SUR LES GROUPES COMPACTS DE TRANSFORMATIONS TOPOLOGIQUES DES SURFACES.

Par

B. DE KERÉKJÁRTÓ

à BUDAPEST.

§ 1. Introduction.

Dans le présent mémoire je détermine les groupes compacts de transformations topologiques des surfaces en elles-mêmes. Le résumé des résultats obtenus fournit aussi une contribution à la solution du cinquième problème de M. Hilbert dans sa forme primitive.

M. Hilbert a posé le problème d'introduire des variables et des paramètres dans un groupe continu de transformations topologiques d'une variété à n dimensions en elle-même, dépendant de p paramètres, tels que les fonctions exprimant les transformations du groupe soient analytiques et dans les variables et dans les paramètres. On sait qu'en général la réponse à cette question doit être négative, déjà dans le cas $n = 2$, $p = 1$. Pour cette raison, on a restreint le problème au cas des groupes des paramètres ou, autrement dit, aux groupes simplement transitifs (dans lesquels les variables et les paramètres sont les mêmes). J'ai démontré que tous les groupes des paramètres d'ordre $p = 2$ sont analytiques[1]. Pour $p > 2$, MM. von Neumann et Pontrjagin ont démontré l'analyticité des groupes des paramètres *compacts en soi* ou *commutatifs*[2]. Dans le cas général le problème de l'analyticité est encore en suspens.

Dans le présent mémoire j'obtiens le résultat que, pour les groupes compacts en soi, dans le cas $n = 2$, la réponse au problème de M. Hilbert est affirmative dans le sens primitif suivant:

[1] B. VON KERÉKJÁRTÓ: *Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen.* Abhandl. Math. Sem. Hamburg, t. 8 (1930), p. 107—114.

[2] Voir à ce sujet: L. PONTRJAGIN: *Topological groups.* Princeton, 1939.

Théorème. *Tout groupe compact en soi de transformations topologiques d'une surface à connexion finie en elle-même est homéomorphe à un groupe analytique et dans les variables et dans les paramètres.*

Le point de départ de mes recherches était un problème posé par M. de Rham. Dans une conférence faite à l'Université de Budapest, M. de Rham a exposé ses beaux résultats sur l'homéomorphie de deux rotations de la sphère à n dimensions. Dans cette connexion il a soulevé le problème concernant la caractérisation topologique des groupes compacts de la sphère à n dimensions, et, de plus, il a formulé comme *conjecture* le théorème suivant:

Tout groupe compact de transformations topologiques de la sphère à n dimensions en elle-même, conservant le sens, est homéomorphe au groupe des rotations de cette sphère ou à l'un de ses sous-groupes.

Comme M. de Rham m'a communiqué récemment, la caractérisation suivante du groupe des rotations de la sphère à 2 dimensions peut être déduite de théorèmes généraux:

Soit G un groupe de transformations topologiques de la sphère $\mathfrak{S}^2$ en elle-même, conservant le sens; si le groupe G est compact en soi, séparable, localement connexe et de dimension finie, et si G est transitif sur la sphère, sous ces hypothèses G est homéomorphe au groupe des rotations de la sphère $\mathfrak{S}^2$.

La déduction donnée par M. de Rham est la suivante. D'après le théorème de M. von Neumann[1], G est un groupe de Lie (en tant que groupe abstrait). D'après un théorème de M. Ehresmann[2] on peut introduire sur $\mathfrak{S}^2$ des coordonnées qui rendent les transformations du groupe transitif G analytiques de sorte que $\mathfrak{S}^2$ avec le groupe G devient un espace homogène de Lie. D'après les théorèmes de MM. Weyl et Cartan[3], G laisse au moins une métrique riemannienne invariante sur $\mathfrak{S}^2$. G étant transitif, cette métrique est nécessairement à courbure constante: c'est donc la métrique ordinaire de $\mathfrak{S}^2$.

Dans la première partie de ce mémoire je démontre par des méthodes directes les théorèmes suivants:

I. *Tout groupe compact G de transformations topologiques de la sphère $\mathfrak{S}^2$ en*

---

[1] J. VON NEUMANN: *Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen.* Annals of Math., vol. 34 (1933), p. 170—190.

[2] C. EHRESMANN: *Les groupes de Lie à r paramètres.* Séminaire de Math. de M. Julia, quatrième année, 1936—37.

[3] E. CARTAN: *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs.* Mémorial d. Sc. Math., 42. (Paris, 1930), p. 32.

elle-même, conservant le sens, est homéomorphe au groupe des rotations de $\mathfrak{S}^2$ *ou à l'un de ses sous-groupes.*

II. *Si le groupe compact G est transitif sur $\mathfrak{S}^2$ il est homéomorphe au groupe des rotations de $\mathfrak{S}^2$.*

Le théorème II découle du théorème I en vertu de la proposition suivante démontrée récemment par MM. Montgomery et Zippin[1]:

Le groupe des rotations de la sphère $\mathfrak{S}^2$ n'admet aucun sous-groupe transitif sur $\mathfrak{S}^2$.

M. de Rham a fait observer que cette dernière proposition est une conséquence immédiate du fait bien connu que *le groupe des rotations de la sphère $\mathfrak{S}^2$ est simple.* Le raisonnement de M. de Rham qui fournit une démonstration extrèmement simple des propositions en question est le suivant. Si un groupe transitif contient une rotation d'angle α, il doit contenir toutes les rotations d'angle α, et c'est précisément la condition pour qu'il soit un sous-groupe invariant. Cela étant, si un tel groupe contient les rotations ϱ_P et ϱ_Q d'angle α autour de P et Q, il contient aussi la rotation $(\varrho_P \varrho_Q^{-1})^n$, dont l'angle prend toutes les valeurs possibles lorsque Q tend vers P, pourvu que l'entier n soit suffisamment grand; il contient par suite toutes les rotations de $\mathfrak{S}^2$.

Je passe aux groupes compacts de la sphère contenant des transformations qui changent le sens de la sphère, et je détermine leurs structures topologiques. De ces derniers groupes on peut obtenir facilement les groupes compacts du plan projectif.

Dans cet ordre d'idées le problème se pose de déterminer tous les types topologiques de surfaces qui admettent des groupes compacts et infinis. A cette question répond le théorème suivant que je démontrerai dans le § 3:

III. *Les seuls types topologiques de surfaces à connexion finie qui admettent des groupes compacts et infinis de transformations topologiques sont les suivants: la sphère, le disque circulaire, la couronne circulaire, le tore, le plan projectif, la bande de Möbius et l'anneau non-orientable.*

Ce sont les mêmes sept types de surfaces qui admettent des groupes continus et transitifs, d'ordre fini, ou encore ce sont les seuls types topologiques d'espaces homogènes de Lie à deux dimensions[2]. La raison en est que, d'après

[1] D. Montgomery et L. Zippin: *A theorem on the rotation-group of the two sphere.* Bulletin Amer. Math. Soc., vol. 46 (1940), p. 520—521.

[2] L. E. J. Brouwer: *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie,* II. Mathem. Annalen, vol. 69 (1910), p. 181—203; voir surtout p. 192. — E. Cartan: *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs,* p. 29.

la formule de singularités due à Poincaré, sur ces surfaces, et sur aucunes autres, il existent des faisceaux réguliers de courbes sans points multiples.

La détermination des groupes compacts du disque circulaire, de la couronne circulaire, du plan projectif et de la bande de Möbius se ramène aux groupes compacts de la sphère; le cas de l'anneau non-orientable à celui du tore. Il ne reste qu'à déterminer les groupes compacts du tore.

Les groupes finis du tore ont été déterminés par M. Brouwer[1]. Concernant les groupes compacts et infinis du tore, je donne leur énumération effective dans la deuxième partie de ce mémoire. Le résultat général qu'on peut tirer de cette énumération est énoncé dans le théorème suivant:

IV. *Tout groupe compact en soi et infini G de transformations topologiques du tore en lui-même peut être exprimé comme un groupe de transformations linéaires de coordonnées bicirculaires convenablement choisies. Le groupe G peut être obtenu soit à partir du groupe des translations du tore en y ajoutant une ou deux transformations périodiques, soit à partir d'un groupe cyclique continu de translations du tore en y ajoutant une, deux ou trois transformations périodiques. Ceux de ces groupes dont les transformations conservent le sens peuvent être représentés comme des groupes de transformations birationnelles d'une surface de Riemann algébrique de genre un en elle-même.*

§ 2. Généralités sur les groupes compacts de transformations.

Soit F une surface à connexion finie, close ou limitée par un nombre fini de contours. Nous supposons la surface F munie d'une certaine métrique bornée qui la rend espace métrique.

Soit G un groupe de transformations topologiques de F en elle-même. Nous entendons par l'écart (S, T) des transformations S et T le maximum des distances $(S(P), T(P))$ où P désigne un point variable de la surface F, et $S(P)$, $T(P)$ ses images obtenues par les transformations S et T. Nous désignons la transformation identique par I, et l'écart (T, I) aussi par $|T|$.

Nous dirons que la suite des transformations topologiques $S_1, S_2, \ldots$ converge vers la transformation topologique S si les écarts (S_ν, S) convergent vers 0.

---

[1] L. E. J. Brouwer: *Énumération des groupes finis de transformations topologiques du tore.* C. R. Acad. d. Sc. Paris, t. 168 (1919), p. 845—848: *Énumération des surfaces de Riemann régulières de genre un.* Ibid. p. 677—678.

Le groupe G est dit *compact* s'il ne contient qu'un nombre fini d'éléments, ou s'il est infini et chacun de ses sous-ensembles infinis contient une suite composée d'éléments distincts et convergeant vers une transformation topologique S. Cette transformation S peut appartenir au groupe G ou non.

Toute transformation S vers laquelle converge une suite d'éléments distincts du groupe G sera appelée *élément d'accumulation* de G. L'ensemble formé par les éléments de G et par ses éléments d'accumulation est lui-même un groupe compact qui est aussi fermé; autrement dit, il est un groupe *compact en soi.*

Supposons que le groupe G est compact en soi. Nous allons montrer la proposition suivante:

2. 1. *Les transformations contenues dans le groupe G sont régulières sur la surface F* [1].

Soit, en effet, T un élément quelconque de G et soit P un point de F. Supposons que T n'est pas régulière au point P; il y a alors une suite de points $Q_1, Q_2, \ldots$ convergeant vers P, et une suite d'entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots$ tels que, pour tout k:

$$(T^{\nu_k}(P),\ T^{\nu_k}(Q_k)) > \varepsilon$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre fixe. Comme le groupe G est compact on peut extraire de la suite $T^{\nu_1}, T^{\nu_2}, \ldots$ une suite $T^{\nu'_1}, T^{\nu'_2}, \ldots$ qui converge vers une transformation topologique S (appartenant à G parce que G est compact en soi). Pour un indice k suffisamment grand, on aura donc:

$$(T^{\nu'_k}(Q_k),\ S(Q_k)) < \varepsilon/3$$

et de même

$$(T^{\nu'_k}(P),\ S(P)) < \varepsilon/3.$$

En conséquence de la continuité de S au point P on a encore

$$(S(P),\ S(Q_k)) < \varepsilon/3.$$

En faisant la somme des trois inégalités, nous obtenons:

$$(T^{\nu'_k}(Q_k),\ T^{\nu'_k}(P)) < \varepsilon$$

contrairement à l'hypothèse ci-dessus. Cela prouve la proposition 2. 1.

[1] Une transformation est dite *régulière* si ses puissances sont également continues. Concernant les transformations régulières, voir B. DE KERÉKJÁRTÓ: *Sur le caractère topologique des représentations conformes.* C. R. Acad. d. Sc. Paris, t. 198 (1934) p. 317—320.

Par un raisonnement analogue à celui employé ci-dessus nous obtenons la proposition suivante:

2. 2. *Les transformations contenues dans le groupe G sont également continues sur la surface F.*

Il faut entendre par cet énoncé que, étant donné un nombre positif ε arbitraire, il y a un nombre positif δ tel que deux points quelconques P et Q dont la distance est inférieure à δ sont changés par toute transformation T de G en des points $T(P)$ et $T(Q)$ tels que leur distance est inférieure à ε.

§ 3. Les types topologiques de surfaces admettant des groupes compacts et infinis.

Supposons que F est une surface orientable et close, de genre $p > 1$. Soit G un groupe compact de transformations topologiques de F en elle-même. Si G contient une infinité d'éléments, soit $T_1, T_2, \ldots$ une suite infinie d'éléments distincts de G. Il y a une suite partielle $T_{\nu_1}, T_{\nu_2}, \ldots$ convergeant vers une transformation topologique T de F en elle-même. La suite des transformations

$$S_1 = T_{\nu_1} T_{\nu_2}^{-1}, \; S_2 = T_{\nu_2} T_{\nu_3}^{-1}, \; \ldots$$

converge vers l'identité I. Pour un indice k suffisamment grand, l'écart (S_ν, I) est arbitrairement petit; S_ν appartient donc à la classe de l'identité, c'est-à-dire que S_ν peut être transporté en l'identité par le moyen d'une déformation continue sur F. Les transformations contenues dans G sont régulières sur F (2. 1), et comme le genre de F est supérieur à 1, elles sont périodiques[1]. Mais, dans la classe de l'identité il n'y a aucune transformation périodique[2]. Nous avons abouti à une contradiction.

Soit ensuite F une surface orientable, de genre p, limitée par h coutours $(h > 0)$, et soit G un groupe compact de transformations topologiques de F en elle-même. Nous prenons deux copies de F que nous réunissons suivants leurs points de frontière correspondants; par cela, nous obtenons une surface F' orientable et close de genre $p' = 2p + h - 1$. Au groupe G correspond sur la surface F'

[1] B. von Kerékjártó: *Über reguläre Abbildungen von Flächen auf sich.* Acta Scient. Math. Szeged, t. 7 (1934), p. 65—75; *Bemerkung über reguläre Abbildungen von Flächen.* Ibid. p. 206.

