de $\mathfrak{g}$. On note u la restriction de g à $\mathfrak{u}$, et on définit $\mathfrak{h}$, h et $\xi' \in Z(h)$ comme dans les n° 5 et 6. On peut définir l'idéal $I_{h,\xi'}$ de $U(\mathfrak{h})$, et l'idéal $I_{h,\xi'} \circ I_u$ de $U(\mathfrak{h}+\mathfrak{u})$.

THÉORÈME. *On a* $I_{g,\xi}=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}+\mathfrak{u}}^{\mathfrak{g}}(I_{h,\xi'}\circ I_u)$.

Remarque. Lorsque $\mathfrak{u}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, ceci est vrai par définition de $I_{g,\xi}$.

Démonstration. Elle est analogue à celle du théorème III.17.

Quelques propriétés des idéaux $I_{g,\xi}$

10. Soit g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION. (i) *Soit ξ_i $(i \in I)$ une famille délements de $Z(g)$, et soit $\xi=\bigcap \xi_i$. On a $I_{g,\xi}=\bigcap I_{g,\xi_i}$.*

(ii) *Si $\xi \in Z(g)$ est semi-premier (resp. premier, complétement premier) il en est de même de $I_{g,\xi}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de type unipotent de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{g}$. On emploie les notations du n° 8. Comme l'application $\xi \mapsto \xi \circ I_v$ commute à l'intersection, et aussi l'induction, l'assertion (i) est claire. Si ξ est semi-premier, il est intersection d'indéaux primitifs. La pemière assertion montre que $I_{g,\xi}$ est intersection d'idéaux primitifs, et donc semi-premier. Si ξ est complétement premier, il en est de même de $\xi \circ I_v$, et donc aussi l'idéal qu'il induit (N. Berline, cf. [Di1] 5.6.3).

Supposons $\xi \in Z(g)$ premier. Soient x et y des éléments de $U(\mathfrak{g})$ tels que l'on ait $xU(\mathfrak{g})y \subset I_{g,\xi}$ et $y \notin I_{g,\xi}$. Il faut montrer que x appartient à $I_{g,\xi}$. Ecrivons ξ comme intersection $\xi=\bigcap_{i\in I}\xi_i$, avec $\xi_i \in Z^{\mathrm{Prim}}(g)$. Il existe un élément $c \in G$ tel que $c(y)$ ne soit pas dans l'idéal à gauche $U(\mathfrak{g})\,a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\xi \circ I_v)$. On note I'' l'ensemble des $i \in I$ tels que $c(y)$ appartienne à $U(\mathfrak{g})\,a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\xi_i \circ I_v)$, et I' le complémentaire. On pose $\xi'=\bigcap_{i\in I'}\xi_i$ et $\xi''=\bigcap_{i\in I''}\xi_i$. Comme y appartient à $I_{g,\xi''}$, on a $\xi \neq \xi''$. Comme ξ est premier et égal à $\xi' \cap \xi''$, on a $\xi=\xi'$. Soit $i \in I'$. L'idéal I_{g,ξ_i} est premier (car primitif), et contient $c(x)\,U(\mathfrak{g})\,c(y)$. Donc $c(x)$ appartient à I_{g,ξ_i}, et il en est de même de x. D'après l'assertion (i), x appartient à $I_{g,\xi'}=I_{g,\xi}$. C.Q.F.D.

11. Soit k' une extension algébriquement close de k. On pose $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}\otimes k'$. Soit g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et soit $\xi \in Z(g)$. On note g' l'extension k'-linéaire de g, et $\xi'=\xi\otimes k'$. On vérifie que g' est une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}'$, et que ξ' est un élément de $Z(g')$. De plus on a $I_{g',\xi'}=I_{g,\xi}\otimes k'$.

12. Rappelons qu'à tout élément $f \in \mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation résoluble est associé un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ que nous noterons J_f. La construction se fait de la manière suivante. On choisit une polarisation résoluble $\mathfrak{l}$ en f. Alors le noyau de la représentation $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{g}}(f|\mathfrak{l})$ est primitif et ne dépend pas de $\mathfrak{l}$: c'est l'idéal J_f. (On a donc $I_f = J_f$ lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente.)

Soient g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et λ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}(g)$ ayant même restriction que g au radical unipotent de $\mathfrak{g}(g)$. Soit $f \in O_{g,\lambda}$ (cf. n° I.26). On suppose que f admet une polarisation résoluble, ou, de manière équivalente d'après le n° I.28, que λ admet une polarisation résoluble. On pose $J_\lambda = \xi$. C'est un élément de $Z^{\mathrm{prim}}(g)$.

PROPOSITION. *On a* $J_f = I_{g,\xi}$.

Démonstration. On peut faire une démonstration analogue à celle du théorème III.

