# SUR L'ÉTUDE ANALYTIQUE DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER D'INDÉTERMINATION. III.

PAR

J. MALMQUIST

à STOCKHOLM.

## I.

Dans deux travaux précédents[1] nous avons étudié un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad x^{k+1}\frac{dy_i}{dx} = \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\ x) \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où $k$ est un entier $> 0$ et les seconds membres sont régulières pour $0 < |x| < r$, $|y_i| < r'$ $(i = 1, \ldots n)$ et s'annulent pour $x = 0$, $y_1 = 0, \ldots y_n = 0$. Posant

$$\mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\ x) = \sum a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x) y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

on suppose que les coefficients $a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)$ sont asymptôtes à des séries de puissances de $x$ sur la surface de Riemann de $\log x$ ou dans un secteur de sommet $x = 0$. Désignons les termes dans $\mathfrak{P}_i$ du premier degré en $y_1, \ldots y_n$ par

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j$$

et posons

$$a_{ij}(x) \sim a_{ij} + a_{ij}^{(1)} x + \cdots$$

---

[1] Sur l'étude analytique des solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage d'un point singulier d'indétermination. Acta math., t. 73, p. 87—129 et t. 74, p. 1—64. En renvoyant dans la suite à ces travaux nous les désignons par (I), (II).

Dans le travail présent nous supposons que les racines $s_1, \dots s_n$ de l'équation caractéristique

$$|a_{ij} - s\delta_{ij}| = 0 \qquad (i, j = 1, \dots n)$$

sont $\neq 0$, et nous nous proposons de compléter sur un certain point les études précédentes dans le cas où il y a entre $s_1, \dots s_n$ des relations de la forme

$$s_i = k_1 s_1 + \cdots + k_n s_n,$$

où $k_1, \dots k_n$ sont des entiers $\geqq 0$ dont la somme est $\geqq 2$.

Nous commençons par un résumé court des résultats principaux que nous avons obtenus dans (I), (II) et dont nous aurons besoin dans la suite. Par des transformations simples on peut ramener le système (1) à la forme normale suivante

$$(2) \qquad x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} = a_i(x) + f_i(x) y_i + x^k(r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1}) + x^{k+1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + \mathfrak{P}_i(y_1, \dots y_n;\ x) \qquad (i = 1, \dots n),$$

où $f_i(x)$ sont des fonctions entières et rationnelles de degré $k - 1$ au plus et $\varepsilon_i$ est égal à $0$ ou $1$ de manière que le système linéaire

$$(3) \qquad x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} = f_i(x) y_i + x^k(r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1}) \qquad (i = 1, \dots n)$$

se décompose en un certain nombre de systèmes partiels de la forme

$$x^{k+1}\frac{d y_1}{d x} = f(x) y_1 + r x^k y_1$$

$$x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} = f(x) y_i + x^k(r y_i + y_{i-1}) \qquad (i = 2, \dots m),$$

les $m - 1$ dernières équations pouvant aussi manquer. Pour les nombres $r_j$ correspondant à une même fonction $f_i(x)$ on peut supposer qu'aucune des différences $r_j - r_{j'}$ n'est égale à un entier $\neq 0$. Les séries $\mathfrak{P}_i$ commencent par des termes de degré $\geqq 2$ par rapport à $y_1, \dots y_n$.

Nous prenons le système différentielle sous la forme (2). Désignons par $\varphi_\alpha$ $(\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ les arguments différents des nombres $s_1, \dots s_n$ et ces arguments augmentés de multiples de $2\pi$ et supposons les rangés de manière que $\varphi_\alpha < \varphi_{\alpha+1}$. Nous considérons les secteurs

$$X_\alpha : \frac{1}{k}\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi_\alpha\right) < \varphi < \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_{\alpha+1}\right)$$

de sommet $x = 0$, $\varphi$ étant l'argument de $x$. Une au moins des expressions

$$\left| e^{s_i x^{-k}} \right| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

a la valeur 1 pour $\varphi = \frac{1}{k}\left(\varphi_\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)\cdot$ Par des approximations successives nous avons démontré le résultat suivant.

*À chaque secteur $X_\alpha$ correspond une solution et une seule du système* (2) *asymptôte dans $X_\alpha$ à des séries de puissances qui satisfont formellement au système* (2).

L'angle d'un secteur $X_\alpha$ est $> \frac{\pi}{k}$ et $\leqq \frac{3\pi}{k}\cdot$ Soit maintenant $X$ un secteur dont l'angle est $< \frac{\pi}{k}$ et dont les arguments limites sont $\neq \frac{1}{k}\left(\varphi_\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)$ $(\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Il peut arriver que certaines des expressions

$$e^{-s_i x^{-k}} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

tendent vers 0 quand $x$ tend vers 0 dans une direction quelconque appartenant à X. Supposons que ceci a lieu pour $i = 1, \ldots p$. Nous avons démontré *l'existence d'une solution unique du système* (2) *telle que $y_1, \ldots y_p$ prennent des valeurs données pour un point $x_0$ de $X$ et $y_1, \ldots y_n$ soient asymptôtes dans $X$ aux séries de puissances qui satisfont formellement au système* (2).

Nous avons fait une application des résultats précédents à l'étude d'un système linéaire et homogène que l'on peut prendre sous la forme normale correspondant à (2)

$$x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} = f_i(x) y_i + x^k (r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1}) + x^{k+1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \tag{4}$$
$$(i = 1, \ldots n),$$

$a_{ij}(x)$ étant asymptôtes à des séries de puissances. Nous désignons par $\varphi^*$ des arguments définis de la manière suivante. On pose, si $f_i(x) \neq f_j(x)$

$$f_i(x) - f_j(x) = x^{k-k_{ij}}(s_{ij} + \cdots), \qquad s_{ij} \neq 0$$

et on considère les expressions

$$\left| e^{s_{ij} x^{-k_{ij}}} \right|.$$

Un argument $\varphi^*$ satisfait à la condition que l'une au moins de ces expressions ait la valeur 1 pour $\varphi = \varphi^*$. Nous considérons des secteurs $X$ définis de la manière suivante: partant d'un secteur $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{k}$, où $\varphi_0$, $\varphi_0 + \frac{\pi}{k}$ sont différents des arguments $\varphi^*$, on augmente ce secteur dans les deux directions sans que l'on rencontre un argument $\varphi^*$. Maintenant on a le théorème suivant démontré dans (II).