[2] L. E. J. Brouwer: *Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenztheoreme eindeutig umkehrbarer polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen.* Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen 1912, p. 605; note 3). — Voir aussi: J. Nielsen: *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen.* Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser, XV, 1 (1937).

un groupe compact G' de manière biunivoque. Si $p' > 1$, les groupes G' et G sont finis, d'après le résultat ci-dessus. La surface F n'admet donc des groupes compacts et infinis que si $2p + h - 1 = 0$, ou 1. Les types topologiques correspondants sont les suivants: 1) *la sphère* ($p = h = 0$), 2) *le disque circulaire* ($p = 0$, $h = 1$), 3) *la couronne circulaire* ($p = 0$, $h = 2$), 4) *le tore* ($p = 1$, $h = 0$).

Soit finalement F une surface non-orientable de genre p, limitée par h contours. Soit F' la surface de recouvrement à deux feuillets de F qui est une surface orientable de genre $p' = p - 1$, limitée par $h' = 2h$ contours. Au groupe compact G de F correspond un groupe compact G' de F', de manière $(1, 2)$. Si G est infini, G' est aussi infini, et, d'après ce que nous venons d'obtenir, soit $h' = 0$ et $p' \leqq 1$, soit $h' > 0$ et $2p' + h' - 1 \leqq 1$. Il résulte de là que soit $h = 0$ et $p \leqq 2$, soit $h > 0$ et $2(p - 1) + 2h - 1 \leqq 1$; dans les deux cas: $p + h \leqq 2$. Les types topologiques correspondants sont les suivants: 5) *le plan projectif* ($p = 1$, $h = 0$), 6) *la bande de* Möbius ($p = 1$, $h = 1$), 7) *l'anneau non-orientable* ($p = 2$, $h = 0$).

Nous avons obtenu le résultat suivant:

3. 1. *Si la surface F à connexion finie admet un groupe compact infini, F est homéomorphe à l'une des surfaces énumérées sous* 1)—7).

I. Les groupes compacts de la sphère.

§ 4. Sur les écarts des transformations régulières à l'identité.

M. Newman a démontré le théorème suivant:[1]

Si V est une variété métrique, il y a un nombre $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de la métrique de V tel que toute transformation périodique, de période p, de la variété V en elle-même déplace au moins un point d'une distance supérieure à ε/p.

Nous allons appliquer ce théorème aux transformations périodiques de la sphère de rayon unité en elle-même.

Nous prenons le centre O de la sphère comme origine d'une *coordonnée vectorielle* que nous désignons par x. Soit S une transformation de période p de la sphère en elle-même; désignons par $x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$ les coordonnées des images de x obtenues par les puissances de S. Formons la somme de vecteurs:

$$y = x + x^1 + x^2 + \cdots + x^{p-1}.$$

[1] M. H. A. Newman: *A theorem on periodic transformations of spaces.* Quart. Journ. of Math. Oxford Series, vol. 2 (1931), p. 1—8.

A tout point x de la sphère, nous faisons correspondre le point dont la coordonnée vectorielle est y; l'ensemble des points y correspondant aux points x de la sphère forme une surface continue; nous la désignons par F_1, et la surface de la sphère par F_0. Aux points $x, x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$ de la sphère correspondent p points coïncidants de la surface F_1; en projetant la surface F_1 du centre O sur la sphère, la projection couvre la sphère p fois. Il résulte de là, comme M. Newman l'a démontré, que l'indice de l'origine O par rapport à la surface F_1 est un multiple de p, c'est-à-dire que

$$\Omega_{F_1}(O) = 0 \pmod{p}.$$

D'autre part, l'indice de O par rapport à la sphère F_0 est

$$\Omega_{F_0}(O) = \pm 1.$$

Nous pouvons déformer continuement la surface F_1 en F_0 par l'intermédiaire des surfaces:

$$F_\lambda: \qquad y_\lambda = x + \lambda(x^1 + x^2 + \cdots + x^{p-1}) \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1).$$

Comme

$$\Omega_{F_1}(O) \neq \Omega_{F_0}(O),$$

il résulte que, pour une certaine valeur de λ $(0 < \lambda \leqq 1)$, la surface F_λ passe par le point O; il y a donc un point y_λ de F_λ pour lequel

$$y_\lambda = x + \lambda(x^1 + x^2 + \cdots + x^{p-1}) = 0.$$

Par conséquent, il y a un point x de la sphère F_0 et une valeur λ appartenant à l'intervalle $(0, 1)$ pour lequel:

$$x = -\lambda(x^1 + x^2 + \cdots + x^{p-1}).$$

Le plan perpendiculaire au vecteur Ox, passant par l'origine O, divise la sphère F_0 en deux hemisphères. D'après la formule que nous venons d'obtenir, l'hémisphère contenant le point x ne peut contenir tous les points $x^1, x^2, \ldots x^{p-1}$; il y a au moins un de ces points, supposons que cela soit x^l, qui appartient à l'autre hémisphère. Supposons que $l \leqq p/2$; autrement nous considérons au lieu de la transformation S son inverse S^{-1}. Comme les points x et x^l appartiennent à deux hémisphères différentes, leur distance est supérieure à 1; il y a donc au moins une des distances $(x, x^1), (x^1, x^2), \ldots, (x^{l-1}, x^l)$ qui est supérieure à $1/l \geqq 2/p$. Supposons, pour fixer les idées, que

$$(x^k, x^{k+1}) > 2/p.$$

Il résulte donc qu'il y a au moins un point de la sphère, à savoir le point x^k, dont la distance à son image obtenue par $S: x^{k+1} = S(x^k)$ est supérieur à $2/p$.

Le raisonnement ci-dessus nous a fourni les résultats suivants:

4. 1. *Toute transformation de période p de la sphère unité en elle-même déplace au moins un point d'une distance supérieure à $2/p$.*

4. 2. *Parmi les puissances d'une transformation de période p de la sphère unité en elle-même, il y en a une au moins qui déplace un point d'une distance supérieure à* 1.

Nous faisons observer que la proposition 4. 2 reste encore valable si on suppose que la transformation en question soit régulière, non nécessairement périodique. Comme j'ai démontré ailleurs, toute transformation régulière de la sphère en elle-même, conservant le sens, est homéomorphe à une rotation de la sphère[1]. Si la transformation régulière T de la sphère, conservant le sens, n'est pas périodique, elle est homéomorphe à une rotation dont l'angle est incommensurable avec π. Il y a donc une suite d'entiers $n_1, n_2, \ldots$ telle que la suite $T^{n_1}, T^{n_2}, \ldots$ converge vers une transformation involutive; cette dernière déplace au moins un point d'une distance supérieure à 1; le même est donc valable concernant la transformation T^{n_k}, si k est suffisamment grand. Nous énonçons le résultat obtenu dans le théorème suivant:

4. 3. *Parmi les puissances d'une transformation régulière de la sphère unité en elle-même, il y en a au moins une qui déplace un point d'une distance supérieure à* 1.

§ 5. Sur les indices des points de la sphère par rapport au groupe.

Soit G un groupe compact en soi de transformations topologiques de la sphère en elle-même, conservant le sens. Si A est un point quelconque de la sphère, nous désignons par G_A le *sous-groupe réduit* de G formé par les transformations qui admettent le point invariant A. Le nombre des éléments contenus dans le groupe G_A est appelé *indice du point A par rapport au groupe G.*

Il résulte immédiatement de la définition que *deux points homologues quelconques ont mêmes indices.* Soient, en effet, A et B deux points, et T une transformation de G qui change A en B; le transformé du sous-groupe G_A par T

---

[1] B. VON KERÉKJÁRTÓ: *Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen.* Acta Scient. Math. Szeged, t. 6 (1934), p. 235—262; voir en particulier p. 250.

est le sous-groupe G_B; par conséquent G_A et G_B contiennent le même nombre d'éléments.

5. 1. *Si le groupe G compact en soi comprend une infinité d'éléments, il y a au moins un point de la sphère dont l'indice par rapport à G est infini.*

Soit $S_1, S_2, \ldots$ une suite d'éléments de G convergeant vers l'identité. Chacune des transformations S_ν est homéomorphe à une rotation de la sphère, elle admet donc deux points invariants P_ν et Q_ν. Choisissons une suite partielle de la suite $P_1, P_2, \ldots$ qui converge vers un point P; désignons cette suite par les mêmes symboles. Si, à partir d'un certain indice: $P_\nu = P_{\nu+1} = \ldots$, posons $P = P_\nu$.

Si la transformation S_ν est périodique, désignons sa période par n_ν; autrement soit $n_\nu = \infty$. L'indice du point P_ν est égale à n_ν ou à un multiple de n_ν.

La suite $n_1, n_2, \ldots$ n'est pas bornée. Si le nombre fixe p était supérieur à n_ν, pour tout ν, l'écart de la transformation S_ν à l'identité serait supérieur à $2/p$ (voir 4. 1), contrairement au choix de la suite $S_1, S_2, \ldots$.

Nous allons montrer que *l'indice du point $P = \lim P_\nu$ par rapport au groupe G est infini.* Cette proposition est évidente dans le cas où les points P_ν sont identiques à P, à partir d'un certain indice. Dans l'autre cas, soit η un nombre positif arbitrairement petit ($\eta < 1$); comme la suite $S_1, S_2, \ldots$ converge vers l'identité, on a, à partir d'un certain indice,

$$|S_\nu| < \eta.$$

En vertu de la proposition 4. 3, il y a parmi les puissances de S_ν une, $S_\nu^{k'_\nu}$, pour laquelle

$$|S_\nu^{k'_\nu}| > 1 > \eta.$$

Désignons, pour tout ν, par k_ν le plus petit entier positif tel que

$$|S_\nu^{k_\nu}| \geqq \eta.$$

Comme $|S_\nu^{k_\nu - 1}| < \eta$ et $|S_\nu| < \eta$, nous obtenons la relation

$$\eta \leqq |S_\nu^{k_\nu}| < 2\eta.$$

Il y a une suite partielle de la suite $S_\nu^{k_\nu}$ qui converge vers un élément S de G. Cette transformation S laisse invariant le point P et vérifie la relation

$$\eta \leqq |S| \leqq 2\eta.$$

Il résulte de là, d'une part, que S est différente de l'identité, d'autre part, que si S est périodique, sa période est supérieure à $1/\eta$ (voir 4. 1). Le nombre positif η étant arbitrairement petit, le procédé ci-dessus nous amène à des transformations, admettant le point invariant P, qui ne sont pas périodiques, ou qui sont périodiques et leurs périodes sont arbitrairement grandes. Cela signifie que l'indice du point P par rapport au groupe G est infini. De la sorte la proposition 5. 1 est démontrée.

Du raisonnement ci-dessus découle aussi le résultat suivant:

5. 2. *Les points de la sphère dont l'indice par rapport au groupe G compact en soi est supérieur à 1 forment un ensemble fermé. Les points d'indice infini forment eux-mêmes un ensemble fermé.*

§ 6. Sur les groupes compacts en soi d'un disque circulaire.

Nous allons démontrer la proposition suivante que nous appliquerons dans le § 7.

6. 1. *Si G est un groupe compact en soi de transformations topologiques d'un disque circulaire en lui-même, conservant le sens, G est homéomorphe soit à un groupe cyclique fini, formé par les puissances d'une rotation périodique, soit au groupe cyclique infini formé par toutes les rotations du cercle autour de son centre.*

Considérons les transformations de la circonférence engendrées par les éléments du groupe donné G_0; elles forment aussi un groupe g_0 compact en soi, par suite elles sont régulières. Comme ces transformations conservent le sens de la circonférence, chacune d'elles est homéomorphe à une rotation de la circonférence. Si un point P est transformé par les transformations de g_0 en un *nombre fini* de points, désignons ces points, conformément à leur ordre cyclique sur la circonférence, par $P, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, et par t la transformation de g_0 qui change P en P_1. Les transformations $t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ changent P respectivement en $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$. Dans ce cas, le groupe g_0 est le groupe cyclique $(I, t, t^2, \ldots, t^{n-1})$. — Si le point P est changé par g_0 en une *infinité* de points, les points homologues à P ont au moins un point d'accumulation qui est aussi homologue à P. Il y a donc des transformations de g_0 qui changent P de distances arbitrairement petites, et comme ces transformations sont homéomorphes à des rotations de la circonférence, leurs puissances changent P en un ensemble de points recouvrant la circonférence avec une densité arbitraire. Il résulte de là que l'ensemble des points homologues à P est partout dense sur la circonférence, et comme il est fermé, il est identique à la circonférence. Autrement dit, g_0 est *transitif* sur la circonférence, et comme ses éléments n'admettent pas de points invariants sur la circonférence, g_0 est *simplement transitif*. On sait que sous ces conditions le groupe g_0 est homéomorphe au groupe des rotations de la circonférence.

Les éléments du groupe G_0 correspondent de façon biunivoque aux éléments du groupe g_0, c'est-à-dire que deux éléments distincts de G_0 engendrent des transformations distinctes sur la circonférence. Cette proposition est une conséquence immédiate de la régularité des transformations de G_0, vu qu'une transformation régulière du disque circulaire en lui même, qui engendre la transformation identique sur la circonférence, est l'identité sur tout le disque.

Si les éléments du groupe G_0 engendrent sur la circonférence un groupe cyclique *fini* g_0, formé par les puissances d'une transformation t, soit T la transformation de G_0 correspondant à t; le groupe cyclique $(I, T, T^2, \ldots, T^{n-1})$ est alors identique au groupe G_0.

Si les éléments du groupe G_0 engendrent sur la circonférence un groupe *infini* qui est, comme nous l'avons constaté, un groupe cyclique continu, désignons par t une transformation non périodique contenue dans g_0, et par T l'élément de G_0 lui correspondant. T est une transformation régulière, non périodique, du disque circulaire, conservant le sens, elle est donc homéomorphe à une rotation dont l'angle est incommensurable avec π. L'ensemble des puissances de T et de leurs éléments d'accumulation est identique au groupe G_0. Cela prouve la proposition 6. 1.