20. Il est peut-être plus simple (mais pas essentiellement différent) de procéder comme suit. Soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de type unipotent canonique relativement à g (n° I.20). On choisit f de telle sorte que f et g aient même restriction au radical unipotent $\mathfrak{v}$ de $\mathfrak{b}$, et f et λ même restriction à $\mathfrak{g}(g)$. Comme λ admet une polarisation résoluble, $f|\mathfrak{b}$ admet une polarisation résoluble $\mathfrak{l}$ (cf. [Di1] 1.12.13). Posons $b = f|\mathfrak{b}$. L'idéal J_b de $U(\mathfrak{b})$ est donc défini, et le théorème d'induction par étages montre que l'on a $J_f = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(J_b)$. Toujours d'après [Di1] 1.12.13, on peut choisir $\mathfrak{l}$ de la forme $\mathfrak{k} + \mathfrak{m}$, où $\mathfrak{k}$ est un polarisation en λ, et $\mathfrak{m}$ une polarisation en v. Il résulte de [Di1] 10.2.1 que l'on a $J_b = \xi \circ I_v$. C.Q.F.D.

13. Si A est une algèbre de type fini sur k, on note $\mathrm{Dim}\, A$ sa dimension de Gelfand-Kirillov. Soit g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et soit ξ un élément premier de $Z(g)$.

PROPOSITION. *On a* $\mathrm{Dim}\, U(\mathfrak{g})/I_{g,\xi} = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g) + \mathrm{Dim}\, U(\mathfrak{g}(g))/\xi$.

Démonstration. La démonstration consiste en l'application des résultats de C. Moeglin [Moe]. Comme [Moe] suppose k non dénombrable, nous remarquons que, grâce au n° 11, nous pouvons nous ramener à ce cas. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Le résultat est vrai en dimension 0. On suppose donc la dimension de $\mathfrak{g}$ strictement positive, et le résultat établi pour les algèbres de Lie algébriques de dimension inférieure. Comme dans [Moe], on distingue plusieurs cas, dont l'un au moins est réalisé. On note $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{z}$ la partie unipotente du centre de $\mathfrak{g}$. La liste des cas à considérer est la suivante.

1$^{\text{er}}$ *cas.* $\dim(\mathfrak{z} \cap \ker g) > 0$.

2[e] *cas*. $\dim(\mathfrak{z}\cap\ker g)=0$ et $\mathfrak{z}=\mathfrak{u}$.

3[e] *cas*. $\mathfrak{u}$ est une algèbre d'Heisenberg de centre $\mathfrak{z}$, non réduite à $\mathfrak{z}$, et g ne s'annule pas sur $\mathfrak{z}$.

4[e] *cas*. On a $\dim\mathfrak{z}=1$, et g ne s'annule pas sur $\mathfrak{z}$. Il existe un idéal abélien unipotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{z}$, tel que $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ soit un $\mathfrak{g}$-module simple, et tel que l'on ait $[\mathfrak{u},\mathfrak{n}]=\mathfrak{z}$.

5[e] *cas*. Il existe un idéal unipotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$, qui est non central, et qui est un $\mathfrak{g}$-module simple.

Nous examinons chacun des cas.

1[er] *cas*. On pose $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/\mathfrak{z}\cap\ker g$. On note g' la forme déduite de g par passage au quotient, ξ' l'idéal de $U(\mathfrak{g}'(g'))$ déduit de ξ par passage au quotient. On vérifie que g' est de type unipotent, que ξ' est dans $Z(g')$, et que $I_{g',\xi'}$ est l'idéal de $U(\mathfrak{g}')$ déduit de $I_{g,\xi}$ par passage au quotient. Appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}'$, on en déduit le résultat.

2[e] *cas*. On a $\mathfrak{g}(g)=\mathfrak{g}$, et $I_{g,\xi}$, de sorte que le résultat est trivial.

3[e] *cas*. On a $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(g)+\mathfrak{u}$. Posons $u=g|\mathfrak{u}$. Par définition de $I_{g,\xi}$, $U(\mathfrak{g})/I_{g,\xi}$ est isomorphe à $U(\mathfrak{g}(g))/\xi\otimes U(\mathfrak{u})/I_u$. Notons $2t+1$ la dimension de $\mathfrak{u}$. Comme $U(\mathfrak{u})/I_u$ est isomorphe à l'algébre de Weyl A_t (dont la dimension de Gelfand-Kirillov est $2t$), on a $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_{g,\xi}=\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g}(g))/\xi+2t$. D'autre part, on a $\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)=\dim\mathfrak{u}/\mathfrak{u}(g)=\dim\mathfrak{u}/\mathfrak{z}=2t$, ce qui démontre le résultat.