*À chaque secteur $X$ correspond une substitution linéaire et homogène de déterminant égal à 1 pour $x = 0$ par laquelle le système (4) se transforme au système (3) correspondant. Les coefficients de cette substitution sont asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances de $x$. Ces séries asymptotiques sont indépendantes des secteurs $X$.*

Pour la validité de ce théorème on n'a pas besoin de supposer que tous les nombres $s_1, \ldots s_n$ sont $\neq 0$. Le théorème est d'une importance fondamental pour l'étude d'un système (2).

Considérons d'abord le cas où *l'origine est situé à l'extérieur du polygone convexe enveloppant $s_1, \ldots s_n$*. Il y a alors des directions dans lesquelles toutes les fonctions

$$e^{-s_i x^{-k}} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

tendent vers 0 pour $x \to 0$. Soit $\varphi' \leqq \varphi \leqq \varphi''$ un secteur dont toutes les directions ont cette propriété.

Il peut arriver qu'il existe des relations

$$s_i = k_1 s_1 + \cdots + k_n s_n,$$

où $k_1, \ldots k_n$ sont des entiers $\geqq 0$ dont la somme est $\geqq 2$. Dans le cas considéré ces relations sont nécessairement en nombre fini. En écrivant les variables $y_1, \ldots y_n$ dans un ordre convenable on peut supposer qu'elles ont la forme

$$s_i = k_1 s_1 + \cdots + k_{i-1} s_{i-1}. \tag{5}$$

Considérons les systèmes d'entiers $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ positifs ou nuls tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2$. Prenons un nombre $N$ suffisamment grand. Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n > N$ chacune des fonctions

$$e^{-(\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_n s_n - s_i) x^{-k}} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

tendra vers 0 quand $x$ tend vers 0 dans certaines directions appartenant au secteur $\varphi' < \varphi < \varphi''$. La même chose peut avour lieu pour certains systèmes de nombres $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ dont la somme est $\leqq N$. Désignons par $\beta_1, \ldots \beta_n$ l'un quelconque des autres systèmes de nombres dont la somme est $\leqq N$, le système $\beta_1, \ldots \beta_n$ étant différent des systèmes de nombres $k_1, \ldots k_{i-1}, 0, \ldots 0$ entrant dans les relations (5). À chaque système $\beta_1, \ldots \beta_n$ correspondent des nombres $i_\beta$ de manière que

$$e^{-(\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_{i_\beta}) x^{-k}}$$

tende vers $\infty$ dans chaque direction appartenant au secteur $\varphi' < \varphi < \varphi''$. Soit ensuite $k_1, \ldots k_{i-1}$ un système de nombres entrant dans les relations (5), considérons le cas où la fonction

$$P(x) = k_1 (r_1 x^k + f_1(x)) + \cdots + k_{i-1} (r_{i-1} x^k + f_{i-1}(x)) - (r_i x^k + f_i(x))$$

n'est pas identiquement nulle et posons

$$P(x) = c_0 x^k + \cdots + c_{k'} x^{k-k'}, \quad c_{k'} \neq 0.$$

Si $k' > 0$ il peut arriver que la fonction

$$e^{-c_{k'} x^{-k'}}$$

tend vers $\infty$ dans chaque direction appartenant au secteur $\varphi' < \varphi < \varphi''$. Dans ce cas nous désignons $k_1, \ldots k_{i-1}$ par $\varkappa_1, \ldots \varkappa_{i-1}$.

Au système linéaire (4) que l'on obtient en ne retenant dans les seconds membres de (2) que les termes du premier degré en $y_1, \ldots y_n$ correspondent des arguments $\varphi^*$. Nous considérons des secteurs $X$ définis de la manière suivante. Partons d'un secteur $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1 + \frac{\pi}{k}$ qui contient le secteur $\varphi' \leqq \varphi \leqq \varphi''$, $\varphi_0$ et $\varphi_0 + \frac{\pi}{k}$ étant différents des arguments $\varphi^*$ et des arguments pour lesquels une des fonctions

$$\left| e^{s_i x^{-k}} \right| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

ou

$$\left| e^{(\beta_1 s_1 + \cdots + \beta_n s_n - s_{i_\beta}) x^{-k}} \right|$$

ou

$$\left| e^{c_{k'} x^{-k'}} \right|$$

correspondant à $\varkappa_1, \ldots \varkappa_{i-1}$ a la valeur 1. On voit facilement que ce secteur fait partie d'un secteur $X_\alpha$ défini à la page 111. On aura un secteur $X$ en augmentant le secteur $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{k}$ dans les deux directions sans que l'on rencontre un des arguments que nous venons de défendre pour $\varphi_0$, $\varphi_0 + \frac{\pi}{k}$ ou les arguments $\varphi' - \frac{\pi}{k}$, $\varphi'' + \frac{\pi}{k}$.

Maintenant on a le théorème suivant démontré dans (I), (II).

*À tout secteur $X$ correspondent des solutions du système* (2) *définies par des séries*

$$y_i = \mathfrak{P}_i(t_1, \ldots t_n;\ x) \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{6}$$

*procédant suivant les puissances de certaines expressions $t_1, \ldots t_n$; $y_1 = t_1, \ldots y_n = t_n$ est la solution générale du système* (3) *correspondant au système linéaire que l'on obtient en ne retenant dans les seconds membres de* (2) *que les termes du premier degré en $y_1, \ldots y_n$. Les coefficients des séries* (6) *sont des fonctions déterminées de $x$. Dans le cas où il n'y a aucune relation de la forme* (5) *ces coefficients sont asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances. Dans ce cas les séries* (6) *convergent pour des valeurs de $x$, $t_1, \ldots t_n$ telles que $|x| < \bar{r}$, $|t_i| < |x|^\delta \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$, $x$ appartenant à $X$; dans le cas où tous les nombres $\varepsilon_i$ sont* 0 *on peut prendre $\delta = 0$, dans les autres cas on peut prendre $\delta$ entre* 0 *et* 1. *Dans le cas où il y a des relations* (5) *les séries asymptotiques pour les coefficients des séries* (6) *peuvent contenir des puissances négatives et des logaritmes. Dans ce cas les séries* (6) *convergent pour des valeurs de $x$, $t_1, \ldots t_n$ telles que $|x| < \bar{r}$, $|t_i| < |x|^\mu \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$, $x$ appartenant à $X$; ici $\mu$ est un nombre $< k + 1$.*

On peut dire aussi que les équations (6) définissent une substitution par laquelle le système (2) se transforme au système (3) correspondant à (2).