§ 7. La structure des sous-groupes réduits de la sphère.

Soit G un groupe compact en soi de transformations topologiques de la sphère unité en elle-même, conservant le sens, et soit G_A le sous-groupe réduit admettant le point invariant A.

Pour tout nombre positif ε, désignons par $\varphi(\varepsilon)$ un nombre positif correspondant à ε d'après l'égale continuité des transformations de G, dans le sens suivant: si P et Q sont deux points quelconques dont la distance est inférieure à $\varphi(\varepsilon)$, leurs images obtenues par une transformation quelconque du groupe G sont en distance $< \varepsilon$ l'une de l'autre. Cela étant, soit ε_1 un nombre positif quelconque ($\varepsilon_1 < 1$), et ε_2 un nombre positif inférieur à $\varphi(\varepsilon_1)$. Si P est un point arbitraire tel que

$$(*) \qquad \varepsilon_2 < (A, P) < \varphi(\varepsilon_1),$$

et si P' désigne l'image de P obtenue par une transformation quelconque du groupe G_A, on a la relation:

$$(**) \qquad \varphi(\varepsilon_2) < (A, P') < \varepsilon_1.$$

Soit $\varkappa$ une courbe simple et fermée entourant le point A dans un voisinage suffisamment petit de A et telle que pour tous les points P de $\varkappa$ la relation (*) soit vérifiée. Si $\varkappa'$ désigne l'image de $\varkappa$ obtenue par une transformation quelconque de G_A, ses points P' vérifient la relation (**). L'ensemble des courbes $\varkappa'$ obtenues par les transformations de G_A détermine un domaine D contenant le point A. Ce domaine est invariant par le groupe G_A (c'est-à-dire par toutes les transformations de G_A). La frontière de D est un continu γ qui est aussi invariant par le groupe G_A.

On peut démontrer soit par un raisonnement de M. Hilbert[1], soit par un raisonnement que j'ai employé autrefois[2] que le continu γ est une courbe simple et fermée. Nous obtenons donc le résultat suivant:

7\. 1. *Si l'indice du point A par rapport au groupe G est supérieur à* 1, *il existe une courbe simple et fermée γ qui est invariante par G_A.*

Chacun des deux domaines déterminés par la courbe γ est changé en lui-même par G_A; en appliquant à ces deux domaines (fermés) la proposition 6. 1 nous obtenons le résultat que, dans chacun d'eux, G_A est homéomorphe à un groupe de rotations. En particulier, il y a dans chacun de ces domaines un point invariant du groupe G_A, dont l'un est A; désignons l'autre par A'; nous appelons les points A et A' *opposés.* Notre résultat est énoncé dans la proposition suivante:

7\. 2. *Si l'indice du point A par rapport à G est supérieur à* 1, *il y a un point A' distinct de A qui est invariant par toutes les transformations laissant A invariant, et par aucune autre transformation de G. Le sous-groupe réduit admettant les points invariants A et A' est homéomorphe au groupe des rotations de la sphère autour d'un axe, ou à un sous-groupe fini de ce groupe.*

Désignons par $G_{AA'}$ le sous-groupe réduit admettant les points invariants A et A' (nous l'avons désigné antérieurement par G_A).

---

[1] D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig et Berlin (1930, 7-me éd.). Anhang IV. *Über die Grundlagen der Geometrie,* §§ 1—8, p. 188—199.

[2] B. von Kerékjártó: *Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen.* Acta Scient. Math. Szeged, t. 6 (1934), p 237—243.

Si l'indice du point A est infini, $G_{AA'}$ est un groupe cyclique continu. La trajectoire d'un point quelconque P, différent de A et A', par le groupe $G_{AA'}$, c'est-à-dire l'ensemble des images de P obtenues par les transformations de $G_{AA'}$, est une courbe simple et fermée, séparant les points A et A'. Nous appellerons cette trajectoire *pseudocercle* ou *cercle* de centres A et A', et la désignerons par $k^P_{AA'}$ ou par $k_{AA'}$.

7. 3. *Toute transformation du groupe G change deux points opposés en deux points opposés et tout cercle en un cercle.*

Soient, en effet, A et A' deux points opposés, et soit T une transformation quelconque de G. Désignons par B et B' les images de A et de A' obtenues par T. Ces points sont invariants par le groupe $T^{-1} G_{AA'} T$, ils sont donc opposés. Les trajectoires du groupe $G_{AA'}$ sont changées par T en les trajectoires du groupe $G_{BB'} = T^{-1} G_{AA'} T$, c'est-à-dire que tout cercle $k_{AA'}$ est changé par T en un cercle $k_{BB'}$.

§ 8. La structure du groupe G.

Si le groupe G ne contient qu'un nombre fini d'éléments, tout point de la sphère est d'indice fini et il n'y a qu'un nombre fini de points d'indice supérieur à 1. Inversement, si tout point de la sphère est d'indice fini, le groupe G est fini (5. 1). Dans ce cas G est homéomorphe soit à un groupe cyclique fini, soit à un groupe dyédrique, soit au groupe d'un polyèdre régulier[1].

Si le groupe G est infini, il y a au moins un point A d'indice infini (5. 1); le point opposé A' est aussi d'indice infini.

Premier cas. *Il n'y a aucun autre point d'indice infini sauf A et A'.*

Comme les indices des points homologues par le groupe G sont égaux, il s'ensuit que toute transformation de G laisse A et A' invariants ou les échange entre eux.

Si toute transformation de G laisse A et A' invariants, le groupe G est identique à $G_{AA'}$, il est donc homéomorphe au groupe des rotations de la sphère autour d'un axe (7. 2).

Si une transformation σ de G échange entre eux les points A et A', le faisceau des cercles de centres A et A' est changé en lui-même de telle façon qu'à l'orientation de ce faisceau à partir de A vers A' correspond l'orientation

[1] B. von Kerékjártó: *Über die endlichen topologischen Gruppen der Kugelfläche.* Proc. Acad. Amsterdam, vol. 22 (1919).

opposée. Il y a, par conséquent, un cercle et un seul de ce faisceau qui est changé en lui-même par σ; nous le désignons par $K_{AA'}$ et appelons *grand cercle* de centres A et A'. Les deux domaines déterminés par $K_{AA'}$ sont échangés entre eux par σ; il résulte de là que les deux points invariants de σ, que nous désignons par B et B', appartiennent à $K_{AA'}$. Nous désignerons la transformation σ aussi par $\sigma_{BB'}$, mettant en évidence ses points invariants. Le carré de $\sigma_{BB'}$ admet plus de deux points invariants (outre que B et B' encore A et A'); il résulte que $\sigma_{BB'}^2 = I$, c'est-à-dire que $\sigma_{BB'}$ est involutive. Nous appelons $\sigma_{BB'}$ *demi-rotation* autour des points B et B'.

Tout élément T du groupe $G_{AA'}$ change le grand cercle $K_{AA'}$ en lui-même, il change donc les points B et B' en deux points opposés C et C' de $K_{AA'}$. La transformée $T^{-1}\sigma_{BB'}T = \sigma_{CC'}$ de $\sigma_{BB'}$ par T est aussi involutive et échange entre eux les points A et A'. Donc, si C et C' sont deux points opposés quelconques du grand cercle $K_{AA'}$, la demi-rotation $\sigma_{CC'}$ échange entre eux les points A et A'.

Inversement, si σ est une transformation quelconque de G qui échange entre eux les points A et A', σ est la demi-rotation autour d'un couple de points opposés C, C' appartenant au grand cercle $K_{AA'}$. (Cette proposition, que nous allons démontrer, signifie que le grand cercle $K_{AA'}$ est univoquement déterminé par le groupe G et par les points opposés A et A'). Soit en effet $\sigma_{BB'}$ la demi-rotation autour des points opposés B et B' appartenant au grand cercle $K_{AA'}$; le produit $\varrho = \sigma\sigma_{BB'}$ laisse invariants les points A et A', il appartient donc au groupe $G_{AA'}$ et change le grand cercle $K_{AA'}$ en lui-même: $\sigma_{BB'}$ change aussi $K_{AA'}$ en lui-même. Par conséquent, $K_{AA'}$ est invariant par $\sigma = \varrho\sigma_{BB'}$, et les deux domaines déterminés par $K_{AA'}$ sont échangés entre eux. Il résulte de là que les points invariants de σ se trouvent sur $K_{AA'}$.

La demi-rotation $\sigma_{AA'}$ échange entre eux les points opposés du grand cercle $K_{AA'}$. En effet, si un élément de $G_{AA'}$ change le point B de $K_{AA'}$ en son opposé B', il change B' en B; il est donc involutif.

Nous allons montrer la propriété suivante: Si T est un élément quelconque de $G_{AA'}$, et $\sigma_{BB'}$ la demi-rotation autour d'un couple quelconque de points opposés du grand cercle $K_{AA'}$, on a la relation:

$$\sigma_{BB'}T = T^{-1}\sigma_{BB'}.$$

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises:

Lemme. *Soit γ un groupe cyclique continu, et soit t le paramètre canonique de γ $(0 \leqq t < 1)$, tel que le produit des éléments ϱ^t et $\varrho^{t'}$ correspondant aux valeurs t et t' du paramètre soit l'élément $\varrho^{t+t'}$ correspondant à la valeur $t+t'$. Si S est une transformation topologique telle que $S^{-1}\gamma S = \gamma$, on a la relation*

$$S^{-1}\varrho^t S = \varrho^{\pm t}.$$

De la relation $S^{-1}\gamma S = \gamma$, il résulte que

$$S^{-1}\varrho^t S = \varrho^{f(t)}.$$

Les éléments ϱ^t et $\varrho^{f(t)}$ de γ se correspondent de manière biunivoque et continue. Si $t = 0$, l'élément correspondant $\varrho^{f(0)}$ est l'identité; on peut donc poser $f(0) = 0$. Pour $t = 1$ on a aussi $\varrho^{f(1)} = I$, d'où $f(1) = \pm 1$. Pour des valeurs quelconques t_1 et t_2, on a

$$\varrho^{f(t_1+t_2)} = S^{-1}\varrho^{t_1+t_2} S = S^{-1}\varrho^{t_1} S \cdot S^{-1}\varrho^{t_2} S = \varrho^{f(t_1)}\varrho^{f(t_2)} = \varrho^{f(t_1)+f(t_2)}$$

donc

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2).$$

De là il résulte que

$$f(t) = \pm t.$$

En posant $S = \sigma_{BB'}$, et $\gamma = G_{AA'}$, on voit que dans la formule du lemme le signe *moins* est valable dans l'exposant à droite parce que $\sigma_{BB'}$ change le sens du grand cercle $K_{AA'}$ en le sens opposé. Par suite:

$$\sigma_{BB'}\, T = T^{-1}\sigma_{BB'}.$$

Les propriétés établies caractérisent le *groupe dyédrique infini* formé par les rotations de la sphère autour d'un axe et les demi-rotations autour des axes perpendiculaires à cet axe.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

8. 1. *S'il n'y a qu'un seul couple de points opposés d'indice infini, le groupe G est homéomorphe soit au groupe des rotations de la sphère autour d'un axe, soit au groupe dyédrique infini.*

Deuxième cas. *Il y a deux points non opposés d'indice infini.*

Soient A et B deux points non opposés d'indice infini, et soient A' et B' leurs opposés. Tous les points du cercle $k^A_{BB'}$ de centres B et B', passant par A, sont homologues à A. Par tout point de $k^A_{BB'}$ passe un cercle de centres

A et A'; les points de ces cercles sont aussi homologues à A, ils forment un voisinage de A sur la sphère. Par suite, A est point intérieur de l'ensemble de ses homologues sur la sphère; les points homologues de A forment donc un ensemble *ouvert* sur la sphère. Comme le groupe G est compact en soi, les homologues de A forment un ensemble *fermé*. En conséquence de ces deux propriétés, l'ensemble des homologues de A est identique à la sphère, c'est-à-dire que le groupe G est transitif sur la sphère. Nous énonçons ce résultat dans la proposition suivante:

8. 2. *S'il y a deux points non opposés d'indice infini, le groupe G est transitif sur la sphère.*

§ 9. La géométrie définie par un groupe compact et transitif.

Si le groupe G compact en soi est transitif sur la sphère, tout point est d'indice infini par rapport à G, et à tout point A correspond un point opposé A'. Les points A et A' se correspondent réciproquement de façon univoque et continue.

Nous définissons la *transformation diamétrale* α, en associant à tout point A le point image A' opposé de A. C'est une transformation topologique et involutive de la sphère en elle-même; elle change le sens de la sphère (en effet, elle n'admet pas de point invariant).

A tout couple de points opposés A, A' correspond un groupe cyclique continu $G_{AA'}$ formé par les transformations de G qui admettent les points invariants A et A'.

