THÉORÈME D'EXISTENCE POUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES.

Par

Y. FOURÈS-BRUHAT.

Introduction.

Je me suis posé le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques non linéaires à propos des équations de la gravitation d'Einstein. Ces équations se présentent en effet comme un système de dix équations du second ordre, linéaires, à quatre variables (espace et temps) et dix fonctions inconnues, les potentiels de gravitation. Ces équations sont du types hyperbolique normal dans un système de coordonnées spatio-temporelles régulier. Le problème du déterminisme se pose, dans la théorie d'Einstein, sous forme du problème de Cauchy, les données étant portées par une variété orientée dans l'espace, relativement à ce système d'équations. L'étude de ce problème, en supposant les données de Cauchy analytiques[1], avait montré que, moyennant quatre conditions vérifiées par ces données, il correspondait à des données initiales, portées par une surface S non caractéristique, un espace-temps einsteinien au voisinage de S. L'étude des surfaces caractéristiques, définies par le fait que les données de Cauchy, portées par une telle surface, ne déterminait pas au voisinage un espace-temps, avait montré que ces surfaces étaient tangentes en l'un quelconque de leurs points M au «conoïde caractéristique» de sommet M, ce conoïde étant engendré par les rayons lumineux, géodésiques de longueur nulle. On voyait ainsi apparaître des ondes et rayons gravifiques, donnant au champ de gravitation le caractère d'un phénomène de propagation et on constatait l'identité entre les lois de propagation de la lumière et du champ de gravitation. Il apparaissait alors comme très important d'étendre ces résultats au cas de données de Cauchy non analytiques, d'une part parce qu'une telle hypothèse d'analyticité n'a pas de sens

---

[1] G. Darmois [1]. A. Lichnerowicz [2].

dans une théorie physique où les changements de coordonnées sont astreints seulement à être suffisamment différentiables, d'autre part pour mettre en évidence ce que M. Stellmacher [11] appelle la «structure causale» de l'espace-temps: le champ de gravitation en un point M ne doit dépendre que du champ aux points antérieurs à M (c'est-à-dire que l'on peut joindre à M par une ligne d'univers partout orientée dans le temps, et qui possède une coordonnée temporelle inférieure). M. Stellmacher avait, en utilisant des majorations de Friedrichs et Lewy et des coordonnées isothermes, démontré un théorème d'unicité: à des données de Cauchy, portées par un domaine d'une surface d'espace intérieur au conoïde caractéristique de sommet M, correspond au plus un système de potentiels au point M (à un changement de coordonnées près). J'ai voulu montrer qu'il en correspondait effectivement un.

Le problème que je me suis posé est le problème de Cauchy relativement à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires par rapport aux dérivées secondes seulement. L'univers étant rapporté à un système de coordonnées spatio-temporelles isotherme et régulier, les coefficients des dérivées secondes sont les mêmes pour les dix équations, la forme quadratique correspondante devant être hyperbolique normale.

La résolution du problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles hyperbolique non linéaire a été déterminée par H. Lewy [5], dans le cas de deux variables, par intégration sur les caractéristiques et approximations successives. Schauder [6], en utilisant des majorations de Friedrichs et Lewy et l'approximation par des fonctions analytiques indiquait en 1935 une méthode permettant sans doute d'atteindre le théorème d'existence pour une équation du second ordre, hyperbolique, à un nombre quelconque de variables. En 1937, utilisant une majoration due à Haar, Schander [7] démontrait l'existence d'une solution du problème de Cauchy pour certains systèmes d'équations du premier ordre. Sa solution s'appliquait en particulier à une équation du second ordre à deux variables. L'étude des systèmes hyperboliques du premier ordre et la transformation de Fourier conduisait par ailleurs Petrovsky [9], après Herglotz [8], à formuler des théorèmes d'existence d'une grande généralité.

Il m'a paru que, pour les problèmes que pose la théorie de la relativité, il serait intéressant d'obtenir, sous le moins d'hypothèses possible un théorème d'existence aisément utilisable, permettant de trouver des propriétés des solutions comparables aux propriétés classiques des ondes lumineuses et des potentiels de gravitation, et d'avoir des formules qui puissent être un moyen de calcul effectif des champs de gravitation, au moins approchés, correspondant à des conditions initiales données.

Je consacre donc les trois premiers chapitres de ce travail à la résolution du problème de Cauchy, dans le cas non analytique, pour un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques du second ordre non linéaires à n fonctions inconnues W_s et à quatre variables x^α, de la forme

$$E = A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_s = 0, \qquad \lambda, \mu = 1,2,3,4, \quad s = 1, 2 \ldots n,$$

où $A^{\lambda\mu}$ et f_s sont des fonctions données des inconnues W_s et de leurs dérivées premières.

J'utilise, pour cette résolution, un système d'équations intégrales vérifié par les solutions sept fois différentiables des équations E.[1] Ce système s'obtient pour des équations linéaires en intégrant sur le conoïde caractéristique Σ de sommet M des combinaisons linéaires des équations E (les coefficients de ces combinaisons sont des fonctions auxiliaires qui possèdent en M les propriétés de la paramétrix, approximation de la solution élémentaire de M. Hadamard) et en joignant aux «formules de Kirchhoff» ainsi obtenues les équations déterminant le conoïde caractéristique et les fonctions auxiliaires. Les résultats s'étendent aisément aux équations non linéaires, à condition d'intégrer sur Σ non les équations E elles-mêmes mais les équations déduites de E par cinq dérivations, et de joindre aux équations intégrales précédentes les équations reliant entre elles les dérivées des fonctions inconnues jusqu'au cinquième ordre. Un tel système avait été formé par Sobolev [10] pour une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire hyperbolique (à coefficients analytiques) et par Christianovich [12] pour une équation non linéaire à quatre variables. Christianovich se bornait toutefois à une équation ne contenant pas de dérivées secondes mixtes et n'écrivait de formules de Kirchhoff qu'en donnant des valeurs particulières aux coefficients (la résolution qu'il donne du système qu'il obtient est d'ailleurs erronée, les intégrales qu'il considère n'étant pas convergentes).

Étendant ces méthodes, j'écris sous sa forme complète le système d'équations intégrales vérifié par un système d'équations quelconques du type E et j'étudie de façon détaillée les diverses quantités figurant dans ces équations intégrales (chapitres I et II) en vue de leur résolution. Je remarque que le noyau, figurant dans la formule de Kirchhoff, n'est borné que sous des conditions de dérivabilité faites sur les inconnues. Des difficultés se présentent donc pour résoudre directement le système d'équations intégrales obtenu et pour l'utiliser à la résolution du problème de Cauchy relativement à E.

---

[1] M. M. Riesz utilise également des équations intégrales pour résoudre le problème de Cauchy linéaire à coefficients variables.

Je résous au chapitre III le problème de Cauchy pour le système E en utilisant le système d'équations intégrales vérifié par les solutions d'équations aux dérivées partielles E_1 approchées de E. La démonstration est faite en détail dans le cas, un peu plus simple, faisant intervenir des dérivées d'ordre moins élevé, (et qui est celui des équations de la relativité) où les coefficients des dérivées secondes dépendent des fonctions inconnues mais non de leurs dérivées premières. Je montre qu'à des données de Cauchy cinq fois différentiables, portées par un domaine compact d de la surface initiale $x^4=0$, correspond une solution quatre fois différentiable, unique, des équations E dans un domaine D, tronc de cône ayant pour base le domaine d, si les coefficients de ces équations sont quatre fois différentiables.

La résolution du problème de Cauchy pour un système E quelconque peut se faire de manière tout à fait analogue: il suffit de considérer des équations approchées non de E lui-même mais d'équations préalablement dérivées.

J'applique, au chapitre IV, les résultats précédents aux équations de la gravitation.

Les équations de la relativité $R_{\alpha\beta}=0$ se réduisent en coordonnées isothermes à des équations du type E, $G_{\alpha\beta}=0$. Je démontre, en utilisant les conditions de conservation, que la solution du problème de Cauchy, relativement aux équations $G_{\alpha\beta}=0$, satisfait dans tout son domaine d'existence aux conditions d'isothermie s'il en est ainsi des données initiales. Cette solution satisfait donc aux équations de gravitation. Je montre qu'elle est unique à un changement de coordonnées près. J'ai ainsi construit un espace-temps einsteinien correspondant à des conditions initiales non analytiques, portées par un domaine d'espace, et d'une façon qui met on évidence le caractère de propagation propre à la gravitation relativiste.

Je suis heureuse d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. Lichnerowicz qui m'a fait largement profiter de la clarté de vue avec laquelle il aborde les grands problèmes mathématiques. Après m'avoir suggéré d'entreprendre ce travail il n'a cessé de me prodiguer les encouragements et les conseils qui m'ont permis de le mener à bien. Je tiens également à adresser mes vifs remerciements à M. G. Darmois: l'intérêt bienveillant qu'il a toujours montré pour mes travaux sur des problèmes dont il fut le premier à poser l'essentiel, m'a été très précieux.

Je prie M. Leray qui a bien voulu se joindre au jury de ma thèse et M. Pérès qui en a accepté la présidence de trouver ici l'expression de ma respectueuse gratitude.

Je remercie très respectueusement M. Marcel Riesz de son appui bienveillant, qui a permis l'impression de ce travail.

Chapitre I.

Équations linéaires.

Nous considérerons dans ce chapitre un système (E) de n équations avec dérivées partielles du second ordre, à n fonctions inconnues u_s et quatre variables x, hyperboliques et linéaires, du type suivant:

$$E_r = A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_r^{s\mu} \frac{\partial u_s}{\partial x^\mu} + f_r = 0, \qquad \begin{array}{l} r, s = 1, 2 \ldots n, \\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots 4. \end{array}$$

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ (qui sont les mêmes pour les n equations), $B_r^{s\mu}$ et f_r sont des fonctions données des quatre variables x^α. Nous supposerons qu'ils satisfont dans un domaine D défini par

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x^4| \leq \varepsilon \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(où $\bar{x}^i$, d et ε sont des nombres donnés)

aux hypothèses suivantes:

Hypothèses sur les coefficients.

1°) Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et $B_s^{r\lambda}$ admettent des dérivées partielles continues et bornées jusqu'aux ordres respectivement *quatre* et *deux*. Les coefficients f_r sont continus et bornés.

2°) La forme quadratique $A^{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$ est de type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs. Nous supposerons en outre que la variable x^4 est une variable «temporelle», les trois variables x^i étant «spatialles», c'est-à-dire que

$$A^{44} > 0 \text{ et la forme quadratique } A^{ij} x_i x_j \text{ définie } < 0.$$

3°) Les dérivées partielles d'ordres respectivement quatre et deux des $A^{\lambda\mu}$ et $B_s^{r\lambda}$ satisfont à des conditions de Lipschitz par rapport à tous leurs arguments.

Sommaire du Chapitre I.

Nous montrerons, en vue de résoudre le problème de Cauchy, que tout système de n fonctions (continues et bornées dans D ainsi que leurs dérivées partielles premières), satisfaisant aux équations (E) et prenant pour $x^4 = 0$, ainsi que leurs dérivées partielles premières, des valeurs données, est solution d'un système d'équations intégrales (I). Ces équations (I) expriment les valeurs en un point $M_0(x_0)$, inclus dans D des inconnues u_s en fonction de leurs valeurs sur le conoïde caractéristique (Σ_0) de sommet M_0 et des données initiales.

10 — 523804. *Acta Mathematica*. 88. Imprimé le 30 octobre 1952.

Nous obtiendrons ces équations en intégrant sur Σ_0 des combinaisons linéaires des équations (E), les coefficients de ces combinaisons étant n^2 fonctions auxiliaires qui présentent en M_0 une singularité.

Nous supposerons, dans la partie I de ce chapitre, que les coefficients $A^{\lambda\mu}$ prennent en M_0 des valeurs particulières (1, 0 et -1). Nous lèverons cette restriction dans la partie II.

A. Conoïde caractéristique.

1. Équations définissant le conoïde caractéristique.

Les surfaces caractéristiques du système (E) sont des variétés à trois dimensions de l'espace des quatre variables x^α, solutions du système différentiel

$$F = A^{\lambda\mu} y_\lambda y_\mu = 0$$

avec

$$y_\lambda \, d x^\lambda = 0.$$

Les quatre quantités y_λ désignent un système de paramètres directeurs de la normale à l'élément de contact de support x^α. Prenons ce système, qui n'est défini qu'à un facteur de proportionnalité près, de façon que $y_4 = 1$ et posons $y_i = p_i$. Les surfaces cherchées sont solution de

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} F = A^{44} + 2\, A^{i4} p_i + A^{ij} p_i p_j = 0, \\ d x^4 + p_i \, d x^i = 0. \end{aligned}$$

Les caractéristiques de ce système différentiel, bicaractéristiques des équations (E), satisfont aux équations différentielles suivantes:

$$\frac{d x^i}{A^{i4} + A^{ij} p_j} = \frac{d x^4}{A^{44} + A^{i4} p_i} = \frac{-d p_i}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i} - p_i \frac{\partial F}{\partial x^4}\right)} = d\lambda_1,$$

λ_1 étant un paramètre auxiliaire.

Le conoïde caractéristique Σ_0 de sommet $M_0(x_0^\alpha)$ est la surface caractéristique engendrée par les bicaractéristiques passant par M_0. Une telle bicaractéristique satisfait au système d'équations intégrales

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} x^i &= x_0^i + \int_0^{\lambda_1} T^i \, d\lambda_1, & T^i &= A^{i4} + A^{ij} p_j, \\ x^4 &= x_0^4 + \int_0^{\lambda_1} T^4 \, d\lambda_1, & T^4 &= A^{44} + A^{i4} p_i, \\ p_i &= p_i^0 + \int_0^{\lambda_1} R_i \, d\lambda_1, & R_i &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i} - p_i \frac{\partial F}{\partial x^4}\right), \end{aligned}$$

où les p_i^0 vérifient la relation

$$A_0^{44} + 2\, A_0^{i4}\, p_i^0 + A_0^{ij}\, p_i^0\, p_j^0 = 0, \tag{1.3}$$

où $A_0^{\lambda\mu}$ désigne la valeur du coefficient $A^{\lambda\mu}$ au sommet M_0 du conoïde Σ_0.

Nous supposerons qu'au point M_0 les coefficients $A^{\lambda\mu}$ prennent les valeurs suivantes:

$$A_0^{44} = 1, \quad A_0^{i4} = 0, \quad A_0^{ij} = -\delta_0^{ij}. \tag{1.4}$$

La relation (4.1) prend ainsi la forme simple

$$\Sigma\, (p_i^0)^2 = 1.$$

Nous introduirons pour définir les points de la surface Σ_0, outre le paramètre λ_1 qui définit la position d'un point sur une bicaractéristique donnée, deux nouveaux paramètres λ_2 et λ_3 qui varient avec la bicaractéristique envisagée, en posant

$$p_1^0 = \sin \lambda_2 \cdot \cos \lambda_3, \quad p_2^0 = \sin \lambda_2 \cdot \sin \lambda_3, \quad p_3^0 = \cos \lambda_2.$$ [1]

Domaine V.

2. Les hypothèses faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ permettent de montrer qu'il existe un nombre ε_1 définissant un domaine de variation Λ des paramètres λ_i par

$$|\lambda_1| \leq \varepsilon_1, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \lambda_3 \leq 2\pi, \tag{Λ}$$

tel que les équations intégrales (3.2) aient dans (Λ) une solution unique, continue et bornée

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x^\alpha(x_0^\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3), \\ p_i &= p_i(x_0^\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3), \end{aligned} \tag{2.1}$$

satisfaisant aux inégalités

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \quad |x^4| \leq \varepsilon$$

et possédant des dérivées partielles, continues et bornées, des trois premiers ordres par rapport aux variables surabondantes λ_1, p_i^0 (donc par rapport aux trois variables λ_i).

---

[1] Les équations intégrales (2.2) considérées sont des équations intégrales non linéaires, la quantité sous signe d'intégration étant un polynôme de fonctions données des fonctions inconnues. Il est facile de montrer que ces équations ont une solution continue, bornée, trois fois différentiable, vérifiant

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d \ \text{ et } \ |x^4| \leq \varepsilon$$

dans le domaine (Λ). Des démonstrations analogues sont faites au chapitre III.

Les quatres premières équations (4.3) définissent en fonction des trois paramètres λ_i, variant dans le domaine A, un point d'un domaine V du conoïde caractéristique Σ_0.

Nous serons amenés, dans la suite de ce travail, à considérer d'autres representations paramétriques du domaine V:

1°) Nous prendrons pour paramètres indépendants les trois quantités x^4, λ_2, λ_3. La fonction $x^4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfait à l'équation

$$x^4 = \int_0^{\lambda_1} T^4 \, d\lambda_1 + x_0^4 \quad \text{où} \quad T^4 = A^{44} + A^{i4} p_i . \tag{2.2}$$

Or il résulte de (3.1) que, sur Σ_0, on a

$$2 A^{i4} p_i = -A^{ij} p_i p_j - A^{44} \geq -A^{44},$$

d'où

$$T^4 \geq \frac{A^{44}}{2} > 0 ;$$

x^4 est donc une fonction monotone croissante de λ_1, la correspondance entre $(x^4, \lambda_2, \lambda_3)$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est biunivoque.

2°) Nous prendrons pour paramêtres représentatifs d'un point de Σ_0 ses trois coordonnées d'espace x^i. L'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entre les quatres équations donne x^4 en fonction des x^i.

De la relation

$$d x^4 + p_i \, d x^i = 0,$$

identiquement vérifiée par les solutions des équations (1.2) sur la surface caractéristique Σ_0, on déduit que les dérivées partielles de cette fonction x^4 par rapport aux x^i vérifient la relation

$$\frac{\partial x^4}{\partial x^i} = -p_i .$$

Si nous désignons par $[\varphi]$ la valeur d'une fonction φ des quatre coordonnées x^α sur Σ_0 et si nous exprimons $[\varphi]$ en fonction des trois paramètres x^i représentatifs de Σ_0, les dérivées partielles de cette fonction par rapport aux x^i vérifient donc:

$$\frac{\partial [\varphi]}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}\right] p_i . \tag{2.3}$$

3. Équations intégrales vérifiées par les dérivées des fonctions $x^i(\lambda)$ et $p_i(\lambda)$.

Nous poserons

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j^0} = y_j^i, \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial p_j^0 \partial p_h^0} = y_{jh}^i, \quad \frac{\partial^3 x^i}{\partial p_j^0 \partial p_h^0 \partial p_k^0} = y_{jhk}^i,$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j^0} = z_j^i, \quad \frac{\partial^2 p_i}{\partial p_j^0 \partial p_h^0} = z_{jh}^i, \quad \frac{\partial^3 p_i}{\partial p_j^0 \partial p_h^0 \partial p_k^0} = z_{jhk}^i.$$

Ces fonctions satisfont aux équations intégrales obtenues par dérivation sous le signe somme par rapport aux p_i^0 des équations (1.2) (les quantités obtenues sous les signes d'intégration étant continues et bornées). La formule (2.3) montre que ces équations peuvent s'écrire $\left(\text{les dérivés } \dfrac{\partial x^4}{\partial p_i^0} \text{ étant inutiles}\right)$

$$y_j^i = \int_0^{\lambda_1} T_j^i \, d\lambda_1, \quad T_j^i = \frac{\partial T^i}{\partial p_j^0} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^h}[A^{ih}]\, p_h + \frac{\partial}{\partial x^4}[A^{i4}]\right\} y_j^h + [A^{ih}]\, z_j^h,$$

$$z_j^i = \int_0^{\lambda_1} R_j^i \, d\lambda_1, \quad R_j^i = \frac{\partial R_i}{\partial p_j^0} = \frac{\partial R_i}{\partial x_k} y_j^k + \frac{\partial R_i}{\partial p_k} z_j^k,$$

$$y_{jk}^i = \int_0^{\lambda_1} T_{jk}^i \, d\lambda_1, \quad T_{jk}^i = \frac{\partial T_0^i}{\partial p_k^0} = \frac{\partial T_i}{\partial x^h} y_{jk}^h + \frac{\partial T^i}{\partial p_h} z_{jk}^h + \phi_{jk}^i,$$

$$z_{jk}^i = \int_0^{\lambda_1} R_{jk}^i \, d\lambda_1, \quad R_{jk}^i = \frac{\partial R_j^i}{\partial p_0^k} = \frac{\partial R_i}{\partial x^h} y_{jk}^h + \frac{\partial R_i}{\partial p_h} z_{jk}^h + \psi_{jk}^i,$$

où ϕ_{jk}^i et ψ_{jk}^i sont des polynômes des fonctions $p_i(\lambda)$, $y_j^i(\lambda)$, $z_j^i(\lambda)$, des coefficients $A^{\lambda\mu}(x^\alpha)$ et de leurs dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'au troisième ordre inclus. Dans ces fonctions les x^α sont remplacés par les $x^\alpha(\lambda)$ donnés par les formules (2.1).

Nous trouverions de manière analogue

$$y_{jhk}^i = \int_0^{\lambda_1} T_{jhk}^i \, d\lambda_1, \quad T_{jhk}^i = \frac{\partial T_{jh}^i}{\partial p_k^0} = \frac{\partial T^i}{\partial x^l} y_{jhk}^l + \frac{\partial T^i}{\partial p^l} z_{jhk}^l + \phi_{jhk}^i,$$

$$z_{jhk}^i = \int_0^{\lambda_1} R_{jhk}^i \, d\lambda_1, \quad R_{jhk}^i = \frac{\partial R_{jh}^i}{\partial p_k^0} = \frac{\partial R_i}{\partial x^l} y_{jhk}^l + \frac{\partial R^i}{\partial p^l} z_{jhk}^l + \psi_{jhk}^i,$$

où ϕ_{jhk}^i et ψ_{jhk}^i sont des polynômes des fonctions p_i, y_j^i, z_j^i, y_{jh}^i, z_{jh}^i ainsi que des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre inclus (fonctions des fonctions x^α).

Relations satisfaites par les fonctions inconnues sur la surface du conoïde caractéristique.

4. Nous désignerons par $[\varphi]$ la valeur d'une fonction φ des quatre coordonnées x^α sur la surface du conoïde caractéristique Σ_0. $[\varphi]$ peut s'exprimer en fonction des trois variables d'une représentation paramétrique de Σ_0, en particulier des trois coordonnées x^i. D'après l'égalité (2.3) les dérivées partielles de cette fonction par rapport à x^i vérifient la relation

$$\left[\frac{\partial [\varphi]}{\partial x^i}\right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}\right] p_i .$$

On applique à nouveau cette règle au calcul des dérivées

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right] \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}\right],$$

d'où il suit facilement

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^4}\right] = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}\right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{4^2}}\right] p_i ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right] = \frac{\partial^2 [\varphi]}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}\right] p_j + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}\right] p_i + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}\right]\frac{\partial p_i}{\partial x^j} + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{4^2}}\right] p_i\, p_j .$$

Ces identités permettent d'écrire les relations suivantes satisfaites par les fonctions inconnues u_s sur le conoïde caractéristique:

$$(4.1) \quad [E_r] = [A^{ij}]\frac{\partial^2 [u_r]}{\partial x^i \partial x^j} + \{[A^{ij}]\, p_i\, p_j + 2\,[A^{i4}]\, p_i + [A^{44}]\}\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^{4^2}} +$$
$$+ 2\,\{[A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}]\}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right] + \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right][A^{ij}]\frac{\partial p_i}{\partial x^j} + B_r^{s\mu}\left[\frac{\partial u_s}{\partial x^\mu}\right] + [f_r] = 0.$$

Le coefficient du terme $\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^{4^2}}\right]$ est la valeur sur le conoïde caractéristique du premier membre de l'équation (1.1); il est donc nul. Nous pouvions d'ailleurs prévoir que les équations $[E_r]=0$ ne contiendraient pas de dérivées secondes des fonctions u_r autre que celles obtenues par dérivation sur la surface Σ_0, la donnée sur une surface caractéristique des fonctions inconnues $[u_r]$ et de leurs dérivées premières $\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^\alpha}\right]$ ne déterminant pas l'ensemble des dérivées secondes.

B. Fonctions auxiliaires.

5. Introduction des fonctions auxiliaires σ_s^r. Apparition d'une divergence.

Nous formons n^2 combinaisons linéaires $\sigma_s^r[E_r]$ des équations (4.1) vérifiées par les fonctions inconnues dans le domaine V de Σ_0, les σ_s^r désignant n^2 fonctions auxiliaires qui possèdent en M_0 une singularité.