Considérons ensuite le cas où *l'origine est situé à l'intérieur ou sur la limite du polygone convexe enveloppant $s_1, \ldots s_n$.* Il existe toujours des séries (6) satisfaisant formellement au système (2), mais en général elles n'ont pas un domaine de convergence. Mais on peut obtenir des séries convergentes en remplaçant certaines des expressions $t_1, \ldots t_n$ par 0. On peut prendre un secteur $\varphi' \leqq \varphi \leqq \varphi''$ dans lequel certaines des fonctions

$$e^{-s_i x^{-k}} \qquad (i = 1, \ldots n),$$

soit celles qui correspondent à $i = 1, \ldots p$, tendent vers 0, et on peut supposer que les fonctions correspondant à $i = p + 1, \ldots n$ tendent vers $\infty$ dans chaque direction appartenant à ce secteur. Maintenant on peut définir des secteurs $X$

de la même manière que précédamment en définissant les arguments exceptionnels autres que $\varphi^*$ à l'aide des nombres $s_1, \ldots s_p$ seuls. À un tel secteur correspondent des solutions du système (2) représentées par des séries que l'on obtient des séries (6) en remplaçant $t_{p+1}, \ldots t_n$ par 0. Ces séries convergent pour des valeurs de $x, t_1, \ldots t_p$ telles que $|x| < \bar{r}$, $|t_i| < |x|^\mu \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots p)$, $x$ appartenant à $X$. Ce résultat est valable aussi quand certains des nombres $s_{p+1}, \ldots s_n$ sont nuls, sous la condition qu'il existe une solution du système (2) asymptôte dans $X$ à des séries de puissances.[1]

## II.

Dans le cas où il y a des relations (5) les coefficients des séries (6) ne sont pas en général asymptôtes à des séries de puissances de $x$. Mais on peut obtenir des séries procédant suivant les puissances de certaines expressions $\tau_1, \ldots \tau_n$ de telle manière que les coefficients soient asymptôtes à des séries de puissances. Nous allons le montrer dans le cas où l'origine est situé à l'extérieur du polygone convexe enveloppant $s_1, \ldots s_n$.

Considérons un secteur $X$ défini à la page 113, il fait partie d'un secteur $X_\alpha$ défini à la page 111. Soit $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, \ldots n)$ la solution unique du système (2) asymptôte dans $X_\alpha$ aux séries de puissances qui satisfont formellement au système 2. En posant dans (2) $y_i = y_i(x) + \eta_i$ $(i = 1, \ldots n)$ on aura pour $\eta_1, \ldots \eta_n$ un système de la forme (2) dont les seconds membres s'annulent identiquement pour $\eta_1 = 0, \ldots \eta_n = 0$; ces seconds membres sont des séries de puissances de $\eta_1, \ldots \eta_n$ dont les coefficients sont asymptôtes dans $X_\alpha$ à des séries de puissances. Conformément au résultat énoncé p. 112 pour un système d'équations différentielles linéaires on fait ensuite une substitution.

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)\, z_j \qquad (i = 1, \ldots n)$$

correspondant au secteur $X$ de manière que le système pour $z_1, \ldots z_n$ soit de la forme

$$x^{k+1}\frac{dz_i}{dx} = f_i(x)\, z_i + x^k(r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1}) + \mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n;\, x) \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{7}$$

[1] Pour la discussion de l'existence d'une telle solution voir (II), p. 8—23; à cet endroit nous n'avons démontré l'existence de la solution que sous certaines conditions supplémentaires concernant le secteur $X$, mais par une modification du raisonnement employé on peut démontrer que la solution existe dans tout cas, sous la seule supposition qu'il existe des séries de puissances qui satisfont formellement au système (2).

où l'on a

$$\mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n;\ x) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \geqq 2} a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x) z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n),$$

les coefficients $a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)$ étant asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances indépendantes de $X$.

Nous définissons les expressions $\tau_1, \ldots \tau_n$ par la solution générale d'un certain système

$$(8) \qquad x^{k+1}\frac{d\tau_i}{dx} = f_i(x)\tau_i + x^k(r_i\tau_i + \varepsilon_i\tau_{i-1}) + G_i(x, \tau_1, \ldots \tau_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots n),$$

où $G_1$ est identiquement nul et $G_i$, $i > 1$, sont des fonctions entières et rationnelles

$$(9) \qquad G_i(\tau_1, \ldots \tau_{i-1}) = \sum g_{i,k_1,\ldots k_{i-1}}(x) \tau_1^{k_1} \ldots \tau_{i-1}^{k_{i-1}},$$

$k_1, \ldots k_{i-1}$ étant les entiers qui figurent dans les relations (5). Nous allons montrer qu'on peut déterminer des fonctions entières et rationnelles $g_{i,k_1,\ldots k_{i-1}}(x)$ de manière que le système (7) soit satisfait par des séries

$$(10) \qquad z_i = \tau_i + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \geqq 2} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x) \tau_1^{\alpha_1} \ldots \tau_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où $\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)$ sont des fonctions asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances.

Nous énonçons d'abord quelques résultats pour une équation différentielle linéaire dont nous aurons besoin et que l'on démontre sans peine. Considérons l'équation différentielle

$$(11) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx} + P(x)y = F(x),$$

où $P(x)$ est de la forme

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(r_j x^k + f_j(x)) - (r_i x^k + f_i(x))$$

et $F(x)$ est une fonction asymptôte dans $X$ à une série de puissances; $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ sont des entiers $\geqq 0$ dont la somme est $\geqq 2$. Nous supposons en premier lieu que $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ n'est pas un système de nombres $k_1, \ldots k_{i-1}, 0, \ldots 0$. Si $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ n'est pas un système de nombres $\beta_1, \ldots \beta_n$ (voir p. 113) ou s'il est un système de nombres $\beta_1, \ldots \beta_n$ et $i$ n'est pas un nombre $i_\beta$ correspondant l'équation (11) aura une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances. La même chose a lieu si $\alpha_1, \dots \alpha_n$ est un système de nombre $\beta_1, \dots \beta_n$ et $i$ est un nombre $i_\beta$ correspondant, comme on le voit facilement en remarquant que les secteurs par lesquels nous avons augmenté le secteur $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{k}$ pour obtenir $X$ ne contiennent aucun argument pour lequel