En conséquence de la transitivité de G, il y a au moins une transformation $\sigma_{BB'}$ de G qui change A en A', et, par suite, A' en A. La transformation $\sigma_{BB'}$ est involutive; ses points invariants B et B' appartiennent au grand cercle $K_{AA'}$, de centres A et A'. Si C et C' désignent deux points opposés quelconques du grand cercle $K_{AA'}$, la demi-rotation $\sigma_{CC'}$ autour de C et C' échange entre eux A et A'. La demi-rotation $\sigma_{AA'}$ échange entre eux C et C'; elle transforme le cercle de centres C et C', passant par les points A et A', en lui-même; ce cercle est donc le grand cercle $K_{CC'}$ de centres C et C'. D'où:

9. 1. *Les points du grand cercle $K_{AA'}$ sont opposés deux-à-deux. Si C et C' sont deux points opposés du grand cercle $K_{AA'}$, le grand cercle $K_{CC'}$ passe par les points A et A'.*

La transformation diamétrale α change le sens de la sphère, et conserve le sens du grand cercle $K_{AA'}$; elle échange entre eux les deux hémisphères déterminées par le grand cercle $K_{AA'}$. Il en résulte que *la sphère est divisée par un grand cercle quelconque en deux hémisphères dont aucune ne contient deux points opposés.*

Comme les points d'un grand cercle quelconque $K_{PP'}$ sont opposés deux-à-deux, chacune des deux hémisphères déterminées par $K_{AA'}$ contient au moins un point de $K_{PP'}$; il résulte de là que *deux grands cercles quelconques ont au moins deux points communs.*

Si les grands cercles $K_{AA'}$ et $K_{PP'}$ avaient plus de deux points communs, soient B et C deux de ces points qui ne sont pas opposés; désignons leurs opposés par B' et C'. La demi-rotation $\sigma_{BB'}$ échange entre eux les points A et A', et de même les points P et P'; similairement la demi-rotation $\sigma_{CC'}$. La transformation $\sigma_{BB'} \cdot \sigma_{CC'}$ aurait donc quatre points invariants: A, A', P, P', elle serait l'identité, contrairement à l'hypothèse que B et C sont distincts et non opposés.

Nous avons obtenu le résultat suivant:

9. 2. *Deux grands cercles quelconques ont deux et seulement deux points communs; ils sont nécessairement des points opposés.*

Il résulte de la proposition 9. 1 immédiatement que *toute transformation du groupe G change les grands cercles en des grands cercles.* Considérons les grands cercles passant par deux points opposés A et A'. Leurs centres sont des points opposés du grand cercle $K_{AA'}$, d'après 9. 1. Deux quelconques de ces grands cercles n'ont aucun point commun outre que A et A'. Une transformation arbitraire de $G_{AA'}$ change les points opposés B et B' de $K_{AA'}$ en des points opposés C et C' de $K_{AA'}$, et le grand cercle $K_{BB'}$ en le grand cercle $K_{CC'}$. Le faisceau des grands cercles passant par A et A' est changé donc en lui-même par toutes les transformations de $G_{AA'}$. Il résulte de là que par un point quelconque P, distinct de A et de A', et par le point A passe un grand cercle et un seul. D'où:

9. 3. *Par deux points non opposés quelconques passe un grand cercle et un seul.*

A deux points arbitraires P et Q nous associons la *distance* (P, Q) d'après la définition suivante. Soit $K_{AA'}$ le grand cercle passant par P et Q, et soit θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ le paramètre canonique du groupe $G_{AA'}$. Il y a dans $G_{AA'}$ une et une seule transformation T qui change P en Q; soit θ le paramètre correspondant à T, et θ' celui correspondant à son inverse T^{-1}; on a $\theta + \theta' = 2\pi$. Celle des valeurs θ et θ' qui est inférieure à π sera appelée distance (P, Q). — Si P et Q sont opposés, soit $(P, Q) = \pi$.

Si les points P et Q sont changés par une transformation du groupe G en les points R et S, on a $(P, Q) = (R, S)$. Inversement, si $(P, Q) = (R, S)$, il y a une transformation de G qui change P et Q en R et S. Pour démontrer cette proposition, nous faisons observer que le paramètre θ est le *nombre de rotation*, introduit par Poincaré, qui est invariant par transformation. Soit $K_{AA'}$ le grand cercle passant par P et Q, et $K_{BB'}$ celui passant par R et S. Désignons par ϱ la transformation de $G_{AA'}$ qui change P en Q, et par T la transformation de G qui change P en R et Q en S. La transformation $T^{-1}\varrho T$ change donc le point R en S, et les nombres de rotation correspondant à ϱ et à $T^{-1}\varrho T$ sont égaux; il résulte que $(P, Q) = (R, S)$. — La proposition inverse s'obtient par un raisonnement analogue. De cette façon, nous avons vérifié que *les relations d'égalité définies pour des arcs de grands cercles, d'une part, par le moyen du groupe G et, d'autre part, par le moyen de la définition de distance sont équivalentes.*

Les distances restent encore invariantes par la transformation diamétrale α comme on vérifie immédiatement.

Si P et Q sont deux points non opposés, ils divisent le grand cercle passant par ces points en deux arcs dont l'un ne contient aucun couple de points opposés; nous dirons que celui-ci est *plus court* et l'autre *plus long qu'un demi-cercle.*

Considérons deux grands cercles ayant les points communs A et A'. Désignons par K_1 et K_2 l'un des deux demi-cercles déterminés par ces points. Il y a dans le groupe $G_{AA'}$ une transformation et une seule qui change K_1 en K_2; soit θ la valeur du paramètre canonique correspondant à cette transformation. Celui des nombres θ et $2\pi - \theta$ qui est inférieur à π sera appelé *angle* $\sphericalangle (K_1, K_2)$. Si B et C sont des points quelconques des demi-cercles K_1 et K_2, respectivement, distincts de A et de A', nous désignerons l'angle $\sphericalangle (K_1, K_2)$ aussi par $\sphericalangle BAC$.

Pour les mêmes raisons que les distances, les angles restent aussi invariants et par le groupe G et par la transformation diamétrale α. Inversement, l'égalité de deux angles entraîne leur équivalence par le groupe G.

De nos résultats obtenus découlent immédiatement les propositions suivantes:

9. 4. *L'égalité des distances et celle des angles sont des relations réflexives, symétriques et transitives.*

9. 5. *Si P et Q sont deux points arbitraires du grand cercle $K_{AA'}$, et si R*

et R' *sont deux points opposés du grand cercle* $K_{BB'}$, *sur chacun des demi-cercles de* $K_{BB'}$, *déterminés par* R *et* R', *il y a un point et un seul,* S *et* $\bar{S}$, *respectivement, tel que* $(P, Q) = (R, S) = (R, \bar{S})$.

9. 6. *Si* K_1 *et* K_2 *sont des demi-cercles joignant les points opposés* A *et* A', *et si* K_1' *est l'un des demi-cercles du grand cercle* K', *déterminés par les points opposés* B *et* B' *de* K', *il y a sur chacune des deux hémisphères déterminées par* K' *un et un seul demi-cercle joignant* B *et* B', K_2' *et* K_2'' *respectivement, tel que* $\sphericalangle (K_1, K_2) = \sphericalangle (K_1', K_2') = \sphericalangle (K_1', K_2'')$.

9. 7. *Soient* $P_1 P_2$ *et* $P_2 P_3$ *deux arcs du grand cercle* $K_{AA'}$, *plus courts qu'un demi-cercle et sans point commun; soient* $Q_1 Q_2$ *et* $Q_2 Q_3$ *deux arcs du grand cercle* $K_{BB'}$ *plus courts qu'un demi-cercle et sans point commun. Si* $(P_1, P_2) = (Q_1, Q_2)$, *et* $(P_2, P_3) = (Q_2, Q_3)$, *il résulte que* $(P_1, P_3) = (Q_1, Q_3)$.

Nous allons démontrer le théorème suivant (*premier cas d'égalité des triangles*):

9. 8. *Soient* A, B, C *des points n'appartenant pas à un même grand cercle, et soient* AB, BC, CA *les arcs de grand cercle joignant ces points lesquels sont plus courts qu'un demi-cercle. Soient ensuite* A_1, B_1, C_1 *des points n'appartenant pas à un même grand cercle, et soient* $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ *les arcs de grand cercle joignant ces points qui sont plus courts qu'un demi-cercle. Si* $(A, B) = (A_1, B_1)$, $(A, C) = (A_1, C_1)$ *et* $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1 A_1 B_1$, *il résulte que* $(B, C) = (B_1, C_1)$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1 B_1 C_1$ *et* $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1 C_1 A_1$.

Comme $(A, B) = (A_1, B_1)$, il y a une transformation de G qui change A_1 en A et B_1 en B; l'image du point C_1 obtenue par cette transformation est un point C_2 tel que $(A, C_2) = (A, C)$ et $\sphericalangle C_2 AB = \sphericalangle CAB$. Si C_2 et C se trouvent d'un même côté du grand cercle passant par A et B, la dernière égalité entraîne que C_2 et C se trouvent sur un même demi-cercle issu de A, et comme $(A, C_2) = (A, C)$, le point C_2 coïncide avec C. Les égalités énoncées dans le théorème ont donc lieu dans ce cas.

Mais si les points C_2 et C se trouvent des côtés différents du grand cercle passant par A et B, désignons par A', B', C_2' les points opposés à A, B, C_2 respectivement. Comme la transformation diamétrale conserve les distances et les angles, nous avons les relations: $(A', C_2') = (A, C_2) = (A, C)$, $(A' B') = (A, B)$ et $\sphericalangle C_2' A' B' = \sphericalangle C_2 AB = \sphericalangle CAB$. Par la demi-rotation autour des centres du grand cercle passant par A et B le point C_2' est changé en un point C_3 pour lequel $(A, C_3) = (A, C)$ et $\sphericalangle C_3 AB = \sphericalangle CAB$. Comme les points C et C_3 se trouvent d'un même côté du grand cercle passant par A et B, il résulte de notre raisonnement ci-dessus que C_3 coïncide avec C. Cela complète la démonstration de 9. 8.

D'après les propositions 9. 2—9. 8 la géométrie définie par le moyen du groupe G vérifie les axiomes de la géométrie elliptique-sphérique. Comme Hessenberg a démontré[1], on peut déduire à partir de ces axiomes les théorèmes projectifs de la géométrie elliptique et de là les formules trigonométriques. Il résulte en particulier que *le groupe G est homéomorphe au groupe des mouvements de la géométrie elliptique plane, ou ce qui revient au même, au groupe des rotations de la sphère.*

Nous résumons les résultats obtenus dans l'énoncé suivant:

Théorème I. *Si G est un groupe compact en soi de transformations topologiques de la surface de la sphère en elle-même, conservant le sens, il est homéomorphe à l'un des groupes suivants:*

Groupes finis: *groupe cyclique fini;*
groupe dyédrique fini;
les groupes des polyèdres réguliers.

Groupes infinis: *groupe cyclique continu;*
groupe dyédrique infini;
groupe des rotations de la sphère.

Si le groupe G est compact mais non nécessairement fermé, il est homéomorphe soit à l'un des groupes finis, soit à un sous-groupe partout dense de l'un des groupes infinis énumérés ci-dessus.

En utilisant le théorème de MM. Montgomery et Zippin cité dans l'Introduction, il résulte du théorème I immédiatement le théorème suivant:

Théorème II. *Tout groupe compact et transitif de transformations topologiques de la surface de la sphère en elle-même, conservant le sens, est homéomorphe au groupe des rotations de la sphère.*

A titre de sa particularité, nous signalons la conséquence suivante du théorème I:

Si le groupe G est compact en soi et si tout point de la sphère a au moins 13 *homologues, G est homéomorphe au groupe des rotations de la sphère.*

[1] G. HESSENBERG: *Begründung der elliptischen Geometrie.* Mathem. Annalen, vol. 61 (1905), p. 173—184.

§ 10. Groupes compacts de la sphère contenant des transformations qui changent le sens.

Si le groupe G compact en soi de transformations topologiques de la sphère en elle-même contient des transformations changeant le sens, les transformations de G conservant le sens forment un sous-groupe invariant G^0 de G. Le sous-groupe G^0 étant homéomorphe à un groupe de rotations de la sphère, nous introduisons une métrique telle que G^0 devient un groupe de rotations métriques.

Supposons que *le groupe G soit infini.*

Si G^0 est le groupe de toutes les rotations de la sphère, les trajectoires des sous-groupes continus d'ordre 1 de G^0 sont tous les cercles de la sphère. Par la transformation par un élément quelconque S de G les sous-groupes continus d'ordre 1 de G^0 sont changés entre eux; il résulte de là que S change tout cercle en un cercle, tout couple de points opposés en un couple de points opposés et les grands cercles en des grands cercles.

Soit S_1 un élément de G n'appartenant pas à G^0; désignons par A un point quelconque, et par $S_1(A) = A_1$ son image obtenu par S_1. Le groupe G^0 étant transitif, il y a un élément T de G^0 tel que $T(A) = A_1$. La transformation $S = S_1 T^{-1}$ change le sens de la sphère; elle admet le point invariant A, et son opposé A'.

La transformation S change le faisceau des grands cercles passant par A et A' en lui-même, et les demi-cercles de ces grands cercles, déterminés par A et A', entre eux. Comme S change le sens de la sphère et laisse invariants les points A et A', elle transforme le faisceau des demi-cercles joignant A et A' en lui-même de telle manière qu'à un sens donné de ce faisceau correspond le sens inverse. Il y a, par conséquent, deux de ces demi-cercles, et seulement deux, qui sont changés en eux-mêmes; ils forment ensemble un grand cercle. La transformation S^2 change aussi chacun de ces demi-cercles en lui-même, et comme S^2 est une rotation autour de A et A', il résulte que $S^2 = I$. S est donc une transformation involutive; on voit immédiatement que S est la symétrie par rapport à un grand cercle passant par A et A'.

Si S' est un autre élément de G n'appartenant pas à G^0, la transformation $T = S' S^{-1}$ conserve le sens de la sphère, elle appartient donc à G^0. Tout élément de G qui n'appartient pas à G^0 peut être donc obtenu comme produit d'un élément de G^0 par la symétrie S. D'où le théorème suivant:

10. I. *Si le sous-groupe G^0 de G formé par les transformations conservant le sens est homéomorphe au groupe des rotations de la sphère, G est homéomorphe au groupe engendré par les rotations et par les symétries suivant les grands cercles.*

Considérons maintenant un groupe G tel que le sous-groupe G^0 formé par les transformations conservant le sens de la sphère soit un groupe cyclique continu. Désignons par A et A' les points invariants de G^0. Toute transformation S de G laisse invariants les points A et A' ou les échange entre eux. En conséquence de la relation $S^{-1} G^0 S = G^0$, le faisceau des trajectoires de G^0, c'est-à-dire le faisceau des cercles de centres A et A' est changé en lui-même par S.