4[e] *cas*. On pose $n=g|\mathfrak{n}$, on note $\mathfrak{h}$ le stabilisateur de n dans $\mathfrak{g}$, ζ_n l'idéal de $U(\mathfrak{h})$ engendré par les $X-g(X)$, où X parcourt $\mathfrak{n}$. On note β l'idéal premier de $U(\mathfrak{n})=S(\mathfrak{n})$, annulateur du sous-ensemble Gn de $\mathfrak{n}^*$. On pose $h=g|\mathfrak{h}$, et on note ξ' l'unique élément de $Z(h)$ tel que l'on ait $\xi'\cap U(\mathfrak{g}(g))=\xi$. Il résulte du théorème 9 que l'on a $I_{g,\xi}=\operatorname{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(I_{h,\xi'})$. L'hypothèse de récurrence montre que l'on a $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{h})/I_{h,\xi'}=\dim\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(h)+\operatorname{Dim} U(\mathfrak{h}(h))/\xi'$. Posons $t=\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Comme on a $U(\mathfrak{h}(h))/\xi'=U(\mathfrak{g}(g))/\xi$, et $\dim\mathfrak{h}(h)/\mathfrak{g}(g)=t$, on voit qu'il suffit d'établir la relation suivante :

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_{g,\xi}=2t+\operatorname{Dim} U(\mathfrak{h})/I_{h,\xi'}. \tag{*}$$

Il est démontré au chapitre 2 de [Moe] qu'il existe un isomorphisme r de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\beta$ sur $U(\mathfrak{h})/\zeta_n\otimes A_t$ qui a la propriété suivante. Soit J un idéal de $U(\mathfrak{h})$ contenant ζ_n. Alors $r^{-1}(J/\zeta_n\otimes A_t)$ est égal à $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(J)/U(\mathfrak{g})\beta$.

En particulier, $U(\mathfrak{g})/I_{g,\xi}$ est isomorphe à $U(\mathfrak{h})/I_{h,\xi'}\otimes A_t$, ce qui démontre (*).

5[e] *cas*. On emploie les mêmes notations que dans le 4[e] cas, et, comme dans ce cas, on voit qu'il suffit d'établir la relation (*).

Posons $S=U(\mathfrak{n})/\beta-\{0\}$, $\bar{k}=\mathrm{Fract}\,(U(\mathfrak{n})/\beta)=(U(\mathfrak{n})/\beta)^{-1}$ (où Fract désigne l'anneau des fractions), et soit $\bar{\bar{k}}$ un clôture algébrique de $\bar{k}$. Notons A l'ensemble des éléments de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\beta$ commutant à $\mathfrak{n}$. Il est démontré dans [Moe], ch. 3, que, dans $\mathrm{Fract}\,(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\beta)$, l'ensemble $S^{-1}(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\beta)$ est un sous-anneau (égal à $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\beta)\,S^{-1}$), et que $S^{-1}A$ est le commutant de $\mathfrak{n}$ dans cet anneau. Comme $\bar{k}$ est contenu dans le centre de $S^{-1}A$, on peut définir l'anneau $S^{-1}A\otimes_{\bar{k}}\bar{\bar{k}}$. Il est démontré dans [Moe], ch. 3, qu'il existe un isomorphisme ϱ de $S^{-1}A\otimes_{\bar{k}}\bar{\bar{k}}$ sur $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\,\zeta_n\otimes_k\bar{\bar{k}}$ (cf. [Moe] lemme 3.21), et que cet isomorphisme a la propriété suivante. Soit J un idéal premier de $U(\mathfrak{h})$ contenant ζ_n. Soit I l'idéal $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(J)$. On a $(I/U(\mathfrak{g})\beta)\cap A=\varrho^{-1}(J\otimes_k\bar{\bar{k}})\cap A$ (cf. [Moe] lemme 3.27). De plus, on a $\mathrm{Dim}\,U(\mathfrak{g})/I=2t+\mathrm{Dim}\,U(\mathfrak{h})/J$ (cf. [Moe], 3.24 et 3.26). C. Moeglin, pour démontrer cette égalité, suppose que I est premier. On sait que si J est primitif, alors I est primitif ([Moe] 3.27). Comme l'application $J\to I$ commute aux intersections, on en déduit que si, J est premier, il en est de même de I, par une démonstration analogue à celle de la proposition 10).

Appliquant ceci à l'idéal $J=I_{h,\xi'}$, on a $I=I_{g,\xi}$, de sorte que la relation (*) est démontrée. C.Q.F.D.

14. On note $x\mapsto\check{x}$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{g})$. Soit g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et soit $\xi\in Z(g)$. Alors $-g$ est une forme de type unipotent, et $\check{\xi}$ est un élément de $Z(-g)$.

PROPOSITION. *Supposons ξ semi-premier. On a $(I_{g,\xi})^\vee=I_{-g,\check{\xi}}$.*

Démonstration. Comme la précédente, cette proposition est une application des résultats de C. Moeglin [Moe]. On se ramène immédiatement au cas où k est non dénombrable et où ξ est primitif. On raisonne par récurrence comme dans la démonstration de la proposition 13. On examine les cinq cas. La vérification de la proposition est immédiate dans les deux premiers cas. Dans le troisième cas elle résulte du lemme 8.2 de [Du1], dans le quatrième cas de [Moe] 2.7, et dans le cinquième cas de [Moe] 3.28. C.Q.F.D.

L'application $\mathscr{F}/G\to\mathrm{Prim}\,U(\mathfrak{g})$ est-elle injective?