$$\left| e^{P(0)x^{-k}} \right| = 1.$$

Supposons ensuite que $\alpha_1 = k_1, \dots \alpha_{i-1} = k_{i-1}, \alpha_i = 0, \dots \alpha_n = 0$. Considérons d'abord le cas où la fonction

$$k_1(r_1 x^k + f_1(x)) + \cdots + k_{i-1}(r_{i-1} x^k + f_{i-1}(x)) - (r_i x^k + f_i(x)) = c_0 x^k + \cdots + c_{k'} x^{k-k'}$$

ne s'annule pas identiquement et supposons que $k' > 0$, $c_{k'} \neq 0$. Posons

$$P(x) = c_0 x^{k'} + \cdots + c_{k'}$$

et considérons l'équation différentielle

$$x^{k'+1} \frac{dy}{dx} + P(x) y = F(x), \tag{12}$$

où $F(x)$ est une fonction asymptôte dans $X$ à une série de puissances. Si $k_1, \dots k_{i-1}$ n'est pas un système de nombres $\varkappa_1, \dots \varkappa_{i-1}$ (voir p. 113) l'équation (12) aura une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances. Si $k_1, \dots k_{i-1}$ est un système de nombres $\varkappa_1, \dots \varkappa_{i-1}$ deux cas peuvent avoir lieu. Ou bien l'équation (12) a une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances, ou bien toutes les intégrales de (12) sont asymptôtes dans $X$ à cette série. Le dernier cas ne peut avoir lieu que si l'angle de $X$ est $< \frac{\pi}{k'}$.

Aussitôt qu'une équation (11) ou (12) a une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances cette intégrale est la seule qui satisfait dans $X$ à une inégalité de la forme $|y| < K|x|^{-\lambda}$ où $K, \lambda$ sont des nombres positifs.

Supposons enfin que

$$k_1(r_1 x^k + f_1(x)) + \cdots + k_{i-1}(r_{i-1} x^k + f_{i-1}(x)) - (r_i x^k + f_i(x)) = r x^k$$

et considérons l'équation

$$x \frac{dy}{dx} + r y = F(x), \tag{13}$$

$F(x)$ étant asymptôte dans $X$ à une série de puissances. Si $r$ n'est pas o ou entier négatif l'équation (13) aura une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances. Si $r$ est o ou entier négatif et que le développement asymptotique de $F(x)$ ne contient pas un terme $x^{-r}$ l'équation (13) aura une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances ne contenant pas $x^{-r}$.

Introduisons maintenant les séries (10) dans le système (7). On aura

$$(14)\qquad \begin{aligned} & x^{k+1}\frac{d\tau_i}{dx} + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n\geqq 2}\left\{x^{k+1}\frac{d\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}}{dx} + \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\tau_j}x^{k+1}\frac{d\tau_j}{dx}\right\}\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n} \\ & \qquad = f_i(x)z_i + x^k(r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1}) + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n\geqq 2} a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x) z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n} \\ & \qquad\qquad (i = 1, \ldots n), \end{aligned}$$

où $x^{k+1}\frac{d\tau_i}{dx}$ doivent être remplacés par les seconds membres de (8) et $z_1, \ldots z_n$ doivent être remplacés par les séries (10). Prenons un entier $\nu \geqq 2$ et supposons les fonctions $\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n \leqq \nu$ et $g_{i,k_1,\ldots k_{i-1}}$, $k_1+\cdots+k_{i-1}\leqq \nu$ déterminées de manière que les termes dans le développement de (14) de degré $\leqq \nu$ par rapport à $\tau_1, \ldots \tau_n$ disparaissent. De plus les fonctions $\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqq\nu$ sont supposées asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances. Nous cherchons les termes dans le développement de (14) de degré $\nu + 1$ par rapport à $\tau_1, \ldots \tau_n$. Pour pouvoir les écrire nous introduisons les notations suivantes. Nous désignons par

$$G_{\beta_1\ldots\beta_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\varphi_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_n})$$

le coefficient de $\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$ dans le développement de $z_1^{\beta_1}\ldots z_n^{\beta_n}$, on a donc $\gamma_1+\cdots+\gamma_n < \alpha_1+\cdots+\alpha_n$ en supposant que $\beta_1+\cdots+\beta_n > 1$. De plus nous désignons par

$$G_{\beta_1\ldots\beta_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)$$

le coefficient de $\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$ dans la somme

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\tau_j}G_j(x, \tau_1, \ldots \tau_{i-1})\tau_1^{\beta_1}\ldots\tau_n^{\beta_n}.$$

Pour que les termes dans le développement de (14) de degré $\nu + 1$ par rapport à $\tau_1, \ldots \tau_n$ disparaissent il faut et il suffit que

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1}\Big\{x^{k+1}\frac{d\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}}{dx}\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$+\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\tau_j}[f_j(x)\tau_j+x^k(r_j\tau_j+\varepsilon_j\tau_{j-1})]\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}\Big\}$$

$$+\sum_{k_1+\cdots+k_{i-1}=\nu+1} g_{i,k_1,\ldots k_{i-1}}(x)\tau_1^{k_1}\ldots\tau_{i-1}^{k_{i-1}}$$

$$(15)\quad +\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1\\ 2\leqq\beta_1+\cdots+\beta_n<\nu+1}}\varphi_{i,\beta_1,\ldots\beta_n}G_{\beta_1\ldots\beta_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1}\{f_i(x)\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}+x^k(r_i\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}+\varepsilon_i\varphi_{i-1,\alpha_1,\ldots\alpha_n})\}\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$+\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1\\ 2\leqq\beta_1+\cdots+\beta_n<\nu+1}} a_{i;\beta_1,\ldots\beta_n}(x)\,G_{\beta_1\ldots\beta_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\varphi_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_n})\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$+\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1} a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$(i=1,\ldots n)$$

identiquement par rapport à $\tau_1,\ldots\tau_n$. Ici $G_{\beta_1\ldots\beta_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)$ ne contiennent que des fonctions $g_{i,k_1,\ldots k_{i-1}}(x)$ supposées déterminées et $G_{\beta_1\ldots\beta_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\varphi_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_n})$ ne contiennent que des fonctions $\varphi_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_n}$ supposées déterminées.