Si S échange les points A et A', il y a dans le faisceau des cercles $k_{AA'}$ un et un seul cercle $K_{AA'}$ qui est invariant par S. Soit B un point de $K_{AA'}$, $B_1 = S(B)$ son image, et soit T l'élément de G^0 pour lequel $T(B) = B_1$. La transformation $S' = S T^{-1}$ admet le point invariant B, son carré admet les points invariants A, A' et B, d'où: $S'^2 = I$. Il résulte de là que S' est une symétrie par rapport à $K_{AA'}$. Le groupe G s'obtient à partir de G^0 par l'adjonction de la symétrie S'. En appliquant le lemme du § 8, on voit que dans la formule

$$S'^{-1} \varrho^t S' = \varrho^{\pm t},$$

où ϱ^t désigne l'élément général du groupe cyclique G^0, le signe *plus* est valable dans l'exposant à droite, parce que S' conserve le sens du cercle $K_{AA'}$; donc

$$\varrho^t S' = S' \varrho^t.$$

Il s'ensuit que G est homéomorphe au groupe engendré par les rotations de la sphère autour d'un axe et par la symétrie suivant le grand cercle perpendiculaire à cet axe.

Si la transformation S de G, n'appartenant pas à G^0, change A et A' en eux-mêmes, comme tout cercle $k_{AA'}$ est changé par S^2 en lui-même, S change chacun des cercles $k_{AA'}$ en lui-même de telle façon qu'à un sens donné de $k_{AA'}$ correspond le sens inverse. S admet sur chaque cercle $k_{AA'}$ deux points invariants; leur ensemble est une courbe simple et fermée passant par A et A'. Il résulte, comme ci-dessus, que $S^2 = I$; S est donc homéomorphe à une symétrie par rapport à un grand cercle. Comme S change le sens sur chacun des cercles $k_{AA'}$, il s'ensuit du lemme du § 8 que

$$\varrho^t S = S \varrho^{-t}.$$

G s'obtient du groupe des rotations autour d'un axe en y ajoutant les symétries par rapport aux grands cercles passant par les extrémités de cet axe. Nous avons obtenu la proposition suivante:

10. 2. *Si le sous-groupe G^0 de G est homéomorphe au groupe des rotations de la sphère autour d'un axe, G est homéomorphe au groupe obtenu de celui-ci par l'adjonction d'une symétrie suivant un grand cercle qui est perpendiculaire à l'axe de rotation ou qui passe par les extrémités de l'axe.*

Finalement, si G^0 est un groupe dyédrique infini, soit $G_{AA'}$ le groupe cyclique continu appartenant à G^0. Soit S un élément de G n'appartenant pas à G^0. La transformation par S change G^0 et $G_{AA'}$ en eux-mêmes. Il résulte de là que, par la transformation S, les points invariants A et A' de $G_{AA'}$ sont changés en eux-mêmes ou entre eux, le faisceau des cercles $k_{AA'}$ en lui-même, et les couples de points opposés du grand cercle $K_{AA'}$ se correspondent. Si S laisse invariants A et A', multiplions S par une transformation de G^0 qui échange A et A', et désignons ce produit de même par S. La transformation S change le grand cercle $K_{AA'}$ en lui-même et conserve le sens de $K_{AA'}$. Soit B un point de $K_{AA'}$, soit $B_1 = S(B)$, et désignons par T l'élément du groupe cyclique $G_{AA'}$ pour lequel $T(B) = B_1$. La transformation $S' = S\,T^{-1}$ admet le point invariant B, S'^2 en outre A et A', de telle sorte que $S'^2 = I$. La transformation involutive S' est l'identité sur $K_{AA'}$; elle est une symétrie par rapport au grand cercle $K_{AA'}$.

Si σ est une demi-rotation de G^0, n'appartenant pas à $G_{AA'}$, ses points invariants appartiennent à $K_{AA'}$, ils sont donc invariants par S. Il s'ensuit que la transformation involutive $S^{-1}\sigma S$ de G^0 admet les mêmes points invariants que σ, donc $S^{-1}\sigma S = \sigma$, c'est-à-dire que

$$S\sigma = \sigma S.$$

Il résulte de là la proposition suivante:

10. 3. *Si le sous-groupe G^0 de G est un groupe dyédrique infini, le groupe G s'obtient de G^0 par l'adjonction de la symétrie suivant le grand cercle qui est perpendiculaire à l'axe du sous-groupe cyclique contenu dans le groupe dyédrique.*

Les théorèmes 10. 2 et 10. 3 contiennent aussi l'énumération des groupes compacts en soi de la *couronne circulaire* et du *disque circulaire*, ces surfaces étant homéomorphes à la sphère deux fois ou une fois pointée.

§ 11. Les groupes compacts du plan projectif.

Soit G un groupe compact en soi et infini de transformations topologiques du plan projectif en lui-même. Sur la surface de recouvrement à deux feuillets du plan projectif, c'est-à-dire sur la sphère, au groupe G correspond un groupe compact en soi et infini, G', de manière (1, 2). La transformation identique du plan projectif engendre sur la sphère la transformation identique et la transformation diamétrale α. Si T est un élément quelconque de G, et T_1, T_2 les éléments de G correspondant à T, on a $T_2 = T_1 \alpha = \alpha T_1$. Désignons par g le sous-groupe de G' formé par les éléments I et α; g est un sous-groupe invariant de G' et $G = G'/g$.

Pour obtenir les groupes compacts en soi du plan projectif, il faut donc envisager les groupes compacts en soi de la sphère qui contiennent la transformation diamétrale α, et former leurs groupes facteurs par rapport au sous-groupe invariant $(I, \alpha) = g$. De l'énumération des groupes compacts en soi de la sphère, on obtient de cette façon le résultat suivant:

11. 1. *Si G est un groupe compact en soi et infini de transformations topologiques du plan projectif en lui-même, on peut introduire dans le plan projectif une métrique elliptique telle que G devient soit le groupe des mouvements du plan, soit le groupe des rotations autour d'un point O, soit le groupe formé par les rotations autour de O et par les symétries suivant les droites passant par O.*

Les groupes compacts en soi et infinis de la *bande de Möbius* sont ceux des groupes énumérés ci-dessus qui laissent invariant un point O du plan projectif.

II. Les groupes compacts du tore.

§ 12. Généralités sur les groupes compacts du tore.

Soit G un groupe compact en soi de transformations topologiques du tore en lui-même. Les groupes finis du tore ont été déterminés par M. Brouwer[1]. Nous supposons dans la suite que G est infini.

Toute transformation de G est régulière (2. 1); le carré d'un élément quelconque de G, conservant le sens du tore, est une transformation périodique ou

---

[1] Voir note p. 132.

homéomorphe à une translation du tore, comme je l'ai démontré dans ma théorie sur les transformations régulières des surfaces[1].

Les transformations de G qui appartiennent à la classe de l'identité forment un *sous-groupe invariant* Γ de G. Aucune transformation de Γ, sauf l'identité, n'admet un point invariant.

12. 1. *Le groupe-facteur* G/Γ *est fini.*

Autrement il y aurait une suite infinie d'éléments de G: $S'_0 = I$, S'_1, $S'_2, \ldots$ telle que S'_k n'appartient à aucune des familles Γ, $S'_1\Gamma$, $S'_2\Gamma, \ldots, S'_{k-1}\Gamma$ ($k = 1, 2, \ldots$). Mais comme G est compact, il y a une suite, extraite de la suite S'_k, convergeant vers une transformation S'. Il y a donc deux indices k et l $(k < l)$ tels que S'_k et S'_l diffèrent d'arbitrairement peu; $S'^{-1}_k S'_l$ appartient à la classe de l'identité, c'est-à-dire que S'_l appartient à la famille $S'_k\Gamma$; c'est une contradiction.

Il résulte de la proposition 12. 1 que Γ est aussi un groupe infini et compact en soi.

§ 13. Le groupe Γ des transformations appartenant à la classe de l'identité.

Si le groupe Γ est *transitif* sur le tore, il est simplement transitif, il est donc homéomorphe au groupe des translations du tore[2]. Avec des coordonnées (x, y) et des paramètres (t, s) convenablement choisis, les transformations de Γ peuvent être exprimées par les formules suivantes:

$$x' = x + t \pmod 1, \quad y' = y + s \pmod 1$$
$$(0 \leqq x < 1, \quad 0 \leqq y < 1; \quad 0 \leqq t < 1, \quad 0 \leqq s < 1).$$

Si le groupe Γ est *intransitif* sur le tore, soit P un point arbitraire, $\{P\}$ l'ensemble de ses homologues par le groupe Γ. Soit A un point n'appartenant pas à $\{P\}$, et $\{A\}$ l'ensemble de ses homologues. Désignons par 2ε un nombre positif plus petit que la distance du point P à l'ensemble $\{A\}$, et soit δ un nombre positif correspondant à ε d'après l'égale continuité des transformations de Γ. Désignons par V l'ensemble des points dont les distances à P sont inférieures à δ, et par $\{V\}$ l'ensemble des images de V obtenues par Γ. Il y a un nombre positif δ' tel que tout point en distance $< \delta'$ à $\{P\}$ appartient à $\{V\}$; il résulte

[1] B. VON KERÉKJÁRTÓ: *Über die regulären Abbildungen des Torus.* Acta Scient. Math. Szeged, t. 7 (1934), p. 76—84.

[2] Voir note 1 p. 129.

de là qu'il n'y a qu'un nombre fini d'homologues de V sans point commun deux-à-deux. Par suite l'ensemble de points $\{V\}$ est formé par un *nombre fini de domaines*. La dérivée de $\{V\}$ est un ensemble fermé M, formé par un nombre fini de composants. Évidemment M est invariant par Γ.

Désignons par D celui des domaines complémentaires à M qui contient le point A. D est un domaine *à connexion finie*. Le groupe Γ étant compact et infini, il contient des transformations S qui diffèrent de l'identité d'arbitrairement peu. Par une transformation S de cette sorte A est transformé en un point A' arbitrairement voisin de A, appartenant donc nécessairement au domaine D. Il résulte de là que la transformation S change le domaine D en lui-même. Désignons par γ le sous-groupe de Γ formé par les transformations qui changent D en lui-même; γ est aussi un groupe compact en soi et infini.

Le domaine D est homéomorphe à un disque ou à une couronne circulaire (3. 1). Si D était homéomorphe à un disque circulaire, γ serait un groupe cyclique dont les transformations laissent invariant un point de D (6. 1); mais les transformations de Γ n'admettent pas de point invariant. Le domaine D est donc homéomorphe à une couronne circulaire, et comme les éléments de γ sur le tore appartiennent à la classe de l'identité, ils changent chaque composant de la frontière de D en lui-même.

Le sous-groupe γ est donc homéomorphe à un groupe cyclique continu de translations du tore. Γ ne peut contenir aucun autre sous-groupe cyclique continu, autrement Γ serait transitif sur le tore, contre l'hypothèse. Il résulte de là que le transformé de γ par un élément quelconque de Γ est identique à γ; autrement dit, *γ est un sous-groupe invariant de Γ.*

Un élément quelconque de Γ qui diffère d'assez peu de l'identité change le domaine D en lui-même, appartient donc au sous-groupe γ. Il s'ensuit que *l'ordre du groupe facteur Γ/γ est fini.*

Considérons les trajectoires du groupe cyclique γ; elles forment un faisceau tel que par tout point du tore passe une courbe et une seule. Toute transformation de Γ change ce faisceau en lui-même et conserve le sens du faisceau. Les éléments de Γ conservent aussi le sens du tore, par suite tout élément de Γ change les trajectoires de γ entre elles de telle façon qu'il conserve le sens de ces trajectoires. D'après le lemme du § 8 il résulte de là que *tout élément de Γ est échangeable avec les éléments de γ.*

Désignons par c^0 une trajectoire du groupe γ, et par $c^0, c^1, \ldots, c^{m-1}$ ses images obtenues par le groupe Γ, conformément à leur ordre cyclique sur le tore.

Si σ' est un élément de Γ qui change c^0 en la courbe voisine c^1, le groupe Γ s'obtient à partir de γ par l'adjonction de σ'. La m-ième puissance de σ' est un élément ϱ^{t_0} de γ; en multipliant σ' par $\varrho^{-\frac{t_0}{m}}$ on obtient une *transformation σ de période m dont l'adjonction à γ fournit le groupe Γ.*

Nous introduisons un système de coordonnées (x, y) de la façon suivante. Associons aux trajectoires de γ les valeurs $y (0 \leqq y < 1)$ de façon biunivoque et continue. Soit Δ une courbe simple et fermée qui rencontre toute trajectoire de γ en un seul point. Associons aux points de Δ la valeur $x = 0$, et à leurs images obtenues par la transformation ϱ^t de γ la valeur $x = t$ où t désigne le paramètre canonique du groupe γ. Avec ces coordonnées (x, y) le groupe cyclique γ s'exprime par les formules: $x' = x + t$, $y' = y$.