15. Notons $\mathscr{F}^{\min}$ l'ensemble des couples (g,ξ) de $\mathscr{F}$ tels que ξ soit un idéal primitif minimal de $Z(g)$. On sait (cf. [Di1] 8.4.4) que les éléments minimaux de $Z(g)$ sont les idéaux J_λ, où λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}(g)^*$, ayant même restriction à ${}^u\mathfrak{g}(g)$ que g, et admettant une polarisation résoluble. Notons $\mathfrak{g}_p^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ admettant une polarisation résoluble, et Prim Ind $U(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ de la forme J_f, avec $f\in \mathfrak{g}_p^*$ (cf. n° 12).

On a donc une application $\mathfrak{g}_p^*\to$Prim Ind $U(\mathfrak{g})$, qui est surjective par définition. C. Moeglin a montré que cette application induit une bijection de $\mathfrak{g}_p^*/G$ sur Prim Ind $U(\mathfrak{g})$ ([Moe], ch. 4).

Compte tenu des n° I.2 et I.26, on voit que l'application $\mathscr{F}/G\to$Prim $U(\mathfrak{g})$ induit une bijection de $\mathscr{F}^{\min}/G\to$Prim Ind $U(\mathfrak{g})$.

Il est donc naturel de conjecturer que l'application $\mathscr{F}/G\to$Prim $U(\mathfrak{g})$ est bijective (rappelons que nous savons qu'elle est surjective). Il me semble que l'on peut adapter la démonstration de [Moe] de l'injectivité de l'application $\mathfrak{g}_p^*/G\to$Prim $U(\mathfrak{g})$ pour obtenir le résultat partiel suivant : soient (g, ξ) et (g', ξ') des éléments de $\mathscr{F}$ tels que l'on ait $I_{g,\xi}=I_{g',\xi'}$. Alors g et g' sont dans la même G-orbite. Supposons donc de plus que g et g' sont égaux. Alors ξ et ξ' ont même intersection avec l'ensemble des points fixes de R dans $U(\mathfrak{r})$, où R est un facteur réductif de $G(g)$ et $\mathfrak{r}$ son algèbre de Lie. (Etant donné ξ, cela ne laisse pour ξ' qu'un nombre fini de possibilités, souvent réduit à 1, surtout si l'on tient comte de la proposition 13, cf. [Di1] 8.5.7 et 9.6.12.) Comme cela demanderait beaucoup de travail pour un résultat (éventuel) partiel, je me contenterai du résultat plus faible ci-dessous, facile à déduire de [Moe].

THÉORÈME. *Les fibres de l'application* $\mathscr{F}/G\to$Prim $U(\mathfrak{g})$ *sont finies.*

Démonstration. Comme dans la démonstration de la proposition 13, on suppose k non dénombrable. On va démontrer, par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, que l'image réciproque dans $\mathscr{F}/G$ d'un ensemble fini de Prim $U(\mathfrak{g})$ est finie. C'est évident si la dimension de $\mathfrak{g}$ est nulle. On suppose la dimension de $\mathfrak{g}$ strictement positive et le résultat établi pour les algèbres de Lie de dimension inférieure. Soit $(g, \xi)\in\mathscr{F}$. Il faut montrer, qu'à conjugaison près, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments (f, η) tels que $I_{g,\xi}=I_{f,\eta}$. Soit (f, η) un tel élément. On emploie les notations $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{z}$ de la démonstration de la proposition 13. Les restrictions de g et f à $\mathfrak{u}$ sont conjuguées par G, car le support de $I_{g,\xi}\cap U(\mathfrak{k})$ est $G(I_{g|\mathfrak{u}})$, et égal à celui de $I_{f,\eta}\cap U(\mathfrak{k})$. On suppose donc que g et f ont même restriction à $\mathfrak{u}$. On examine les cinq cas de la démonstration de la proposition 13. Le seul qui, compte tenu des résultats rappelés dans la démonstration de la proposition 13, ne soit pas évident — et le seul qui nous empêche de démontrer l'injectivité — est le cinquième. On suppose donc que l'on est dans le cinquième cas, et on adopte les notations de la démonstration de la proposition 13. On notera de plus p la restriction de f à $\mathfrak{h}$, et η' l'élément de $Z(p)$ dont l'intersection avec $U(\mathfrak{g}(g))$ est égale à η. On pose $L=\varrho^{-1}(I_{h,\xi'})$ et $L'=\varrho^{-1}(I_{p,\eta'})$. Ce sont des idéaux primitifs de l'algèbre $S^{-1}A\otimes_{\bar{k}}\bar{k}$, ayant même intersection avec A (à savoir $(I_{g,\xi}/U(\mathfrak{g})\beta)\cap A$). Ils ont donc même intersection avec $S^{-1}A$. Notons la K. Alors L' est l'un des idéaux premiers minimaux contenant $K\otimes\bar{k}$. Il n'y a qu'un nombre fini de tels idéaux, d'ailleurs tous conjugués de L par le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur $\bar{k}$ (cf. [Di1] 3.4.2). L'hypothèse de récurrence montre que, modulo conjugaison par l'action du groupe $G(n)$, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour (P,η'). Compte tenu du lemme I.16, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités (modulo l'action de G) pour (f,η). C.Q.F.D.