Posons d'abord $i=1$ dans (15). Pour les fonctions $\varphi_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ on aura

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1}\Big\{x^{k+1}\frac{d\varphi_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}}{dx}\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$+\varphi_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\tau_j}[f_j(x)\tau_j+x^k(r_j\tau_j+\varepsilon_j\tau_{j-1})]\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}\Big\}$$

$$+\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1\\ 2\leqq\beta_1+\cdots+\beta_n<\nu+1}}\varphi_{1,\beta_1,\ldots\beta_n}G_{\beta_1\ldots\beta_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$=(r_1x^k+f_1(x))\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1}\varphi_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1 \\ 2\leqq\beta_1+\cdots+\beta_n<\nu+1}} a_{1,\beta_1,\ldots\beta_n}(x)\, G^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_n}(\varphi_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_n})\, \tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

$$+ \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\nu+1} a_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)\, \tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_n^{\alpha_n}$$

identiquement par rapport à $\tau_1, \ldots \tau_n$. Désignant les fonctions $\varphi_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \nu + 1$ dans un ordre convenable par $\varphi_1, \ldots \varphi_M$ cette équation donne lieu à un système d'équations de la forme

$$x^{k+1}\frac{d\varphi_h}{dx} + P_h(x)\varphi_h + x^k \Sigma\, \delta_j \varphi_j = F_h \qquad (h = 1, \ldots M). \tag{16}$$

Si $\varphi_h = \varphi_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ on a ici

$$P_h(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (r_j x^k + f_j(x)) - (r_1 x^k + f_1(x))$$

$$\Sigma\, \delta_j \varphi_j = \sum_{j'=2}^{n} \varepsilon_{j'} \alpha_{j'} \varphi_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_{j'-1}-1,\ \alpha_{j'}+1,\ldots\alpha_n}$$

$$F_h = \sum_{2\leqq\beta_1+\cdots+\beta_n<\nu+1} a_{1,\beta_1,\ldots\beta_n}(x)\, G^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_n}(\varphi_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_n}) + a_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)$$

$$- \sum_{2\leqq\beta_1+\cdots+\beta_n<\nu+1} \varphi_{1,\beta_1,\ldots\beta_n}(x)\, G^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_n}(x)$$

$\alpha_{j'-1}$ étant $> 0$ et $\alpha_{j'}$ étant $< \nu + 1$. Il est loisible de supposer que la somme $\Sigma\, \delta_j \varphi_j$ ne contienne que des termes correspondant à $j < h$. C'est ce que l'on voit en prenant d'abord $\varphi_1 = \varphi_{1,0,\ldots 0,\nu+1}$ et en désignant ensuite par $\varphi_2, \ldots \varphi_n$ les fonctions $\varphi_{1,\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ correspondant à $\alpha_n = \nu$ et ainsi de suite, et en supposant la chose établie quand on remplace $n$ par $n - 1$.

Les fonctions $F_h$ sont asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances de $x$. Aucune des expressions $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j - s_1$ n'est égale à $0$. Supposons démontré que les $h - 1$ premières équation (16) sont satisfaites par des fonctions $\varphi_1, \ldots \varphi_{h-1}$ assymptôtes dans $X$ à des séries de puissances. Alors on voit, en s'appuyant sur les résultats énoncés pour une équation (11), que la $h^{\text{ième}}$ équation (16) a une seule intégrale $\varphi_h$ de la même nature. Par suite, il est démontré que les équations (16) sont satisfaites par des fonctions $\varphi_1, \dots \varphi_M$ de la nature indiquée. De plus on voit que les séries asymptotiques pour $\varphi_1, \dots \varphi_M$ sont univoquement déterminées et indépendantes de $X$ s'il en est ainsi des séries asymptotiques pour les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_n}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n < \nu + 1$ et des fonctions $g_{i, k_1, \dots k_{i-1}}$, $k_1 + \dots + k_{i-1} < \nu + 1$.

Passons ensuite à la détermination des fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_n}$, $i = 2, \dots n$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \nu + 1$ et des fonctions $g_{i, k_1, \dots k_{i-1}}$, $i = 2, \dots n$, $k_1 + \dots + k_{i-1} = = \nu + 1$. Supposons les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_n}$, $g_{i, k_1, \dots k_{i-1}}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \nu + 1$, $k_1 + \dots + k_{i-1} = \nu + 1$ déterminées pour $i = 1, \dots \lambda - 1$ et supposons que ces fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_n}$ sont asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances univoquement déterminées. Les fonctions $\varphi_{\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_n}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \nu + 1$, que nous désignons dans un ordre convenable par $\varphi_1, \dots \varphi_M$, doivent satisfaire à des équations analogues à (16)

$$x^{k+1} \frac{d\varphi_h}{dx} + P_h(x)\varphi_h + x^k \Sigma \delta_j \varphi_j = F_h \qquad (h = 1, \dots M), \tag{17}$$

où l'on a maintenant si $\varphi_h = \varphi_{\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_n}$

$$P_h(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (r_j x^k + f_j(x)) - (r_\lambda x^k + f_\lambda(x))$$

$$\begin{aligned} F_h = {} & \varepsilon_\lambda \varphi_{\lambda-1, \alpha_1, \dots \alpha_n} - b_{\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_n} \\ & + \sum_{2 \leqq \beta_1 + \dots + \beta_n < \nu+1} a_{\lambda, \beta_1, \dots \beta_n}(x)\, G^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n}(\varphi_{j, \gamma_1, \dots \gamma_n}) + a_{\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_n}(x) \\ & - \sum_{2 \leqq \beta_1 + \dots + \beta_n < \nu+1} \varphi_{\lambda, \beta_1, \dots \beta_n} G^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n}(x), \end{aligned}$$

$b_{\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_n}$ étant égal à $g_{\lambda, k_1, \dots k_{\lambda-1}}$ pour $\alpha_1 = k_1, \dots \alpha_{\lambda-1} = k_{\lambda-1}$, $\alpha_\lambda = 0, \dots \alpha_n = 0$ et égal à $0$ pour les autres valeurs de $\alpha_1, \dots \alpha_n$.