Pour obtenir une expression simple du groupe Γ nous spécifions les coordonnées par les prescriptions suivantes. Nous associons aux courbes c^k $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ les valeurs $y = y_0 + \frac{k}{m}$, aux trajectoires de γ situées entre c^0 et c^1 les valeurs y: $y_0 < y < y_0 + \frac{1}{m}$ et aux images de la courbe $y = y_1$ $\left(y_0 < y_1 < y_0 + \frac{1}{m}\right)$, obtenues par les puissances de σ les valeurs $y = y_1 + \frac{k}{m}$. — Choisissons la courbe Δ $(x = 0)$ de telle façon qu'elle soit invariante par σ; pour ce but joignons un point quelconque P^0 de c^0 avec son image $P^1 = \sigma(P^0)$ par un arc simple λ^0 dans le domaine limité par c^0 et c^1 tel que λ^0 rencontre toute courbe $y = \text{const}$ dans ce domaine en un seul point; les images λ^k de λ^0 obtenues par les transformations σ^k forment ensemble une courbe simple et fermée Δ, invariante par σ, qui rencontre toute courbe $y = \text{const}$ en un seul point. L'image d'un point $(0, y)$ de Δ obtenue par σ est le point $\left(0, y + \frac{1}{m}\right)$ ce que nous écrirons dans la forme:

$$\sigma(0, y) = \left(0, y + \frac{1}{m}\right).$$

Comme σ et ϱ^t sont échangeables, on obtient

$$\sigma(x, y) = \varrho^x \sigma(0, y) = \sigma \varrho^x(0, y) = \varrho^x \left(0, y + \frac{1}{m}\right) = \left(x, y + \frac{1}{m}\right);$$

la transformation σ s'exprime donc par la formule:

$$x' = x, \; y' = y + \frac{1}{m}.$$

Le résultat de notre raisonnement est énoncé dans la propositîon suivante:

13. 1. *Le sous-groupe Γ de G appartenant à la classe de l'identité, suivant qu'il est transitif ou intransitif sur le tore, s'exprime, avec des coordonnées convenablement choisies, par les formules:*

$$x' = x + t \pmod 1, \quad y' = y + s \pmod 1$$
$$(0 \leqq t < 1, \quad 0 \leqq s < 1),$$

ou

$$x' = x + t \pmod 1, \quad y' = y + \frac{k}{m} \pmod 1$$
$$(0 \leqq t < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

§ 14. Énumération des transformations périodiques du tore[1].

Les types topologiques des transformations périodiques du tore sont donnés dans le tableau suivant.

Transformations conservant le sens.

I.	ϑ_n: $x' = x$, $y' = y + \frac{k}{n}$;	sans point invariant;	periode: n.
II.	θ_2: $x' = -x$, $y' = -y$;	4 points invariants;	période: 2.
III.	θ_3: $x' = -y$, $y' = x - y$;	3 points invariants;	période: 3.
IV.	θ_4: $x' = -y$, $y' = x$;	2 points invariants;	période: 4.
V.	θ_6: $x' = x - y$, $y' = x$;	1 point invariant;	période: 6.

Relations: $\theta_6^2 = \theta_3$; $\theta_6^3 = \theta_2$; $\theta_4^2 = \theta_2$.

Transformations changeant le sens.

VI.	$\Sigma_2^{(0)}$: $x' = -x$, $y' = y + \frac{1}{2}$;	sans point invariant;	période: 2.
VII.	$\Sigma_2^{(1)}$: $x' = -x$, $y' = x + y$;	1 courbe fixe[2];	
VIII.	$\Sigma_2^{(2)}$: $x' = -x$, $y' = y$;	2 courbes fixes;	

[1] L. E. J. Brouwer: *Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus.* Proc. Acad. Amsterdam, vol. 21 (1919), p. 1352—1356. B. Kerékjártó: *A torus periodikus transformátióiról.* Math. Term. tud. Értesítö, vol. 39 (1921), p. 213—219.

[2] Nous entendons par *courbe fixe* une courbe simple et fermée dont les points sont invariants par la transformation.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{IX.} & \Omega_{2n}: x' = -x,\ y' = y + \dfrac{k}{2n};\\[2mm] \text{X.} & \Omega'_{2n}: x' = -x,\ y' = x + y + \dfrac{k}{2n};\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{sans point invariant; période: } 2n;\\ (k \text{ et } n \text{ premiers entre eux}).\end{array}$$

Relations:

$$\left.\begin{array}{lll}\Omega_{2n}^{n} = \Sigma_2^{(2)}, & \Omega_{2n}'^{\,n} = \Sigma_2^{(0)}, & \text{si } n \equiv 1,\ k \equiv 0\\ \phantom{\Omega_{2n}^{n}} = \vartheta_2, & \phantom{\Omega_{2n}'^{\,n}} = \vartheta_2, & \text{si } n \equiv 0,\ k \equiv 1\\ \phantom{\Omega_{2n}^{n}} = \Sigma_2^{(0)}, & \phantom{\Omega_{2n}'^{\,n}} = \Sigma_2^{(1)}, & \text{si } n \equiv 1,\ k \equiv 1\end{array}\right\}\ (\text{mod } 2);$$

$$\Omega_{2n}^{2} = \Omega_{2n}'^{\,2} = \vartheta_n.$$

§ 15. La structure du groupe G, si le sous-groupe Γ est transitif.

Comme nous l'avons fait observer dans le § 12, le groupe Γ des transformations de G appartenant à la classe de l'identité est un sous-groupe invariant de G et le groupe facteur G/Γ est fini. Désignons par n l'ordre du groupe G/Γ, et par $S'_0 = I,\ S'_1, \ldots, S'_{n-1}$ n éléments de G tels que les familles $\Gamma,\ S'_1\Gamma, \ldots, S'_{n-1}\Gamma$ épuisent le groupe G.

Supposons que le sous-groupe Γ est transitif sur le tore. Il y a dans chaque famille $S'_k\Gamma$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ un élément S_k et un seul qui transforme le point O du tore en lui-même, le point O étant choisi arbitrairement. En effet, si $S'_k(O) = O'_k$, il y a dans le groupe simplement transitif Γ une transformation T_k et une seule telle que $T_k(O) = O'_k$: d'où $S'_k T_k^{-1}(O) = O$; désignons $S'_k T_k^{-1}$ par S_k.

Les transformations $I,\ S_1,\ S_2, \ldots, S_{n-1}$ *forment un groupe* g. Si le produit $S'_k S'_l$ appartient à la famille $S'_m\Gamma$, le produit $S_k S_l$ appartient à la même famille et comme il laisse le point O invariant, on conclut que $S_k S_l = S_m$.

Pour déterminer la structure du groupe g, prenons une courbe suffisamment petite, entourant le point O, et envisageons ses images obtenues par les transformations de g. L'ensemble de ces courbes détermine un domaine, contenant le point O, dont la frontière est une courbe simple et fermée, invariante par g. Il résulte de là que *ou g est un groupe cyclique fini ou il s'obtient d'un tel groupe par l'adjonction d'une symétrie.*

Soit S_k un élément de g. Par la transformation par S_k les sous-groupes continus d'ordre 1 de Γ sont changés entre eux, par suite S_k change les trajectoires de ces sous-groupes entre elles.

Exprimons le groupe Γ par les formules:

$$x' = x + t \ (\text{mod } 1),\ y' = y + s \ (\text{mod } 1).$$

Sur la surface de recouvrement à connexion simple du tore, c'est-à-dire sur le plan euclidien, à Γ correspond le groupe des translations, et aux trajectoires des sous-groupes continus d'ordre 1 de Γ correspondent les droites du plan. La transformation engendrée par S_k sur la surface de recouvrement change les droites en des droites, elle est donc une *transformation homographique du plan en lui-même.* Nous concluons de là que *la transformation S_k s'exprime par une transformation linéaire des coordonnées* (x, y).

Considérons le sous-groupe de g formé par les transformations qui conservent le sens, et soit S_1 un élément primitif de ce groupe (dont les puissances engendrent le groupe cyclique entier). D'après les résultats obtenus *S_1 est une transformation périodique du tore en lui-même qui s'exprime pur une transformation linéaire des coordonnées* (x, y). En choisissant convenablement ces coordonnées, S_1 devient l'une des transformations θ_2, θ_3, θ_4, θ_6 énumérées dans le § 14 (sous II—V). D'où la proposition suivante:

15. 1. *Si les transformations de G conservent le sens, et si le sous-groupe Γ de G appartenant à la classe de l'identité est transitif sur le tore, le groupe G s'obtient à partir de Γ par l'adjonction de l'une des transformations θ_2, θ_3, θ_4, θ_6* (à moins que G soit identique à Γ).

Nous faisons observer que les groupes caractérisés par la proposition ci-dessus peuvent être représentés comme des *groupes de transformations birationnelles* d'une surface de Riemann algébrique de genre $p = 1$ en elle-même. Si G est identique à Γ, ou s'il s'obtient de Γ par l'adjonction de θ_2, la surface de Riemann en question est arbitraire; si G s'obtient de Γ par l'adjonction de θ_3, θ_4, ou θ_6, la surface de Riemann est telle que les fonctions elliptiques correspondantes admettent de multiplications complexes.

Supposons que le groupe G contient des transformations qui changent le sens du tore; il y a alors dans le groupe g aussi une transformation changeant le sens, et comme elle admet le point invariant O, elle est homéomorphe à l'une des transformations $\Sigma_2^{(1)}$, $\Sigma_2^{(2)}$ énumérées dans le § 14 (sous VII et VIII). Désignons par Σ_2 une transformation contenue dans g, changeant le sens, et par $\varkappa$ la courbe fixe de Σ_2 passant par le point O.

Si g contient la transformation θ_2, $\Sigma_2\theta_2$ est involutive, donc $\Sigma_2 = \theta_2^{-1}\Sigma_2\theta_2$; il résulte de là que θ_2 change la courbe $\varkappa$ en elle-même.

Si g contient θ_3 (ou θ_6), $\Sigma_2\theta_3$ est involutive, donc $\Sigma_2^{-1}\theta_3\Sigma_2 = \theta_3^{-1}$; la transformation Σ_2 change les courbes $\theta_3(\varkappa)$ et $\theta_3^{-1}(\varkappa)$ entre elles. Ces courbes n'ont aucun point commun, sauf O; il s'ensuit que Σ_2 n'a aucun point invariant outre que ceux de $\varkappa$. Σ_2 est donc du type $\Sigma_2^{(1)}$ et peut être exprimée par les formules:

$$\overline{\Sigma_2^{(1)}}: x' = x - y,\ y' = -y,$$

en attribuant la coordonnée $y = 0$ à la courbe fixe.

Si g contient θ_4, la transformation Σ_2 change la courbe $\theta_4(\varkappa)$ en elle-même, en changeant le sens, elle admet donc sur cette courbe deux points invariants dont l'un est O, l'autre est distinct de $\varkappa$. Il résulte de là que Σ_2 est du type $\Sigma_2^{(2)}$ et peut être exprimée par les formules de $\Sigma_2^{(2)}$.

On obtient donc le résultat qu'en choisissant convenablement les coordonnées (x, y), le groupe g est identique à l'un des 7 groupes suivants:

$$(\mathfrak{g}) \qquad (\Sigma_2^{(1)}),\ (\Sigma_2^{(2)}),\ (\theta_2, \Sigma_2^{(1)}),\ (\theta_2, \Sigma_2^{(2)}),\ (\theta_3, \overline{\Sigma_2^{(1)}}),\ (\theta_4, \Sigma_2^{(2)}),\ (\theta_6, \overline{\Sigma_2^{(1)}}).$$

15. 2. *Si le groupe G contient des transformations qui changent le sens, et si le sous-groupe Γ de G appartenant à la classe de l'identité est transitif sur le tore, G s'obtient à partir de Γ par l'adjonction de l'un des 7 groupes énumérés sous* $(\mathfrak{g})$.

§ 16. La structure du groupe G, si le sous-groupe Γ est intransitif.

Si le sous-groupe Γ de G est intransitif, d'après 13. 1 il est *identique* au groupe cyclique

$$\gamma: x' = x + t,\ y' = y \quad (0 \leqq t < 1),$$

ou il s'obtient de γ par l'adjonction de la translation périodique:

$$\sigma: x' = x,\ y' = y + \frac{1}{m}\cdot$$

Γ et γ sont des sous-groupes invariants de G et les groupes facteurs G/Γ, G/γ sont finis.

En conséquence de l'invariance du sous-groupe cyclique γ, les trajectoires de γ, c'est-à-dire les courbes $y =$ const sont changées entre elles par toutes les transformations de G. L'ensemble des courbes $y =$ const est homéomorphe à l'ensemble des points d'une circonférence; le groupe facteur G/Γ est donc isomorphe soit à un groupe cyclique fini, soit au groupe obtenu d'un groupe cyclique fini par l'adjonction d'une symétrie.

Il résulte de l'invariance du sous-groupe Γ qu'un système de m courbes $y =$ const qui sont changées entre elles par les puissances de σ est transformé en un système de la même sorte par une transformation quelconque de G.

Nous pouvons donc modifier la coordonnée y de telle façon que les transformations du faisceau des courbes $y = \text{const}$, engendrées par les transformations de G s'expriment par la formule:

$$(\mathfrak{Y}) \qquad y' = \pm y + \frac{k}{l\,m} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, l\,m - 1)$$

où l désigne un entier positif.

Soit S un élément quelconque de G, conservant le sens, n'appartenant pas au sous-groupe Γ. Comme S est une transformation régulière n'appartenant pas à la classe de l'dentité, elle est homéomorphe à l'une des transformations θ_2, θ_3, θ_4, θ_6. La courbe $y = \text{const}$ passant par un point invariant de S est changée en elle-même par S.

La transformation du faisceau $y = \text{const}$, engendrée par S, est différente de l'identité, car autrement chacune de ces courbes serait transformée par S avec sens invariant en elle-même et sur une courbe $y = \text{const}$, passant par un point invariant de S, S engendrait la transformation identique; c'est impossible parce que S n'admet qu'un nombre fini de points invariants. En associant la valeur $y = 0$ à une courbe du faisceau passant par un point invariant de S, il s'ensuit de la formule $(\mathfrak{Y})$ que la transformation engendrée par S dans le faisceau $y = \text{const}$ s'exprime par la formule: $y' = -y$.