Nous posons

$$M(\varphi)=[A^{ij}]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^j},$$

φ désignant une fonction quelconque des trois variables x^i, et nous écrivons

$$(5.1)\qquad \sigma_s^r E_r=\left\{M([u_r])+2([A^{ij}]p_j+[A^{i4}])\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right][A^{ij}]\frac{\partial p_i}{\partial x^j}+[B_r^{t\mu}]\left[\frac{\partial u_t}{\partial x^\mu}\right]+[f_r]\right\}\sigma_s^r=0.$$

Nous transformerons ces équations de manière à y faire apparaitre une divergence dont l'intégrale de volume se transformera en intégrale de surface, tandis que les termes restants ne contiendront que $[u_r]$ et $\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right]$. Nous utiliserons pour cela l'identité suivante, vérifiée par deux fonctions quelconques φ et ψ des trois variables x^i:

$$\psi\,M(\varphi)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left([A^{ij}]\,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i}([A^{ij}]\,\psi)$$

ou

$$\psi\,M(\varphi)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left([A^{ij}]\,\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}-\varphi\frac{\partial}{\partial x^j}([A^{ij}]\,\varphi)\right)+\varphi\,\overline{M}(\psi),$$

où $\overline{M}$ est l'opérateur adjoint de M, c'est-à-dire

$$\overline{M}(\psi)=\frac{\partial^2([A^{ij}]\,\psi)}{\partial x^i\,\partial x^j},$$

et l'identité (2.3), précédemment écrite, qui donne ici

$$\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^i}\right]=\frac{\partial[u_r]}{\partial x^i}+p^i\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right].$$

Nous voyons alors sans difficulté que les expressions $\sigma_s^r[E_r]$ prennent la forme

$$\sigma_s^r[E_r]=\frac{\partial}{\partial x^i}E_s^i+[u_r]\,L_s^r+\sigma_s^r f_r-\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right]D_s^r,$$

où l'on a posé

$$E_s^i = [A^{ij}]\,\sigma_s^r \frac{\partial [u_r]}{\partial x^j} - [u_r] \frac{\partial}{\partial x^j}([A^{ij}]\,\sigma_s^r) + 2\,\sigma_s^r \{[A^{ij}]\,p_j + [A^{i4}]\} \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right] + [B_{ri}^t]\,[u_t]\,\sigma_s^r,$$

$$L_s^r = \bar{M}(\sigma_s^r) - \frac{\partial}{\partial x^i}([B_t^{ri}]\,\sigma_s^t), \tag{5.2}$$

$$D_s^r = \sigma_s^r \left\{2 \frac{\partial}{\partial x^i}([A^{ij}]\,p_j + [A^{i4}]) - [A^{ij}] \frac{\partial p_j}{\partial x^i}\right\} + 2([A^{ij}]\,p_j + [A^{i4}]) \frac{\partial \sigma_s^r}{\partial x^i} -$$

$$- ([B_t^{r4}] + [B_t^{ri}]\,p_i)\,\sigma_s^t.$$

Nous choisirons les fonctions auxiliaires σ_s^r de manière à annuler dans chaque équation le coefficient de $\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^4}\right]$. Ces fonctions devront donc satisfaire aux n^2 équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$D_s^r = 0. \tag{5.3}$$

Nous verrons que ces équations possèdent une solution ayant en M_0 la singularité voulue. Si les fonctions auxiliaires σ_s^r vérifient ces n^2 relations, les équations, vérifiées par les fonctions inconnues u_r sur le conoïde Σ_0, prennent la forme simple

$$[U_r]\,L_s^r + \sigma_s^r [f_r] + \frac{\partial}{\partial x^i} E_s^i = 0. \tag{5.4}$$

6. Intégration des équations obtenues.

Nous intégrerons les équations ainsi obtenues par rapport aux trois variables x^i sur une portion V_η d'hypersurface du conoïde caractéristique Σ_0, limitée par les hypersurfaces $x^4 = 0$ et $x^4 = x_0^4 - \eta$. Ce domaine V_η est défini, simplement connexe et intérieur au domaine V si la coordonnée x_0^4 est suffisamment petite. En effet:

$$|x_0^4| < \varepsilon_0 \quad \text{entraîne dans } V_\eta \quad |x^4 - x_0^4| < \varepsilon_0.$$

La formule (2.2) montre alors que, pour un choix convenable de ε_0, nous aurons

$$\lambda_1 \leq \varepsilon_1.$$

La frontière de V_η se composant des domaines à deux dimensions S_0 et S_η découpés sur Σ_0 par les hypersurfaces $x^4 = 0$, $x^4 = x_0^4 - \eta$ nous aurons, en intégrant les équations (5.4) dans V_η, les relations fondamentales suivantes:

$$\iiint_{V_\eta} \{[U_r]\,L_s^r + \sigma_s^r [f_r]\}\, dV + \iint_{S_\eta} E_s^i \cos(n, x^i)\, dS - \iint_{S_0} E_s^i \cos(n, x^i)\, dS = 0, \tag{6.1}$$

où dV, dS et $\cos(n, x^i)$ désignent respectivement dans l'espace des trois variables x^i, l'élément de volume, l'élément d'aire d'une surface $x^4 = C^{te}$ et les cosinus directeurs de la normale à une telle surface orientée vers l'extérieur.

La limite de ces équations, quand η tend vers zéro, nous fournira des formules de Kirchoff que nous formerons dans la dernière partie de ce chapitre.

7. Détermination des fonctions auxiliaires σ_s^r.

Nous chercherons une solution des équations (5.3) sous la forme

$$\sigma_s^r = \sigma\, \omega_s^r,$$

où σ est infini au point M_0 et les ω_s^r bornés.

Les équations (5.3) s'écrivent,

$$\sigma_s^r \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} ([A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}]) + p_j \frac{\partial}{\partial x^i} [A^{ij}] + \frac{\partial}{\partial x_i} [A^{i4}] \right\} - ([B_t^{r4}] + [B_t^{ri}]\, p_i)\, \sigma_s^r + 2\, ([A^{ij}]\, p_j + \\ + [A^{i4}]) \frac{\partial \sigma_s^r}{\partial x^i} = 0.$$

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_s^{t\lambda}$, les dérivées premières des $A^{\lambda\mu}$ et les fonctions p_i sont bornés dans le domaine V, les coefficients des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre sont donc somme de termes bornés, à l'exception peut-être des termes

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \{[A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}]\}.$$

Nous choisirons donc les ω_s^r, que nous voulons bornés, satisfaisant à l'équation

$$(7.1) \qquad \omega_s^r\, p_j \frac{\partial}{\partial x^i} [A^{ij}] + \frac{\partial}{\partial x^i} [A^{i4}] - \omega_s^t \{[B_t^{r4}] + [B_t^{ri}]\, p_i\} + 2\, \{[A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}]\} \frac{\partial \omega_s^r}{\partial x^i} = 0$$

satisfaisant alors à

$$(7.2) \qquad \sigma \frac{\partial}{\partial x^i} ([A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}]) + 2\, ([A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}]) \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = 0.$$

8. Détermination des ω_s^r.

Nous voyons aisément que les équations (7.1) peuvent se mettre sous forme d'équations intégrales analogues aux équations (1.2) obtenues dans la recherche du conoïde Σ_0. Nous avons en effet, sur Σ_0:

$$[A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}] = T^i = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_1},$$

d'où, pour une fonction quelconque φ définie sur Σ_0,

$$T^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}.$$

Imposons aux ω^r_s les conditions aux limites

$$\omega^r_s = \delta^r_s \quad \text{pour} \quad \lambda_1 = 0.$$

Ces quantités satisfont alors aux équations intégrales

$$\omega^r_s = \int_0^{\lambda_1} (Q^r_t\, \omega^t_s + q\, \omega^r_s)\, d\lambda_1 + \delta^r_s \tag{8.1}$$

avec

$$Q^r_t = \tfrac{1}{2}\left([B^{r4}_t] + [B^{ri}_t]\, p_i\right) \quad \text{et} \quad Q = -\tfrac{1}{2}\left(p_j \frac{\partial}{\partial x^i}[A^{ij}] + \frac{\partial}{\partial x^i}[A^{i4}]\right),$$

les hypothèses faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et $B^{r\lambda}_s$ et les résultats obtenus sur les fonctions x^i, p_i permettent encore de montrer que, pour un choix convenable de ε_1, ces équations ont une solution unique, continue, bornée et possédant des dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport aux p^0_i, continues et bornées dans le domaine Λ. Nous désignerons ces dérivées par ω^r_{si} et ω^r_{sij}.

9. Détermination de σ.

Considérons l'équation (7.2) vérifiée par σ. Nous savons que

$$([A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}]) \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1},$$

et nous allons calculer le coefficient de σ,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}([A^{ij}]\, p_j + [A^{i4}]),$$

en le reliant très simplement au déterminant

$$\Delta = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}.$$

Ce déterminant Δ, jacobien du changement de variables $x^i = x^i(\lambda_j)$ sur le conoïde Σ_0, a pour éléments:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_1} = T^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_2} = y^i_j \frac{\partial p^0_j}{\partial \lambda_2}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_3} = y^i_j \frac{\partial p^0_j}{\partial \lambda_3}. \tag{9.1}$$

Désignons par Δ^i_j le mineur relatif à l'élément $\dfrac{\partial x^i}{\partial \lambda_j}$ du déterminant Δ.

Une fonction quelconque φ, définie sur Σ_0, vérifie les identités

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\Delta^j_i}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_j}.$$

Appliquons cette formule à la fonction $\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_1} = T^i$:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T^i = \frac{\Delta_j^i}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} T^i = \frac{\Delta_i^j}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_j}\right),$$

Δ_i^j étant le mineur relatif à l'élément $\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_j}$ du déterminant Δ nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T^i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_1}.$$

Donc la fonction σ vérifie la relation

$$\sigma \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_1} + 2 \Delta \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} = 0$$

qui s'intègre de façon immédiate. La solution générale est

$$\sigma = \frac{f(\lambda_2, \lambda_3)}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}},$$

où f désigne une fonction arbitraire.

Pour $\lambda_1 = 0$ *le déterminant* Δ *est nul*, puisque les y_j^i sont nuls; la fonction σ est donc infinie.

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées partielles premières et deuxièmes par rapport aux x^α étant continus et bornés dans le domaine V de Σ_0, ainsi que les fonctions x^i, y_j^i, z_j^i, nous avons:

$$\lim_{\lambda_1 = 0} \frac{y_j^i}{\lambda_1} = [A^{ij}]_{\lambda_1 = 0} = -\delta_i^j. \tag{9.2}$$

En divisant les deuxième et troisième ligne de Δ par λ_1 nous obtenons déterminant égal à $\frac{\Delta}{\lambda_1^2}$ nous déduisons des formules (9.1) et (9.2)

$$\lim_{\lambda_1 = 0} \frac{\Delta}{\lambda_1^2} = \begin{vmatrix} -\sin \lambda_2 \cos \lambda_3 & -\sin \lambda_2 \sin \lambda_3 & -\cos \lambda_2 \\ -\cos \lambda_2 \cos \lambda_3 & -\cos \lambda_2 \sin \lambda_3 & \sin \lambda_2 \\ +\sin \lambda_2 \sin \lambda_3 & -\sin \lambda_2 \cos \lambda_3 & 0 \end{vmatrix} = -\sin \lambda_2.$$

En effet:

$$\lim_{\lambda_1 = 0} T^i = -\delta_i^j p_j^0 = -p_i^0$$

$$\lim_{\lambda_1 = 0} \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_u} = \lim_{\lambda_1 = 0} \frac{y_j^i}{\lambda_1} \frac{\partial p_j^0}{\partial \lambda_u} = -\delta_j^i \frac{\partial p_j^0}{\partial \lambda_u}.$$

Nous prendrons pour fonction auxiliaire σ la fonction

$$\sigma = \left|\frac{\sin\lambda_2}{\Delta}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Nous aurons alors $\lim\limits_{\lambda_1=0} \sigma\lambda_1 = 1$.

10. Dérivées des fonctions σ_s^r.

Les équations (6.1) contiennent, d'une part les valeurs sur Σ_0 des fonctions inconnues u_r, de leurs dérivées partielles ainsi que les fonctions p_i, y et z, d'autre part les fonctions σ_s^r et leurs dérivées partielles premières et secondes.

Etudions donc les dérivées partielles des deux premières ordres des fonctions σ et ω_s^r.

Dérivées de σ:

$$\sigma = \frac{|\sin\lambda_2|^{\frac{1}{2}}}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}$$

est une fonction des lignes trigonométriques de λ_u ($u=2, 3$), des fonctions x^α (par l'intermédiaire des $A^{\lambda\mu}$) et des fonctions p_i, y_j^i. Les dérivées partielles premières et secondes de σ par rapport aux x^i s'exprimeront donc au moyen des fonctions énumérées et de leurs dérivées partielles premières et secondes.

1°) Dérivées premières: Nous avons vu que les dérivées partielles par rapport aux x^i d'une fonction quelconque φ, définie sur Σ_0, satisfont à l'identité

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \frac{\Delta_i^j}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j}, \tag{10.1}$$

où $\dfrac{\Delta_i^j}{\Delta}$ est une fonction donnée de $\cos\lambda_u$, $\sin\lambda_u$, x^α, p_i, y_i^j, les dérivées partielles par rapport à λ_1 des fonctions x^i, p_i, y_i^j,[1] sont les quantités T^i, R_i, T_j^i qui s'expriment au moyen de ces fonctions elles-mêmes et de z_i^j, les dérivées partielles par rapport à λ_u de ces fonctions x^i, p_i, y_i^j, s'expriment au moyen de leurs dérivées par rapport aux paramètres surabondants p_h^0, soient y_h^i, z_h^i, y_{ih}^j et de $\cos\lambda_u$, $\sin\lambda_u$.

La fonction σ admet donc dans V, sous les hypothèses faites, des dérivées partielles premières par rapport aux x^i qui s'expriment au moyen des fonctions x^α $\left(\text{par l'intermédiaire des } [A^{\lambda\mu}] \text{ et des } \left[\dfrac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right] \text{ et des fonctions } p_i, y_j^i, z_j^i, y_{jh}^i \text{ et de } \cos\lambda_u, \sin\lambda_u\right)$.

[1] Les dérivées partielles de la fonction x^4 par rapport aux variables x^i sont connues directement puisque $\dfrac{\partial x^4}{\partial x^i} = -p_i$.

2°) Dérivées secondes: Une nouvelle application de la formule (10.1) montre, de façon analogue, que σ admet dans V des dérivées partielles secondes, qui s'expriment au moyen des fonctions x^α (par l'intermédiaire des $A^{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées partielles premières et secondes) et des fonctions p_i, y^i_j, z^i_j, y^j_{ih}, z^j_{ih}, y^j_{ihk} et des $\cos\lambda_u$, $\sin\lambda_u$.

Dérivées des ω^r_s: L'identité (10.1) permet encore de montrer que les fonctions ω^r_s, solutions des équations (7.1), admettent dans V des dérivées partielles premières et secondes par rapport aux variables x^i si ces fonctions admettent, dans V, des dérivées partielles premières et secondes par rapport aux variables λ_u; il suffit pour cela qu'elles admettent des dérivées partielles premières et secondes par rapport aux variables surabondantes p^0_i.

Nous poserons

$$\frac{\partial \omega^r_s}{\partial p^0_i} = \omega^r_{si}, \quad \frac{\partial^2 \omega^r_s}{\partial p^0_i \partial p^0_j} = \omega^r_{sij}.$$

Si ces fonctions sont continues et bornées dans V elles satisfont, sous les hypothèses faites, aux équations intégrales obtenues par dérivation sous le signe somme des équations (8.1) par rapport aux p^0_i. Soient respectivement

1°) $$\omega^r_{si} = \int_0^{\lambda_1} (Q^r_t\,\omega^t_{si} + Q\,\omega^r_{si} + \Omega^r_{si})\,d\lambda_1,$$

où

$$\Omega^r_{si} = \frac{\partial Q^r_t}{\partial p^0_i}\,\omega^t_s + \frac{\partial Q}{\partial p^0_i}\,\omega^r_s$$

est un polynôme des fonctions ω^r_s, p_i, y^i_j, z^i_j ainsi que des valeurs sur Σ_0 des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B^{r\lambda}_s$ des équations (E) et de leurs dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'aux ordres respectivement deux et un (quantités elles-mêmes fonctions des fonctions $x^\alpha(\lambda_j)$).

2°) $$\omega^r_{sij} = \int_0^{\lambda_1} (Q^r_t\,\omega^t_{sij} + Q\,\omega^r_{sij} + \Omega^r_{sij})\,d\lambda_1,$$

où

$$\Omega^r_{sij} = \frac{\partial Q^r_t}{\partial p^0_j}\,\omega^t_{si} + \frac{\partial Q}{\partial p^0_j}\,\omega^r_{si} + \frac{\partial \Omega^r_{si}}{\partial p^0_j},$$

est un polynôme des fonctions ω^r_s, ω^r_{si}, p_i, y^j_i, z^j_i, y^j_{ih}, z^j_{ih} ainsi que des valeurs sur Σ_0 des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B^{r\lambda}_s$ et de leurs dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'aux ordres respectivement trois et deux.

Les dérivées partielles premières et secondes des ω^r_s par rapport aux variables

x^i s'expriment au moyen des fonctions x^α (par l'intermédiaire des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées partielles premières), p_i, y^i_j, z^i_j, y^i_{jh}, z^i_{jh}, ω^r_s, ω^r_{si} et ω^r_{sij}.

En résumé. Nous avons montré que les fonctions auxiliaires σ^r_s existent et admettent dans V des dérivées partielles premières et secondes par rapport aux variables x^i sous les hypothèses suivantes:

1°) Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et $B^{r\lambda}_s$ ont des dérivées partielles continues et bornées jusqu'aux ordres respectivement quatre et deux dans le domaine $D \supset V$.

2°) Les équations intégrales aux fonctions inconnues x^α, p_i et ω^r_s ont une solution unique, continue, bornée et admettant dans V des dérivées partielles par rapport aux p^0_i, continues et bornées jusqu'au deuxième ordre. Ce résultat peut être démontré en supposant que les dérivées partielles d'ordres respectivement quatre et deux des $A^{\lambda\mu}$ et $B^{r\lambda}_s$ vérifient des conditions de Lipschitz.

Les fonctions σ^r_s et leurs dérivées partielles premières et secondes par rapport aux x^i s'écrivent alors au moyen des seules fonctions X et Ω, X désignant une quelconque des fonctions x^α, p_i, y^j_i, z^j_i, y^j_{ih}, z^j_{ih}, y^j_{ihk}, z^j_{ihk} et Ω l'une quelconque des fonctions ω^r_s, ω^r_{si}, ω^r_{sij}.

Les fonctions X et Ω satisfont à des équations intégrales de la forme

$$X = \int_0^{\lambda_1} E(X)\, d\lambda_1 + X_0,$$

$$\Omega = \int_0^{\lambda_1} F(X, \Omega)\, d\lambda_1 + \Omega_0,$$

où X_0 et Ω_0 désignent les valeurs données des fonctions X et Ω pour $\lambda_1 = 0$.

$E(X)$ est un polynôme des fonctions X et des valeurs sur Σ_0 des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre (fonctions des fonctions x^α).

$F(X, \Omega)$ est un polynôme des fonctions X et Ω, et des valeurs sur Σ_0 des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B^{r\lambda}_s$ et de leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres respectivement trois et deux.

11. Études du comportement au voisinage du sommet du conoïde caractéristique.

Nous allons étudier les quantités figurant sous les intégrales des relations fondamentales (6.1) et pour cela chercher de façon plus précise l'expression des dérivées partielles des fonctions σ et ω^r_s par rapport aux variables x^i au moyen des fonctions X et Ω. Le comportement de ces fonctions au voisinage de $\lambda_1 = 0$ (sommet du conoïde caractéristique Σ_0) nous permettra alors de chercher la limite des équations (6.1) pour $\eta=0$: la fonction $x^4(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$ étant, dans le domaine Λ, une fonction continue des trois variables λ_i, $\eta=x^4-x_0^4$ tend en effet vers zéro avec λ_1. Nous donnerons le détail des calculs, dont nous aurons besoin par la suite, quand nous chercherons à résoudre le système d'équations intégrales obtenu.

Nous utiliserons essentiellement dans les études du comportement au voisinage de $\lambda_1=0$, le fait suivant qui résulte des hypothèses faites et des équations vérifiées par les fonctions y_j^i, y_{jh}^i, y_{jhk}^i, ω_{si}^r et ω_{sij}^r.

Les fonctions $\dfrac{y_j^i}{\lambda_1}$, $\dfrac{y_{jh}^i}{\lambda_1}$, $\dfrac{y_{jhk}^i}{\lambda_1}$, et $\dfrac{\omega_{si}^r}{\lambda_1}$, $\dfrac{\omega_{sij}^r}{\lambda_1}$ sont des fonctions continues et bornées de λ_1, λ_2, λ_3 dans le domaine V. Nous désignerons l'une quelconque de ces fonctions par $\tilde{X}$ et $\tilde{\Omega}$.

12. Comportement au voisinage de $\lambda_1=0$ du déterminant Δ et de ses mineurs.

1°) Nous avons déjà montré (§ 9) que la quantité $\dfrac{\Delta}{\lambda_1^2}$ est un polynôme des fonctions X (ici p_i seul), $\tilde{X}$ $\left(\text{ici } \dfrac{y_j^i}{\lambda_1} \text{ seul}\right)$, des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et des $\sin\lambda_u$, $\cos\lambda_u$ ($u=2, 3$). C'est donc une fonction continue bornée de λ_1, λ_2, λ_3 dans V. Nous avons vu que la valeur de cette fonction pour $\lambda_1=0$ est

$$\lim_{\lambda_1=0}\frac{\Delta}{\lambda_1^2}=-\sin\lambda_2.$$

Au voisinage de $\lambda_1=0$ la fonction $\dfrac{\Delta}{\lambda_1^2}$, qui apparaîtra au dénominateur des quantités étudiées par la suite, est $\neq 0$, sauf pour $\lambda_2=0$ ou $\lambda_2=\pi$. Pour lever cette difficulté nous montrerons que le polynôme Δ est divisible par $\sin\lambda_2$ et nous ferons apparaître aux dénominateurs considérés la fonction $D=\dfrac{\Delta}{\lambda_1^2\sin\lambda_2}$.

Considérons donc sur le conoïde Σ_0 le changement de variables suivant:

$$\mu_i=\lambda_1 p_i^0. \tag{12.1}$$

Nous posons

$$d=\frac{D(\mu_1,\mu_2,\mu_3)}{D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}=\begin{vmatrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 \\ \lambda_1\dfrac{\partial p_1^0}{\partial\lambda_2} & \lambda_1\dfrac{\partial p_2^0}{\partial\lambda_2} & \lambda_1\dfrac{\partial p_3^0}{\partial\lambda_2} \\ \lambda_1\dfrac{\partial p_1^0}{\partial\lambda_3} & \lambda_1\dfrac{\partial p_2^0}{\partial\lambda_3} & \lambda_1\dfrac{\partial p_3^0}{\partial\lambda_3}\end{vmatrix}=\lambda_1^2\sin\lambda_2$$

et

$$\Delta = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}.$$

Puisque

$$\frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(\mu_1, \mu_2, \mu_3)} \frac{D(\mu_1, \mu_2, \mu_3)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$$

nous avons

$$\Delta = D\lambda_1^2 \sin\lambda_2, \tag{12.2}$$

où le déterminant D a pour éléments

$$\frac{\partial x^i}{\partial \mu_j} = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mu_j} + \frac{\partial x^i}{\partial p_h^0} \frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \frac{\partial \lambda_u}{\partial \mu_j}.$$

Il résulte directement des égalités (12.1) et de l'identité $\Sigma \mu_i^2 = \lambda_1^2$ que

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \mu_j} = p_j^0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \mu_h}{\partial \lambda_u}.$$

D'autre part nous avons

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mu_h}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \lambda_u}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mu_h}{\partial \lambda_u} = \delta_j^h.$$

Les éléments de D sont donc

$$\frac{\partial x^i}{\partial \mu_j} = T^i p_j^0 + \frac{y_h^i}{\lambda_1} (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0).$$

Le polynôme $\frac{\Delta}{\lambda_1^2}$ est donc divisible par $\sin\lambda_2$, le quotient D étant un polynôme des mêmes fonctions X, $\tilde{X}$, que $\frac{\Delta}{\lambda_1^2}$ et de $\sin\lambda_u$, $\cos\lambda_u$ (ou, plus précisément, des trois p_i^0).

D est une fonction continue bornée de λ_1, λ_2, λ_3 dans V dont la valeur pour $\lambda_1 = 0$ est $\lim_{\lambda_1 = 0} D = -1$. En effet:

$$\lim_{\lambda_1 = 0} \frac{\partial x^i}{\partial \mu_j} = -p_i^0 p_j^0 - \delta_j^i + p_i^0 p_j^0 = -\delta_j^i.$$

Remarque. $\frac{\Delta}{\lambda_1^2}$ étant un polynôme homogène du deuxième degré des fonctions $\frac{y_i^j}{\lambda_1}$, il en est de même du polynôme D, et la quantité $\lambda_1^2 D$ est un polynôme des fonctions X (p_i et y_i^j), des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et des trois p_i^0, homogène du deuxième degré par rapport aux y_i^j. On peut vérifier aisément ces résultats en calculant le produit $D^+ d^+$ où

$$d^+ = \begin{vmatrix} p_1^0 & p_2^0 & p_3^0 \\ \dfrac{\partial p_1^0}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial p_2^0}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial p_3^0}{\partial \lambda_2} \\ \dfrac{\partial p_1^0}{\partial \lambda_3} & \dfrac{\partial p_2^0}{\partial \lambda_3} & \dfrac{\partial p_3^0}{\partial \lambda_3} \end{vmatrix} = \frac{d}{\lambda_1^2}$$

et où D^+ est le déterminant dont les éléments sont

$$T^i p_j^0 - y_h^i (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0).$$

On trouve

$$D^+ d^+ = \Delta,$$

la quantité $\lambda_1^2 D = D^+$ possède donc les propriétés énoncées.

Le polynôme D est, en valeur absolue, supérieur à un nombre donné dans un domaine W: D est en effet une fonction continue et bornée de λ_1 dans le domaine Λ (où λ_2 et λ_3 varient sur un compact) qui prend la valeur -1 pour $\lambda_1 = 0$. Il existe donc un nombre ε_2 tel que, dans le domaine Λ_2, voisinage de $\lambda_1 = 0$ du domaine Λ, défini par

$$|\lambda_1| \le \varepsilon_2, \quad 0 \le \lambda_2 \le \pi, \quad 0 \le \lambda_3 \le 2\pi,$$

on ait par exemple

$$|D+1| \le \tfrac{1}{2} \text{ donc } |D| \ge \tfrac{1}{2}.$$

Nous désignerons par W le domaine de Σ_0 correspondant au domaine Λ_2.

2°) *Comportement des mineurs de Δ.*

a) Mineurs relatifs aux éléments de la première ligne de Δ: Δ_i^1 est, comme Δ lui-même, un polynôme homogène du deuxième degré par rapport aux fonctions y_i^j, et $\dfrac{\Delta_i^1}{\lambda_1^2}$ est un polynôme des fonctions $X(p_i)$, $\tilde{X}\left(\dfrac{y_i^j}{\lambda_1}\right)$, des coefficients $[A^{\lambda\mu}]$ et de $\sin \lambda_u$, $\cos \lambda_u$; c'est donc une fonction continue et bornée de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans V.

Pour étudier la quantité $\dfrac{\Delta_i^1}{\Delta} = \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x^i}$, qui interviendra dans la suite, nous la mettrons sous la forme d'une fraction rationnelle de dénominateur $D\,(\neq 0$ dans $W)$.

Nous avons

$$\frac{\Delta_i^1}{\Delta} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^i} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mu_j}\frac{\partial \mu_j}{\partial x^i} = p_j^0 \frac{D_i^j}{D} \tag{12.3}$$

$\left(\text{on a désigné par } D_i^j \text{ le mineur relatif à l'élement } \dfrac{\partial x^i}{\partial \mu_j} \text{ du déterminant } D\right)$.