D'après la supposition les fonctions $F_h + b_{\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_n}$ sont asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances univoquement déterminées. On voit facilement qu'on peut déterminer univoquement des fonctions entières et rationnelles $b_{\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_n}$ de manière que les équations (17) soient satisfaites par des fonctions $\varphi_1, \dots \varphi_M$ asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances univoquement déterminées. Si $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j - s_\lambda \neq 0$ on peut poser $b_{\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_n} = 0$ (cf. le cas de $\lambda = 1$). Supposons que

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j - s_\lambda = 0$ et que $P_h(x)$ ne se réduit pas à $r x^k$. On peut prendre pour $b_{\lambda, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$ une fonction entière et rationnelle de $x$ de manière que l'équation (17) en question soit de la forme (12), on prend $b_{\lambda, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$ de degré aussi petit que possible; ce degré est $< k - k'$ et la fonction $b_{\lambda, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$ est univoquement déterminée. Deux cas peuvent avoir lieu, ou bien l'équation (17) aura une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances univoquement déterminée, ou bien toutes les intégrales de (17) seront asymptôtes dans $X$ à cette série. Dans le dernier cas on prend pour $\varphi_h$ une intégrale déterminée quelconque de (17). Supposons enfin que $P_h(x)$ se réduit à $r x^k$. Si $r$ est différent de 0 et d'un entier négatif on prend pour $b_{\lambda, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$ la fonction entière et rationnelle univoquement déterminée de degré aussi petit que possible telle que l'équation (17) soit de la forme (13); le degré est $< k$. L'équation (17) aura une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances univoquement déterminée. Si $r$ est 0 ou un entier négatif on prend pour $b_{\lambda, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$ la somme d'une fonction entière et rationnelle de degré aussi petit que possible ($< k$) et d'un terme $a x^{-r+k}$ de manière que l'équation (17) soit de la forme (13) et ait une seule intégrale asymptôte dans $X$ à une série de puissances qui ne contient pas le terme $x^{-r}$; cette série et la fonction $b_{\lambda, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$ sont déterminées d'une manière univoque.

Par là il est démontré que l'on peut déterminer toutes les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$, $g_{i, k_1, \ldots k_{i-1}}$ entrant dans (15). Les fonctions $g_{i, k_1, \ldots k_{i-1}}$ et les séries asymptotiques pour les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$ sont univoquement déterminées et indépendantes de $X$.

Maintenant on voit qu'on peut déterminer les fonctions (9) et les séries (10) de manière que ces séries satisfassent formellement au système (7), $\tau_1, \ldots \tau_n$ étant les expressions définies par la solution générale du système (8). Les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)$ dans (10) sont asymptôtes dans $X$ à des séries de puissances. Ces séries asymptotiques et les fonctions (9) sont univoquement déterminées et indépendantes de $X$. Pour un nombre fini de systèmes de valeurs $i, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ satisfaisant à $s_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j$ il peut arriver que $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)$ peut être choisi d'une infinité de manières. Mais une fois ces fonctions déterminées les fonctions

$\varphi_{i,\,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)$ suivantes ne peuvent être choisies que d'une seule manière quand le secteur $X$ est donné.

Nous allons démontrer la convergence des séries (10). Nous faisons d'abord une remarque concernant les expressions $\tau_1, \ldots \tau_n$. On peut écrire

$$\tau_i = t_i + H_i(t_1, \ldots t_{i-1};\ x) \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{18}$$

où $H_1$ est identiquement nul et $H_i$, $i > 1$, est fonction entière et rationnelle de $t_1, \ldots t_{i-1}$, $\log x$ dont les coefficients sont des fonctions de $x$ asymptôtes dans un secteur $X$ (et peut-être dans des secteurs plus grands) à des séries de puissances pouvant contenir des puissances négatives en nombre fini; tous les termes de $H_i$ sont de degré $> 1$ par rapport à $t_1, \ldots t_{i-1}$. Nous montrons que des inégalités de la forme

$$|\tau_i| < |x|^{k+1} r' \qquad (i = 1, \ldots n)$$

entrainent pour $t_1, \ldots t_n$ des inégalités de la même forme

$$|t_i| < |x|^{k+1} \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots n)$$

valables si $|x|$ est plus petit qu'un certain nombre et $x$ appartient à $X$. À cet effet, nous posons dans (8)

$$\tau_i = x^{k+1} v_i \qquad (i = 1, \ldots n),$$

d'où résulte pour $v_1, \ldots v_n$ le système suivant

$$\begin{aligned} x^{k+1}\frac{d v_i}{d x} &= f_i(x) v_i + x^k (r_i' v_i + \varepsilon_i v_{i-1}) \\ &\quad + x^{-(k+1)} G_i(x, x^{k+1} v_1, \ldots x^{k+1} v_{i-1}) \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{8'}$$

où $r_i' = r_i - (k+1)$. L'intégrale générale de ce système s'écrit

$$v_i = t_i x^{-(k+1)} + H_i'(t_1 x^{-(k+1)}, \ldots t_{i-1} x^{-(k+1)};\ x) \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{18'}$$

par suite on a

$$x^{k+1} H_i'(t_1 x^{-(k+1)}, \ldots t_{i-1} x^{-(k+1)};\ x) = H_i(t_1, \ldots t_{i-1};\ x) \quad (i = 1, \ldots n).$$

Tous les termes des fonctions $G_i(x, \tau_1, \ldots \tau_{i-1})$ étant de degré $> 1$ par rapport à $\tau_1, \ldots \tau_{i-1}$ les expressions

$$x^{-(k+1)} G_i(x, x^{k+1} v_1, \ldots x^{k+1} v_{i-1})$$

dans $(8')$ contiennent $x^{k+1}$ comme facteur. On en conclut que les coefficients des fonctions $H'_i$ sont des fonctions de $x$ dont les valeurs absolues sont plus petites qu'une constante quand $x$ appartient à $X$ et $|x|$ est plus petit qu'un certain nombre. Par suite les inégalité $|v_i| < r'$ $(i = 1, \ldots n)$ entrainent des inégalités de la forme $|t_i x^{-(k+1)}| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$.

Inversement, des inégalités $|t_i| < r'|x|^{k+1}$ $(i = 1, \ldots n)$ entrainent $|\tau_i| < < \bar{r}'|x|^{k+1}$ $(i = 1, \ldots n)$.