La transformation S^2 engendre dans le faisceau la transformation $y' = y$; de notre raisonnement ci-dessus il résulte donc que S^2 est la transformation identique du tore; *la transformation involutive S est donc homéomorphe à θ_2.*

Si S' est un autre élément quelconque de G n'appartenant pas à Γ et conservant le sens, la transformation $S^{-1}S'$ conserve le sens du faisceau $y = \text{const}$; comme elle conserve aussi le sens du tore, il résulte que cette transformation appartient à Γ, c'est-à-dire que *S' est le produit de S par un élément du sous-groupe Γ.*

Le sous-groupe de G formé par les transformations conservant le sens s'obtient donc à partir de Γ par l'adjonction d'une transformation S homéomorphe à θ_2.

Pour déterminer l'expression analytique de S, désignons par t le paramètre canonique du sous-groupe cyclique continu γ, et par ϱ^t l'élément général de γ. Comme S transforme la courbe $y = 0$ en elle-même de telle façon qu'à un sens donné de la courbe correspond le sens opposé, il résulte du lemme démontré dans le § 8 que

$$S^{-1}\varrho^t S = \varrho^{-t}.$$

Nous allons montrer que S et la transformation

$$\sigma : x' = x,\ y' = y + \frac{1}{m},$$

dont l'adjonction à γ fournit le groupe Γ, sont liées par la relation:

$$S^{-1}\sigma S = \sigma^{-1},$$

c'est-à-dire que $S\sigma$ *est involutive.* En effet, on conclut de la formule de σ et de l'expression déjà connue de S: $y' = -y$ que la transformation $S\sigma$ engendre dans le faisceau $y = \text{const}$ la transformation $y' = -y + \frac{1}{m}$. $S\sigma$ transforme la courbe $y = \frac{1}{2m}$ en elle-même, change le sens de cette courbe, elle admet donc deux points invariants sur cette courbe. Il résulte de là que la transformation $(S\sigma)^2$, appartenant à Γ, est l'identité.

Soit P^0 un point invariant de S sur la courbe $y = 0$, et soit $P^1 = \sigma(P^0) = S\sigma(P^0)$; comme $S\sigma$ est involutive, les points P^0 et P^1 sont échangés entre eux par $S\sigma$. Soit Q un point invariant de $S\sigma$ sur la courbe $y = \frac{1}{2m}$. Nous joignons les points P^0 et Q dans le domaine $0 < y < \frac{1}{2m}$ par un arc simple μ qui rencontre toute courbe $y = \text{const}$ dans ce domaine en un seul point. Soit μ' l'image de cet arc obtenue par $S\sigma$. L'arc $\lambda^0 = \mu + \mu'$ et ses images $\lambda^k = \sigma^k(\lambda^0)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ \lambda^{k+m} = \lambda^k)$ obtenues par les puissances de σ forment ensemble une courbe simple et fermée Λ qui est évidemment invariante par σ.

Λ est aussi invariante par S. En effet

$$S\sigma(\lambda^0) = \lambda^0,$$

et de là

$$S(\lambda^k) = \sigma^k S(\lambda^0) = S\sigma^{-k}(\lambda^0) = S\sigma\cdot\sigma^{-k-1}(\lambda^0) = \sigma^{-k-1}(\lambda^0) = \lambda^{-k-1};$$

comme S est involutive:

$$S(\lambda^{-k-1}) = \lambda^k.$$

La courbe Λ rencontre toute courbe $y = \text{const}$ en un seul point. Nous pouvons donc associer aux points de Λ la valeur $x = 0$ et à leurs images obtenues par la transformation ϱ^t de γ la valeur $x = t$. Avec les coordonnées (x, y) les transformations de Γ s'expriment encore par les formules: $x' = x + t$,

$y' = y + \frac{k}{m}$, et la transformation S par les formules: $x' = -x$, $y' = -y$. En effet, la transformation S change la courbe $\Delta: x = 0$ en elle-même, et la courbe $y = c$ en $y = -c$, d'où résulte que le point de coordonnées $(0, y)$ est changé en $(0, -y)$:

$$S(0, y) = (0, -y).$$

Le point (x, y) est l'image de $(0, y)$ obtenue par ϱ^x; par conséquent:

$$S(x, y) = \varrho^x S(0, y).$$

Comme $\varrho^x S = S \varrho^{-x}$, on obtient que

$$S(x, y) = S \varrho^{-x}(0, y) = \varrho^{-x}(0, -y) = (-x, -y).$$

Nous avons obtenu le résultat suivant:

16. 1. *Si le sous-groupe Γ de G appartenant à la classe de l'identité est intransitif et si toutes les transformations de G conservent le sens du tore, G s'obtient à partir de Γ par l'adjonction de la transformation θ_2* (à moins que G soit identique à Γ).

Les groupes caractérisés par ce théorème peuvent être aussi exprimés comme des groupes de transformations birationnelles d'une surface de Riemann algébrique arbitraire de genre $p = 1$ en elle-même.

Passons aux groupes G contenant des transformations qui changent le sens du tore. Désignons par G^0 le sous-groupe de G formé par les transformations conservant le sens.

Supposons d'abord que $G^0 = \Gamma$. Dans ce cas G s'obtient à partir de Γ par l'adjonction d'une seule transformation T' changeant le sens du tore. En ce qui concerne la transformation du faisceau des courbes $y = \text{const}$, engendrée par T', il y a trois cas à distinguer: 1) T' change le sens du faisceau en le sens opposé. 2) T' conserve le sens du faisceau et transforme une courbe $y = \text{const}$ en elle-même; d'après la formule $(\mathfrak{Y})$ T' change alors toute courbe $y = \text{const}$ en elle-même. 3) T' conserve le sens du faisceau et change toute courbe $y = \text{const}$ en une courbe différente.

1) Si T' change le sens du faisceau $y = \text{const}$, il y a précisément deux courbes invariantes dans le faisceau; à l'une d'elles nous associons la valeur $y = 0$. Comme T' s'exprime alors par la formule $y' = -y$, à l'autre courbe invariante correspond la valeur $y = \frac{1}{2}$. Formons le produit de T' par un élément

ϱ^{t_1} du groupe cyclique γ tel que la transformation

$$T = T' \varrho^{t_1}$$

laisse un point de la courbe $y = 0$ invariant. La transformation T^2 conserve le sens du tore et change toute courbe $y = \text{const}$ en elle-même; T^2 appartient, par suite, au sous-groupe γ, et comme elle admet un point invariant, il résulte que $T^2 = I$. La *transformation involutive* T admettant un point invariant est homéomorphe à l'une des transformations $\Sigma_2^{(1)}$, $\Sigma_2^{(2)}$ (voir § 14). Comme la transformation involutive T change la courbe $y = 0$ en elle-même, en conservant son sens, et admet un point invariant sur cette courbe, il s'ensuit que tout point de la courbe $y = 0$ est invariant par T.

Soit σ_0 une transformation de période m, de la forme: $y' = y + \frac{1}{m}$, dont l'adjonction à γ fournit le groupe Γ. Nous concluons des expressions déjà connues de σ_0 et de T que la transformation $T^{-1}\sigma_0 T$ de Γ change la courbe $y = 0$ en $y = -\frac{1}{m}$; elle peut être donc exprimée dans la forme:

$$T^{-1}\sigma_0 T = \sigma_0^{-1}\varrho^{t_0}.$$

Comme ϱ^t est échangeable avec σ_0, et de même avec T (d'après le lemme du § 8), on peut mettre cette relation sous la forme:

$$\left(T\sigma_0 \varrho^{-\frac{t_0}{2}}\right)^2 = I.$$

Désignons la transformation $\sigma_0 \varrho^{-\frac{t_0}{2}}$ par σ_1; *la transformation* $T\sigma_1$ *est involutive.*

Comme $\sigma_0^{-1}\varrho^{t_0}$ est équivalente à σ_0, sa période est égale à m; par suite $t_0 = \frac{n}{m}$ où n désigne un entier. *La période de* σ_1 *de même que celle de* $\sigma_1 \varrho^{\frac{1}{2}}$ *est donc égale à* m *ou à* $2m$. Chacune des transformations involutives $T\sigma_1$ et $T\sigma_1\varrho^{\frac{1}{2}}$ échange les courbes $y = 0$ et $y = \frac{1}{m}$ entre elles et laisse invariante la courbe $y = \frac{1}{2m}$, en conservant son sens. Les transformations de la courbe $y = \frac{1}{2m}$ en elle-même, engendrées par

$$I,\ \varrho^{\frac{1}{2}},\ T\sigma_1,\ T\sigma_1\varrho^{\frac{1}{2}},$$

forment un groupe fini qui doit être cyclique; il résulte de là que soit $T\sigma_1$, soit $T\sigma_1\varrho^{\frac{1}{2}}$ engendre la transformation identique sur cette courbe. Désignons par σ celle des transformations σ_1 et $\sigma_1\varrho^{\frac{1}{2}}$ pour laquelle $T\sigma$ engendre l'identité sur la courbe $y = \frac{1}{2m}$.

Cela étant, soit P^0 un point de la courbe $y = 0$, et Q un point de la courbe $y = \frac{1}{2m}$. Joignons P^0 et Q dans le domaine $0 < y < \frac{1}{2m}$ par un arc μ qui rencontre toute courbe $y = \text{const}$ dans ce domaine en un seul point. L'image μ' de μ obtenue par $T\sigma$ joint les points Q et $P^1 = \sigma(P^0)$. Les images de l'arc $\lambda^0 = \mu + \mu'$ obtenues par les puissances de σ forment une courbe simple et fermée $\varDelta$ qui est invariante et par σ et par T.

Si la période de σ est égale à m, $\varDelta$ rencontre toute courbe $y = \text{const}$ en un seul point; dans ce cas nous associons aux points de $\varDelta$ la coordonnée $x = 0$; l'expression de Γ n'est pas changée et celle de T sera:

$$(\mathfrak{A}) \qquad T\colon x' = x,\ y' = -y \quad (\text{type } \Sigma_2^{(2)}).$$

Si la période de σ est égale à $2m$, $\varDelta$ rencontre toute courbe $y = \text{const}$ en deux points qui se correspondent par la transformation $\sigma^m = \varrho^{\frac{1}{2}}$. Dans ce cas nous associons aux points de $\varDelta$ continuement les valeurs $x = \frac{y}{2}$ et $x = \frac{y+1}{2}$ (suivant qu'un point de $\varDelta$ appartient à l'un ou à l'autre des deux arcs déterminés sur $\varDelta$ par ses points de rencontre avec la courbe $y = 0$). Avec les coordonnées (x, y) déterminées de cette façon, la transformation σ s'exprime par la formule:

$$\sigma\colon x' = x + \frac{1}{2m},\quad y' = y + \frac{1}{m},$$

donc l'expression de Γ reste invariante; T s'exprime par la formule:

$$(\mathfrak{B}) \qquad T\colon x' = x - y,\quad y' = -y \quad (\text{type } \Sigma_2^{(1)}).$$

2) Si T' change toute courbe $y = \text{const}$ en elle-même écrivons T au lieu de T'. Comme T change le sens du tore, elle admet sur toute courbe $y = \text{const}$ deux points invariants; T est involutive, du type $\Sigma_2^{(1)}$ ou $\Sigma_2^{(2)}$ (voir § 14). D'après le lemme du § 8, entre T et les éléments ϱ^t du groupe cyclique γ la relation suivante est valable:

$$T^{-1}\varrho^t T = \varrho^{-t};$$

comme $T^{-1} = T$, on a donc:

$$(T\varrho^t)^2 = I$$

et de là

$$\varrho^t\, T\, \varrho^t = T.$$

En posant $t = \pm \frac{1}{2}$, on obtient:

$$\varrho^{-\frac{1}{2}}\, T\, \varrho^{\frac{1}{2}} = T.$$

D'après cette relation, $\varrho^{\frac{1}{2}}$ échange entre eux les deux points invariants de T situés sur la courbe $y = \text{const.}$

Si T a *deux courbes fixes*, à l'une d'elles associons la valeur $x = 0$; à l'autre correspond la valeur $x = \frac{1}{2}$. L'expression de T sera:

($\mathfrak{C}$) $$T:\ x' = -x, \quad y' = y \quad (\text{type } \Sigma_2^{(2')}).$$

Désignons par σ_0 un élément de Γ de période m dont l'adjonction à γ fournit le groupe Γ. Si σ_0 change le point de coordonnées $(0, 0)$ en le point $\left(t_0, \frac{1}{m}\right)$, la transformation

$$\sigma = \sigma_0\, \varrho^{-t_0}$$

change le point $(0, 0)$ en $\left(0, \frac{1}{m}\right)$, et, par suite, la courbe fixe $x = 0$ en elle-même, d'où l'expression suivante de σ:

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{1}{m}.$$

Si T a *une seule courbe fixe,* associons à ses points les valeurs $x = \frac{y}{2}$ et $x = \frac{y+1}{2}$ de façon continue. L'expression de T sera:

($\mathfrak{D}$) $$T:\ x' = y - x, \quad y' = y \quad (\text{type } \Sigma_2^{(1')}).$$

Désignons par t_0 une valeur telle que la transformation $\sigma_1 = \sigma_0\, \varrho^{t_0}$ change le point $(0, 0)$ en $\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{m}\right)$. σ_1 change la courbe fixe de T en elle-même, l'expression de σ_1 sera donc:

$$x' = x + \frac{1}{2m}, \quad y' = y + \frac{1}{m},$$

et celle de $\sigma = \sigma_1 \varrho^{-\frac{1}{2m}}$:

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{1}{m}.$$

La modification des coordonnées n'a pas donc changé l'expression de Γ.

3) Si la transformation T' change chacune des courbes $y = \text{const}$ en une courbe différente, la transformation du faisceau $y = \text{const.}$ en lui-même, engendrée par T', s'exprime par la formule:

$$y' = y + \frac{k}{l\,m}$$

où k et l sont premiers entre eux (voir la formule ($\mathfrak{Y}$), page 161). Comme T'^2 appartient à Γ, il faut qu'on ait:

$$y + \frac{2\,k}{l\,m} = y + \frac{k'}{m}$$

d'où résulte que $l = 1$ ou 2.