La quantité $\dfrac{\Delta_i^1}{\Delta}$ est donc une fonction continue et bornée des trois variables $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans W. Calculons la valeur de cette fonction pour $\lambda_1 = 0$, on trouve

$$\lim_{\lambda_1=0} \frac{\Delta_i^1}{\Delta} = -p_i^0,$$

résultat que l'on pouvait prévoir. En effet:

$$\lim_{\lambda_1=0} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^i} = \lim_{\lambda_1=0} \frac{\partial x^4}{\partial x^i},$$

or on a constamment, sur Σ_0, $\dfrac{\partial x^4}{\partial x^i} = -p_i$.

Remarque. On déduit des formules (12.2) et (12.3) que

$$\Delta_i^1 = \lambda_1^2 \sin \lambda_2\, p_j^0\, D_i^j.$$

On voit alors que la quantité $\lambda_1^2 p_j^0 D_i^j$ est un polynôme des fonctions p_i, y_i^j, des coefficients $[A^{\lambda\mu}]$ et des trois p_h^0, homogène du deuxième degré par rapport aux y_i^j.

b) Mineurs relatifs aux deuxième et troisième lignes de Δ: Δ_i^u est un polynôme des fonctions $X(p_i, y_i^j)$, $[A^{\lambda\mu}]$ et de $\sin \lambda_u$, $\cos \lambda_u$, homogène du premier degré par rapport aux fonctions y_i^j.

$\dfrac{\Delta_i^u}{\lambda_1}$ est une fonction continue et bornée de λ_1, λ_2, λ_3 dans V.

Étudions la quantité $\dfrac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \dfrac{\Delta_i^u}{\Delta}$. On a

$$\frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \frac{\Delta_i^u}{\Delta} = \frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \frac{\partial \lambda_u}{\partial x^i} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \mu_h}{\partial \lambda_u} \frac{\partial \lambda_u}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mu_j}{\partial x^i} = \frac{1}{\lambda_1} (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0) \frac{D_i^j}{D}.$$

Nous voyons que la quantité $\lambda_1 \dfrac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \dfrac{\Delta_i^u}{\Delta}$ est une fraction rationnelle à dénominateur non nul (dans le domaine W) des fonctions $X(p_i)$, $\tilde{X}\left(\dfrac{y_i^j}{\lambda_1}\right)$, $[A^{\lambda\mu}]$ et des trois p_i^0. C'est donc une fonction continue et bornée de λ_1, λ_2, λ_3 dans le domaine W; la valeur de cette fonction pour $\lambda_1 = 0$ se calcule de la manière suivante. On a d'une part

$$\frac{\partial x^h}{\partial \lambda_u} = \frac{\partial x^h}{\partial p_j^0} \frac{\partial p_j^0}{\partial \lambda_u} = y_j^h \frac{\partial p_j^0}{\partial \lambda_u}, \text{ d'où } \lim_{\lambda_1=0} \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial x^h}{\partial \lambda_u} = -\delta_j^h \frac{\partial p_j^0}{\partial \lambda_u} = -\frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u}.$$

On sait d'autre part que

$$\frac{\Delta_i^u}{\Delta} = \frac{\partial \lambda_u}{\partial x^i}, \text{ d'où } \lim_{\lambda_1=0} \lambda_1 \frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \frac{\Delta_i^u}{\Delta} = -\lim_{\lambda_1=0} \frac{\partial x^h}{\partial \lambda_u} \frac{\partial \lambda_u}{\partial x^i} = -\delta_i^h + \lim_{\lambda_1=0} \frac{\partial x^h}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^i},$$

d'où finalement

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1 \frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \frac{\Delta_i^u}{\Delta} = -\delta_i^h + p_i^0 p_h^0.$$

Remarque. Par un raisonnement analogue à celui des remarques précédentes, on voit que la quantité $\lambda_1 (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0) D_i^j$ est un polynôme homogène du premier degré par rapport aux y_i^j, des fonctions $X(p_i, y_i^j)$, $[A^{\lambda\mu}]$, p_i^0.

13. Dérivées premières.

Les dérivées partielles premières d'une fonction quelconque φ satisfont, d'après l'identité (10.1) et les résultats du paragraphe précédent, à la relation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \frac{p_i^0 D_i^j}{D} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_h^0} (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0) \frac{D_i^j}{D}.$$

Appliquons cette formule aux fonctions p_h^0 et X:

$$(13.1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial p_h^0}{\partial x^i} &= \frac{1}{\lambda_1} (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0) \frac{D_i^j}{D}, \\ \frac{\partial p_h}{\partial x^i} &= R_h \frac{p_j^0 D_i^j}{D} + \delta_k^h \frac{1}{\lambda_1} (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0) \frac{D_i^j}{D}, \\ \frac{\partial y_h^k}{\partial x^i} &= T_h^k \frac{p_j^0 D_i^j}{E} + \frac{1}{\lambda_1} y_{hl}^k (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0) \frac{D_i^j}{D}, \\ \frac{\partial z_h^k}{\partial x^i} &= R_h^k p_j^0 \frac{D_i^j}{D} + \frac{1}{\lambda_1} z_{hl}^k (\delta_j^l - p_j^0 p_l^0) \frac{D_i^j}{D}. \end{aligned}$$

Ces équations et les équations analogues vérifiées par

$$\frac{\partial y_{hl}^k}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial z_{hl}^k}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \omega_s^r}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial \omega_{si}^r}{\partial x^i}$$

montrent que les quantités

$$\lambda_1 \frac{\partial p_h^0}{\partial x^i}, \ \lambda_1 \frac{\partial p_h}{\partial x^i}, \ \lambda_1 \frac{\partial z_h^k}{\partial x^i}, \ \lambda_1 \frac{\partial z_{hl}^k}{\partial x^i} \ \text{ et } \ \frac{\partial y_h^k}{\partial x^i}, \ \frac{\partial y_{hl}^k}{\partial x^i}, \ \frac{\partial \omega_s^r}{\partial x^i}, \ \frac{\partial \omega_{si}^r}{\partial x^i}$$

sont des fractions rationnelles de dénominateur D des fonctions

$$X, \ \tilde{X}, \ \Omega, \ \tilde{\Omega}, \ [A^{\lambda\mu}], \ \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right], \ \left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right], \ p_i^0.$$

Ce sont des fonctions continues et bornées dans W des trois variables λ_1, λ_2, λ_3.

14. Dérivées des fonctions σ_s^r.

Nous utiliserons dans l'étude des dérivées partielles par rapport aux x^i des fonctions σ_s^r, les dérivées partielles des polynômes considérés dans les remarques du § 12: $\lambda_1^2 D$, $\lambda_1^2 p_j^0 D_i^j$ et $\lambda_1 (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0) D_i^j$ sont des polynômes des fonctions $X(p_i, y_i^j)$, $[A^{\lambda\mu}]$, p_i^0, *homogènes de degré respectivement 2, 2 et 1 par rapport aux* y^j_i. Les résultats précédents et l'identité (10.1) montrent alors que les quantités

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x^i}(\lambda_1^2 D),\ \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x^i}(\lambda_1^2 p_j^0 D_i^j),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\lambda_1(\delta_j^h - p_j^0 p_h^0) D_i^j)$$

sont des fractions rationelles de dénominateur D des fonctions

$$X(p_i, y^j_i, z^j_i),\ \tilde{X}\left(\frac{y^j_i}{\lambda_1}, \frac{y^j_{ih}}{\lambda_1}\right),\ [A^{\lambda\mu}],\ \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right],\ p_i^0.$$

Ce sont donc des fonctions continues et bornées de λ_1, λ_2, λ_3 dans W.

Dans l'étude des dérivées partielles secondes de la fonction σ par rapport aux x^i nous utiliserons les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i \partial x^j}$. Remarquons tout d'abord que les dérivées partielles premières de $\lambda_1^2 D$ peuvent s'écrire

$$\frac{\partial(\lambda_1^2 D)}{\partial x^i} = \frac{P_1}{\lambda_1^2 D},$$

où P_1 est un polynôme des fonctions

$$X(p_i, y^j_i, z^j_i, y^j_{ih}),\ [A^{\lambda\mu}],\ \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right],\ p_i^0$$

dont les termes sont du troisième degré au moins par rapport à l'ensemble des fonctions y^j_i, y^j_{ih}. En effet, les dérivées partielles $\frac{\partial p_h}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial p_h^0}{\partial x^i}$ peuvent se mettre (en multipliant dénominateur et numérateur des deuxièmes membres des équations par λ_1^2) sous forme de fractions rationnelles de dénominateur $\lambda_1^2 D$ et dont les numérateurs sont des polynômes des fonctions

$$X(p_i, y^j_i, z^j_i),\ [A^{\lambda\mu}],\ \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right],\ p_i^0$$

dont les termes sont du premier degré au moins par rapport aux y^j_i, et les dérivées partielles $\frac{\partial y^k_h}{\partial x^i}$ peuvent se mettre sous forme de fractions rationnelles de dénominateur $\lambda_1^2 D$ et dont les numérateurs sont des polynômes des fonctions

$$X(p_i, y^j_i, z^j_i, y^j_{hk}),\ [A^{\lambda\mu}],\ \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right],\ p_i^0$$

homogènes du deuxième degré par rapport à l'ensemble des fonctions y_i^0, y_{hk}^j. Le polynôme $\lambda_1^2 D$ étant homogène du deuxième degré par rapport aux y_i^j, ses dérivées partielles premières ont bien la forme indiquée.

Considérons alors les dérivées partielles secondes:

$$\frac{\partial^2 (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{\lambda_1^2 D} \frac{\partial p_1}{\partial x^i} = \frac{P_1}{(\lambda_1^2 D)^2} \frac{\partial (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i}.$$

Il résulte de la forme du polynôme P_1 et des résultats du § 12 que:

1) $\dfrac{P_1}{\lambda_1^3}$ est un polynôme des fonctions

$$X(p_i, y_i^j, z_i^j, y_{hk}^j),\ X\left(\frac{y_i^j}{\lambda_1}, -\frac{y_{ih}^j}{\lambda_1}\right), [A^{\lambda\mu}], \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right], p_i^0.$$

2) $\dfrac{1}{\lambda_1^2}\dfrac{\partial P_1}{\partial x^i}$ est une fraction rationnelle de dénominateur D des fonctions

$$X(p_i, y_i^j, z_i^j, y_{hk}^j, z_{ih}^j, y_{ihk}^j),\ \tilde{X}\left(\frac{y_i^j}{\lambda_1}, \frac{y_{ih}^j}{\lambda_1}, \frac{y_{ihk}^j}{\lambda_1}\right), [A^{\lambda\mu}], \ldots, \left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right], p_i^0.$$

Les dérivées $\dfrac{\partial^2 (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i \partial x^j}$ sont donc des fractions rationnelles de dénominateur D^3 des fonctions que nous venons d'énumérer.

15. Étude de σ et de ses dérivées.

1°) La fonction auxiliaire σ a été définie par $\sigma = \left|\dfrac{\sin \lambda_2}{\Delta}\right|^{\frac{1}{2}}$. Nous avons donc, d'après l'égalité (12.2),

$$\sigma = \frac{1}{|\lambda_1^2 D|^{\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que, dans le domaine W, la fonction $\sigma \lambda_1 = \dfrac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}}$ est la racine carrée d'une fraction rationnelle bornée non nulle des fonctions X, $\tilde{X}$, $[A^{\lambda\mu}]$, p_i^0; c'est une fonction continue et bornée des trois variables λ_i dont la valeur pour $\lambda_1 = D$ est

$$\lim_{\lambda_1=0} \sigma \lambda_1 = 1. \tag{15.1}$$

2°) Les dérivées partielles premières de σ par rapport aux x^i sont

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{\lambda_1^2 D} \frac{\partial (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i}.$$

On en conclut que, dans le domaine W, la fonction

$$\lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = -\frac{\sigma \lambda_1}{2D} \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i}$$

est le produit de la racine carrée d'une fraction rationnelle bornée non nulle par une fraction rationnelle bornée des fonctions X, $\tilde{X}$, $[A^{\lambda\mu}]$, $\left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right]$, p_i^0. C'est une fonction continue et bornée de λ_1, λ_2, λ_3 dont nous allons calculer la valeur pour $\lambda_1 = 0$.

Les identités $\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} = T^i \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial p_h^0} = \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} y_h^i$ montrent que les fonctions $\lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1}$ et $\lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial p_h^0}$ sont continues et bornées dans W. Nous pouvons donc, d'une part dériver l'égalité (15.1) par rapport à p_h^0, nous trouvons

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial p_h^0} = 0,$$

d'autre part écrire

$$\frac{\partial (\sigma \lambda_1^2)}{\partial \lambda_1} = 2 \lambda_1 \sigma + \lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1}$$

et

$$\lim_{\lambda_1=0} \frac{\partial (\sigma \lambda_1^2)}{\partial \lambda_1} = \lim_{\lambda_1=0} \lambda_1 \sigma,$$

d'où

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} = - \lim_{\lambda_1=0} \lambda_1 \sigma = -1.$$

Pour calculer la valeur pour $\lambda_1 = 0$ de la fonction $\lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$ nous utiliserons l'identité

$$\lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = \lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} \frac{\Delta_1^i}{\Delta} + \lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial p_h^0} \lambda_1 \frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \frac{\Delta_u^i}{\Delta},$$

d'où, d'après les résultats précédents (§ 12),

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = p_i^0. \tag{15.2}$$

3°) Les dérivées partielles secondes de σ par rapport aux x^i sont

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{\sigma}{2} \frac{1}{\lambda_1^2 D} \frac{\partial^2 (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{2 \lambda_1^2 D} \frac{\partial \sigma}{\partial x^j} \frac{\partial (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i} + \frac{\sigma}{2 (\lambda_1^2 D)^2} \frac{\partial (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i} \frac{\partial (\lambda_1^2 D)}{\partial x^j}.$$

a) On voit aisément que dans le domaine W la fonction $\lambda_1^3 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j}$ est le produit de la racine carrée d'une fraction rationnelle bornée non nulle par une fraction rationnelle bornée (dénominateur D^4) des fonctions

$$X, \tilde{X}, [A^{\lambda\mu}], \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right], \left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right], p_i^0.$$

C'est une fonction continue et bornée des trois variables λ_i. Nous allons calculer la valeur pour $\lambda_1 = 0$ de la fonction $\lambda_1^3 \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^{i^2}}$ dont nous aurons seule besoin: les dérivées secondes de σ n'interviennent en effet dans les équations fondamentales que par la quantité $[A^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j}$ et l'on a

$$\lim_{\lambda_1=0} [A^{ij}] \lambda_1^3 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} = \lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^3 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^{i^2}}.$$

Nous calculerons cette limite comme la limite (15.2). Nous trouvons d'une part, en dérivant l'égalité (15.2),

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial p_h^0} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\right) = \delta_h^i,$$

d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\lambda_1^3 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\right) = 3 \lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} + \lambda_1^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\right),$$

d'où

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\right) = \lim_{\lambda_1=0} \left(-2 \lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\right) = -p_i^0.$$

Nous trouvons donc, en utilisant l'identité

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_1^3 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^{i^2}} = \lambda_1^3 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\right) \frac{\Delta_i^1}{\Delta} + \lambda_1^3 \frac{\partial}{\partial p_h^0} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}\right) \frac{\partial p_h^0}{\partial \lambda_u} \frac{\Delta_i^u}{\Delta}$$

et les résultats des paragraphes précédents, que

$$\lim_{\lambda_1=0} \sum_{i=1}^{3} \lambda_1^3 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^{i^2}} = 0.$$

Montrons que la fonction $\lambda_1^2 [A^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j}$ est une fonction continue et bornée des trois variables λ_i, au voisinage de $\lambda_1 = 0$ (ce qui nous permettra de montrer que la quantité sous le signe $\iiint$ (6.1) est bornée dans W).

Nous avons vu que $\lambda_1^3 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} [A^{ij}]$ est le produit de la racine carrée d'une fraction rationnelle bornée non nulle $\left(\frac{1}{D}\right)$ par une fraction rationnelle de dénominateur D^4, dont le numérateur, polynôme des fonctions

$$X,\ \tilde{X},\ [A^{\lambda\mu}],\ \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right],\ \left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right],\ p_i^0,$$

s'annule pour les valeurs de ces fonctions correspondant à $\lambda_1 = 0$. Nous avons

$$\lambda_1^3 [A^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{P\left(X, \tilde{X}, [A^{\lambda\mu}], \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right], \left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right], p_i^0\right)}{D^4} \cdot \frac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}}$$

avec

$$P_0 = P\left(X_0, \tilde{X}_0, \pm \delta_\lambda^\mu, \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right]_0, \left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right]_0, p_i^0\right) = 0.$$

Nous écrirons alors:

(15.3) $$\lambda_1^3 [A^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{P - P_0}{D^4} \frac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}}.$$

En appliquant la formule de Taylor (pour P) on voit que la quantité (15.3) est un polynôme des fonctions $X - X_0$, $\tilde{X} - \tilde{X}_0$, $A^{\lambda\mu} \pm \delta_\lambda^\mu \ldots$, dont les termes sont du premier degré au moins par rapport á l'ensemble de ces fonctions.

Pour montrer que $\lambda_1^2 [A^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j}$ est une fonction continue et bornée de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans le domaine W, il suffit donc de montrer qu'il en est ainsi des fonctions

$$\frac{X - X_0}{\lambda_1}, \frac{\tilde{X} - \tilde{X}_0}{\lambda_1}, \frac{[A^{\lambda\mu}] - \delta_\mu^\lambda}{\lambda_1} \ldots, \frac{\left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right] - \left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right]_0}{\lambda_1}.$$

Les fonctions X vérifient

$$X = \int_0^{\lambda_1} E(X)\, d\lambda_1 + X_0,$$

$\frac{X - X_0}{\lambda_1}$ est donc une fonction continue et bornée des λ_i dans V:

(15.4) $$|X - X_0| \leq \lambda_1 M.$$

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ possédant dans (D) des dérivées partielles continues et bornées jusqu'au quatrième ordre par rapport aux x^α, les x^α vérifiant les inégalités (29.2), nous voyons que

(15.5) $$[A^{\lambda\mu}] \pm \delta_\lambda^\mu \leq \lambda_1 A, \ldots, \left[\frac{\partial^3 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}\right] - \left[\frac{\partial^3 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}\right]_0 \leq \lambda_1 A.$$

Considérons $\frac{X - X_0}{\lambda_1}$. Les fonctions X correspondantes sont y_i^j, y_{ih}^j, y_{ihk}^j qui verifient l'équation

$$X = \int_0^{\lambda_1} E(X)\, d\lambda_1,$$

$E(X)$ étant un polynôme des fonctions X, des $A^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées partielles jusqu'au troisième ordre

$$\left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right], \ldots, \frac{\partial^3 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}.$$

Nous avons

$$\tilde{X} - \tilde{X}_0 = \frac{\int_0^{\lambda_1} (E(X) - E(X)_0)\, d\lambda_1}{\lambda_1^2}.$$

La formule de Taylor appliquée au polynôme E montre que $E(X) - E(X)_0$ est un polynôme des fonctions

$$X_0,\ \delta_\lambda^\mu,\ \ldots \left[\frac{\partial^3 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}\right]_0$$

et des fonctions

$$X - X_0,\ [A^{\lambda\mu}] - \delta_\lambda^\mu,\ \ldots,\ \left(\left[\frac{\partial^3 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}\right] - \left[\frac{\partial^3 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}\right]\right)_0$$

dont les termes sont du premier degré au moins par rapport à l'ensemble de ces dernières.

Toutes ces fonctions étant bornées dans V et satisfaisant à (15.4) et (15.5) nous voyons aisément que $\dfrac{\tilde{X} - \tilde{X}_0}{\lambda_1}$ est continue et bornée dans V.

La fonction $\lambda_1^2 [A^{ij}] \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j}$ est donc continue et bornée dans W.

16. Dérivées des ω_s^r.

Nous allons montrer que les dérivées partielles premières et secondes des ω_s^r par rapport aux variables x^i sont, comme σ et ses dérivées partielles, des fonctions algébriques simples des fonctions X et Ω, $\tilde{X}$ et $\tilde{\Omega}$, et des valeurs sur le conoïde Σ_0 des coefficients des équations données et de leurs dérivées partielles.

1°) Les dérivées partielles premières des ω_s^r par rapport aux x^i s'écrivent en fonction de leurs dérivées partielles par rapport aux λ_i

$$\frac{\partial \omega_s^r}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_s^r}{\partial \lambda_j} \frac{\Delta_i^j}{\Delta},$$

donc

$$\frac{\partial \omega_s^r}{\partial x^i} = (Q_t^r \omega_s^t + Q\, \omega_s^r) \frac{P_i^0 D_i^j}{D} + \frac{\omega_{sh}^r}{\lambda_1} \frac{(\delta_j^h - P_j^0 P_h^0) D_i^j}{D}. \tag{16.1}$$

Les dérivées partielles premières des ω_s^r par rapport aux x^i sont donc des fractions rationelles de dénominateur D des fonctions

$$X(P_i, y_i^j),\ \Omega(\omega_s^r),\ \tilde{X}\left(\frac{y_i^j}{\lambda_1}\right),\ \tilde{\Omega}\left(\frac{\omega_{sh}^r}{\lambda_1}\right),\ [A^{\lambda\mu}],\ \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right],\ [B^{s\lambda}] \text{ et } P_i^0.$$

Ce sont des fonctions continues et bornées dans W.

2°) Nous calculerons les dérivées partielles secondes de ω_s^r par rapport aux x^i en écrivant $\frac{\partial \omega_s^r}{\partial x^i}$ sous la forme $\frac{\partial \omega_s^r}{\partial x^i} = \frac{P_2}{\lambda_1^2 D}$.

L'égalité (16.1) et les remarques du § 12 montrent que P_2 est un polynôme homogène du deuxième degré par rapport á l'ensemble des fonctions y_i^j, ω_s^r. Nous avons, en dérivant l'égalité précédente,

$$\frac{\partial^2 \omega_s^r}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{\lambda_1^2 D} \frac{\partial P_2}{\partial x^j} - \frac{P_2}{(\lambda_1^2 D)^2} \frac{\partial (\lambda_1^2 D)}{\partial x^i}.$$

Ces fonctions $\lambda_1 \frac{\partial^2 \omega_s^r}{\partial x^i \partial x^j}$ sont des fractions rationnelles de dénominateur D^3 des fonctions

$$X,\ \Omega,\ \tilde{X},\ \tilde{\Omega},\ [A^{\lambda\mu}],\ \left[\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right],\ \left[\frac{\partial^2 A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right]\ [B_r^{s\lambda}],\ \left[\frac{\partial B_r^{s\lambda}}{\partial x^\alpha}\right].$$

(Les résultats du § 12 permettent en effet de montrer que $\frac{P_2}{\lambda_1^2}$ et $\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial P_2}{\partial x^j}$ sont respectivement un polynôme et une fraction rationnelle de dénominateur D de ces fonctions.) Ce sont donc des fonctions continues et bornées dans W.

C. Formules de Kirchhoff.

17. Nous pouvons maintenant étudier de façon plus précise les équations fondamentales (6.1) et chercher leur limite quand η tend vers zéro.

Ces équations s'écrivent:

$$(17.1)\quad \iiint_V ([u_r]\, L_s^r + \sigma_s^r\, [f_r])\, d x^1\, d x^2\, d x^3 + \iint_{S_0} E_s^i \cos(n, x^i)\, d S = \iint_{S_\eta} E_s^i \cos(n, x^i)\, d S.$$

Relations intégrales en paramètre λ_i. Nous avons vu que le déterminant fonctionnel $D = \frac{D(x^i)}{D(\lambda_j)}$ est égal à -1 pour $\lambda_1 = 0$. La correspondance entre les paramètres x^i et λ_j est donc biunivoque dans un voisinage du sommet M_0 de Σ_0. On en déduit que la correspondance entre les paramètres x^i et λ_j est biunivoque dans un domaine $(\Lambda)_\eta$ défini par

$$\eta \le \lambda_1 \le \varepsilon_3, \qquad 0 \le \lambda_2 \le \pi, \qquad 0 \le \lambda_3 \le 2\pi,$$

où ε_3 est un nombre donné et où η est arbitrairement petit.

Au domaine $(\Lambda)_\eta$ des variations des paramètres λ_i correspond, biunivoquement[1], un domaine W_η de Σ_0. Nous supposerons alors que la coordonnée x_0^4 du sommet M_0 de Σ_0 est suffisamment petite pour que le domaine $V_\eta \subset V$, précédemment considéré,

[1] Puisque la correspondance $(x^4, \lambda_2, \lambda_3)$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est biunivoque.

soit intérieur aux domaines W et W_η. Nous pouvons, dans ces conditions, calculer les intégrales au moyen des paramètres λ_i, les intégrales que nous allons obtenir étant convergentes.

18. Calcul des éléments d'aire et de volume.

Nous avons tout d'abord

$$dV = dx^1\, dx^2\, dx^3 = d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3.$$

Calculons maintenant dS et $\cos(n, x^i)$.

Les surfaces S_0 et S_η sont des surfaces $x^4 = c^{te}$ tracés sur le conoïde caractéristique Σ_0. Elles vérifient donc la relation différentielle

$$p_i\, dx^i = 0,$$

d'où on déduit

$$\cos(n, x^i) = \frac{p_i}{(\Sigma p_i^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour calculer dS nous écrirons une deuxième expression de l'élément de volume dV en faisant intervenir les surfaces $S\,(x^4 = c^{te})$ et les bicaractéristiques (où λ_1 varie seul)

$$dV = \cos\nu\, |T|^{\frac{1}{2}}\, d\lambda_1\, dS,$$

où $|T|^{\frac{1}{2}}\, d\lambda_1$ désigne l'élément de longueur de la bicaractéristique et ν l'angle de la bicaractéristique avec la normale à la surface S au point considéré.