Application aux groupes de Lie réels

16. Jusqu'à la fin du chapitre, $(G, F, \mathbf{G})$ est un groupe de classe $C_{\mathbf{R}}$. On suppose que le caractère $\varkappa$ de $\mathbf{R}$ est choisi comme au n° III.20. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie (réelle) de G, et l'on note $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ le compléxifié de $\mathfrak{g}$. Si T est une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{K}$, $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ opère dans l'espace $\mathscr{K}^{\infty}$ des vecteurs différentiables. On note encore T cette représentation de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.

Soit g une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$, et soit $\tau\in Y(g)$. On note ξ le noyau de τ dans $U(\mathfrak{g}(g)_{\mathbf{C}})$. Il est clair que ig est une forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, et que ξ est un élément de $Z(ig)$.

THÉORÈME. *Le noyau de $T_{g,\tau}$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est l'idéal $\bigcap_{x\in G} x(I_{ig,\xi})$.*

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin d'un lemme. Ce lemme est surement bien connu (cf. [Di1] 5.6.1), mais pour être complet, j'en écrirai cependant la démonstration.

LEMMME. *Soient G un groupe de Lie, B un sous-groupe fermé, R une représentation unitaire de B dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. On pos' $T=\mathrm{Ind}_B^G(R)$ et on note J le noyau de R dans $U(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$ et I le noyau de T dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. On pose $I'=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}_{\mathbf{C}}}^{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}(J)$. Alors on a $I=\bigcap_{x\in G}x(I')$.*

Démonstration du lemme. Notons $\mathscr{K}$ l'espace de la représentation T. C'est l'espace des fonctions mesurables α sur G à valeurs dans $\mathscr{H}$ vérifiant les relations,

$$\alpha(xy)=|\det \mathrm{Ad}\, Y_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}|^{1/2}R(y)^{-1}\alpha(x) \quad \text{pour } x\in G,\ y\in B, \quad \text{et} \int_{G/B}|\alpha(x)|^2\,dx<\infty.$$

On sait que si α est un élément de $\mathcal{H}^\infty$, c'est une fonction C^∞ sur G, et que, identifiant fonctions et distributions grâce à une mesure de Haar invariante à gauche, on a $T(u)=u*\alpha$ pour tout $u\in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. On note Z l'ensemble des $u\in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ tels que $(\check{u}*\alpha)(1)$ soit égal à 0 pour tout $\alpha\in\mathcal{H}^\infty$. C'est un idéal à gauche de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, et il est clair que l'on a $\check{I}=\bigcap_{x\in G}x(Z)$.

Démontrons la relation $Z=U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\,a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\check{J})$. Soit $u\in U(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$. Si $\alpha\in\mathcal{H}^\infty$, on a $(u*\alpha)(1)=R(a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(u))\,\alpha(1)$, et donc $(\check{u}*\alpha)(1)=R(a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\check{u}))\,\alpha(1)$. Soit donc u un élément de $a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\check{J})$. Alors $\check{u}$ est un élément de $a^{-1}_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\check{J})$, et $a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\check{u})$ est un élément de $\check{J}$, de sorte que l'on a $(\check{u}*\alpha)(1)=0$. Donc Z contient $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\,a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\check{J})$. Réciproquement, soit u un élément de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ non contenu dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\,a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(\check{J})$. On choisit un supplémentaire $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$. On choisit une base v_i de $S(\mathfrak{m})$, et on écrit, grâce au théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, u sous la forme $\Sigma\,\beta(v_i)\,u_i$, où β est la symétrisation, et où les u_i sont des éléments bien déterminés de $U(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$. Il existe au moins un indice i_0 tel que u_{i_0} ne soit pas dans $a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(J)$. Choisissons un vecteur $h\in\mathcal{H}^\infty$ tel que $a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(u_{i_0})\,h$ soit non nul. Soit λ une fonction C^∞ à support compact sur $\mathfrak{m}$ telle que $(\check{v}_i*\lambda)(0)$ soit non nulle si et seulement si $i=i_0$. En réduisant au besoin le support de λ, on peut supposer que l'application $(X,y)\mapsto\exp(X)\,y$ est un difféomorphisme de $U\times B$ (où U est un voisinage du support de λ) sur un ouvert de G, et l'on définit une fonction α sur G, nulle en dehors de cet ouvert, et vérifiant $\alpha(\exp(X)\,y)=|\det(\operatorname{Ad}y_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}})|^{1/2}\lambda(X)\,R(y)^{-1}h$. Par un calcul analogue à celui qui suit, on vérifie que α appartient à $\mathcal{H}^\infty$. On a $(\check{u}*\alpha)(1)=\Sigma\,(\check{v}_i*\lambda)(0)\,R(a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(u_i))\,h=(\check{v}_{i_0}*\alpha)(0)\,R(a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(u_{i_0}))\,h\neq 0$. Donc, u n'appartient pas à Z.