Suivant que $l = 1$ ou 2, multiplions T' par la puissance $-k$-ième où $-\frac{1}{2}(k-1)$-ième d'une transformation σ_0 de période m, de la forme: $y' = y + \frac{1}{m}$, et désignons ce produit par T''. L'expression de T'' sera:

$$y' = y, \text{ ou } y' = y + \frac{1}{2\,m}.$$

Dans le premier cas, nous sommes ramenés aux transformations déterminés sous 2). Dans le deuxième cas, multiplions T'' par un élément ϱ^{t_0} du groupe cyclique γ tel que la puissance $2\,m$-ième de $T = T''\varrho^{t_0}$, qui change toute courbe $y = \text{const}$ en elle-même, admet un point invariant. Comme T^{2m} appartient à Γ, il résulte que $T^{2m} = I$. Joignons un point P^0 de la courbe $y = 0$ à $P^1 = T(P^0)$ par un arc dans le domaine $0 < y < \frac{1}{2\,m}$ qui rencontre toute courbe $y = \text{const}$ dans ce domaine en un seul point; ses images obtenues par les puissances de T forment une courbe simple et fermée. En associant à ses points la valeur $x = 0$, l'expression de Γ ne se change pas, et celle de T sera:

$$(\mathfrak{E}) \qquad T\colon x' = -x, \; y' = y + \frac{1}{2\,m} \quad (\text{type } \Omega_{2m}).$$

Passons au cas d'un *groupe* G^0 *qui n'est pas identique à* Γ mais qui s'en obtient par l'adjonction d'une transformation S du type θ_2 (d'après 16. 1). Soit T' une transformation de G n'appartenant pas à G^0; l'adjonction de T' à G^0 fournit le groupe G. Désignons par T'' celle des transformations T' et $T'S$ qui change le sens du faisceau $y = \text{const}$ en le sens opposé. D'après le raisonnement donné dans le cas 1) ci-dessus, il y a un élément ϱ^{t_0} du groupe cyclique γ tel que le produit $T = T''\varrho^{t_0}$ est une transformation involutive du type $\Sigma_2^{(1)}$ ou $\Sigma_2^{(2)}$; ses courbes fixes sont des courbes $y = \text{const}$.

Désignons par (T) l'ensemble des transformations involutives de G, du type $\Sigma_2^{(1)}$ ou $\Sigma_2^{(2)}$, qui changent le sens du faisceau $y = \text{const}$. Les courbes fixes des transformations (T) sont les suivantes:

$$y = y_0 + \frac{k}{2m} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 1),$$

où $y = y_0$ désigne l'une d'elles.

Les points invariants des transformations de G du type θ_2 remplissent $2m$ courbes $y = \text{const}$; à l'une de ces courbes qui passe par un point invariant de S nous associons la valeur $y = 0$; ces courbes s'expriment alors par les équations:

$$y = \frac{k}{2m} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m - 1).$$

Les courbes fixes des transformations (T) sont changées entre elles par S: $y' = -y$, nous pouvons donc poser

$$y_0 = 0, \text{ ou } y_0 = \frac{1}{4m}.$$

Nous désignerons par T l'une des transformations (T) convenablement choisie.

Premièrement, si $y_0 = 0$, la courbe fixe $y = 0$ de la transformation T contient deux points invariants de S, par suite

$$T^{-1} S T = S \text{ et } (T S)^2 = I.$$

La transformation involutive $TS = T_1$ change le sens du tore et admet un point invariant, T_1 est donc du type $\Sigma_2^{(1)}$ ou $\Sigma_2^{(2)}$. Comme T_1 change toute courbe $y = \text{const}$ en elle-même, T_1 peut être exprimée par l'une des formules $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$. Chaque courbe fixe de T_1 est changée en elle-même par S; on obtient de là que

S s'exprime avec les coordonnées (x, y) par les formules de θ_2: $x' = -x$, $y' = -y$, et la transformation $T = T_1 S$ par la formule $(\mathfrak{A})$ ou $(\mathfrak{B})$.

Deuxièmement, si $y_0 = \frac{1}{4m}$, soit T une transformation involutive admettant la courbe fixe $y = -\frac{1}{4m}$. T engendre dans le faisceau $y =$ const la transformation:

$$y' = -y - \frac{1}{2m}.$$

Choisissons d'après 1) un élément σ de Γ de période $p = m$ ou $2m$ tel que $T\sigma$ soit involutive et qu'elle engendre la transformation identique sur la courbe $y = \frac{1}{4m}$.

Joignons un point invariant Q de S situé sur la courbe $y = 0$ à un point P^0 de la courbe $y = -\frac{1}{4m}$ par un arc simple μ dans le domaine $-\frac{1}{4m} < y < 0$ qui rencontre toute courbe $y =$ const dans ce domaine en un seul point. Soit $\mu' = S(\mu)$. L'arc simple $\lambda^0 = \mu + \mu'$ est invariant par S:

$$S(\lambda^0) = \lambda^0.$$

L'arc

$$\lambda^1 = T\sigma(\lambda^0)$$

a l'extrémité $P^1 = S(P^0)$ en commun avec λ^0; l'autre extrémité de λ^1 est le point $P^2 = T\sigma(P^0) = \sigma(P^0)$. Posons:

$$\sigma^k(\lambda^0) = \lambda^{2k}, \ \sigma^k(\lambda^1) = \lambda^{2k+1} \quad (\lambda^{2p+k} = \lambda^k).$$

Les arcs λ^r $(r = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1)$ forment une courbe simple et fermée Λ qui est évidemment invariante par σ.

Λ est aussi invariante par T et par S. En effet

$$T(\lambda^{2k}) = \sigma^k T(\lambda^0) = T\sigma^{-k}(\lambda^0) = T\sigma\cdot\sigma^{-k-1}(\lambda^0) = \sigma^{-k-1}(\lambda^1) = \lambda^{-2k-1},$$

et comme T est involutive: $T(\lambda^{-2k-1}) = \lambda^{2k}$.

Pour montrer que Λ est invariante par S, faisons observer que chacune des transformations $T\sigma S$ et ST, changeant le sens du tore, engendre dans le faisceau $y =$ const la transformation:

$$y' = y - \frac{1}{2m};$$

il résulte de là que

$$T\sigma S = S\,T\varrho^{t_1}.$$

Nous obtenons donc

$$S(\lambda^1) = T\sigma\cdot S(\lambda^0) = S\,T\varrho^{t_1}(\lambda^0) = T\varrho^{t_1}(\lambda^0) = \varrho^{t_1}(\lambda^{-1}),$$

et comme $S(\lambda^1)$ a le point P^0 en commun avec λ^{-1}, il résulte que $t_1 = 0$ donc

$$S(\lambda^1) = \lambda^{-1}.$$

Similairement:

$$S(\lambda^{2k}) = \sigma^k S(\lambda^0) = S\sigma^{-k}(\lambda^0) = \sigma^{-k}(\lambda^0) = \lambda^{-2k},$$
$$S(\lambda^{2k+1}) = \sigma^k S(\lambda^1) = S\sigma^{-k}(\lambda^1) = \sigma^{-k}(\lambda^{-1}) = \lambda^{-2k-1}$$

Suivant que la période p de σ est égale à m ou à $2m$, nous associons aux points de Δ la valeur $x = 0$ ou les valeurs $x = \frac{y}{2}$ et $\frac{y+1}{2}$ et nous obtenons les expressions suivantes de T:

($\mathfrak{F}$) $$x' = x,\quad y' = -y - \frac{1}{2m} \quad (\text{type } \Sigma_2^{(2)})$$

ou

($\mathfrak{G}$) $$x' = x - y - \frac{1}{4m},\quad y' = -y - \frac{1}{2m} \quad (\text{type } \Sigma_2^{(1)}).$$

L'expression de S sera celle de θ_2: $x' = -x$, $y' = -y$, et l'expression de Γ reste: $x' = x + t$, $y' = y + \frac{k}{m}$.

Le résultat que nous venons d'obtenir est énoncé dans la proposition suivante:

16. 2. *Si le sous-groupe Γ de G appartenant à la classe de l'identité est intransitif, et si G contient des transformations changeant le sens, G s'obtient à partir du groupe*

$$\Gamma:\ x' = x + t,\quad y' = y + \frac{k}{m} \quad (0 \leqq t < 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

soit par l'adjonction de l'une des transformations ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{D}$), ($\mathfrak{E}$), *soit par l'adjonction de θ_2 et de l'une des transformations* ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{F}$), ($\mathfrak{G}$).

Le résumé des propositions 15. 1, 15. 2, 16. 1, 16. 2 est énoncé dans le théorème IV de l'Introduction.

§ 17. Les groupes compacts de l'anneau non-orientable.

Pour terminer, nous signalons comment les groupes compacts de l'anneau non-orientable peuvent être déduits en connaissant ceux de sa surface de recouvrement à deux feuillets, c'est-à-dire les groupes compacts du tore.

A la transformation identique de l'anneau non-orientable F correspondent sur le tore F la transformation identique et une transformation involutive α sans point invariant, changeant le sens. A un groupe compact en soi et infini G de F correspond un groupe de la même sorte G' de F', de manière (1, 2), dont les éléments sont échangeables avec α. La transformation α est du type $\Sigma_2^{(0)}$ (voir § 14).

Soit γ un sous-groupe cyclique continu de G' et soit ϱ^t l'élément général de γ. Comme ϱ^t et α sont échangeables,

$$\alpha^{-1}\varrho^t\alpha = \varrho^t,$$

α transforme les trajectoires de γ entre elles et change le sens de ce faisceau en le sens opposé. Il y a donc deux et seulement deux trajectoires $\varkappa$ et $\varkappa'$ de γ qui sont invariantes par α.

Le groupe G' ne contient aucun autre sous-groupe cyclique continu; autrement le sous-groupe Γ, appartenant à la classe de l'identité, serait transitif sur F', il y aurait donc un sous-groupe cyclique continu γ_1 qui n'a aucun élément en commun avec γ sauf identité. D'après le raisonnement ci-dessus α laisse deux trajectoires $\varkappa_1$ et $\varkappa_1'$ de γ_1 invariantes; le point commun de $\varkappa$ et $\varkappa_1$ serait invariant par α; mais α n'admet pas de point invariant.

Il résulte de là que γ est un sous-groupe invariant de G' et que toute transformation T de G' change les courbes $\varkappa$ et $\varkappa'$ en elles-mêmes ou entre elles. En effet

$$\alpha(T(\varkappa)) = T(\alpha(\varkappa)) = T(\varkappa),$$

la courbe $T(\varkappa)$ est donc invariante par α et comme elle est une trajectoire de γ, on conclut que $T(\varkappa) = \varkappa$ ou $\varkappa'$.

Le sous-groupe Γ est identique à γ ou s'obtient de γ par l'adjonction d'une translation involutive σ. Associons aux trajectoires de γ les valeurs y de telle manière qu'à deux trajectoires quelconques qui se correspondent par α appartiennent les valeurs y et $\frac{1}{2} - y$; à $\varkappa$ et $\varkappa'$ correspondent les valeurs $y = \pm\frac{1}{4}$. En choisissant convenablement la courbe $\varDelta (x = 0)$ la transformation α et le groupe Γ s'expriment par les formules suivantes:

$$\alpha : x' = x + \frac{1}{2}, \quad y' = -y + \frac{1}{2},$$

$$\gamma : x' = x + t, \quad y' = y, \quad (0 \leqq t < 1),$$

$$\sigma : x' = x, \qquad y' = y + \frac{1}{2};$$

$$\Gamma = \gamma \text{ ou } \Gamma = (\gamma, \sigma).$$

D'après la proposition 16. 2, le groupe G' s'obtient à partir de (Γ, α) par l'adjonction d'une transformation S du type θ_2, si G' n'est pas identique à (Γ, α). Comme S et α sont échangeables, il s'ensuit que, si $\Gamma = \gamma$, S peut être exprimée par l'une des deux formules suivantes:

$$\theta_2 : x' = -x, \quad y' = -y,$$

$$\theta_2' : x' = -x, \quad y' = -y + \frac{1}{2}.$$

Si $\Gamma = (\gamma, \sigma)$, S peut être exprimée par la formule de θ_2'.

Aux groupes compacts de l'anneau non-orientable correspondent donc les 5 types suivants de groupes compacts du tore:

$$(\gamma, \alpha), \ (\gamma, \sigma, \alpha), \ (\gamma, \theta_2', \alpha), \ (\gamma, \theta_2, \alpha), \ (\gamma, \sigma, \theta_2', \alpha).$$

Nous pouvons énoncer le résultat obtenu dans la forme suivante:

17. 1. *Tout groupe compact en soi et infini de l'anneau non-orientable peut être exprimé avec des coordonnées (x, y) (mod 1) convenablement choisies, telles que les valeurs (x, y) et $\left(x + \frac{1}{2}, -y + \frac{1}{2}\right)$ représentent le même point, par la formule:*

$$x' = \varepsilon_1 x + t, \quad y' = \varepsilon_2 y$$

où ε_1 et ε_2 désignent les groupes de valeurs suivants:

$(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1)$; $(\varepsilon_1 = 1, \ \varepsilon_2 = \pm 1)$; $(\varepsilon_1 = \pm 1, \ \varepsilon_2 = 1)$; $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1)$; $(\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1)$.

Comme l'anneau non-orientable devient par la coupure correspondant à $\varkappa$ et $\varkappa'$ homéomorphe à une couronne circulaire, on pourrait déduire le résultat ci-dessus à partir des propositions 10. 2 et 10. 3 qui déterminent les 5 types de groupes compacts en soi de la couronne circulaire.

* * *

Le résumé des résultats particuliers, obtenus dans ce mémoire, fournit le théorème, énoncé dans l'Introduction, concernant l'analyticité des groupes compacts de transformations topologiques des surfaces à connexion finie en elles-mêmes.