Un système de paramètres directeurs de la tangente à la bicaractéristique étant

$$T^h = [A^{hj}]\, p_j + [A^{h4}],$$

nous avons

$$\cos\nu\, |T|^{\frac{1}{2}} = \{[A^{hj}]\, p_j + [A^{h4}]\} \cos(n, x^h),$$

d'où, en comparant les deux expressions de dV,

$$\cos(n, x^i)\, dS = \frac{\Delta\, p_i\, d\lambda_2\, d\lambda_3}{[A^{hj}]\, p_j\, p_h + [A^{h4}]\, p_h} = \frac{-\Delta\, p_i}{[A^{44}] + [A^{j4}]\, p_j}\, d\lambda_2\, d\lambda_3.$$

19. Limite quand $\eta \to 0$ des relations intégrales.

Les relations intégrales (17.1) s'écrivent en paramètres λ_i

$$(19.1)\qquad \iiint\limits_{V_\eta} ([u_r]\, L_s^r + \sigma_s^r\, [f_r])\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 - \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \frac{E_s^i\, \Delta\, p_i}{[A^{44}] + [A^{i4}]\, p_i}\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \Bigg|_{x^4=0} =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \left\{\frac{E_s^i\, \Delta\, p_i}{[A^{44}] + [A^{i4}]\, p_i}\right\}_{x^4 = x_0^4 - \eta} d\lambda_2\, d\lambda_3.$$

Les résultats précédents montrent que les quantités à intégrer sont des fonctions continues et bornées des variables λ_i. Elles s'écrivent en effet:

$$\lambda_1^2 \{[u_r] L_s^r + \sigma_s^r [f_r]\} \frac{\Delta}{\lambda_1^2} \quad \text{et} \quad \lambda_1^2 E_s^i \frac{\Delta}{\lambda_1^2} \frac{p_i}{T^4}.$$

E_s^i et L_s^r étant donnés par les égalités (5.2), les quantités considérées sont continues et bornées dans W si les fonctions u_r et $\frac{\partial u_r}{\partial x^\alpha}$ sont continues et bornées dans D.

Les deux membres des équations (19.1) tendent donc vers une limite finie quand η tend vers zéro. L'intégrale triple tend vers une limite finie, égale à la valeur de cette intégrale prise sur la portion V_0 d'hypersurface du conoïde Σ_0 comprise entre le sommet M_0 et la surface initiale $x^4 = 0$ (puisque cette intégrale est convergente). Calculons la limite de l'intégrale double du deuxième membre. Les résultats du § 15 montrent que tous les termes de la quantité $\lambda_1^2 E_s^i$ tendent uniformément vers zéro avec λ_1, à l'exception du terme

$$-\lambda_1^2 [u_r] [A^{ij}] \omega_s^r \frac{\partial \sigma}{\partial x_j},$$

dont la limite pour $\lambda_1 = 0$ est

$$[u_r (x_0^\alpha)] \delta_i^j \delta_s^r p_j^0 = u_s (x_0^\alpha) p_i^0.$$

D'où:

$$\lim_{\lambda_1 = 0} \frac{E_s^i \Delta p_i}{[A^{44}] + [A^{i4}] p_i} = - u_s (x_0^\alpha) \sin \lambda_2.$$

Le deuxième membre des équations (19.1) tend donc, quand η tend vers zéro, vers la limite

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s (x_0^\alpha) \sin \lambda_2 \, d\lambda_2 \, d\lambda_3 = 4\pi u_s (x_0^\alpha).$$

20. Formules de Kirchhoff.

Nous aboutissons ainsi aux formules suivantes:

$$(20.1) \qquad 4\pi u_s (x_0^\alpha) = \iiint_{V_0} ([u_r] L_s^r + \sigma_s^r [f_r]) \, \Delta \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \, d\lambda_3 + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{E_s^i \Delta p_i}{T^4} \right\}_{x^4 = 0} d\lambda_2 \, d\lambda_3.$$

Pour calculer le deuxième membre de ces formules de Kirchhoff il sera commode de prendre pour paramètres, sur l'hypersurface du conoïde Σ_0, les trois variables indépendantes x^4, λ_2, λ_3.

Les équations (20.1) s'écrivent alors, les limites des intervalles d'intégration étant évidentes:

$$(20.2)\qquad 4\pi u_s(x_j) = \int_{x_0^4}^{0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}([u_r]L_s^r + \sigma_s^r[f_r])\frac{\varDelta}{T^4}dx^4\,d\lambda_2\,d\lambda_3 + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{E_s^i\,\varDelta p_i}{T^4}\right\}_{x^4=0} d\lambda_2\,d\lambda_3.$$

La quantité sous le signe d'intégrale triple s'exprime au moyen des fonctions $[U]$ et des fonctions $X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et $\Omega(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, solutions des équations intégrales (1.2) et (8.1).

Nous obtiendrons l'expression des X et Ω en fonction des nouvelles variables $x^4, \lambda_2, \lambda_3$ en remplaçant λ_1 par sa valeur définie par l'équation (2.2), fonction des $x^4, \lambda_2, \lambda_3$.

Remarquons que ces fonctions satisfont aux équations intégrales

$$X(x^4, \lambda_2, \lambda_3) = \int_{x_0^4}^{x^4}\frac{E(X)}{T^4}dx^4 + X_0(x_0^4, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\Omega(x^4, \lambda_2, \lambda_3) = \int_{x_0^4}^{x^4}\frac{F(X, \Omega)}{T^4}dx^4 + \Omega_0(x_0^4, \lambda_2, \lambda_3).$$

La quantité sous le signe d'intégrale double s'exprime au moyen des valeurs pour $x^4 = 0$ des fonctions $[U]$ et $\left[\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\right]$ (données de Cauchy) et des valeurs pour $x^4 = 0$ des fonctions X et Ω.

D. Récapitulation des résultats.

21. Nous considérons un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires, à quatre variables, du type

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_s^{r\lambda}\frac{\partial u_s}{\partial x^\lambda} + f_r = 0. \qquad (E)$$

Hypothèses.

1°) Au point M_0 de coordonnées x_0^α les coefficients $A^{\lambda\mu}$ prennent les valeurs suivantes

$$A_0^{44} = 1 \qquad A_0^{i4} = 0 \qquad A_0^{ij} = -\delta_i^j.$$

2°) Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et $B_s^{r\lambda}$ ont des dérivées partielles par rapport aux x^α, jusqu'aux ordres respectivement quatre et deux, continues et bornées dans un domaine D: $|x^i - \bar{x}^i| \le d$, $|x^4| \le \varepsilon$. Les coefficients f_r sont continus et bornés.

3°) Les dérivées partielles d'ordres respectivement quatre et deux des $A^{\lambda\mu}$ et $B_s^{r\lambda}$ satisfont dans D à des conditions de Lipschitz.

Conclusion. Toute solution continue, bornée et à dérivées partielles premières continues et bornées dans D des équations (E) vérifie les relations intégrales (20.2) si les coordonnées x_0^α de M_0 satisfont à des inégalités de la forme

$$|x_0^4| \leq \varepsilon_0, \quad |x_0^i - \bar{x}^i| \leq d,$$

définissant un domaine $D_0 \subset D$.

II. Transformation variable.

22. Nous allons chercher à établir des formules analogues à (20.2), vérifiées par les solutions des équations données (E) en tout point d'un domaine D_0 de l'espace-temps, où les valeurs des coefficients seront astreintes seulement à vérifier des conditions d'hyperbolicité normale et de différentiabilité.

Considérons donc le système d'équations (E)

$$A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_s^{r\lambda} \frac{\partial u_r}{\partial x^\lambda} + f_s = 0.$$

Nous supposons que dans le domaine D d'espace-temps, defini par

$$|x^4| \leq \varepsilon \qquad |x^i - \bar{x}^i| \leq d,$$

où les trois $\bar{x}^i$ sont des nombres donnés, les équations (E) sont du type hyperbolique normal, c'est-à-dire que

$$A^{44} > 0, \text{ la forme quadratique } A^{ij} X_i X_j \text{ définie} < 0.$$

En chaque point $M_0(x_j)$ du domaine D on peut associer aux valeurs $A_0^{\lambda\mu} = A^{\lambda\mu}(x_0^\alpha)$ des coefficients A un système de nombres réels $a_0^{\alpha\beta}$, fonctions algébriques, définies et indéfiniment dérivables des $A_0^{\lambda\mu}$, satisfaisant à l'identité

$$A_0^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu = (a_0^{4\alpha} X_\alpha)^2 - (a_0^{i\alpha} X_\alpha)^2.$$

Nous désignerons par $a_{\alpha\beta}^0$ le quotient par le déterminant a_0 d'éléments $a_0^{\alpha\beta}$ du mineur relatif à l'élément $a_0^{\alpha\beta}$ de ce déterminant. Les quantités $a_{\alpha\beta}^0$ sont comme $a_0^{\alpha\beta}$ des fonctions algébriques définies et indéfiniment dérivables des $A_0^{\lambda\mu}$ dans D. (Le carré du déterminant a_0 étant égal à la valeur absolue A du déterminant d'éléments $A^{\lambda\mu}$, a_0 est différent de zéro dans D.)

Faisons le changement de variables linéaire

$$y_\alpha = a_{\alpha\beta}^0 x^\beta.$$

Les dérivées partielles des fonctions inconnues u_s sont covariantes dans un tel changement de variables, les équations (E) s'écrivent donc

$$A^{*\alpha\beta}\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}+B_s^{*r\alpha}\frac{\partial u_s}{\partial y^\alpha}+f_s=0. \tag{22.1}$$

avec

$$\begin{aligned} A^{*\alpha\beta} &= A^{\lambda\mu}\, a^0_{\alpha\lambda}\, a^0_{\beta\mu}, \\ B_s^{*r\alpha} &= B_s^{r\lambda}\, a^0_{\alpha\lambda}. \end{aligned} \tag{22.2}$$

Les coefficients des équations (22.1) prennent au point M_0 les valeurs (1.4). En effet:

$$A_0^{*\alpha\beta}=A_0^{\lambda\mu}\, a^0_{\alpha\lambda}\, a^0_{\beta\mu}=-a_0^{\gamma\lambda}\, a_0^{\gamma\mu}\, a^0_{\alpha\lambda}\, a^0_{\beta\mu}+2\, a_0^{4\lambda}\, a_0^{4\mu}\, a^0_{\alpha\lambda}\, a^0_{\beta\mu}=-\delta_\alpha^\beta+2\,\delta_\alpha^4\,\delta_\beta^4,$$

on a donc bien

$$A^{*44}=1, \quad A^{*i4}=0, \quad A^{*ij}=-\delta_i^j.$$

Nous pouvons appliquer aux équations (E), écrites sous la forme (22.1), dans les variables y^α et pour le point M_0 correspondant, les résultats de la partie I. Remarquons tout d'abord que les paramètres d'intégration qui s'introduisent seront y^4, λ_2, λ_3 mais que, la surface portant les données de Cauchy étant toujours $x^4 \equiv a_0^{\alpha 4}\, y^4=0$, es domaines d'intégration seront déterminés par M_0 et l'intersection de cette surface avec le conoïde caractéristique de sommet M_0. Nous voyons qu'il sera commode, pour calculer ces intégrales, de choisir les variables y^α relatives à un point M_0 quelconque de telle façon que la section d'espace initiale, $x^4=0$, soit une hypersurface $y^4=0$. Il suffira pour cela de choisir les coefficients $a_0^{\alpha\beta}$ (ce qui est loisible) tels qu'on ait $a_0^{i4}=0$. Nous aurons alors

$$a^0_{4i}=0, \quad a^0_{44}=\frac{1}{a_0^{44}}=(A_0^{44})^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y_4=a^0_{44}\, x^4,$$

où a^0_{44} est un nombre positif borné.

23. Application des résultats de la partie I.

L'application des résultats de la partie I montre alors l'existence d'un domaine $D_0\subset D$, défini par $|x_0^4|\leq\varepsilon$ (qui entraîne en tout point $M_0\in D_0$, $|y_0^4|\leq\eta$) tel que l'on puisse écrire en tout point M_0 de D_0 une formule de Kirchhoff dont le premier membre soit la valeur en M_0 de l'inconnue u_s, en fonction des quantités $y_0^\alpha=a^0_{\alpha\beta}\, x_0^\beta$, et dont le deuxième membre se compose d'une intégrale triple et d'une intégrale double. Les quantités à intégrer s'expriment au moyen des fonctions

$X(y^4, \lambda_2, \lambda_3, y_0^\alpha)$ représentant $(y^\alpha, p_i, y_i^j, z_i^j, \ldots, z_{kij}^h)$ et $\Omega(y^4, \lambda_2, \lambda_3)$ $(\omega_s^r, \ldots \omega_{sij}^r)$, solutions d'équation du type

$$X=\int_{y_0^4}^{y^4} E^*(X)\, d y^4+X_0, \quad \Omega=\int_{y_0^4}^{y^4} F^*(X, \Omega)\, dy^4+\Omega_0, \tag{23.1}$$

où les fonctions E^* et F^* sont les fonctions E et F du Chapitre I, mais calculées à partir des coefficients (22.2) et de leurs dérivées partielles par rapport aux y^a, et où Ω_0, X_0 désignent les valeurs pour $y^4 = y_0^4$ des fonctions Ω, X correspondantes.

Afin d'obtenir, sous une forme plus simple, des équations intégrales valables dans tout le domaine D_0, nous prendrons d'une part pour paramètre d'intégration au lieu de y^4, x^4 (ce qui est possible, a_{44}^0 étant en chaque point M_0 de D_0 un nombre positif donné), nous remplacerons d'autre part celles des fonctions inconnues auxiliaires X qui sont les valeurs (en fonctions de trois paramètres) des coordonnées y^a d'un point du conoïde Σ_0 de sommet M_0 par les valeurs des coordonnés primitives x^a d'un point de ce conoïde.

Nous remplacerons pour cela celles des équations intégrales qui ont au premier membre y^a par leurs combinaisons linéaires de coefficients $a_0^{\alpha\beta}$ (nombres bornés), c'est-à-dire par les équations de même type

$$a_0^{\alpha\beta}\, y^\beta = x^a = \int_{x_0^4}^{x^4} a_0^{\alpha\beta} \frac{T^{*\,\alpha\beta}}{T^{*\,4}}\, a_{44}^0\, d\,x^4 + x_0^a,$$

et nous exprimerons les quantités sous les signes d'intégration de toutes nos équations en fonction des x^a au lieu des y^β en remplaçant dans ces équations les y^β par les combinaisons linéaires $a_{\alpha\beta}^0\, x^a$ (les $a_{\alpha\beta}^0$ sont des nombres bornés).

Le système d'équations intégrales ainsi obtenu a, pour tout point M_0 du domaine D, des solutions en même temps que le système précédent, solutions qui sont de la forme

$$X\,(x_0^a,\ x^4,\ \lambda_2,\ \lambda_3).$$

24. Récapitulation des résultats du chapitre I.

Nous considérons un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires, du type

$$A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda\, \partial x^\mu} + B_s^{r\,\lambda} \frac{\partial\, u_r}{\partial x^\lambda} + f_s = 0. \tag{E}$$

Hypothèses.

1°) Dans le domaine D, défini par

$$|x^4| \leq \varepsilon, \qquad |x^i - \bar{x}^i| \leq d,$$

la forme quadratique $A^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal:

$$A^{44} > 0, \text{ la forme quadratique } A^{ij} X_i X_j \text{ définie} < 0.$$

2°) Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et $B_s^{r\lambda}$ ont des dérivées partielles par rapport aux x^α continues et bornées, jusqu'aux ordres respectivement quatre et deux dans le domaine D.

3°) Les dérivées partielles d'ordres respectivement quatre et deux des $A^{\lambda\mu}$ et $B_s^{r\lambda}$ satisfont, dans D, à des conditions de Lipschitz.

Conclusion. Toute solution des équations (E), possédant dans D des dérivées partielles premières par rapport aux x^α continues et bornées, vérifie, si x_0^α sont les coordonnées d'un point M_0 d'un domaine D_0 défini par

$$|x_0^4| \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon, \qquad |x_0^i - \bar{x}^i| \leq d_0 \leq d,$$

des *formules de Kirchhoff* dont les premiers membres sont les valeurs au point M_0 des fonctions inconnues u_s et dont les deuxièmes membres se composent d'une intégrale triple (paramètres d'intégration x^4, λ_2, λ_3) et d'une intégrale double (paramètres d'intégration λ_2, λ_3). Les quantités à intégrer s'expriment au moyen de fonctions $X(x_0^\alpha, x^4, \lambda_2, \lambda_3)$ et $\Omega(x_0^\alpha, x^4, \lambda_2, \lambda_3)$, elles-mêmes solutions d'équations intégrales données (23.1) et des fonctions inconnues $[u_s]$; la quantité sous le signe d'intégrale double, qui est prise pour la valeur zéro du paramètre x^4, contient, outre les fonctions précédentes, les dérivées partielles premières des fonctions inconnues $\left[\frac{\partial u_s}{\partial x^\alpha}\right]$ (valeur sur Σ_0 des données de Cauchy). Nous obtenons ainsi un système d'équations intégrales vérifié dans D_0 par les solutions des équations (E). Nous écrivons ce système sous la forme réduite suivante:

$$X = \int_{x_0^4}^{x^4} E\, dx^4 + X_0$$

$$4\pi U = \int_{x_0^4}^{0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} H\, dx^4\, d\lambda_2\, d\lambda_3 + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I\, d\lambda_2\, d\lambda_3.$$

Chapitre II.

Équations non linéaires.

1. Nous considérons un système (F) de n équations aux dérivées partielles du second ordre, à n fonctions inconnues et quatre variables, non linéaires du type suivant:

$$(F) \qquad A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_s = 0, \qquad \begin{array}{l} s = 1, 2 \ldots 4, \\ \lambda, \mu = 1, 2 \ldots n, \end{array}$$

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s sont des fonctions données des quatre variables x^α, des fonctions inconnues W_s, et de leurs dérivées premières $\dfrac{\partial W_s}{\partial x^\alpha}$.

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ sont les mêmes pour les n équations.

Nous remarquons que les calculs, faits au chapitre précédent pour les équations linéaires (E), sont valables pour les équations non linéaires (F): il suffit de considérer dans ces calculs les fonctions W_s comme fonctions des quatre variables x^α; les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s sont alors des fonctions de ces quatre variables et les calculs précédents sont valables, à condition évidemment de considérer dans toutes les formules qui font intervenir les dérivées partielles des coefficients par rapport aux x^α ces dérivations comme effectuées. On aura par exemple

$$\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_s}\,\frac{\partial W_s}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial(\partial W_s/\partial x^\beta)}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial W_s}{\partial x^\beta}\right).$$

En appliquant les résultats précédents on montrerait que, sous certaines hypothèses, les solutions des équations (F) satisfont à un système d'équations intégrales analogue à (I), mais dont les deuxièmes membres contiennent, outre les fonctions auxiliaires, les paramètres d'intégration et les fonctions inconnues, les dérivées partielles par rapport aux x^α de ces fonctions inconnues (puisque les équations I font intervenir les dérivées des coefficients $A^{\alpha\mu}$, jusqu'au quatrième ordre, par rapport aux x^α).

Nous n'appliquons donc pas directement aux équations (F) les résultats des chapitres précédents; mais nous allons montrer que, en dérivant préalablement cinq fois par rapport aux variables x^α les équations données (F), et en appliquant aux équations obtenues les résultats du chapitre I, on obtient un système d'équations intégrales dont les premiers membres sont les fonctions inconnues W_s, leurs dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'au cinquième ordre et des fonctions auxiliaires X, Ω, et dont les deuxièmes membres ne contiennent que ces fonctions et les paramètres d'intégration.

2. Dérivation des équations (F).

Nous supposons que dans un domaine D de l'espace-temps, centré au point $\overline{M}$ de coordonnées $\overline{x}^i$, 0 et défini par

$$|x^i - \overline{x}^i| \leq d, \quad |x^4| \leq \varepsilon$$

et pour des valeurs des fonctions inconnues W_s et de leurs dérivées partielles premières satisfaisant à

$$|W_s - \overline{W}_s| \leq l, \qquad \left|\frac{\partial W_s}{\partial x^\alpha} - \overline{\frac{\partial W_s}{\partial x^\alpha}}\right| \leq l$$

$\left(\text{où } \overline{W}_s \text{ et } \overline{\frac{\partial W_s}{\partial x^\alpha}}\right.$ sont les valeurs des fonctions W_s et $\left.\frac{\partial W_s}{\partial x^\alpha} \text{ au point } \bar{\mu}\right)$. Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s admettent des dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'au cinquième ordre.

Nous obtiendrons alors, en dérivant cinq fois les équations (F) par rapport aux variables x^α, un système de N équations (N est le produit par n du nombre de dérivées d'ordre cinq d'une fonction de quatre variables) vérifié, dans le domaine D, par les solutions des équations (F) qui satisfont aus inégalités (2.1) et possèdent des dérivées par rapport aux x^α jusqu'au septième ordre.

Écrivons ce système de N équations. Nous posons

$$\frac{\partial W_s}{\partial x^\alpha} = W_{s\alpha}, \qquad \frac{\partial^2 W_{s\alpha}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = W_{s\alpha\beta}$$

et nous désignons par U_S les dérivées partielles d'ordre cinq de W_s

$$\frac{\partial^5 W_s}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta \, \partial x^\gamma \, \partial x^\delta \, \partial x^\varepsilon} = W_{s\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = U_S, \qquad s = 1, 2, \ldots N.$$

Dérivons les équations données (F) par rapport à l'une quelconque des variables x^α, nous obtenons n équations de la forme

$$A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 W_{s\alpha}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \left\{\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_{r\nu}} W_{r\alpha} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_{r\nu}} \frac{\partial W_{r\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right\} \frac{\partial W_{s\mu}}{\partial x^\lambda} + \\ + \frac{\partial f_s}{\partial W_r} W_{r\alpha} + \frac{\partial f_s}{\partial W_{r\nu}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} W_{r\nu} + \frac{\partial f_s}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Recommençons quatre fois cette opération, nous obtenons le système de N équations suivant:

$$\begin{aligned} &A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 W_{s\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \left\{\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_r} W_{r\alpha} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_{r\nu}} W_{r\nu\alpha} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right\} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} W_{s\beta\gamma\delta\varepsilon\mu} + \\ &+ \left\{\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_r} W_{r\beta} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_{r\nu}} W_{r\nu\beta} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\beta}\right\} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} W_{s\alpha\gamma\delta\varepsilon\mu} \cdots + \\ (2.2) \quad &+ \left\{\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_r} W_{r\varepsilon} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_{r\nu}} W_{r\nu\varepsilon} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\varepsilon}\right\} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} W_{s\alpha\beta\gamma\delta\mu} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_{r\nu}} \frac{W_{r\nu\alpha\beta\gamma\delta}}{\partial x^\varepsilon} + \\ &+ \frac{\partial f_s}{\partial W_{r\nu}} \frac{\partial W_{r\nu\alpha\beta\gamma\delta}}{\partial x^\varepsilon} + F_S = 0. \end{aligned}$$

où F_s est une fonction des variables x_a, des fonctions inconnues W_s et de leurs dérivées partielles jusqu'au cinquième ordre inclus, mais non des dérivées d'ordre supérieur.

Les dérivées cinquièmes U_S des fonctions W_s satisfont donc, dans le domaine D et sous les conditions énoncées, à un système de N équations du type suivant:

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 U_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_S^{T\lambda}\frac{\partial U_T}{\partial x^\lambda} + F_S = 0. \tag{2.3}$$

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_S^{T\lambda}$ et F_S de ces équations sont des polynômes des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s des équations données (F) et de leurs dérivées partielles par rapport à tous les arguments jusqu'au cinquième ordre, ainsi que des fonctions inconnues W_s et de leurs dérivées partielles par rapport aux x^a jusqu'au cinquième ordre. Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ ne dépendent que des variables x^a, des fonctions inconnues W_s et de leurs dérivées partielles premières W_{sa}, les coefficients $B_S^{T\lambda}$ ne dépendent que des variables x^a, des fonctions inconnues W_s et de leurs dérivées partielles premières et secondes W_{sa} et $W_{sa\beta}$.

3. Application aux équations obtenues des résultats du chapitre I.

Nous considérons les équations (F') comme un système de N équations linéaires du second ordre, aux fonctions inconnues U_S et nous appliquons à ces équations les résultats du chapitre précédent. Nous obtiendrons un système d'équations intégrales dont les premiers membres seront des fonctions auxiliaires Ω, X et les fonctions inconnues U_S; les quantités figurant sous les intégrales des seconds membres s'exprimeront au moyen des fonctions auxiliaires X, des fonctions inconnues U_S et de la valeur pour $x^4=0$ de leurs dérivées partielles premières $\frac{\partial U_S}{\partial x^a}$, des paramètres d'intégration, ainsi que des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_S^{T\lambda}$ et F_S (considérés comme fonctions des x^a) et de leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres respectivement quatre, trois et zéro. $A^{\lambda\mu}$, $B_S^{T\lambda}$ et F_S ne faisant intervenir les dérivées partielles des fonctions W_s que jusqu'aux ordres respectivement un, deux et cinq, les deuxièmes membres des équations intégrales considérées ne contiendront, outre les fonctions auxiliaires X, Ω, les fonctions U_S et la valeur pour $x^4=0$ de leurs dérivées premières $\frac{\partial U_S}{\partial x^a}$, et les paramètres d'intégration, que les fonctions inconnues W_s et leurs dérivées partielles jusqu'au cinquième ordre inclus.

Équations intégrales vérifiées par les fonctions W_s et leurs dérivées.

Si les fonctions W_s et leurs dérivées partielles jusqu'au cinquième ordre $W_{s\alpha}$, $W_{s\alpha\beta}, \ldots, W_{s\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = U_S$ sont continues et bornées dans un domaine D d'espace-temps ($|x^i - \bar{x}^i| \leq d$, $|x^4| \leq \varepsilon$) elles vérifient dans ce domaine les relations intégrales

$$W_s(x^\alpha) = \int_0^{x^4} W_{s4}(x^i, t)\, dt + W_s(x^i, 0)$$

$$(3.1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$W_{s\alpha\beta\gamma\delta}(x^\alpha) = \int_0^{x^4} W_{s\alpha\beta\gamma\delta 4}(x^i, t)\, dt + W_{s\alpha\beta\gamma\delta}(x^i, 0).$$

En adjoignant au système d'équations intégrales, précédemment considéré, le système (3.1) nous pourrons alors obtenir un système d'équations intégrales, vérifié, sous certaines hypothèses, par les solutions des équations données (F), dont les seconds membres ne contiendront que les fonctions figurant aux premiers membres.