Considérons la représentation contragrédiente R' de R. Son noyau dans $U(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$ est $\check{J}$. De même, le noyau de la représentation contragrédiente T' de T est $\check{I}$. D'autre part, il est bien connu que T' est égal à $\operatorname{Ind}_B^G(R')$.

Appliquant les résultats qui précèdent à R' et T', on obtient la relation,

$$I=\bigcap_{x\in G}U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\,a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(J).$$

Il est clair que l'ensemble $\bigcap_{x\in G_0}U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\,a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(J)$ (où G_0 est la composante neutre de G) est le plus grand idéal contenu dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\,a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}(J)$, c'est-à-dire I'. Le lemme en résulte. C.Q.F.D.

Démonstration du théorème. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de type unipotent relativement à g. D'après les théorèmes III.16 et IV.8, et avec les notations de ces théorèmes, $T_{g,\tau}$ est induite par la représentation $R=\tilde{\tau}\otimes S_v T_v$ de B, et $I_{ig,\xi}$ est induit par l'idéal

$J=\xi\circ I_{iv}$ de $U(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$. Compte tenu du lemme ci-dessus, il nous suffit de démontrer que J est le noyau de R dans $U(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$.

Nous noterons $\mathscr{H}$ l'espace de τ, $\mathscr{K}$ l'espace de T_v, et $\mathscr{L}$ le produit tensoriel hilbertien $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ (c'est l'espace de R). Le noyau de T_v dans $U(\mathfrak{v}_{\mathbf{C}})$ est I_{iv} (c'est un cas particulier du lemme ci-dessus, appliqué au modèle de T_v et au modèle de I_{iv} associés à une polarisation $\mathfrak{l}$ en v, cf. n° II.3 et IV.3). Considérons le produit semi-direct $G(g)^{\mathfrak{v}}\times V$, et notons encore $S_v T_v$ la représentation de ce groupe dans $\mathscr{K}$ donnée par la formule $(S_v T_v)(\hat{x}, y)=S_v(\hat{x})\,T_v(y)$ $(\hat{x}\in G(g)^{\mathfrak{v}},\ y\in V)$. Il est démontré dans [Du1], th. 6.1, que l'espace $\mathscr{K}^\infty$ des vecteurs C^∞ de T_v est égal à l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation $S_v T_v$, et que la représentation correspondante du produit semi-direct $\mathfrak{g}(g)\times\mathfrak{v}$ est donnée par les formules $(S_v T_v)(X)=T_v(X)$ si $X\in\mathfrak{v}$, et $(S_v T_v)(X)=T_v(\theta(X))$ si $X\in\mathfrak{g}(g)$. Ici, θ est l'homomorphisme de $\mathfrak{g}(g)$ dans $U(\mathfrak{v}_{\mathbf{C}})/I_{iv}$ défini au n° 4.

Considérons le produit tensoriel algébrique $\mathscr{H}^\infty\otimes\mathscr{K}^\infty$. Il est formé de vecteurs C^∞ pour la représentation $\tilde{\tau}\otimes S_v T_v$ du groupe $G(g)^{\mathfrak{v}}\times V$, et dense dans $\mathscr{L}^\infty$. Le noyau (dans $U(\mathfrak{g}(g)\times\mathfrak{v}_{\mathbf{C}})$) de la représentation $\tilde{\tau}\otimes S_v T_v$ dans $\mathscr{L}^\infty$ est égal à celui de sa restriction à $\mathscr{H}^\infty\otimes\mathscr{K}^\infty$. Notons $\tilde{\xi}$ le noyau de la représentation $\tilde{\tau}$ dans $U(\mathfrak{g}(g)_{\mathbf{C}})$. Compte tenu de [Di1] 10.1.8 (i), on voit que le noyau de R dans $U(\mathfrak{b}_{\mathbf{C}})$ est égal à $\tilde{\xi}\circ I_{iv}$. Mais il résulte de la définition de $\tilde{\tau}$ que ξ et $\tilde{\xi}$ induisent la même représentation de $\mathfrak{g}(g)$, et donc que l'on a $\xi=\tilde{\xi}$. C.Q.F.D.

17. Notons $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ le centre de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, et $Y(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ la sous-algèbre de $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ formée des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$ constants sur les orbites de la composante neutre G_0 de G. On note $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$ (resp. $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$) l'ensemble des points fixes de G dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ (resp. $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$). On définit un isomorphisme a d'espaces vectoriels de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ sur $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ par la formule $a(u)=D_q^{-1}(\beta^{-1}(u))$, où β est la symétrisation, q la série formelle sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (convergente dans un voisinage de 0) $q(X)=(\det(\operatorname{sh}(\frac{1}{2}\operatorname{ad}X)/\frac{1}{2}\operatorname{ad}X))^{1/2}$, et D_q l'opérateur différentiel sur $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ qui lui correspond. On sait ([Du2]) que a induit un isomorphisme d'algèbres de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ sur $Y(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Par restriction, il induit un isomorphisme d'algèbres de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$ sur $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$.