On peut remplacer l'exposant $k + 1$ par $k + \delta$, $0 < \delta < 1$. Si les fonctions $H_i$ dans (18) ne contiennent pas $\log x$ on peut remplacer l'exposant $k + 1$ par $k$ ou par le plus grand des nombres $k - k'$ (voir p. 117). Désignant l'exposant par $\mu$ on peut donc dire que les inégalités $|\tau_i| < r'|x|^{\mu}$ $(i = 1, \ldots n)$ entrainent des inégalités $|t_i| < \bar{r}'|x|^{\mu}$ $(i = 1, \ldots n)$ et inversement.

D'après (18) on peut écrire les séries (10) comme des séries procédant suivant les puissances de $t_1, \ldots t_n$, soient

$$z_i = t_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} \psi_{i,\, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n} \tag{10'}$$

ces séries. Les coefficients $\psi_{i,\, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)$ sont en valeurs absolues plus petits dans $X$ que des expressions $K|x|^{-\lambda}$, les nombres positifs $K$, $\lambda$ variant de terme à terme. Ces coefficients satisfont aux mêmes équations différentielles linéaires que les coefficients d'un système de séries (6) correspondant à (7). Par suite, $(10')$ est un système de séries (6). Les séries $(10')$ convergent donc[1] pour $|x| < \bar{r}$, $|t_i| < \bar{r}'|x|^{\mu}$ $(i = 1, \ldots n)$, $x$ appartenant à $X$. D'après la remarque faite concernant les expressions $\tau_i$ il en résulte que les séries (10) convergent pour $|x| < \bar{\bar{r}}$, $|\tau_i| < \bar{\bar{r}}'|x|^{\mu}$ $(i = 1, \ldots n)$, $x$ appartenant à $X$. Nous avons donc démontré le théorème suivant

**Théorème 1.** *Il y a une substitution*

$$z_i = \tau_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} \varphi_{i,\, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)\, \tau_1^{\alpha_1} \ldots \tau_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{10}$$

*par laquelle le système* (7) *correspondant à un secteur $X$ se transforme à un système de la forme*

$$x^{k+1} \frac{d\tau_i}{dx} = f_i(x)\tau_i + x^k(r_i \tau_i + \varepsilon_i \tau_{i-1}) + G_i(x, \tau_1, \ldots \tau_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots n). \tag{8}$$

[1] Voir (I), p. 116—118 et (II), p. 41—49.

*Les séries* (10) *convergent pour des valeurs de* $x, \tau_1, \ldots \tau_n$ *telles que* $|x| < \bar{r}$, $|\tau_i| < |x|^\mu \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$, $x$ *appartenant à* $X$. *Les coefficients* $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)$ *sont asymptôtes dans* $X$ *à des séries de puissances univoquement déterminées et indépendantes de* $X$. $G_i(x, \tau_1, \ldots \tau_{i-1})$ *sont des fonctions entières et rationnelles de* $x$, $\tau_1, \ldots \tau_{i-1}$ *univoquement déterminées*

$$(9) \qquad G_i(x, \tau_1, \ldots \tau_{i-1}) = \sum g_{i, k_1, \ldots k_{i-1}}(x) \tau_1^{k_1} \ldots \tau_{i-1}^{k_{i-1}},$$

*où* $k_1, \ldots k_{i-1}$ *sont les entiers qui entrent dans les relations* (5).

Dans un travail récent de nature purement formelle M. Hukuhara[1] a obtenu un résultat dans la direction du théorème démontré. Il s'est servi d'un système réduit plus simple que le système (8) en ce sens qu'il ne retient dans $G_i$ que les termes donnant lieu à des logaritmes, les nombres $k_1, \ldots k_{i-1}$ satisfont donc à la condition que

$$k_1(r_1 x^k + f_1(x)) + \cdots + k_{i-1}(r_{i-1} x^k + f_{i-1}(x)) - (r_i x^k + f_i(x)) = r x^k,$$

$r$ étant 0 ou un entier négatif; de plus

$$g_{i, k_1, \ldots k_{i-1}}(x) = a x^{-r+k}.$$

Si l'on prend le système (8) sous cette forme plus simple les coefficients des séries (10) correspondantes sont asymptôtes dans $X$ à des séries qui peuvent contenir des puissances négatives mais pas de logaritmes.

Dans ce qui précède nous avons supposé que l'origine est situé à l'extérieur du polygone convexe enveloppant $s_1, \ldots s_n$. Supposons maintenant que cette condition n'est pas remplie. On peut alors, en général de plusieurs manières, diviser les nombres $s_1, \ldots s_n$ en deux groupes de manière que les nombres de l'un des groupes soient situés d'un même côté d'une droite passant par l'origine et les nombres de l'autre groupe soient situés de l'autre côté de cette droite. Soient $s_1, \ldots s_p$ et $s_{p+1}, \ldots s_n$ deux groupes de cette nature. En définissant des secteurs $X$ comme à la page 114 on peut alors démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.** *Il y a une substitution*

$$(19) \qquad z_i = \tau_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x) \tau_1^{\alpha_1} \ldots \tau_p^{\alpha_p} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

---

[1] Masuo Hukuhara, Intégration formelle d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier. Annali di mat. pura ed appl., S. 4, t XIX (1940), p. 35—44.

*par laquelle le système* (7) *correspondant à un secteur* $X$ *se transforme à un système de la forme*

$$(20)\qquad \begin{aligned} x^{k+1}\frac{d\tau_i}{dx} &= f_i(x)\tau_i + x^k(r_i\tau_i + \varepsilon_i\tau_{i-1}) + G_i(x, \tau_1, \dots \tau_{i-1}) \\ &\quad + \mathfrak{P}_i(\tau_1, \dots \tau_n;\ x) \end{aligned} \qquad (i = 1 \dots p)$$

$$x^{k+1}\frac{d\tau_i}{dx} = \mathfrak{P}_i(\tau_1, \dots \tau_n;\ x) \qquad (i = p+1, \dots n).$$