4. Données de Cauchy.

Nous écrirons ce système d'équations intégrales en vue de résoudre, pour les équations données (F), le problème de Cauchy: recherche des solutions W_s des équations (F) qui prennent, ainsi que leurs dérivées partielles premières, des valeurs données dans un domaine (d) de l'hypersurface initiale $x^4 = 0$:

$$W_s(x^i, 0) = \varphi_s(x^i),$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial x^4}(x^i, 0) = \psi_s(x^i),$$

où φ_s et ψ_s sont des fonctions données des trois variables x^i dans le domaine (d). Nous montrerons que, sous les hypothèses suivantes, les données de φ_s et ψ_s déterminent les valeurs dans (d) des dérivées partielles jusqu'au sixième ordre de la solution W_s des équations (E).

Hypothèses.

1°) Dans le domaine (d), défini par

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d,$$

les fonctions φ_s et ψ_s admettent des dérivées partielles continues et bornées par rapport aux trois variables x^i et satisfont aux inégalités

$$(4.1) \qquad |\varphi_s - \bar{\varphi}_s| \leq l_0 \leq l, \quad |\psi_s - \bar{\psi}_s| \leq l_0 \leq l, \quad \left|\frac{\partial \varphi_s}{\partial x^i} - \overline{\frac{\partial \varphi_s}{\partial x^i}}\right| \leq l_0 \leq l.$$

2°) Dans le domaine (d) et pous des valeurs des fonctions

$$W_s = \varphi_s, \quad \frac{\partial W_s}{\partial x^4} = \psi_s \text{ et } \frac{\partial W_s}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x^i},$$

satisfaisant aux inégalités (4.1), les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s ont des dérivées partielles continues et bornées par rapport à tous leurs arguments, jusqu'au cinquième ordre.

3°) Dans le domaine (d) et pour les fonctions φ_s et ψ_s considérées le coefficient A^{44}_s est différent de zéro.

Il résulte en effet de la première hypothèse que les valeurs dans (d) des dérivées partielles jusqu'au sixième ordre, correspondant à une dérivation au plus par rapport à x^4, des solutions W_s du problème de Cauchy posé sont égales aux dérivées partielles correspondantes des fonctions φ_s et ψ_s, et sont continues et bornées dans (d).

Les valeurs dans (d) des dérivées partielles jusqu'au sixième ordre des fonctions W_s, correspondant à plus d'une dérivation par rapport à x^4, s'expriment en fonction des précédentes, des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s des équations (F) et de leurs dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre. La troisième hypothèse montre en effet que les equations (F) permettent de calculer, étant données dans (d) les valeurs des fonctions W_s, W_{sa}, W_{sai}, la valeur dans (d) de W_{s44}, d'où l'on déduira par dérivation la valeur dans (d) des dérivées partielles correspondant à deux dérivations par rapport à x^4. Les équations dérivées des équations (F) par rapport aux variables x^a (jusqu'au quatrième ordre) permettent, de manière analogue, de calculer dans (d) les valeurs des dérivées partielles jusqu'au sixième ordre des fonctions W_s. Il résulte des trois hypothèses précédentes que toutes les fonctions obtenues sont continues et bornées dans (d).

Nous poserons

$$W_{sj}(x^i, 0) = \varphi_{sj}(x^i),$$

$$U_S(x^i, 0) = \Phi_S(x^i),$$

$$\frac{\partial U_S}{\partial x^4}(x^i, 0) = \Psi_S(x^i).$$

5. Récapitulation des resultats du chapitre II.

Nous considérons un système de n équations aux dérivées partielles du second ordre, non linéaires, du type suivant:

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_s = 0,$$

où $A^{\lambda\mu}$ et f_s sont fonctions des W_r et de leurs dérivées partielles premières, et des quatres variables x^α.

Nous avons vu que, sous les hypothèses du § 2, les solutions sept fois différentiables des équations (F), satisfaisant aux inégalités (2.1), vérifient le système de N équations

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 U_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_S^{T\lambda}\frac{\partial U_T}{\partial x^\alpha} + F_S = 0$$

où U_S désigne l'une quelconque des dérivées partielles cinquièmes de W_s et où $A^{\lambda\mu}$, $B_S^{T\lambda}$ et F_S sont des fonctions des variables x^α, des fonctions W_s et de leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres respectivement un, deux et cinq.

Nous avons montré que, sous les hypothèses du § 4, toute solution sept fois différentiable du problème de Cauchy (données de Cauchy φ_s, ψ_s) prend, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au sixième ordre, des valeurs données continues et bornées dans le domaine considéré de la surface initiale.

Nous appliquons aux équations (2.3) les résultats du chapitre I et nous adjoignons aux équations intégrales obtenues les équations intégrales (4.1).

Récapitulons les hypothèses faites et les résultats obtenus.

Hypothèses.

A) Dans le domaine D défini par $|x^i - \bar{x}^i| \leq d$, $|x^4| \leq \varepsilon$ et pour des valeurs des fonctions inconnues satisfaisant à

$$|W_s - \bar{\varphi}_s| \leq l, \qquad \left|\frac{\partial W_s}{\partial x^4} - \bar{\psi}_s\right| \leq l, \qquad \left|\frac{\partial W_s}{\partial x^i} - \frac{\overline{\partial \varphi_s}}{\partial x^i}\right| \leq l:$$

1°) Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s ont des dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'au cinquième ordre continues et bornées, les dérivées d'ordre cinq satisfaisant à des conditions de Lipschitz;

2°) La forme quadratique $A^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal: $A^{44} > 0$ et la forme $A^{ij} X_i X_j$ définie négative.

B) Dans le domaine de la surface initiale $x^4 = 0$, définie par $|x^i - \bar{x}^i| \leq d$, les données de Cauchy φ_s et ψ_s admettent des dérivées partielles continues et bornées jusqu'aux ordres respectivement six et cinq.

Conclusion. Si nous considérons une solution W_s sept fois différentiable du problème de Cauchy posé, possédant des dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'au sixième ordre, continues et bornées et satisfaisant aux inégalités (2.1) dans D, elle satisfait dans ce domaine aux équations F'. Les équations F', considérées comme équations linéaires aux fonctions inconnues U_S, satisfont aux hypothèses du chapitre I donc:

Il existe un domaine $D_0 \subset D$ dans lequel les fonctions W_s vérifient le système d'équations intégrales suivant.

Système d'équations intégrales (*I*).

Ce système est composé

1°) d'équations ayant au premier membre une fonction X des trois paramètres x^4, λ_2, λ_3 (représentatifs d'un point du conoïde caractéristique de sommet $M_0(x_0)$) et des quatre coordonnées x_0^α d'un point $M_0 \in D_0$. Ces fonctions X sont les fonctions x^i, p^i, y_i^j, z_i^j, y_{ih}^j, z_{ih}^j, y_{ihk}^j, z_{ihk}^j du chapitre I. Ces équations sont de la forme

$$X = \int_{x_0^4}^{x^4} E(X)\, dx^4 + X_0,$$

où X_0, valeur de X pour $x^4 = x_0^4$, est une fonction donnée de x_0^α, λ_2, λ_3;

2°) d'équations ayant au premier membre une fonction $\Omega(x_0^\alpha, x_0^4, \lambda_2, \lambda_3)$ (fonctions ω_s^r, ω_{si}^r, ω_{sij}^r du chapitre I), de la forme

$$\Omega = \int_{x_0^4}^{x^4} F(X, \Omega)\, dx^4 + \Omega_0,$$

où Ω_0, valeur de Ω pour $x^4 = x_0^4$, est une fonction donnée de x_0^α, λ_2, λ_3;

3°) d'équations ayant au premier membre une fonction W des quatre coordonnées x^α d'un point $M \in D$. Les fonctions W sont les fonctions W_s, $W_{s\alpha}$, $W_{s\alpha\beta}$, $W_{s\alpha\beta\gamma}$, $W_{s\alpha\beta\gamma\delta}$. Les équations sont de la forme

$$W = \int_0^{x^4} G(W, U)\, dx^4 + W_0,$$

où W_0, valeur de W pour $x^4 = 0$, est une fonction donnée des trois variables x^i;

4°) d'équations ayant au premier membre une fonction U des quatre coordonnées x_0^α d'un point $M_0 \in D_0$. Les fonctions U sont les fonctions U_S, dérivées cinquièmes de W_s. Ces équations (formules de Kirchhoff) sont de la forme

$$U = \int_{x_0^4}^{0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} H\, dx^4\, d\lambda_2\, d\lambda_3 + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I\, d\lambda_2\, d\lambda_3.$$

Les quantités E, F, G, H, I sont formellement identiques aux quantités correspondantes calculées aux chapitres I pour les équations (E) (en considérant les dérivations par rapport aux x^α comme effectuées). La quantité G est une fonction W ou U. Toutes ces quantités s'expriment donc au moyen des fonctions X, Ω, W et U, figurant aux premiers membres des équations intégrales considérées, et font intervenir les dérivées partielles des $A^{\lambda\mu}$ et f_s par rapport à tous leurs arguments, jusqu'au cinquième ordre, et les dérivées partielles des données de Cauchy φ_s et ψ_s jusqu'aux ordres six et cinq (dans la quantité I et par W_0).

Résolution du problème de Cauchy.

Pour résoudre le problème de Cauchy pour les équations non linéaires F nous pourrions chercher à résoudre, indépendamment de ces équations, le système d'équations intégrales vérifié par les solutions (et montrer ensuite que cette solution est effectivement solution du problème de Cauchy posé). Malheureusement il se présente, pour cette résolution, des difficultés: nous avons montré au chapitre I que les quantités figurant sous le signe d'intégration (en particulier H) sont continues et bornées, en supposant la différentiabilité des coefficients $A^{\lambda\mu}$, considérés comme fonctions données des variables x^α, ces conditions n'étant pas réalisées quand les fonctions $W_s, W_{s\alpha}, \ldots, U_S$ sont indépendantes, la quantité $[A^{ij}]\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j}\Delta$ ne sera alors pas bornée et continue.

Pour résoudre le problème de Cauchy nous passerons donc par l'intermédiaire d'équations approchées F_1, où les coefficients $A^{\lambda\mu}$ seront des fonctions données des x^α, obtenus en remplaçant W_s par une fonction donnée $\overset{(1)}{W}_s$. Les quantités figurant sous les signes d'intégration des équations intégrales vérifiées par les solutions seront alors continues et bornées s'il en est ainsi des fonctions $W_s \ldots U_S$ considérées comme indépendantes. Nous pourrons alors résoudre les équations intégrales et montrer que leur solution $W_s \ldots U_S$ est solution des équations F_1 et que les $W_{s\alpha} \ldots U_S$ sont les dérivées partielles de W_s; mais il nous faut pour cela, dans le cas général, prendre pour fonction $\overset{(1)}{W}_s$ une fonction six fois différentiable (puisque les équations intégrales font intervenir les dérivées cinquièmes des $A^{\lambda\mu}$); la solution W_s trouvée n'étant que cinq fois différentiable, nous ne pourrons pas itérer l'opération. La méthode exposée ne pourra donc s'appliquer que si les $A^{\lambda\mu}$ ne dépendent que des W_s et non des $W_{s\alpha}$: il suffira alors de supposer la fonction d'approximation cinq fois différentiable.

Nous exposerons en détail la solution du problème de Cauchy dans ce cas au chapitre III, et nous l'appliquerons aux équations de la relativité au chapitre IV.

Dans le cas général, où $A^{\lambda\mu}$ est fonction de W_s et $W_{s\alpha}$, on peut résoudre le problème de Cauchy en passant par l'intermédiaire d'équations approchées, non des équations (F) elles-mêmes, mais d'équations préalablement dérivées par rapport aux x^α et considérées comme équations intégro-différentielles aux fonctions inconnues $W_{s\alpha}$.

Chapitre III.

Résolution du problème de Cauchy dans le cas où les coefficients $A^{\lambda\mu}$ ne dépendent pas des dérivées partielles premières des fonctions inconnues.

1. Nous considérons dans ce chapitre un système (F) de n équations aux dérivées partielles du second ordre à n fonctions inconnues et quatre variables, du type précédemment étudié:

$$(G) \qquad A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_s = 0\,,$$

mais où les coefficients $A^{\lambda\mu}$ sont fonctions seulement des variables x^α et des fonctions inconnues W_t, et non des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial W_t}{\partial x^\alpha}$ de ces fonctions.

Les coefficients f_s sont fonctions, comme précédemment, des variables x^α, des fonctions inconnues W_t et de leurs dérivées partielles premières $\dfrac{\partial W_t}{\partial x^\alpha}$.

Formation d'un système d'équations intégrales vérifié par les solutions des équations (G).

Nous obtiendrons un système d'équations intégrales vérifié par les solutions des équations (G) en employant les méthodes utilisées au chapitre précédent pour les équations du type général (F). Remarquons toutefois que, dans le cas des équations (G), les coefficients $A^{\lambda\mu}$ ne contenant pas les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial W_t}{\partial x^\alpha} = W_{t\alpha}$, il suffira d'appliquer les résultats du chapitre I aux équations déduites des équations (G) par *quatre* dérivations par rapport aux variables x^α pour obtenir un système d'équations intégrales dont les seconds membres ne contiennent pas d'autres fonctions que celles figurant aux premiers membres. Les calculs effectués au § 2, chapitre II montrent en effet que ces équations dérivées s'écrivent, en désignant par U_S l'une quelconque des dérivées quatrièmes des fonctions inconnues W_s

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 U_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_S^{T\lambda}\frac{\partial U_T}{\partial x^\lambda} + F_s = 0.$$

$A^{\lambda\mu}$ ne dépend que des variables x^α et des fonctions W_s.

$B_S^{T\lambda}$, qui est une somme de dérivées partielles premières des fonctions $A^{\lambda\mu}$, considérées comme fonctions des variables x^α et de dérivées partielles premières d'une fonction f_s par rapport aux dérivées partielles premières $W_{T\alpha}$ des fonctions inconnues, ne dépend que des variables x^α, des fonctions inconnues W_r et de leurs dérivées partielles premières $W_{r\alpha}$.

F_S est un polynôme des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s et de leurs dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'au quatrième ordre, ainsi que des fonctions W_s et de leurs dérivées partielles par rapport aux variables x^α jusqu'au quatrième ordre.

Les équations intégrales (J), vérifiées par les solutions bornées et à dérivées premières bornées des équations (G'), déduites comme au chapitre II des résultats du chapitre I, ne font intervenir que les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et $B_S^{T\lambda}$ et leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres respectivement quatre et deux, ainsi que les coefficients F_S. On vérifie donc que ces équations (J) ne contiennent pas de dérivées partielles des fonctions W_s d'ordre supérieur à quatre.

Nous rencontrerions évidemment, pour résoudre le système d'équations intégrales (J) directement la même difficulté que dans le cas général: la quantité H sous le signe $\iiint$ n'est pas bornée en général si $W_s, W_{s\alpha} \ldots U_S$ sont des fonctions indépendantes. Nous pourrons toutefois, dans le cas où les $A^{\lambda\mu}$ ne dépendent pas des dérivées premières des W_s, résoudre le problème de Cauchy en utilisant les résultats obtenus sur le système d'équations intégrales vérifié dans un certain domaine, par les solutions des équations données (G) de la manière que nous allons exposer dans la suite.

2. Plan du Chapitre III. (Résolution du problème de Cauchy.)

A. Nous considérerons un système G_1, approché de G, obtenu en remplaçant dans $A^{\lambda\mu}$ (et non dans f_s) les inconnues W_s par des valeurs approchées $\overset{(1)}{W_s}$ satisfaisant à des hypothèses convenables.

I. Nous montrerons que le système d'équations intégrales J_1, vérifié par les solutions du problème de Cauchy donné relativement aux équations G_1, admet une solution unique continue et bornée dans un domaine D indépendant de $\overset{(1)}{W_s}$ si on le considère comme système d'équations intégrales aux fonctions inconnues indépendantes X, Ω, W, U.

II. Nous montrerons ensuite que les solutions trouvées de J_1 sont solutions du problème de Cauchy donné pour les équations G_1 dans tout le domaine D et que les fonctions W_s obtenues admettent pour dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre $W_{s\alpha} \ldots U_S$ et satisfont aux mêmes hypothèses que $\overset{(1)}{W_s}$. Nous désignons ces fonctions par $\overset{(2)}{W_s}$.

B. La résolution du problème de Cauchy pour les équations G_1 définit, d'après les résultats précédents, une représentation de l'espace des fonctions $\overset{(1)}{W}_s$ dans lui-même. Nous montrons que cette représentation admet un point fixe, appartenant à l'espace. Les fonctions W_s correspondantes sont solutions des équations (G) données. Cette solution, unique, possède des dérivées partielles continues et bornées jusqu'au quatrième ordre.

3. Hypothèses faites dans le chapitre III.

1°) Dans le domaine D défini par

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x^4| \leq \varepsilon$$

et pour des valeurs des fonctions inconnues satisfaisant à

$$|W_s - \bar{\varphi}_s| \leq l, \qquad \left|\frac{\partial W_s}{\partial x^i} - \frac{\overline{\partial \varphi_s}}{\partial x^i}\right| \leq l, \qquad \left|\frac{\partial W_s}{\partial x^4} - \bar{\psi}_s\right| \leq l: \tag{3.1}$$

a) Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s admettent des dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'au quatrième ordre, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz.

b) La forme quadratique $A^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal $A^{44} > 0$, $A^{ij} X_i X_j$ définie négative.

2°) Dans le domaine (d) de la surface initiale, défini par $|x^i - \bar{x}^i| \leq d$, les données de Cauchy φ_s et ψ_s possèdent des dérivées partielles continues et bornées jusqu'aux ordres respectivement cinq et quatre satisfaisant à des conditions de Lipschitz.

4. Équations approchées G_1.

Nous considérons un système d'équations approchées du systèmes (G) obtenu en remplaçant dans les coefficients $A^{\lambda\mu}$ (et non dans f_s), les fonctions inconnues par des fonctions données $\overset{(1)}{W}_s$ qui admettent des dérivées partielles continues et bornées jusqu'au quatrième ordre (nous les désignons par $\overset{(1)}{W}_{s\alpha}, \ldots, \overset{(1)}{U}_S$) dans le domaine D:

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x^4| \leq \varepsilon$$

et satisfont aux inégalités

$$|\overset{(1)}{W}_s - \bar{\varphi}_s| \leq l, \qquad \left|\frac{\partial \overset{(1)}{W}_s}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\varphi}_s}{\partial x^i}\right| \leq l, \qquad \left|\frac{\partial \overset{(1)}{W}_s}{\partial x^4} - \bar{\psi}_s\right| \leq l.$$

Nous écrivons le système obtenu:

$$\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_s = 0. \tag{G_1}$$

Une solution W_1, six fois différentiable et satisfaisant aux inégalités (3.1), des équations (G_1) vérifie donc, dans D, les équations suivantes:

$$\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 U_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \overset{(1)}{B}{}^{T\lambda}_{S}\frac{\partial U_T}{\partial x^\lambda} + \overset{(1)}{F}_S = 0\,. \qquad (G_1')$$

On voit facilement, grâce à des formules analogues aux formules du chapitre II, que

1°) $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ est une fonction des variables x^α et des fonctions données $\overset{(1)}{W}_s$;

2°) $\overset{(1)}{B}{}^{T\lambda}_{S}$ est une somme des fonctions suivantes:

a) dérivées partielles premières des $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ considérées comme fonctions des variables x^α (donc comme fonctions des variables x^α et des fonctions $\overset{(1)}{W}_s$ et $\overset{(1)}{W}_{s\alpha}$);

b) dérivées partielles premières d'une fonction f_s par rapport aux fonctions $W_{r\nu}$ (donc des fonctions des x^α, W_s et $W_{s\alpha}$).

3°) $\overset{(1)}{F}_S$ est un polynôme des coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et f_s et de leurs dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'au quatrième ordre, ainsi que les fonctions $\overset{(1)}{W}_s$ et $\overset{(1)}{W}_{s\alpha}$ et de leurs dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'au quatrième ordre.

5. Application des résultats du chapitre I.

Les coefficients des équations (G_1'), considérées comme des équations linéaires du type (E) aux fonctions inconnues U_S, satisfont donc dans le domaine D aux hypothèses du chapitre I. Il existe donc un domaine $D_0 \subset D$ dans lequel les dérivées cinquièmes U_S d'une solution W_s du problème de Cauchy posé, qui possède des dérivées partielles continues et bornées jusqu'au sixième ordre et satisfait aux inégalités (3.1), vérifient des formules de Kirchhoff, dont les premiers membres sont les valeurs au point $M_0 \in D_0$, de ces fonctions U_S. Ces équations, jointes aux équations intégrales ayant au premier membre des fonctions auxiliaires X et Ω, et à des équations intégrales analogues à (4.1) (II), forment un système d'équations intégrales que nous désignons par J_1.

6. Système d'équations intégrales J_1.

Considérons (indépendamment des équations initiales G_1) l'ensemble des relations intégrales J_1 comme système d'équations intégrales à quatre groupes de fonctions inconnues X, Ω, W et U. Le système se compose des quatre groupes d'équations suivants:

1°) Des équations intégrales ayant au premier membre une fonction X des quatre coordonnées x_0^α et de trois paramètres x^4, λ_2, λ_3 (fonctions correspondant aux fonctions

x^i, p_i, y^j_i, ... z^j_{ihk} qui définissent les conoïdes caractéristiques). Ces équations sont de la forme

$$X(x_0^\alpha;\, x^4, \lambda_2, \lambda_3) = \int_{x_0^4}^{x^4} E\, dx^4 + X_0(x_0^\alpha, x_0^4, \lambda_2, \lambda_3). \tag{1}$$

X_0 est une fonction donnée. (Pour x^i, p_i, y^j_i ... les valeurs de X_0 sont respectivement x_0^i, p_i^0, 0 ...).

E est une fraction rationnelle de dénominateur

$$T^{*4} = \overset{(1)}{A}{}^{*44} + \overset{(1)}{A}{}^{*i4} p_i$$

des quantités suivantes:

a) coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'au quatrième ordre (fonctions de $\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha)$ et x^α où x^i est remplacé par la fonction X correspondante), fonction $\overset{(1)}{W}_s$ et dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre;

b) fonctions X;

c) quantités $\overset{(1)}{a}{}^0_{\alpha\beta}$ et $\overset{(1)}{a}{}^{\alpha\beta}_0$, fonctions algébriques des valeurs des coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ pour les valeurs x_0^α et $\overset{(1)}{W}_s(x_0^\alpha)$ de leurs arguments.

2°) Des équations ayant au premier membre une fonction Ω des x_0^α et des paramètres x^4, λ_2, λ_3 (fonctions correspondant à ω^r_s, ω^r_{si}, $\overset{r}{}_{sij}$). Ces équations sont de la forme

$$\Omega = \int_{x_0^4}^{x^4} F\, dx^4 + \Omega_0, \tag{2}$$

où Ω_0 est une fonction donnée (pour ω^r_s, ω^r_{si}, ω^r_{sij}, les valeurs de Ω_0 sont respectivement δ^r_s, 0, 0).

F est une fraction rationelle (de dénominateur $T^{*4} = \overset{(1)}{A}{}^{*44} + \overset{(1)}{A}{}^{*i4} p_i$) des quantités suivantes:

a) coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et $\overset{(1)}{B}{}^{T\lambda}_S$ et dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'aux ordres respectivement trois et deux (c'est-à-dire coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, f_s, et leurs dérivées partielles jusqu'au troisième ordre);

b) fonctions $\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha)$ et leurs dérivées partielles jusqu'au troisième ordre et fonctions $W_{s\alpha}(x^\alpha)$, $W_{s\alpha\beta}(x^\alpha)$, $W_{s\alpha\beta\gamma}(x^\alpha)$ (fonctions $W(x^\alpha)$). Les x^i sont toujours remplacés par les fonctions X correspondantes;

c) fonctions X et Ω;

d) quantités $\overset{(1)}{a}{}^0_{\alpha\beta}$ et $\overset{(1)}{a}{}^{\alpha\beta}_0$.

3°) Des équations ayant au premier membre une fonction W des quatres coordonnées x^α. Ces équations sont de la forme

$$W(x^\alpha) = \int_0^{x^4} G\, dx^4 + W_0(x^i). \tag{3}$$

W_0 désigne une fonction donnée. (Pour les fonctions W_s, W_{si} ... les valeurs de W_0 sont respectivement φ_s, φ_{si}, ...).

G est une fonction W ou une fonction U.

4°) Des formules de Kirchhoff, ayant au premier membre une fonction U des quatre coordonnées x_0^α

$$4\pi\, U(x_0^\alpha) = \int_{x_0^4}^{0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} H\, dx^4\, d\lambda_2\, d\lambda_3 + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I\, d\lambda_2\, d\lambda_3. \tag{4}$$

a) H est le produit de la racine carrée d'une fraction rationnelle de dénominateur D^* (polynôme de $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, X, $\tilde{X}$ et p_i^0) et de numérateur 1, par la somme des deux fractions rationnelles suivantes:

1) Une fraction rationnelle H_a de dénominateur $(D^*)^3 (x_0^4 - x^4)\, T^{*4}$ (qui ne provient que des termes de l'opérateur L_s^r qui contiennent les dérivées partielles secondes de la fonction σ) dont le numérateur est un polynôme des fonctions suivantes:

$\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées partielles premières et secondes par rapport à tous leurs arguments (fonctions de $\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha)$ et x^α où x^i est remplacé par la fonction X correspondante).

$\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha)$, $\overset{(1)}{W}_{s\alpha}(x^\alpha)$, $\overset{(1)}{W}_{s\alpha\beta}(x^\alpha)$.

X et $\tilde{X}$. (On a désigné par $\tilde{X}$ le quotient par $x_0^4 - x^4$ des fonctions X pour lesquelles $X_0 = 0$).

$U(x^\alpha)$ et Ω, qui n'interviennent que par le produit $[U_r]\,\omega_s^r$ en facteur dans le polynôme considéré.

Remarquons que ce polynôme, fonction des sept arguments x_0^α, x^4, λ_2, λ_3, s'annulle pour $x^4 = x_0^4$.