Pour tout $f\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*$, on définit donc un caractère a_f de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ (et par restriction, de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$) en posant $a_f(u)=a(u)(f)$.

Nous aurons besoin du résultat suivant. Soit f un élément de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*$ admettant une polarisation résoluble, de sorte que l'idéal J_f de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est défini. Alors, pour tout $u\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, on a $u-a_f(u)\in J_f$. (Lorsque f est régulier, cette assertion est démontrée dans [Du2]. Le cas général s'en déduit par continuité grâce au lemme 4.7 de [Moe].)

18. Soit T une représentation unitaire de G. On dit que T a un caractère infinitésimal si, pour tout $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$, l'opérateur $T(u)$ est un scalaire. Dans ce cas, l'application $u \mapsto T(u)$ définit un caractère de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$, qui est le caractère infinitésimal de T.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ une forme de type unipotent, et soit τ un élément de $Y(g)$ ayant un caractère infinitésimal. Nous allons montrer qu'il existe une forme linéaire λ sur $\mathfrak{g}(g)_{\mathbf{C}}$, ayant même restriction à ${}^u\mathfrak{g}(g)$ que g, et admettant une polarisation résoluble (dans $\mathfrak{g}(g)_{\mathbf{C}}$), telle que le caractère infinitésimal de τ soit égal à $a_{i\lambda}$. Soit f un élément de $O_{g,\lambda}$ (n° I.26).

THÉORÈME. *La représentation $T_{g,\tau}$ a un caractère infinitésimal. Celui-ci est égal à a_{if}.*

Démonstration. Soit R un facteur réductif de $G(g)$, et soit $\mathfrak{r}$ son algèbre de Lie. On sait que $S(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})^{R_0}$ est une algèbre de polynômes, et que tout caractère de $S(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})^R$ se prolonge en un caractère de $S(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})^{R_0}$ (car R/R_0 est fini). Soit le noyau de τ dans $U(\mathfrak{g}(g)_{\mathbf{C}})$, et posons $\xi' = U(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}}) \cap \xi$, et $\alpha = U(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})^R \cap \xi'$. Il existe donc un idéal maximal β de $Z(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})$ tel que l'on ait $\beta \cap U(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})^R = \alpha$, et $Z(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})\alpha = \bigcap_{x \in R} x(\beta)$. On sait qu'il existe un élément $\mu \in \mathfrak{r}_{\mathbf{C}}^*$, admettant une polarisation résoluble, tel que l'on ait $J_{i\mu} = U(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})\beta$ (cf. [Di1], ch. 10), et l'on a $\bigcap_{x \in R} x(J_{i\mu}) = U(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})\alpha$, car $U(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})$ est un module libre sur $Z(\mathfrak{r}_{\mathbf{C}})$ (cf. [Di1], ch. 8). On en déduit que, notant λ la forme linéaire sur $\mathfrak{g}(g)$ qui prolonge μ et la restriction de g à ${}^u\mathfrak{g}(g)$, l'idéal ξ contient l'idéal $\bigcap_{x \in G(g)} x(J_{i\lambda})$.

Soit I le noyau de $T_{g,\tau}$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. D'après le théorème 16, il est égal à $\bigcap_{x \in G} x(I_{ig,\xi})$. D'après la proposition 11, il contient l'idéal $\bigcap_{x \in G} x(J_{if})$. Si $u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$, l'élément $u - a_{if}(u)$ appartient à J_{if} (comme il est rappelé au n° 17), et donc aussi à $x(J_{if})$ pour tout $x \in G$. On a donc $u - a_{if}(u) \in I$. C.Q.F.D.

19. Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$, admissible et bien polarisable, et soit $\sigma \in X(f)$. Nous avons rappelé au n° III.20 la définition des représentations $R_{f,\sigma}$.

THÉORÈME. *La représentation $R_{f,\sigma}$ admet un caractère infinitésimal. Il est égal à a_{if}.*

Remarque. Il est dans l'esprit de cet article de déduire ce résultat du théorème 18, ce qui oblige à supposer que G a une structure de groupe de classe $C_{\mathbf{R}}$. Avec un peu d'effort, on peut voir que les arguments employés dans la démonstration du théorème 18 permettent de démontrer le théorème 19 pour un groupe de Lie quelconque.

Démonstration. On emploie les notations $g, \tau, \lambda, \tilde{\sigma}$ du théorème III.20. Compte tenu du théorème 18 et du théorème III.20, on voit qu'il suffit de démontrer que la représentation τ admet le caractère infinitésimal $a_{i\lambda}$. Rappelons que l'on a $\tau = R_{\lambda,\tilde{\sigma}}$ avec $\tilde{\sigma} \in X(\lambda)$. Considérant une composante réductive R de $G(g)$, on voit qu'on est ramené à démontrer le théorème dans le cas du groupe $R^{\mathfrak{g}}$. Changeant les notations, nous supposons que $\mathfrak{g}$ est réductive. Dans ce cas, la construction de $R_{f,\sigma}$ est faite dans le ch. III de [Du3].