*Les séries* (19) *et les séries* $\mathfrak{P}_i(\tau_1, \dots \tau_n;\ x)$ *convergent pour des valeurs de* $x$, $\tau_1$, $\dots \tau_n$ *telles que* $|x| < \bar{r}$, $|\tau_i| < |x|^\mu \bar{r}'$ $(i = 1, \dots p)$, $|\tau_i| < \bar{r}'$ $(i = p+1, \dots n)$, $x$ *appartenant à* $X$. *Les coefficients de ces séries sont asymptôtes dans* $X$ *à des séries de puissances. Les séries* $\mathfrak{P}_i(\tau_1, \dots \tau_n;\ x)$ $(i = 1, \dots n)$ *s'annulent identiquement pour* $\tau_{p+1} = 0, \dots \tau_n = 0$. $G_i(x, \tau_1, \dots \tau_{i-1})$ $(i = 1, \dots p)$ *sont des fonctions entières et rationnelles de* $x$, $\tau_1, \dots \tau_{i-1}$

$$(21)\qquad G_i(x, \tau_1, \dots \tau_{i-1}) = \sum g_{i, k_1, \dots k_{i-1}}(x)\,\tau_1^{k_1} \dots \tau_{i-1}^{k_{i-1}},$$

$k_1, \dots k_{i-1}$ *étant des nombres entiers* $\geqq 0$ *et de somme* $\geqq 2$ *entrant dans des relations de la forme*

$$(22)\qquad s_i = k_1 s_1 + \cdots + k_{i-1}s_{i-1} \qquad (i = 2, \dots p).$$

La démonstration de ce théorème est tout-à-fait analogue à la démonstration du théorème 1, il nous semble inutile d'y entrer. Le théorème 2 est vrai aussi quand certains des nombres $s_{p+1}, \dots s_n$ sont 0 sous la condition qu'il existe une solution du système (2) asymptôte dans $X$ à des séries puissances.

Nous remarquons enfin qu'on peut traiter d'une manière analogue un système de la forme

$$(23)\qquad x\frac{dy_i}{dx} = r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1} + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} a_{i, \alpha_1, \dots \alpha_n}(x)\, y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \dots n),$$

les coefficients $a_{i, \alpha_1, \dots \alpha_n}(x)$ étant asymptôtes à des séries de puissances sur la surface de Riemann de $\log x$ ou dans un certain secteur de sommet $x = 0$. Supposons que $r_1, \dots r_n$ sont $\neq 0$ et que l'origine est situé à l'extérieur du polygone convexe enveloppant 1, $r_1, \dots r_n$. Il peut arriver qu'il existe des relations

$$r_i = k + k_1 r_1 + \cdots + k_n r_n$$

où $k, k_1, \ldots k_n$ sont des entiers $\geqq 0$ tels que $k_1 + \cdots + k_n \geqq 2$. On peut supposer qu'elles ont la forme

$$(24) \qquad r_i = k + k_1 r_1 + \cdots + k_{i-1} r_{i-1} \qquad (i = 2, \ldots n).$$

Alors on a le théorème suivant

**Théorème 3.** *Il y a une substitution*

$$(25) \qquad y_i = z_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x) z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

*par laquelle le système* (23) *se transforme à un système de la forme*

$$(26) \qquad x \frac{d z_i}{d x} = r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1} + G_i(x, z_1, \ldots z_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots n).$$

*Les séries* (25) *convergent pour des valeurs de* $x, z_1, \ldots z_n$ *telles que* $|x| < \bar{r}$, $|z_i| < |x|^\delta \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$, $0 < \delta < 1$. *Les coefficients* $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)$ *sont asymptôtes à des séries de puissances.* $G_i(x, z_1, \ldots z_{i-1})$ *sont des fonctions entières et rationnelles*

$$(27) \qquad G_i(x, z_1, \ldots z_{i-1}) = \sum b^{(i)}_{k, k_1, \ldots k_{i-1}} x^k z_1^{k_1} \ldots z_{i-1}^{k_{i-1}},$$

$k, k_1, \ldots k_{i-1}$ *étant les entiers qui entrent dans les relations* (24).

Supposons ensuite que les nombres $1, r_1, \ldots r_p$ se trouvent d'un même côté d'une droite passant par l'origine et que $r_{p+1}, \ldots r_n$ se trouvent de l'autre côté de cette droite ou sont nuls. Supposons qu'il existe entre $r_1, \ldots r_p$ des relations de la forme

$$(28) \qquad r_i = k + k_1 r_1 + \cdots + k_{i-1} r_{i-1} \qquad (i = 2, \ldots p),$$

$k, k_1, \ldots k_{i-1}$ étant des entiers $\geqq 0$ tels que $k_1 + \cdots + k_{i-1} \geqq 2$. Alors on a le théorème suivant

**Théorème 4.** *Il y a une substitution*

$$(29) \qquad y_i = z_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x) z_1^{\alpha_1} \ldots z_p^{\alpha_p} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

*par laquelle le système* (23) *se transforme à un système de la forme*

$$
(30) \qquad \begin{aligned}
x\frac{dz_i}{dx} &= r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1} + G_i(x, z_1, \ldots z_{i-1}) + \mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x) && (i = 1, \ldots p) \\
x\frac{dz_i}{dx} &= \mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x) && (i = p+1, \ldots n).
\end{aligned}
$$

*Les séries* (29) *et les séries* $\mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x)$ *convergent pour des valeurs de* $x, z_1, \ldots z_n$ *telles que* $|x| < \bar{r}$, $|z_i| < |x|^\delta \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots p)$, $|z_i| < \bar{r}'$ $(i = p+1, \ldots n)$, $0 < \delta < 1$. *Les coefficients de ces séries sont asymptôtes à des séries de puissances. Les séries* $\mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x)$ $(i = 1 \ldots n)$ *s'annulent identiquement pour* $z_{p+1} = 0, \ldots z_n = 0$. $G_i(x, z_1, \ldots z_{i-1})$ *sont des fonctions entières et rationnelles*

$$
(31) \qquad G_i(x, z_1, \ldots z_{i-1}) = \sum b^{(i)}_{k, k_1, \ldots k_{i-1}} x^k z_1^{k_1} \ldots z_{i-1}^{k_{i-1}},
$$

$k, k_1, \ldots k_{i-1}$ *étant les entiers qui entrent dans les relations* (28).

On démontre ces théorèmes de la même manière que les théorèmes 1, 2 en se reportant à la démonstration de convergence faite dans (II) p. 50—53.

Dans le cas où les seconds membres de (23) sont des séries de puissances de $x, y_1, \ldots y_n$ les séries (25), (29) et les séries $\mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x)$ dans (30) se réduisent à des séries de puissances de $x, z_1, \ldots z_n$, on retrouve donc des résultats classiques.