2) Une fraction rationnelle H_{1b} de dénominateur $(D^*)^2\, T^{*4}$ des quantités suivantes:

coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{B}{}_S^{T\lambda}$ et $\overset{(1)}{F}_S$, et leurs dérivées partielles des deux premiers jusqu'aux ordres respectivement deux et un, par rapport à x^α. C'est-à-dire coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et

f_s et leurs dérivées partielles par rapport à tous les arguments jusqu'au quatrième ordre, et fonctions $\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha) \ldots \overset{(1)}{U}_s(x_\alpha)$, $W_s(x^\alpha) \ldots U_s(x^\alpha)$

fonctions X et $\tilde{X}$;

fonctions Ω et $\tilde{\Omega}$ (on a désigné par $\tilde{\Omega}$ le quotient par $x_0^4 - x^4$ des fonctions Ω pour lesquelles $\Omega_0 = 0$);

b) I est la valeur pour $x^4 = 0$ du produit de la racine carrée d'une fraction rationnelle de dénominateur D^*, de numérateur 1 par une fraction rationnelle de dénominateur $(D^*)^2 \overset{(1)}{A}{}^{*44}\, T^{*4}$ des fonctions suivantes:

$\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées partielles premières par rapport à tous leurs arguments;

dérivées partielles premières de f_s par rapport à W_{rv} (interviennent par l'intermédiaire de $\overset{(1)}{B}{}_S^{T\lambda}$), fonctions de $W_s(x^\alpha)$, $W_{s\alpha}(x^\alpha)$ et X^α;

$\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha)$ et $\overset{(1)}{W}_{s\alpha}(x^\alpha)$;

X et $\tilde{X}$, Ω et $\tilde{\Omega}$;

données de Cauchy $\varphi_s(x^i)$ et $\psi_s(x^i)$ et leurs dérivées partielles par rapport aux x^i jusqu'aux ordres respectivement cinq et quatre.

I. Résolution du système d'équations intégrales J_1.

7. Nous remarquons que le système d'équations intégrales J_1 se subdivise en deux groupes; d'une part

$$X = \int_{x_0^4}^{x^4} E\, dx^4 + X_0, \tag{1}$$

d'autre part

$$\Omega = \int_{x_0^4}^{x^4} F\, dx^4 + \Omega_0, \tag{2}$$

$$W = \int_0^{x^4} G\, dx^4 + W_0, \tag{3}$$

$$4\pi U = \int_{x_0^4}^{0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} H\, dx^4\, d\lambda_2\, d\lambda_3 + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I\, d\lambda_2\, d\lambda_3. \tag{4}$$

Les équations (1) ne contiennent pas d'autres fonctions inconnues que les fonctions X. Nous les résoudrons tout d'abord.

Nous remarquons d'autre part que la fonction H_a est une fonction connue quand les X sont connus. Nous pourrons alors borner la quantité H sans faire d'hypothèse sur les dérivées des fonctions U et W_i considérées comme indépendantes, et résoudre les équations restantes (2), (3) et (4).

Nous allons donc montrer que le système d'équations intégrales J_0 *admet une solution unique*, moyennant les hypothèses faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s et des hypothèses sur les fonctions $\overset{(1)}{W}_s$. Nous rassemblerons ces hypothèses sous le nom d'hypothèses B et B' et les énoncerons dans les deux paragraphes qui vont suivre.

8. Hypothèses (*B*).

1°) Dans le domaine (D) défini par

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \quad |x^4| \leq \varepsilon$$

et pour des valeurs des fonctions W_s et $W_{s\alpha}$ satisfaisant à:

$$(8.1) \qquad |W_s - \varphi_s| \leq l, \quad |W_{si} - \varphi_{si}| \leq l, \quad |W_{s4} - \psi_s| \leq l:$$

a) Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s admettent des dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'au quatrième ordre, continues et bornées par un nombre donné.

b) La forme quadratique $A^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal. Le coeficient A^{44} est supérieur à un nombre positif donné.

Les coefficients $a_0^{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}^0$ relatifs aux valeurs des coefficients $A^{\lambda\mu}$ en un point du domaine précédent sont bornés par un nombre donné.

2°) Les fonctions d'approximation $\overset{(1)}{W}_s$ admettent dans le domaine (D) des dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre continues, bornées et satisfaisant aux inégalités

$$|\overset{(1)}{W}_s - \varphi_s| \leq l, \quad |\overset{(1)}{W}_{si} - \varphi_{si}| \leq l, \quad |\overset{(1)}{W}_{s4} - \psi_s| \leq l$$

et aux inégalités analogues $|\overset{(1)}{W} - W_0| \leq l$ jusqu'à $|\overset{(1)}{U}_S - \Phi_S| \leq l$.

3°) Dans le domaine (d), défini par

$$|x^i - \bar{x}| \leq d,$$

les données de Cauchy $\varphi_s(x^i)$ et $\psi_s(x^i)$ possèdent des dérivées partielles continues et bornées par rapport aux variables x^i jusqu'aux ordres respectivement cinq et quatre.

Nous désignerons par bornes (B) les différentes bornes figurant dans ces hypothèses (d, ε, l, bornes des coefficients et des données de Cauchy).

9. Hypothèses *B'*.

1°) Dans le domaine (D) et pour des valeurs des fonctions W_s et $W_{s\alpha}$, satisfaisant aux inégalités (8.1), les dérivées partielles d'ordre quatre des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s satisfont à une condition de Lipschitz donnée par rapport à tous leurs arguments.

2°) Il résulte alors des hypothèses (B) que, dans le domaine D et pour des valeurs des fonctions W_s satisfaisant à (8.1), les coefficients $a_0^{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}^0$ et leurs dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre vérifient une condition de Lipschitz donnée par rapport à leurs arguments x_0^α, $W_s(x_0^\alpha)$.

3°) Les dérivées partielles d'ordre quatre des fonctions W_s satisfont à une condition de Lipschitz par rapport *aux trois arguments* x^i.

Des hypothèses (B) 3°) il résultait l'inégalité

$$|\overset{(1)}{W}_s(x'^\alpha) - \overset{(1)}{W}_s(x^\alpha)| \leq l' \Sigma |x'^\alpha - x^\alpha|$$

et les inégalités analogues pour les dérivées partielles des $\overset{(1)}{W}_s$ jusqu'au troisième ordre.

Nous aurons de plus:

$$|\overset{(1)}{U}_S(x'^i, x^4) - \overset{(1)}{U}_S(x^i, x^4)| \leq l \Sigma |x'^i - x^i|.$$

4°) Dans le domaine (d) les dérivées partielles d'ordres respectivement cinq et quatre des données de Cauchy φ_s et ψ_s satisfont à une condition des Lipschitz par rapport aux variables x^i.

Des hypothèses (B) il résultait l'inégalité

$$|\varphi_s(x'^i) - \varphi_s(x^i)| \leq l_0' \Sigma |x'^i - x^i|$$

et les inégalités analogues pour les fonctions ψ_s et les dérivées partielles de ψ_s et φ_s jusqu'aux ordres trois et quatre.

Nous avons de plus:

$$|\phi_{sj}(x'^i) - \phi_{sj}(x^i)| \leq l_0' \Sigma |(x'^i - x^i|,$$

$$|\psi_s(x'^i) - \psi_s(x^i)| \leq l_0' \Sigma |x'^i - x^i|,$$

où l' et l_0' sont des nombres donnés qui satisfont à

$$l > l_0'.$$

Nous désignerons par bornes (B') les bornes figurant dans ces hypothèses.

10. Résolution des équations (1).

Nous résoudrons tout d'abord les équations (1) définissant le conoïde caractéristique. Ces équations intégrales non linéaires, ayant au premier membre une fonction X, ne contiennent pas d'autres fonctions inconnues que les fonctions X.

$$X = \int_{x_0^4}^{x^4} E(X)\, dx^4 + X_0. \tag{1}$$

Espace fonctionnel $\mathcal{E}$.

Nous résoudrons les équations (1) en considérant un espace fonctionnel $\mathcal{E}$, les m coordonnées d'un point de $\mathcal{E}$ (m est le nombre des fonctions X) étant des fonctions X_1 continues et bornées des sept arguments x_0^α, x^4, ζ_2, λ_3 dans le domaine Λ défini par

$$|x_0^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x_0^4| \leq \mathcal{E}(x_0^i),$$

$$0 \leq x^4 \leq x_0^4, \qquad 0 \leq \lambda_2 \leq \pi, \qquad 0 \leq \lambda_3 \leq 2\pi,$$

avec $\mathcal{E}(x_0^i) \leq \varepsilon$ ($\mathcal{E}$ figurant dans les hypothèses (B)).

Les fonctions X_1 prennent pour $x^4 = x_0^4$ les valeurs données X_0. Nous désignons par $\overline{\mathcal{M}}_0$ le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\overline{X}_0$ (valeurs des fonctions X_0 pour $x_0^i = \bar{x}^i$, $x_0^4 = 0$ [1] et nous supposons que les fonctions X_1 satisfont aux inégalités

$$(10.1) \qquad |X_1 - \overline{X}_0| \leq d \quad \text{et} \quad |X_1 - X_0| \leq M\,|x_0^4 - x^4|,$$

où M est un nombre donné que nous préciserons plus loin.

11. Distance de deux points de $\mathcal{E}$.

Nous définirons dans l'espace $\mathcal{E}$ la distance de deux point $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1'$ par le maximum dans le domaine Λ de la somme des valeurs absolues des différences de leurs coordonnées:

$$d(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_1') = \operatorname*{Max}_{\Lambda} \Sigma\,|X_1' - X_1|.$$

La norme ainsi introduite munit l'espace $\mathcal{E}$ de la topologie de la convergence uniforme, et on vérifie aisément que l'espace $\mathcal{E}$ est un espace normé, complet et compact.

12. Représentation de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Au point $\mathcal{M}_1$ de $\mathcal{E}$ de coordonnées X_1 nous associons un point $\mathcal{M}_2$ dont les coordonnées X_2 sont définies par

$$(12.1) \qquad X_2 = \int_{x_0^4}^{x^4} E_1\, dx^4 + X_0.$$

E_1 désigne la quantité E figurant dans les équations (1), où les fonctions X sont remplacées par les coordonnées correspondantes X_1 de $\mathcal{M}_1$.

Montrons que cette représentation (12.1) est une représentation de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même, c'est-à-dire que les X_2 sont des fonctions continues et bornées de

[1] Sauf pour les fonctions x^i (pour lesquelles $X_0 = x_0^i$) les fonctions X_0 sont des constantes ou des fonctions de λ_2, λ_3 seuls.

leurs sept arguments, prennent pour $x^4 = x_0^4$ les valeurs X_0 et satisfont aux mêmes inégalités (10.2) que les X_1, si $\varepsilon(x_0^i)$, qui définit le domaine de variation de l'argument x_0^4 des X_1, est convenablement choisi.

Les E_1 s'expriment en effet rationellement (cf § 6) au moyen des $\overset{(1)}{W}_{s1}\, \overset{(1)}{A}{}_1^{\lambda\mu}$, de leurs dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre (x^i est remplacé dans toutes ces fonctions par la fonction X_1 correspondante), X_1, $\overset{(1)}{a}{}_0^{\alpha\beta}$, $\overset{(1)}{a}{}_{\alpha\beta}^0$: toutes ces fonctions sont, d'après les hypothèses (B) et les hypothèses faites sur les X_1, des fonctions continues et bornées des sept arguments x_0^α, x^4, λ_2, λ_3. D'autre part le dénominateur des fonctions E_1 est

$$\overset{(1)}{T}{}_1^{*4} = (\overset{(1)}{A}{}^{*44} + \overset{(1)}{A}{}^{*i4}\, p_i)_1$$

et prend la valeur 1 pour $x^4 = x_0^4$, $X_1 = X_0$. Il résulte immédiatement des hypothèses (B) et (B') et des inégalités vérifiées par les X_1 que $\overset{(1)}{T}{}^{*4}$ satisfait à des conditions de Lipschitz

$$|\overset{(1)}{T}{}_1^{*4} - 1| \leq T' \{\Sigma |X_1 - X_0| + |x^4 - x_0^4|\} \leq T'(mM+1)|x_0^4 - x^4|,$$

où T' ne dépend que des bornes (B) et (B').

Nous pourrons donc choisir $\varepsilon(x_0^i)$ suffisamment petit pour que le dénominateur considéré soit différent de zéro dans Λ. Par exemple pour

$$\varepsilon(x_0^i) \leq \frac{1}{2\, T'(mM+1)} \tag{12.2}$$

nous aurons dans le domaine Λ

$$|\overset{(1)}{T}{}^{*4}| \geq \tfrac{1}{2}. \tag{12.3}$$

Les quantités E_1 sont alors des fonctions continues des sept arguments x_0^α, x^4, λ_2, λ_3 dans le domaine Λ, et sont bornées par un nombre M qui ne dépend que des bornes (B)

$$E_1 \leq M.$$

Les fonctions X_2 sont donc des fonctions continues et bornées de leurs sept arguments. Elles vérifient les inégalités

$$|X_2 - X_0| \leq M |x_0^4 - x^4|. \tag{12.4}$$

Il suffira donc de prendre $\varepsilon(x_0^i)$ tel que

$$\varepsilon(x_0^i) \leqq \frac{d - |x_0^i - \bar{x}_0^i|}{M}, \tag{12.5}$$

pour que l'on ait

$$|X_2 - \overline{X}_0| \leq d.$$

(Remarquons que le nombre M de l'inégalité (10.1) a été choisi de manière à ce que les fonctions X_2 vérifient la même inégalité que les fonctions X_1, cf. (12.4).

Le point $\mathcal{M}_2$ sera donc un point de $\mathcal{E}$ si $\varepsilon(x_0^i)$ vérifie les inégalités (12.2) et (12.5).

13. La représentation diminue les distances.

Montrons que la distance de deux points représentatifs $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}'_2$ est inférieure à la distance des points initiaux $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1$ si $\varepsilon(x_0^i)$ est convenablement choisi.

Nous déduisons immédiatement des équations (12.1) l'inégalité

$$|X'_2 - X_2| \leq |x_0^4 - x^4| \cdot \operatorname{Max} |E'_1 - E_1|. \tag{13.1}$$

Les E_1 étant des fractions rationnelles à dénominateurs non nuls de fonctions bornées vérifiant des conditions de Lipschitz par rapport aux X_1 (les X_1 vérifiant les inégalités (10.1) nous pouvons en effet utiliser les hypothèses B'). Nous avons d'autre part

$$|E'_1 - E_1| \leq M' \cdot \Sigma |X'_1 - X_1|,$$

où M' est un nombre qui ne dépend que des bornes B et B'. D'où

$$d(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}'_2) \leq m M' \cdot \operatorname*{Max}_{\Lambda} \varepsilon(x_0^i) \cdot d(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1).$$

Pour que la représentation (12.1) de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même diminue les distances il suffira donc que $\varepsilon(x_0^i)$ satisfasse à

$$\varepsilon(x_0^i) < \frac{1}{m M'}. \tag{13.2}$$

Nous choisirons donc $\varepsilon(x_0^i)$ satisfaisant aux inégalités (12.2), (12.5) et (13.2). La représentation (12.1) de l'espace $\mathcal{E}$ normé, complet et compact dans lui-même, diminuant les distances, admettra alors un point fixe unique appartenant à cet espace.

Conclusion. Dans le domaine

$$\begin{gathered} |x_0^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x_0^4| < \varepsilon(x_0^i) \\ 0 \leq x^4 \leq x_0^4, \qquad 0 \leq \lambda_2 \leq \pi, \qquad 0 \leq \lambda_3 \leq 2\pi. \end{gathered} \tag{13.3}$$

Le système d'equations intégrales (1) admet une solution unique, continue et bornée, vérifiant les inégalités

$$|X - \bar{X}_0| \leq d. \tag{13.4}$$

Remarquons en particulier que les *trois fonctions X correspondant aux x^i définissent, avec la variable x^4, un point appartenant au domaine D.*

14. Propriétés des fonctions X. Fonctions $\tilde{X}$.

Les fonctions X vérifient les équations

$$X = X_0 + \int_{x_0^4}^{x^4} E \, dx^4.$$

Les quantités E, ne faisant intervenir[1], outre les X, que les $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées partielles (fonctions données des x^α), possèdent les mêmes propriétés qu'au chapitre I. Des démonstrations identiques à celles faites au chapitre I[1] (§ 15) montrent donc que:

1°) Les fonctions $\dfrac{X-X_0}{x_0^4-x^4}$ sont continues et bornées dans Λ. Les fonctions $\tilde{X}$, quotients par $x_0^4-x^4$ des X qui s'annullent pour $x_0^4=x^4$, sont continues et bornées dans Λ:

$$|X-X_0|<M\,|x_0^4-x^4|, \qquad |\tilde{X}|\leq M.$$

2°) Les fonctions

$$\frac{\tilde{X}-\tilde{X}_0}{x_0^4-x^4}=\frac{\int_{x_0^4}^{x^4}(E-E_0)\,dx^4}{x_0^4-x^4}$$

(où $\tilde{X}_0$, E_0 désignent les valeurs pour $x^4=x_0^4$ de $\tilde{X}$, E) sont continues et bornées dans Λ. La borne de ces fonctions se déduit des conditions de Lipschitz, vérifiée par E (fraction rationelle bornée de fonctions bornées vérifiant des conditions de Lipschitz) par rapport aux X et à x^4:

$$|E-E_0|\leq M''\,\{\Sigma\,|X-X_0|+|x^4-x_0^4|\}.$$

M'' ne dépend que des bornes B et B'. Nous avons donc

$$|\tilde{X}-\tilde{X}_0|\leq\frac{M}{2}(M\,m+1)\,|x^4-x_0^4|. \tag{14.1}$$

3°) *Les fonctions X vérifient des conditions de Lipschitz par rapport aux x_0^i.*

Il suffit, pour le démontrer, de faire sur l'espace $\mathcal{E}$ l'hypothèse supplémentaire suivante:

Les fonctions X_1 vérifient une condition de Lipschitz par rapport au x_0^i

$$|X_1(x_0'^i, x_0^4, \ldots)-X_1(x_0^i, x_0^4, \ldots)|\leq d'\sum|x_0'^i-x_0^i|, \tag{14.2}$$

où d' est un nombre donné.

Nous avons

$$X_2(x_0'^i, \ldots)-X_2(x_0^i, \ldots)=\int_{x_0^4}^{x^4}(E_1(x_0'^i, \ldots)-E_1(x_0^i, \ldots))\,dx^4.$$

[1] Les démonstrations ont été faites au chapitre I en utilisant la variable λ_1; il est évident que l'on peut les répéter avec la variable x^4, le dénominateur $\overset{(1)}{T}{}^{*4}$ introduit étant un polynôme (non nul) des mêmes fonctions que E.

$E_1(x_0'^i)$ et $E_1(x_0^i)$ sont calculés respectivement à l'aide des fonctions $X_1(x_0'^i, \ldots)$ (en particulier $x_1^i(x_0'^i, \ldots)$ et $X_1(x_0^i, \ldots)$). La quantité E_1 vérifiant une condition de Lipschitz par rapport aux X_1, on déduit de (14.2):

$$|X_2(x_0'^i, \ldots) - X_2(x_0^i, \ldots)| \leq |x_0^4 - x^4|\, M'\, d' \, \Sigma\, |x_0'^i - x_0^i|,$$

d'où pour $\varepsilon(x_0^i) \leq \frac{1}{M'}$ on a

$$|X_2(x_0'^i, \ldots) - X_2(x_0^i, \ldots)| \leq d' \, \Sigma\, |x_0'^i - x_0^i|.$$

Le point $\mathfrak{M}_2$, représentatif de $\mathfrak{M}_1$ par (12.1), est encore, avec l'hypothèse supplementaire faite, un point de $\mathcal{E}$, et le point fixe a des coordonnées vérifiant

$$|X(x_0'^i, \ldots) - X(x_0^i, \ldots)| \leq d' \, \Sigma\, |x_0'^i - x_0^i|$$

et

$$|X(x_0'^i, \ldots) - X(x_0^i, \ldots)| \leq |x_0^4 - x^4|\, M'\, d' \, \Sigma\, |x_0'^i - x_0^i|$$

d'où en particulier

$$|\tilde{X}(x_0'^i, \ldots) - \tilde{X}(x_0^i, \ldots)| \leq M'\, d' \, \Sigma\, |x_0'^i - x_0^i|.$$

15. Résolution des équations (2), (3) et (4).

Nous considérons maintenant le système d'équations intégrales à trois groupes de fonctions inconnues Ω, W et U, obtenu en remplaçant dans les équations (2), (3) et (4) les fonctions X par les solutions trouvées des équations (1):

$$\Omega = \int_{x_0^4}^{x_0} F\, dx^4 + \Omega_0, \tag{2}$$

$$W = \int_0^{x^4} G\, dx^4 + W_0, \tag{3}$$

$$U = \int_{x_0^4}^{0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} H\, dx^4\, d\lambda_2\, d\lambda_3 + \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} I\, d\lambda_2\, d\lambda_3. \tag{4}$$

16. Espace fonctionnel F.

Nous résoudrons ces équations en considérant un espace fonctionnel F, les coordonnées d'un point de F étant définies de la façon suivante:

1°) m_1 de ces coordonnées (m_1 est le nombre des fonctions Ω) sont des fonctions Ω_1 continues et bornées des sept arguments x_0^a, x^4, λ_2, λ_3 dans le domaine Λ:

$$|x_0^i - \bar{x}^i| \leq d, \quad |x_0^4| \leq \varepsilon(x_0^i), \quad 0 \leq x^4 \leq x_0^4,\ 0 \leq \lambda_2 \leq \pi,\ 0 \leq \lambda_3 \leq 2\pi.$$

[1] Les X trouvés satisfaisant à $|X - \overline{X}_0| \leq d$ nous pouvons calculer $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}(x^a)$ en remplaçant x^i par la fonction X correspondante.

Ces fonctions prennent pour $x^4 = x_0^4$ les valeurs données Ω_0 et satisfont aux inégalités

(16.1) $$|\Omega_1 - \Omega_0| \leq h,$$

où h est un nombre donné.

Nous supposerons de plus que

$$|\Omega_1 - \Omega_0| \leq N\,|x^4 - x_0^4|,$$

où N est un nombre que nous préciserons plus loin. Les fonctions $\tilde{\Omega}_1$, quotients par $x^4 - x_0^4$ des fonctions Ω_1 qui s'annulent identiquement pour $x^4 = x_0^4$, sont alors bornées dans le domaine Λ:

(16.2) $$|\Omega_1| \leq N.$$

Les fonctions Ω_1 seront supposés continues dans Λ.

2°) m_2 de ces coordonnées (m_2 est le nombre des fonctions W et U) sont des fonctions W_1, U_1 continues et bornées des quatre variables x^α dans le domaine (D):

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x^4| \leq \varepsilon\,(x_0^i).$$

Ces fonctions prennent pour $x^4 = 0$ les valeurs W_0 et U_0 définies par les données de Cauchy et satisfont aux inégalités

(16.3) $$|W_1 - W_0| \leq l, \qquad |U_1 - U_0| \leq l.$$

(l est le même nombre que celui figurant dans les hypothèses B). Les fonctions Ω_0, W_0, U_0 définissent un point $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{F}$.

17. Distance de deux points de $\mathcal{F}$.

Nous définissons dans l'espace $\mathcal{F}$ la distance de deux points $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_1'$ par la somme des bornes supérieures, dans les domaines de variation respectifs de leurs arguments, des valeurs absolues des différences de leurs coordonnées:

$$d\,(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_1') = \mathrm{Max}\,\{\Sigma\,|\Omega_1' - \Omega_1| + \Sigma\,|W_1' - W_1| + \Sigma\,|U_1' - U_1|\}.$$

L'espace $\mathcal{F}$ est alors, comme l'espace $\mathcal{E}$, un espace normé, complet (topologie de la convergence uniforme) et compact.

18. Représentation de l'espace $\mathcal{F}$.

Au point $\mathcal{M}_1$ de l'espace $\mathcal{F}$ nous associons un point $\mathcal{M}_2$ dont les coordonnées Ω_2, W_2, U_2 sont définies par

$$
(18.1) \qquad
\begin{aligned}
\Omega_2 &= \int_{x_0^4}^{x^4} F_1\, d x^4 + \Omega_0\,, \\
W_2 &= \int_0^{x^4} G_1\, d x^4 + W_0\,, \\
4\pi\, U_2 &= \int_{x_0^4}^{0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} H_1\, d x^4 + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3\,.
\end{aligned}
$$

F_1, G_1, H_1, I_1 désignent les quantités F, G, H, I, figurant dans les équations (2), (3) et (4), calculées à l'aide des fonctions X, solution des équations (1), et en remplaçant les fonctions inconnues Ω, W, U par les coordonnées Ω_1, W_1, U_1 du point $\mathfrak{M}_1$.

Montrons que la représentation (18.1) est une représentation de l'espace F dans lui-même si $\varepsilon(x_0^i)$ est convenablement choisi.

1°) F_1 s'exprime rationellement (cf § 6) au moyen d'une part des $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, f_s, $\overset{(1)}{W}_s$, de leurs dérivées partielles jusqu'au troisième ordre et des $\overset{(1)}{a}{}_0^{\alpha\beta}$ et $\overset{(1)}{a}{}^0_{\alpha\beta}$ (fonctions données des X), d'autre part des Ω_1. Toutes ces fonctions sont de fonctions continues et bornées des sept arguments x_0^α; x^4, λ_2, λ_3. Le dénominateur $\overset{(\,)}{T}{}^{*4}$ de ces fractions F_1 n'étant pas nul ($\overset{(1)}{T}{}^{4*} \geq \frac{1}{2}$ d'après 12.2), les F_1 sont des fonctions continues et bornées des x_0^α, x_4, λ_2, λ_3:

$$|F_1| \leq N,$$

N ne dépendant que des bornes B et de h.

Les Ω_2 et $\tilde{\Omega}_2$ sont donc des fonctions continues et bornées de leurs arguments et vérifient

$$(18.2) \qquad |\Omega_2 - \Omega_0| \leq N\,|x_0^4 - x^4|, \qquad \tilde{\Omega}_2 \leq N.$$

Si $\varepsilon(x_0^i)$ satisfait à $\varepsilon(x_0^i) \leq \dfrac{h}{N}$

nous aurons

$$|\Omega_2 - \Omega_0| \leq h.$$

Ω_2 satisfait alors aux mêmes conditions que Ω_1, le nombre N (borne supérieure des F_1 dans Λ), figurant dans l'inégalité (16.2), ayant été choisi pour qu'il en soit ainsi.