Il suffit de démontrer le théorème lorsque σ est factorielle. En effet, en décomposant σ en somme de représentations factorielles, on voit que $R_{f,\sigma}$ est somme de représentations factorielles ayant toutes le même caractère infinitésimal a_{if}, ce qui entraine le même résultat pour $R_{f,\sigma}$. Nous supposons donc que est factorielle.

Soit G_0 la composante neutre de G. Il résulte de la formule (18) du ch. III de [Du3] que la restriction de $R_{f,\sigma}$ à G_0 est somme directe de représentations de la forme $x(R_{f,\varrho}^{G_0})$, où x est dans G, et ϱ dans $X_{G_0}^{\text{irr}}(f)$. (L'indice ou l'exposant G_0 indique l'on s'occupe des objets relatifs au groupe G_0.) Il suffit donc de démontrer le théorème lorsque G est réductif et connexe, et σ irréductible. Le lemme 10 du ch. III. de [Du3] identifie $R_{f,\sigma}$ à certaine représentation unitaire irréductible de G construite par Harish-Chandra, et qui a effectivement le caractère infinitésimal indiqué. C.Q.F.D.

Bibliographie

[An1] ANH, N. H., Lie groups with square integrable representations. *Ann. of Math.*, 104 (1976), 431–458.

[An2] — Classification of unimodular algebraic groups with square integrable representation. *Acta Math. Vietnam.*, 3 (1978), 75–82.

[Be] BERNAT, P., ET AL. *Représentations des groupes de Lie résolubles*. Dunod, Paris, 1972.

[Bor] BORHO, W., Recent advances in enveloping algebras of semi-simple Lie algebras. *Seminaire Bourbaki*, exp. 489, 1976. Springer Lecture Notes in Mathematics, 677.

[Bou1] BOURBAKI, N., *Groupes et algèbres de Lie, ch.* II *et* III. Hermann, Paris 1972.

[Bou2] — *Groupes et algèbres de Lie, ch.* VII *et* VIII. Hermann, Paris 1975.

[Br] BROWN, I., Dual topology of a nilpotent Lie group. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 6 (1973), 407–411.

[Di1] DIXMIER, J., *Algèbres enveloppantes*. Gauthier-Villars, Paris 1974.

[Di2] — Polarisations dans les algèbres de Lie, V. *Bull. Soc. Math. France*, 104 (1976), 145–164.

[Du1] DUFLO, M., Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 5 (1972), 71–120.

[Du2] — Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 10 (1977), 265–288.

[Du3] — Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie. *Cours d'été du C.I.M.E., Cortona* 1980.

[Du4] — Construction de gros ensembles de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie quelconque. *Proceedings de la conférence de Neptune, Roumanie* 1980. Pitman Publishing Co.

[Ho] HOWE, R., Topics in harmonic analysis on solvable algebraic groups. *Pacific J. Math.*, 73 (1977), 383–435.

[Ki] KIRILLOV, A. A., Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. *Uspehi Mat. Nauk*, 17 (1962), 57–110.

[Ki–Li] KLEPPNER, A. & LIPSMAN, R. L., The Plancherel formula for group extensions. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 6 (1973), 103–132.

[Li] LION, G., *Indices de Maslov et représentation de Weil*. Publ. Université Paris 7, n° 2, 1978.

[Li–Ve] LION, G. & VERGNE, M., *The Weil representation, Maslov index and theta series*. Birkhäuser, Boston 1980.

[Li–Pe] LION, G. & PERRIN, P., Extension des représentations de groupes unipotents *p*-adiques, calculs d'obstruction. A paraître dans *les proceedings de la conférence de Marseille*, 1980.

[Ma] MACKEY, G. W., Unitary representations of group extentions. *Acta Math.*, 99 (1958), 265–311.

[Moe] MOEGLIN, C., Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes. *J. Math. Pures Appl.*, 59 (1980), 265–336.

[Moe–Re] MOEGLIN, C. & RENTSCHLER, R., Orbites d'un groupe algébrique dans l'espace des idéaux rationnels d'une algèbre enveloppante. Manuscript, 1980.

[Mo] MOORE, C. C., Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups. *Ann. of Math.*, 82 (1965), 146–182.

[Mos] MOSTOW, G. D., Fully reducible subgroups of algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 78 (1956), 200–221.

[Pe] PERRIN, P., Representations de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique. A paraître dans *les proceedings de la conférence de Marseile*, 1980.

[Pu] PUKANSZKY, L., Unitary representations of solvable Lie groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4 (1971), 81–137.

[Sh] SHALE, D., Linear symetries of free boson fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 103 (1962), 149–167.

[We1] WEIL, A., *Basic number theory*. Springer-Verlag. Berlin 1967.

[We2] — Sur certains groupes d'opérateurs uitaires. *Acta Math.*, 11 (1964), 143–211.

Reçu le 27 mars, 1981