2°) G_1 étant un U_1 on un W_1, les W_2 sont continus et bornés dans D par un nombre P ne dépendant que des bornes (B)

$$|W_2 - W_0| \leq |x^4 P|,$$

d'où, pour $\varepsilon(x_0^i) \leq \dfrac{l}{p}$,

$$|W_2 - W_0| \leq l.$$

3°) Montrons que les fonctions H_1 sont bornées par un nombre ne dépendant que des bornes (B), (B') et de h.

a) Considérons la quantité $\overset{(1)}{D}{}^*$ figurant au dénominateur. $\overset{(1)}{D}{}^*$ est un polynôme des fonctions $\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}$, X, $\tilde{X}$ et p_i^0 qui prend la valeur -1 pour $x^4 = x_0^4$ et $X = X_0$. D'après les inégalités (14.2) (13.3), vérifiées par les fonctions x^i et la variable x^4 dans le domaine Λ, $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ vérifie des conditions de Lipschitz par rapport aux x^α dans Λ. Il résulte donc des inégalités vérifiées par les fonctions X et $\tilde{X}$ et des hypothèses (B) que

$$|\overset{(1)}{D}{}^* + 1| \leq D' \{\Sigma |X - X_0| + |x^4 - x_0^4|\} \leq D' (m M + 1)\, \varepsilon (x_0^i),$$

où D' est un nombre qui ne dépend que des bornes (B) et (B'). Nous pourrons donc choisir $\varepsilon (x_0^i)$ assez petit pour que $\overset{(1)}{D}{}^*$ soit non nul. Nous voyons par exemple que

$$\varepsilon (x_0^i) \leq \frac{1}{2 D' (m M + 1)} \tag{18.2}$$

entraîne

$$|\overset{(1)}{D}{}^*| \geq \tfrac{1}{2} \quad \text{dans } \Lambda. \tag{18.3}$$

b) Considérons la fraction rationnelle H_{1a} (cf § 6) de dénominateur $(\overset{(1)}{D}{}^*)^3 (x_0^4 - x^4)\, \overset{(1)}{T}{}^{*4}$. Son numérateur est le produit par $([U_R]_1\, \omega_{S_1}^R)$ d'un polynôme p des fonctions $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{W}_s$, de leurs dérivées partielles premières et deuxièmes et des fonctions X, $\tilde{X}$ et p_i^0: quantités toutes connues, possédant les mêmes propriétés qu'au chapitre I (§ 15). Le quotient par $x_0^4 - x^4$ du polynôme p (qui s'annule pour $x^4 = x_0^4$) est donc une fonction continue et bornée dans Λ. La borne de cette fonction se déduit des conditions de Lipschitz vérifiées par p (polynôme de fonctions bornées vérifiant des conditions de Lipschitz par rapport aux X et x^4):

$$p \leq P' \{\Sigma |X - X_0| + |x^4 - x_0^4|\}.$$

P' est un nombre qui ne dépend que des bornes B et B'.

Nous avons donc

$$\frac{p}{x_0^4 - x^4} \leq P' (m M + 1).$$

Les H_{1a} peuvent donc se mettre sous forme de fractions de numérateur

$$[U_R]_1\, \omega_{S_1}^R \frac{p}{x_0^4 - x^4},$$

continu et borné dans Λ, et de dénominateur $\overset{(1)}{D}{}^*\, \overset{(1)}{T}{}^{*4}$ continu et borné dans Λ. Les H_{1a} sont donc continues et bornées dans Λ, leur borne ne dépendant que des bornes B, B' et h.

c) Les H_{1b} (cf § 6), fractions rationnelles de dénominateur non nuls des fonctions continues et bornées dans Λ sont continues et bornées dans Λ. Nous voyons finalement que les H_1 sont continues et bornées dans Λ:

$$|H_1| \leq Q,$$

où Q ne dépend que des bornes B, B' et h.

3°) Considérons I_1. Rappelons que

$$I = \left\{ E_S^{i\,*} \frac{D^* p_i}{T^{*\,4}} (x_0^4 - x^4)^2 \sin \lambda_2 \right\}_{x_4=0}. \tag{18.10}$$

Les E_S^{*i} étant donnés par l'égalité du chapitre I font intervenir les dérivées partielles des σ_S^R par rapport aux x^i du premier ordre seulement, et linéairement; les résultats du chapitre I montrent alors que les $E_{S_1}^{i\,*} (x_0^4 - x^4)^2$ sont continues et bornées dans Λ puisque X, $\tilde{X}$, $\overset{(1)}{D}$, $\overset{(1)}{D^*}$ et leurs dérivées partielles possèdent les mêmes propriétés qu'au chapitre I et que les Ω_1 et $\tilde{\Omega}_1$ sont continues et bornées. Nous remarquons de plus que les produits de tous les termes des $(E_S^{i\,*})_1$ par $x_0^4 - x^4$ sont bornés (cf. chapitre I et les inégalités précédentes) par un nombre R_1 qui ne dépend que des bornes B, B' et h, à l'exception du terme

$$- [U_R]_1\, \omega_{S_1}^R\, [\overset{(1)}{A^{ij}}] \frac{\partial \overset{(1)}{\sigma}}{\partial x^j}. \tag{18.4}$$

Nous avons donc

$$I_1 \leq R_1 |x_0^4| + \Phi_R\, (\omega_{S_1}^R)_{x^4=0} \left\{ \overset{(1)}{A^{ij}} \frac{\partial \overset{(1)}{\sigma}}{\partial x^j} p_i \frac{\overset{(1)}{D^*}}{\overset{(1)}{T^{*\,4}}} (x_0^4 - x^4)^2 \right\}_{x^4=0} \sin \lambda_2. \tag{18.5}$$

La quantité entre les parenthèses, J, est une quantité connue, qui vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux fonctions X, $\tilde{X}$ et la variable x^4 et qui prend la valeur 1 pour $x^4 = x_0^4$. Nous avons donc dans Λ:

$$|J - 1| \leq R_2 |x^4 - x_0^4| \quad \text{et} \quad |(J)_{x^4=0} - 1| \leq R_2 |x_0^4|, \tag{18.6}$$

où R_2 est un nombre qui ne dépend que des bornes B, B' et h. Nous déduisons d'ailleurs de l'inégalité (16.1), vérifiée par les fonctions Ω,

$$|(\omega_{S_1}^R)_{x^4=0} - \delta_S^R| \leq N |x_0^4|. \tag{18.7}$$

Nous déduisons des inégalités (18.5), (18.6), (18.7)

$$|I_1 - \Phi_S \sin \lambda_2| \leq R_3 |x_0^4|,$$

où R_3 est un nombre qui ne dépend que des bornes B, B' et h.

L'inégalité précédente est vérifiée en tout point $x^i(x_0^i, 0, \lambda_2, \lambda_3)$ du domaine d. Nous avons supposé d'autre part (hypothéses B') que les Φ_S vérifiaient des conditions de Lipschitz par rapport aux x^i:

$$|\Phi_S(x^i) - \Phi_S(x_0^i)| \leq l_0' |x^i - x_0^i|.$$

Les x^i vérifiant (cf 13.4) $|x^i - x_0^i| \leq M_1 |x_0^4 - x^4|$ et étant pris ici pour valeur $x^4 = 0$, nous avons

$$|\Phi_S(x^i) - \Phi_S(x_0^i)| \leq l_0' M |x_0^4|.$$

Nous voyons finalement qu'il existe un nombre R, ne dépendant que des bornes (B), (B') et h, tel que

$$|I_1 - \Phi_S(x_0^i) \sin \lambda_2| \leq R |x_0^4|.$$

Les fonctions

$$U_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{x_0^4}^{0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} H_1 \, dx^4 \, d\lambda_2 \, d\lambda_3 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_1 \, d\lambda_2 \, d\lambda_3$$

sont donc continues et bornées des x_0^α et vérifient, $\Phi_S(x_0^i)$ ayant été désigné par U_0, l'inégalité

$$|U_2 - U_0| \leq |x_0^4| \frac{\pi}{2} (Q + R),$$

d'où pour

$$\varepsilon(x_0^i) \leq \frac{2l}{\pi(Q+R)} \tag{18.8}$$

nous aurons

$$|U_2 - U_0| \leq l.$$

Les fonctions Ω_2, W_2, U_2 possèdent alors les mêmes propriétés que Ω_1, W_1, U_1. Le point $\mathfrak{M}_2$ est donc un point de $\mathfrak{F}$ si (x_0^i) vérifie, outre les inégalités qui lui furent imposées dans la résolution des équations (1), les inégalités (18.9), (18.2), (18.8).

19. Distance de deux points représentatifs.

Calculons la distance des points $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2'$ représentatifs de $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1'$. Nous déduirons des équations (16.3), définissant la représentation, que dans le domaine Ω nous avons

1°) $$\Omega_2' - \Omega_2 \leq |x_0^4 - x^4| \operatorname*{Max}_{\Lambda} |F_1' - F_1|.$$

Il résulte de l'expression F_1, des hypothèses (B) et des hypothèses faites sur Ω_1 et W_1 que F_1 vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux fonctions Ω_1 et W_1 dont le coefficient N' ne depend que des bornes (B) et h. D'où l'inégalité

$$|\Omega_2' - \Omega_2| \leq N' |x_0^4 - x^4| \operatorname{Max} \{\Sigma |\Omega_1' - \Omega_1| + \Sigma |W_1' - W_1|\}. \tag{19.1}$$

2°) $$|W_2' - W_2| \leq |x^4| \operatorname*{Max}_D |G_1' - G_1|.$$

G_1 étant une fonction W_1 ou une fonction U_1 nous avons

$$|W_2' - W_2| \leq |x^4| \operatorname*{Max}_D \{\Sigma |W_1' - W_1| + \Sigma |U_1' - U_1|\}.$$

3°) $$|U_2' - U_2| \leq \frac{\pi}{2} |x_0^4| \operatorname*{Max}_D |H_1' - H_1| + \frac{\pi}{2} \operatorname*{Max}_d (I_1' - I_1).$$

a) Il résulte de l'expression de H_1 (en particulier du fait que le polynôme p, figurant au numérateur de la fonction H_a, est indépendant du point $\mathfrak{M}_1$ de F considéré), des hypothèses (B) et des inégalités du § 18 que H_1 vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux fonctions Ω_1, $\tilde{\Omega}_1$, W_1, U_1 dont le coefficient R_1' ne dépend que des bornes (B), (B') et h:

$$|H_1' - H_1| \leq R_1' \{\Sigma |\Omega_1' - \Omega_1| + \Sigma |\tilde{\Omega}_1' - \tilde{\Omega}_1| + \Sigma |W_1' - W_1| + \Sigma |U_1' - U_1|\}.$$

b) Considérons la quantité I_1, donnée par l'égalité (18.10), où les seules fonctions inconnues sont les fonctions $(\Omega_1)_{x^4=0}$. L'expression de E_S^i $\left(\text{en particulier celle de } \frac{\partial \omega_S^R}{\partial x^i}\right)$, les résultats du chapitre I et ceux obtenus lors de la résolution des équations (1), les hypothèses (B) et celles faites sur Ω_1 montrent que le produit $\{E_{S_1}^i (x_0^4 - x^4)^2\}_{x^4=0}$ vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux fonctions $(\Omega_1)_{x^4=0}$ dont le coefficient R_2' ne dépend que des bornes (B), (B') et h:

$$|I_1' - I_1| \leq R_2' \Sigma |\Omega_1' - \Omega_1|_{x^4=0}.$$

Nous avons donc

$$(19.2) \quad |U_2' - U_2| \leq R_2' |x_0^4| \operatorname*{Max}_D \{\Sigma |\Omega_1' - \Omega_1| + \Sigma |\tilde{\Omega}_1' - \Omega_1| + \Sigma |W_1' - W_1| + \\ + \Sigma |U_1' - U_1|\} + \frac{\pi}{2} R_2' \operatorname*{Max}_d \Sigma |\Omega_1' - \Omega_1|_{x^4=0}.$$

Considérons alors le point $\mathfrak{M}_3$ représentatif du point $\mathfrak{M}_2$ (c'est-à-dire obtenu à partir de $\mathfrak{M}_2$ par des égalités analogues à (18.1)). La transformation qui fait passer de $\mathfrak{M}_1$ à $\mathfrak{M}_3$ est une représentation de l'espace F dans lui-même. Calculons la distance de deux points représentatifs.

Nous déduirons de l'inégalité (19.1)

$$(19.3) \quad |\tilde{\Omega}_2' - \tilde{\Omega}_2| \leq N' \operatorname*{Max}_\Delta \{\Sigma |\Omega_1' - \Omega_1| + \Sigma |W_1' - W_1'|\}.$$

Les inégalités (19.1), (19.2) et (19.3), écrites successivement pour les représentations $\mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{M}_3$, montrent alors sans aucune difficulté qu'il existe un nombre α, non nul, ne dépendant que des bornes (B), (B') et h tel que pour

$$\varepsilon(x_0^i) < \alpha$$

on ait

$$d(\mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_3') < k\, d(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1'),$$

où k est un nombre donné inférieur à 1.

La représentation de l'espace $\mathfrak{F}$ dans lui-même qui fait passer de $\mathfrak{M}_1$ à $\mathfrak{M}_3$ admet alors un point fixe unique, il en est de même de la représentation (18.1) primitivement donnée.

20. Conclusion. Il existe un nombre $\varepsilon(x_0^i)$ ne dépendant que des bornes (B), (B') et h (et non nul) tel que dans les domaines respectifs:

1) $$|x_0^i - \bar{x}^i| \leq d, \quad |x_0^4| \leq \varepsilon(x_0^i), \quad 0 \leq x^4 \leq x_0^4, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \lambda_3 \leq 2\pi$$

2) $$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \quad |x^4| \leq \varepsilon(x_0^i).$$

Les équations (2), (3) et (4) ont une solution unique, continue et bornée $\Omega(x_0^\alpha, x^4, \lambda_2, \lambda_3)$ et $W(x^\alpha)$, $U(x^\alpha)$ vérifiant les inégalités

$$|\Omega - \Omega_0| \leq h, \quad |W - W_0| \leq l, \quad |U - U_0| \leq l.$$

Nous montrerons de plus que les fonctions W et U obtenues satisfont, comme $\overset{(1)}{W}$ et $\overset{(1)}{U}$, à des conditions de Lipschitz par rapport aux variables x^i.

21. Les fonctions $W(x^\alpha)$ et $U(x^\alpha)$ vérifient des conditions de Lipschitz par rapport aux variables x^i.

Pour démontrer que les fonctions W et U, solutions trouvées des équations (2), (3) et (4) satisfont à des conditions de Lipschitz par rapport aux x^i il suffit de faire sur l'espace fonctionnel $\mathfrak{F}$ précédemment considéré les hypothèses supplémentaires suivantes:

Hypothèses.

1°) Les fonctions Ω_1 et $\tilde{\Omega}_1$ satisfont à des conditions de Lipschitz par rapport aux trois arguments x_0^i

(21.1) $$|\Omega_1(x_0^i, x_0^4, x^4, \lambda_2, \lambda_3) - \Omega_1(x_0'^i, x_0^4, x^4, \lambda_2, \lambda_3)| \leq h' \Sigma |x_0'^i - x_0^i|$$

avec $h' \leq |x_0^4 - x^4| N'$; en particulier

(21.2) $$|\tilde{\Omega}_1(x_0^i, \ldots) - \tilde{\Omega}_1(x_0'^i, \ldots)| \leq N' \Sigma |x_0'^i - x_0^i|,$$

où h' est un nombre donné arbitraire, N' un nombre que nous préciserons plus loin, fonction des bornes précédentes.

2°) Les fonctions W_1 et U_1 satisfont à des conditions de Lipschitz par rapport aux x^i:

$$(21.3)\qquad \begin{aligned} &|W_1(x'^i, x^4) - W_1(x^i, x^4)| \le l \Sigma |x'^i - x^i|, \\ &|U_1(x'^i, x^4) - U_1(x^i, x^4)| \le l \Sigma |x'^i - x^i| \end{aligned}$$

22. Représentation de $\mathcal{F}$ dans lui-même.

$\mathcal{F}$, muni de la norme précédente, est encore un espace normé, complet et compact. Montrons que les points représentatifs $\mathcal{M}_2$ des points $\mathcal{M}_1 \in \mathcal{F}$ sont encore des points de $\mathcal{F}$ si $\varepsilon(x_0^i)$ est convenablement choisi.

1°)

$$(22.1)\qquad \Omega_2(x_0'^i, \ldots) - \Omega_2(x_0^i, \ldots) = \int_{x_0^4}^{x^4} (F_1(x_0'^i, \ldots) - F_1(x_0^i, \ldots))\, dx^4.$$

Les quantités $F_1(x_0'^i, \ldots)$ et $F_1(x_0^i, \ldots)$ sont calculées respectivement à l'aide des fonctions $X(x_0'^i, \ldots)$ (en particulier $x^i(x_0'^i, \ldots)$), $\Omega_1(x_0'^i, \ldots)$ et $x^i(x_0^i, \ldots)$, $\Omega_1(x_0^i, \ldots)$.

Il résulte de l'expression de F_1, des hypothèses faites (en particulier de (14.2) et (18.2)) que

$$(22.2)\qquad \begin{aligned} &|F_1(x_0'^i, \ldots) - F_1(x_0^i, \ldots)| \le N' \Sigma |x_0'^i - x_0^i|, \\ &|\Omega_2(x_0'^i, \ldots) - \Omega_2(x_0^i, \ldots)| \le |x_0^4 - x^4| N' \Sigma |x_0'^i - x_0^i|, \end{aligned}$$

si $\varepsilon(x_0^i)$ satisfait à

$$\varepsilon(x_0^i) \le \frac{h'}{N'}.$$

Nous aurons donc

$$(22.3)\qquad |\Omega_2(x_0'^i, \ldots) - \Omega_2(x_0^i, \ldots)| \le h' \Sigma |x_0'^i - x_0^i|.$$

Si N' désigne le nombre, ne dépendant que des bornes (B), (B') et h, figurant dans l'inégalité (21.2), nous aurons également

$$|\tilde{\Omega}_2(x_0'^i, \ldots) - \tilde{\Omega}_2(x_0^i, \ldots)| \le N' \Sigma |x_0'^i - x_0^i|.$$

2°)

$$(22.4)\qquad |W_2(x'^i, x^4) - W_2(x^i, x^4)| = \int_0^{x^4} (G_1(x'^i, t) - G_1(x^i, t))\, dt + W_0(x'^i) - W_0(x^i).$$

G_1 étant une fonction W_1 ou une fonction U_1 l'inégalité (21.3) montre, avec les hypothèses B' sur les données de Cauchy, qu'on a

$$|W_2(x'^i, x^4) - W_2(x^i, x^4)| \le |x^4| \, l \Sigma |x'^i - x^i| + l_0 \Sigma |x'^i - x^i|.$$

On voit alors que

$$\varepsilon(x_0^i) \leq \frac{l - l_0}{l}$$

entraîne

$$|W_2(x'^i, x^4) - W_2(x^i, x^4)| \leq l \Sigma |x'^i - x^i|.$$

$$3^\circ) \quad U_2(x_0'^i, x_0^4) - U_2(x_0^i, x_0^4) = \int_{x_0^4}^{0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [H_1(x_0'^i, \ldots) - H_1(x_0^i, \ldots)]\, dx^4\, d\lambda_2\, d\lambda_3 +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [I_1(x_0'^i, \ldots) - I_1(x_0^i, \ldots)]\, d\lambda_2\, d\lambda_3.$$

Les quantités $H_1(x_0'^i)$, $I_1(x_0'^i)$ et $H_1(x_0^i)$, $I_1(x_0^i)$ sont calculées respectivement à l'aide des fonctions $X(x_0'^i, \ldots)$ (en particulier $x^i(x_0^i, \ldots)$, $\Omega_1(x_0'^i, \ldots)$ et $X(x_0^i, \ldots)$, $\Omega_1(x_0^i, \ldots)$).

Quantité H_1.

a) *Considérons le polynôme* p figurant au numérateur de H_{1a}. p est un polynôme des fonctions $[\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}]$, $\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha)$, de leurs dérivées partielles premières et deuxièmes, des fonctions X, $\tilde{X}$ et p_i^0.

Le développement en série de Taylor de ce polynôme, à partir des valeurs

$$[\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}]_0 = \delta_\lambda^\mu, \quad \left[\frac{\partial \overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right] = \left[\frac{\partial \overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}\right]_0, \ \ldots,$$

$$\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha) = \overset{(1)}{W}_s(x_0^\alpha), \quad \overset{(1)}{W}_{s\alpha}(x^\alpha) = \overset{(1)}{W}_{s\alpha}(x_0^\alpha), \ \ldots, \quad X = X_0, \quad \tilde{X} = \tilde{X}_0$$

(valeurs des fonctions correspondantes pour la valeur x_0^4 du paramètre x^4) pour lesquelles le polynôme p s'annulle, montre que p est un polynome des fonctions déjà énumérées, et des fonctions $[\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}] - \delta_\lambda^\mu, \ldots, \overset{(1)}{W}_s(x^\alpha) - \overset{(1)}{W}_s(x_0^\alpha), \ldots, \tilde{X} - \tilde{X}_0, X - X_0$ *dont les termes sont du premier degré au moins par rapport à l'ensemble de ces dernières fonctions.*

La quantité $\dfrac{p}{x_0^4 - x^4}$ est donc un polynôme des fonctions

$$\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}, \ldots, \overset{(1)}{W}_s(x^\alpha), \ldots, X, \tilde{X}, p_i^0$$

et des fonctions

$$\frac{[\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}] - \delta_\lambda^\mu}{x_0^4 - x^4}, \ \frac{\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha) - \overset{(1)}{W}_s(x_0^\alpha)}{x_0^4 - x^4}, \ \ldots, \ \frac{X - X_0}{x_0^4 - x^4}, \ \frac{\tilde{X} - \tilde{X}_0}{x_0^4 - x^4}.$$

Les coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}$ et les fonctions $\overset{(1)}{W}_s$ admettant des dérivées bornées par rapport aux x^α jusqu'au quatrième ordre, alors que les fonctions considérées ne font intervenir que les dérivées des deux premiers ordres, il résulte des hypothèses (B) et des inégalités (13.4) et (14.1), vérifiées par X et $\tilde{X}$, que toutes les fonctions énumérées sont bornées dans Λ par un nombre qui ne dépend que des bornes (B) et (B').

Le polynôme $\frac{p}{x_0^4 - x^4}$ vérifie donc une condition de Lipschitz par rapport à chacune de ces fonctions, dont le coefficient ne dépend que des bornes (B) et (B'). Montrons que ces fonctions elles-mêmes vérifient des conditions de Lipschitz par rapport aux x_0^i. Il nous suffit d'après les hypothèses (B) et les inégalités du § 13 de montrer ce résultat pour:

1) les fonctions $\frac{[\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}] - \delta_\lambda^\mu}{x_0^4 - x^4}$ et $\frac{\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha) - \overset{(1)}{W}_s(x_0^\alpha)}{x_0^4 - x^4}$ et les fonctions analogues écrites avec les dérivées partielles premières et deuxièmes des $\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}$ et $\overset{(1)}{W}_s$ par rapport aux x^α;

2) les fonctions $\frac{X - X_0}{x_0^4 - x^4}$.

1) Posons

$$F(x_0^i, x_0^4, x^4, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu} - \delta_\lambda^\mu}{x_0^4 - x^4},$$

où

$$\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu} - \delta_\lambda^\mu = A^{*\lambda\mu}(\overset{(1)}{W}_s(x^i, x^4), \overset{(1)}{W}_s(x_0^i, x_0^4), x^i, x^4, x_0^i, x_0^4) - $$
$$ - A^{*\lambda\mu}(\overset{(1)}{W}_s(x_0^i, x_0^4), \overset{(1)}{W}_s(x_0^i, x_0^4), x_0^i, x_0^4, x_0^i, x_0^4)$$

avec $x^i = x^i(x_0^i, x_0^4, x^4, \lambda_2, \lambda_3)$.

Considérons la quantité $F(x_0'^i, \ldots) - F(x_i^0, \ldots)$. La fonction figurant au numérateur s'annule pour $x^4 = x_0^4$ (puisque les deux fonctions $F(x_0^i, \ldots)$ et $F(x_i^0, \ldots)$ s'annullent) et elle admet une dérivée par rapport à x^4 continue et bornée dans le domaine Λ (puisque il en est ainsi des fonctions $F(x_0^i, \ldots)$ et $\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{W}_s$ et x^i). Nous avons donc (formule des accroissements finis)

$$F(x_0'^i, \ldots) - F(x_0^i, \ldots) =$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x^4}[(\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}(x_0'^i, \ldots) - \delta_\lambda^\mu) - (\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}(x_0^i, \ldots) - \delta_\lambda^\mu)]\right\}_{x^4 = x_0{}^4 - \theta(x^4 - x_0{}^4)},$$

où θ est un nombre compris entre 0 et 1.

La dérivée par rapport aux paramètre x^4 de la fonction $\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}(x_0'^i, \ldots)$ vérifiant une condition de Lipschitz par rapport aux x_0^i (hypothèses B et B' résultats § 14), dont le coefficient ne dépend que des bornes (B) et (B'), nous voyons finalement que

$$F(x_0'^i, \ldots) - F(x_0^i, \ldots) \leq L_1 \Sigma |x_0'^i - x_0^i|$$

où L_1 ne dépend que des bornes (B) et (B'). C.q.f.d.

La même démonstration est valable pour la fonction $\dfrac{\overset{(1)}{W}_s(x^\alpha) - \overset{(1)}{W}_s(x_0^\alpha)}{x_0^4 - x^4}$ et pour les fonctions construites avec les dérivées partielles des $\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}$ ou $\overset{(1)}{W}_s$ *jusqu'au troisième ordre inclus.*

2) Nous avons (cf § 14)

$$\tilde{X} - \tilde{X}_0 = \frac{\int_{x_0^4}^{x^4} (E - E_0)\, d x^4}{x_0^4 - x^4},$$

d'où

$$(\tilde{X} - \tilde{X}_0)_{x_0'^i} - (\tilde{X} - \tilde{X}_0)_{x_0^i} = \frac{\int_{x_0^4}^{x^4} [(E - E_0)_{x_0'^i} - (E - E_0)_{x_0^i}]\, d x^4}{x_0^4 - x^4},$$

E étant une fraction rationnelle de dénominateur $\overset{(1)}{T}{}^{*4}$ des coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu}$ et de leurs dérivées partielles jusqu'au troisième ordre (les dérivées partielles du quatrième ordre n'interviennent que dans les équations (1) ayant au premier membre z^i_{jhk}, alors que X correspond aux seules fonctions y^j_i, y^j_{ih}, y^j_{ihk}) et des fonctions X, nous pouvons écrire $E - E_0$ sous forme de fraction rationnelle de dénominateur $\overset{(1)}{T}{}^{*4}$ (puisque $\overset{(1)}{T}{}^{*4} = 1$ pour $x^4 = x_0^4$) des fonctions précédentes et des fonctions $X - X_0$, $\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu} - \delta^\mu_\lambda$, ... dont le dénominateur a tous ses termes du premier degré au moins par rapport à l'ensemble de ces fonctions. Nous pouvons alors écrire

$$E - E_0 = (x_0^4 - x^4)\, F,$$

où F est une fraction rationnelle de dénominateur $\overset{(1)}{T}{}^{*4}$ des fonctions précédentes et des fonctions

$$\frac{X - X_0}{x_0^4 - x^4},\ \frac{\overset{(1)}{A}{}^{*\lambda\mu} - \delta^\mu_\lambda}{x_0^4 - x^4},\ \ldots$$

Toutes ces fonctions vérifiant des conditions de Lipschitz par rapport aux x_0^i il est clair que

$$|(E - E_0)_{x_0'^i} - (E - E_0)_{x_0^i}| \leq L_2\, |x_0^4 - x^4|\, \Sigma\, |x_0'^i - x_0^i|,$$

d'où

$$|(X - X_0)_{x_0'^i} - (X - X_0)_{x_0^i}| \leq \frac{L_1}{2}\, |x_0^4 - x^4|$$

et

$$\left| \left(\frac{X - X_0}{x_0^4 - x^4}\right)_{x_0'^i} - \left(\frac{X - X_0}{x_0^4 - x^4}\right)_{x_0^i} \right| \leq \frac{L_2}{2} \cdot \quad \text{C. q. f. d.}$$

Nous avons donc démontré que la quantité $\frac{p}{x_0^4 - x^4}$ vérifie une condition de Lipschitz, par rapport aux x_0^i, dont le coefficient ne dépend que des bornes (B) et (B').

b) Il ne reste alors aucune difficulté pour démontrer que la quantité H_1 (produit de la racine carrée d'une fraction rationnelle de numérateur 1 et de dénominateur non nul par une fraction rationnelle de dénominateur non nul des fonctions bornées vérifiant toutes les conditions de Lipschitz par rapport aux x_0^i) vérifie dans Λ une condition de Lipschitz par rapport aux x_0^i dont le coefficient Q' ne dépend que des bornes (B), (B'), h et h'

$$|H_1' - H_1| \leq Q' \, \Sigma \, |x_0'^i - x_0^i|.$$

Quantité I_1.

On démontre aisément, en considérant l'expression de I_1 et les inégalités précédentes, que tous les termes de I_1, à l'exception du terme (18.4), vérifient des conditions de Lipschitz par rapport aux x_0^i dont le coefficient est de la forme $R_1' \, |x_0^4|$, où R_1' est un nombre qui ne dépend que des bornes (B) et (B').

Considérons le terme (18.4). On démontre (démonstration analogue à celles utilisées pour H_1) que $\frac{J(x_0^i) - 1}{x_0^4 - x^4}$ vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux variables x_0^i, d'où

$$|J(x_0'^i) - J(x_0^i)|_{x^4=0} \leq R_2' \, |x_0^4| \, \Sigma \, |x_0'^i - x_0^i|,$$

d'où, en utilisant l'inégalité (21.1) et les inégalités du § 18

$$|I_0(x_0'^i) - I_1(x_0^i)| \leq |x_0^4| \, R_0'' \, \Sigma \, |x_0'^i - x_0^i| + |U_0(x_0'^i) - U_0(x_0^i)| \, (1 + R_2'' \, |x_0^4|).$$

On déduit alors des conditions de Lipschitz, vérifiées par U_0,

$$|I_1(x_0'^i) - I_1(x_0^i)| \leq (R' \, |x_0^4| + l_0) \, \Sigma \, |x_0'^i - x_0^i|,$$

où R' est un nombre qui ne dépend que des bornes B et B'.

Nous déduirons finalement des conditions de Lipschitz, vérifiées par H_1 et I_1, que

$$|U_2(x_0'^i, x_0^4) - U_2(x_0^i, x_0^4)| \leq \frac{\pi}{2} \left[(Q' + R') \, |x_0^4| + l_0 \right] \Sigma \, |x_0'^i - x_0^i|$$

donc que l'inégalité

$$\varepsilon(x_0^i) \leq \frac{l - l_0}{Q' + R'} \, \frac{2}{\pi}$$

entraîne

$$|U_2(x_0'^i, x^4) - U_2(x^i, x^4)| \leq l \, \Sigma \, |x'^i - x^i|.$$

Conclusion. Les inégalités du § 22 montrent que, si $\varepsilon(x_0^i)$ satisfait aux inégalités correspondantes, le point $\mathfrak{M}_2$ est encore, avec les hypothèses supplémentaires faites, un point de F. L'application du théorème du point fixe montre que, dans la domaine D, les fonctions W et U satisfont à des conditions de Lipschitz par rapport aux x^i de coefficient l.

Les fonctions W et U, solutions des équations intégrales (J_1), satisfont donc, dans D, aux mêmes inégalités que les fonctions $\overset{(1)}{W}, \ldots \overset{(1)}{U}$.

II. Resolution des équations G_1.

Nous montrerons maintenant que les fonctions W_s, solutions des équations I_1, sont solutions des équations G_1 et que les fonctions $W_{s\alpha}, \ldots U_S$, solutions des équations I_1, sont les dérivées partielles (jusqu'au quatrième ordre) des W_s, dans un domaine D ne dépendant que des bornes B et B'. Nous utiliserons pour la démonstration l'approximation des fonctions continues par des fonctions analytiques (méthode utilisée dans les problèmes analogues par Hadamard et de nombreux autres auteurs)

23. Coefficients et données de Cauchy analytiques.

Considérons des équations G_1 où les coefficients et données de Cauchy sont analytiques ($A^{\lambda\mu}$, f_s, $\overset{(1)}{W}_s$, φ_s et ψ_s fonctions analytiques de leurs divers arguments). Le problème de Cauchy relativement aux équations G_1 admet une solution analytique dans un voisinage V du domaine (d) de la surface $x^4=0$ qui porte les données initiales (théorème de Cauchy-Kowalevski.) Si les coefficients et les données de Cauchy satisfont aux hypothèses du chapitre II, il existe un voisinage V de (d) où cette solution satisfait aux équations intégrales I_1.

Considérons d'autre part, indépendamment des équations G_1, les équations intégrales I_1. (Nous montrerons au prochain paragraphe qu'elles admettent, à l'intérieur d'un domaine D qui ne dépend que des bornes B et B', une solution analytique unique qui coincide donc, dans la partie commune aux domaines V' et D^*, avec la solution des équations G_1. Ce principe de prolongement analytique montre alors que cette solution des équations I_1 est solution des equations G_1 dans D tout entier.[1]

24. Analyticité des solutions de I_1.

Montrons par exemple l'analyticité, dans D, de la solution des équations (1)

$$X=\int_{x_0^4}^{x^4} E\,dx^4+X_0,$$

quand E est une fonction analytique des quantités X, x_0^α, x^4, en étendant sa définition au domaine complexe:

[1] Étant solution des équations G_1 dans un domaine aussi voisin que l'on veut de D cette solution des équations I_1, qui est continue dans D, est solution des équations G_1 dans D.

E étant une fonction analytique des X, x_0^a, x^4, bornée par M dans le domaine $R\,(|X-\bar{X}_0|\le d,\ |x_0^i-\bar{x}^i|\le d,\ |x^4|\le|x_0^4|\le\varepsilon\,(x_0^i))$ de variation de ses arguments réels, est développable en série absolument convergente au voisinage de chaque point de R. Nous pouvons donc étendre la définition de E à un domaine de variation des arguments complexes $Z=X+iy$, $z_0^a=x_0^a+iy_0^a$, $z^4=x^4+iy^4$ en l'exprimant sous forme de série convergente, donc holomorphe dans les m cylindres V, centrés en un point quelconque de V et définis par

$$|Z'-X|\le a_X \qquad |z_0'^a-x_0^a|\le b_{x_0^a} \qquad |z^4-x^4|\le C_{x^4}.$$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial E}{\partial X_1}$ étant bornées par M' dans R (cf. conditions de Lipschitz vérifiées par E) on peut choisir les bornes a_X, $b_{x_0^a}$ et C_{x^4} de manière à ce que, dans v on ait

$$\left|\frac{\partial E}{\partial Z_1}\right|\le M'+\alpha', \quad \alpha' \text{ étant un nombre arbitrairement petit.}$$

On peut aussi choisir les bornes $b_{x_0^a}$ et C_{x^4} de manière à ce que, dans v, β étant un nombre arbitrairement petit, on ait

$$|I E\,(X_1,\,z_0^a,\,z^4)|\le\beta \qquad |R E\,(X_1,\,z_0^a,\,z^4)|\le M+\beta.$$

On peut d'autre part construire un recouvrement du domaine R au moyen d'un nombre fini de projections dans R des m cylindres précédents, les m cylindres correspondants déterminent un domaine $\bar{R}$ de l'espace des arguments complexes Z, z_0, z^4, qui vérifie les inégalités

$$|X-\bar{X}_0|\le d, \quad |x_0^i-\bar{x}^i|\le d, \quad |x^4|\le|x_0^4|\le\varepsilon\,(x_0^i),$$
$$|Y|\le a, \quad |y_0^a|\le b, \quad |y^4|\le c,$$

a, b, c étant des nombres non nuls, et dans lequel la fonction complexe E est définie, analytique. Écrivons:

$$E\,(Z_1,\,z_0^a,\,z^4)=E\,(Z_1,\,z_0^a,\,z^4)-E\,(X_1,\,z_0^a,\,z^4)+E\,(X_1,\,z_0^a,\,z^4),$$

d'où

$$|I E\,(Z_1,\,z_0^a,\,z^4)|\le m\,(M'+\alpha')\,a+\beta$$
$$|R E\,(Z_1,\,z_0^a,\,z^4)|\le m\,(M'+\alpha')\,a+\beta+M.$$

Considérons maintenant les équations (1), étendues au domaine complexe $\bar{R}$,

$$(\bar{1}) \qquad Z=\int_{z_0^4}^{z^4} E\,(Z,\,z_0^a,\,z^4)\,dz^4+Z_0.$$

Pour les résoudre nous considérons, comme dans le cas réel, un espace fonctionnel $\mathcal{E}$ défini par les fonctions de variables complexes $Z_1\,(z_0^a,\,z^4)$, réelles pour z_0^a et

z^4 réels, analytiques dans le domaine $\bar{D}$ $|x_0^i - \bar{x}^i| \leq d$, $|x^4| \leq |x_0^4| \leq \varepsilon(x_0^i)$, $|y_0^\alpha| \leq b$, $|y^4| \leq c$, et satisfaisant à $|X_1 - X_0| \leq d$, $|y_1| \leq a$.

1°) La représentation

$$Z_2 = \int_{z_0^4}^{z^4} E(Z_1, z_0^\alpha, z^4)\, dz^4 + Z_0$$

est une représentation de l'espace dans lui-même si $\varepsilon(x_0^i)$, b et c sont convenablement choisis. En effet:

1) Z_1 est une fonction analytique de z_0^α, z^4 puisqu'il en est ainsi de E, réelle pour z_0^α et z^4 réels.

2) De l'égalité

$$Z_2 = -\int_{x_0^4}^{x_0^4 + iy_0^4} E\, dz^4 + \int_{x_0^4}^{x^4} E\, dz^4 + \int_{x^4}^{x^4+iy^4} E\, dz^4 + Z_0$$

nous déduisons

$$|X_2 - X_0| \leq (b+c)\,[m(M'+\alpha')\,a + \beta] + |x_0^4 - x^4|\,[m(M'+\alpha')\,a + \beta + M]$$

$$|Y_2| \leq (b+c)\,[m(M'+\alpha')\,a + \beta + M] + |x_0^4 - x^4|\,[m(M'+\alpha')\,a + \beta].$$

Nous aurons donc

$$|X_2 - \bar{X}_0| \leq d \quad \text{si} \quad \varepsilon(x_0^i) \leq \frac{d - (b+c)\,[m(M'+\alpha')\,a + \beta]}{M + m(M'+\alpha')\,a + \beta}$$

et

$$|Y_2| \leq a \quad \text{si} \quad b + c \leq \frac{a\,[1 - m\,M'(x_0^4 - x^4)] - (m\,\alpha'\,a + \beta)(x_0^4 - x^4)}{M + m(M'+\alpha')\,a + \beta}.$$

Rappelons que le nombre

(1) $$\varepsilon(x_0^i) < \frac{1}{m\,M}.$$

Nous avons donc

(2) $$1 - m\,M'(x_0^4 - x^4) > 0.$$

Nous choisirons donc $\varepsilon(x_0^i)$ satisfaisant à (1); l'inégalité (2) montre que l'on peut trouver, sans hypothèses supplémentaires sur $\varepsilon(x_0^i)$, les nombres b et c définissant $\bar{D}$ (après avoir choisi α', a et β suffisamment petits), de manière à ce que $\mathcal{M}_2$ soit un point de F. Le domaine $\bar{D}$ a pour partie réelle un domaine aussi voisin que l'on veut de D.

2°) Montrons que la représentation diminue les distances. Nous avons vu que, dans $\bar{R}$, on a $\left|\frac{\partial E}{\partial Z_1}\right| \leq M' + \alpha'$, d'où

$$|E(Z_1', z_0^\alpha, z^4) - E(Z_1, z_0^\alpha, z^4)| \leq |Z_1' - Z_1|\,(M' + \alpha');$$

nous aurons donc

$$d(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}'_2) \leq m(M' + \alpha') |z_0^4 - z^4| d(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}'_1),$$

d'où

$$d(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}'_2) < d(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}'_1) \text{ si } |z_0^4 - z^4| < \frac{1}{mM' + \alpha'},$$

ce qui sera en particulier réalisé si

$$\varepsilon(x_0^i) < \frac{1}{mM' + \alpha'} - \eta \text{ et } b + c < \eta,$$

η étant un nombre arbitrairement petit.

La partie réelle du domaine $\bar{D}$ ainsi défini est encore aussi voisine que l'on veut de D.

Nous conclurons, comme dans le cas réel, que la représentation (I) admet un point fixe unique: les fonctions Z correspondantes sont solutions des équations (1), et analytiques, dans le domaine $\bar{D}$. Les fonctions X, valeurs de ces fonctions Z pour des arguments x_0^α, x^4 réelles sont des fonctions analytiques, solutions dans un domaine aussi voisin que l'on veut de D des équations (1).

Un résultat analogue se démontre de la même manière pour les équations (2), (3) et (4).

25. Coefficients et données de Cauchy ne satisfaisant qu'aux hypothèses B et B'.

Si les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s, ainsi que les fonctions données $\overset{(1)}{W}_s$ et les données de Cauchy, ne satisfont qu'aux hypothèses B et B' *nous approcherons uniformément ces quantités*, en même temps que leurs dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre, *par des fonctions analytiques* $A^{\lambda\mu}_{(n)}$, $f_{s(n)}$, $\overset{(1)}{W}_{s(n)}$, $\varphi_{s(n)}$, $\psi_{s(n)}$ vérifiant elles aussi les hypothèses B et B'.

Nous construirons ainsi une famille de fonction $W_{s(n)}, \ldots U_{S(n)}$, solutions dans D des équations $I_{1(n)}$ et solutions dans D du problème de Cauchy $(\varphi_{s(n)}, \psi_{s(n)})$, relativement aux équations $G_{1(n)}$:

$$A^{\lambda\mu}_{(n)} \frac{\partial^2 W_{s(n)}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_{s(n)} = 0.$$

Ces fonctions $W_{s(n)}$ possèdent des dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre et satisfont aux mêmes hypothèses B et B' que les fonctions $\overset{(1)}{W}_s$.

26. Convergence des solutions des équations approchées $G_{1(n)}$.

Montrons que ces fonctions $(W_{s(n)} \ldots U_{S(n)})$ convergent uniformément vers des fonctions $(W_s \ldots U_S)$ quand les fonctions $A^{\lambda\mu}_{(n)}$, $\overset{(1)}{W}_{s(n)}$, $\varphi_{s(n)}$, $\psi_{s(n)}$ et leurs dérivées partielles convergent uniformément vers les fonctions données $A^{\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{W}_s$, φ_s, ψ_s.

Des raisonnements analogues à ceux des pages précédentes, et le fait que les fonctions $W_{(n)}$ et $U_{(n)}$ vérifient une condition de Lipschitz par rapport aux variables x (que l'on doit remplacer par $X_{(n)}$ dans les équations intégrales $(I_{1\,(n)})$ vérifiées par ces fonctions) montrent que

$$
\begin{aligned}
&|X_{(n)} - X_{(m)}| \leq \operatorname*{Max}_{\Lambda} \{\alpha\,(\Sigma\,|A^{\lambda\mu}_{(n)} - A^{\lambda\mu}_{(m)}| + \cdots + \Sigma\,|\overset{(1)}{W}_{s\,(n)} - \overset{(1)}{W}_{s\,(m)}| + \cdots) + \\
&\qquad + M'\,\Sigma\,|X_{(n)} - X_{(m)}|\}\,|x_0^4 - x^4|, \\
&|\Omega_{(n)} - \Omega_{(m)}| \leq \operatorname*{Max}_{\Lambda} \{\beta\,(\Sigma\,|A^{\lambda\mu}_{(n)} - A^{\lambda\mu}_{(m)}| + \cdots + \Sigma\,|\overset{(1)}{W}_{(n)} - \overset{(1)}{W}_{(m)}| + \Sigma\,|X_{(n)} - X_{(m)}|) + \\
&\qquad + N'\,(|\Omega_{(n)} - \Omega_{(m)}| + \Sigma\,|W_{(n)} - W_{(m)}|)\}\,|x_0^4 - x^4|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(26.1)\quad &|W_{(n)} - W_{(m)}| \leq \operatorname{Max}\{\Sigma\,|W_{(n)} - W_{(m)}| + \Sigma\,|U_{(n)} - U_{(m)}|\}\,|x^4| + |W_{0\,(n)} - W_{0\,(m)}|, \\
&|U_{(n)} - U_{(m)}| \leq \operatorname{Max}\{\gamma\,(\Sigma\,|A^{\lambda\mu}_{(n)} - A^{\lambda\mu}_{(m)}| + \cdots + \Sigma\,|f_{s\,(n)} - f_{s\,(m)}| + \cdots + \\
&\qquad + \Sigma\,|\overset{(1)}{W}_{(n)} - \overset{(1)}{W}_{(m)}| + \Sigma\,|X_{(n)} - X_{(m)}| + R_1'\,(\Sigma\,|U_{(n)} - U_{(m)}| + \\
&\qquad + \Sigma\,|W_{(n)} - W_{(m)}| + \Sigma\,|\Omega_{(n)} - \Omega_{(m)}| + \Sigma\,|\tilde{\Omega}_{(n)} - \tilde{\Omega}_{(m)}|\} \cdot |x_0^4| + \\
&\qquad + \operatorname{Max}\{\delta\,(\Sigma\,|X_{(n)} - X_{(m)}| + \Sigma\,|A^{\lambda\mu}_{(n)} - A^{\lambda\mu}_{(m)}| + \cdots + \\
&\qquad + \Sigma\,|\Phi_{s\,(n)} - \Phi_{s\,(m)}|) + R_2'\,\Sigma\,|\Omega_{(n)} - \Omega_{(m)}|\}_{x^4=0}.
\end{aligned}
$$

α, β, γ, δ sont des nombres bornés (qui ne dépendent d'ailleurs que des bornes (B), (B'), h et h').

Les inégalités écrites montrent sans difficulté que les fonctions $X_{(n)}$, $\Omega_{(n)}$ et $W_{(n)}$, $U_{(n)}$ convergent uniformément vers des fonctions X, Ω et W, U dans leurs domaines de définitions respectifs, (Λ) et (D),[1] quand les fonctions d'approximation convergent uniformément vers les fonctions données.

Ces fonctions W, U, limites uniformes des fonctions $W_{s\,(n)}\,U_{(n)}$ satisfont aux propriétés suivantes.

27. Propriétés des solutions des équations G_1.

1°) Les fonctions $W_{s\alpha} \ldots U_S$ sont des dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre des fonctions W_s, et toutes ces fonctions satisfont aux mêmes hypothèses (B) et (B') que les fonctions $\overset{(1)}{W}_s$ dans D.

2°) Les fonctions W_s vérifient les équations aux dérivées partielles G_1:

$$\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_s = 0$$

dans le domaine D.

---

[1] Le nombre $\varepsilon(x_0^i)$ définissant D ayant été choisi de telle sorte que les représentations définies à l'aide de ces équations diminuent les distances: $\varepsilon(x_0^i) < \dfrac{1}{m\,M}$ etc.

28. Résolution des équations données G.

Nous considérons l'espace fonctionnel W défini par les fonctions $\overset{(1)}{W}_s$ et satisfaisant aux hypothèses (B) et (B') dans le domaine D. Nous venons de démontrer que la solution calculée du problème de Cauchy pour les équations G_1 définit une représentation de cet espace dans lui-même. Désignons par $\overset{(1)}{W}_s$ cette solution.

L'espace W est un espace normé, complet et compact (pour la topologie de la convergence uniforme) si on définit la distance de deux de ses points par

$$d(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}'_1) = \operatorname*{Max}_D \left(\Sigma\,|\overset{(1)}{W}_s - \overset{(1)}{W'_s}| + \cdots + \Sigma\,|\overset{(1)}{U}_S - \overset{(1)}{U'_S}|\right).$$

La distance de deux points représentatifs $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}'_2$ de $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}'_1$ sera comparée à la distance de ces points à l'aide d'inégalités analogues aux inégalités (26.1) (les termes relatifs aux différences des coefficients $A^{\lambda\mu}$, f_s et des données de Cauchy étant supprimés).

Il est alors clair qu'il existe un nombre η borné, non nul, tel que si le nombre $\varepsilon(x_0^i)$, définissant le domaine D, vérifie

$$\varepsilon(x_0^i) < \eta.$$

La distance de deux points représentatifs $(\overset{(2)}{W'_s} \ldots \overset{(2)}{U'_S}$ et $\overset{(2)}{W}_s \ldots \overset{(2)}{U}_S)$ est inférieure à la distance des points initiaux.

La représentation considérée admet alors un point fixe unique $(W_s \ldots U_S)$ qui appartient à l'espace.

Les fonctions W_s correspondant à ce point fixe sont solutions du problème de Cauchy, posé relativement aux équations données G, dans le domaine D. Elles possèdent des dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz par rapport aux variables x^i.

Nous aboutissons ainsi au théorême d'existence que nous énoncerons de la façon suivante.

29. Théorême d'existence.

Le problème de Cauchy relatif au système d'équations aux dérivées partielles non linéaires

$$(G) \qquad A^{\lambda\mu}(W_r)\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_s(W_r, W_{r\lambda}) = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, 3, 4, \\ s, r = 1, 2, \ldots n, \end{matrix}$$

admet dans le domaine D, sous les hypothèses H, une solution qui possède des dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre, continues et bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz par rapport aux variables x^i.

30. Théorême d'unicité.

Considérons le système d'équations intégrales vérifié par les solutions des équations données G. Ce système ne peut avoir qu'une solution $W_s, W_{s\alpha}, \ldots, U_S$ où les $W_s, W_{s\alpha}, \ldots, U_S$ soient des dérivées partielles des W_s: il ne se présente en effet dans ce cas aucune difficulté pour écrire des inégalités analogues aux inégalités § 26, où $W_{(n)} \ldots U_{(n)}$; $\overset{(1)}{W}_{(n)} \ldots \overset{(1)}{U}_{(n)}$ d'une part, $W_{(m)}, \ldots U_{(m)}, \overset{(1)}{W}_{(m)} \ldots \overset{(1)}{U}_{(m)}$ d'autre part seraient remplacés respectivement par deux solutions des équations G; de ces inégalités on déduit sans peine la coïncidence de ces deux solutions.

31. Récapitulation des résultats du chapitre III.

Récapitulons ici les hypothèses faites et les résultats obtenus. Nous considérons un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques du second ordre non linéaires, à n fonctions inconnues W_s et quatre variables x^α, de la forme

$$(E) \qquad E_s = A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_s = 0, \qquad \lambda, \mu = 1, 2, 3, 4, \quad s = 1, 2 \ldots, n.$$

Les f_s sont des fonctions données des inconnues W_s, de leurs dérivées partielles premières $W_{s\alpha}$ et des variables x^α. Les $A^{\lambda\mu}$ sont des fonctions données des W_s et des x^α.

Les données de Cauchy sont, sur la surface initiale $x^4 = 0$,

$$W_s(x^i, 0) = \varphi_s(x^i), \qquad W_{s4}(x^i, 0) = \psi_s(x^i).$$

Sur le système (E) et les données de Cauchy je fais les hypothèses suivantes:

1°) Dans le domaine (d), défini par $|x^i - \bar{x}^i| \leq d$, φ_s et ψ_s possèdent des dérivées partielles jusqu'aux ordres cinq et quatre, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz.

2°) Pour des valeurs des W_s satisfaisant à

$$|W_s - \varphi_s| \leq l, \qquad |W_{si} - \varphi_{si}| \leq l, \qquad |W_{s4} - \psi_s| \leq l$$

et dans le domaine D défini par

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x^4| \leq \varepsilon:$$

a) $A^{\lambda\mu}$ et f_s possèdent des dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz.

b) La forme quadratique $A^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal: $A^{44} > 0$, $A^{ij} X_i X_j$ définie négative.

Je démontre alors que le problème de Cauchy (φ_s, ψ_s) admet une solution unique, possédant des dérivées partielles continues et bornées jusqu'au quatrième ordre, relativement aux équations (E) dans un domaine $\varDelta$ (tronc de cone de base d):

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x^4| \leq \eta\,(x^i).$$

Chapitre IV.

Théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations de la gravitation relativiste.

Les dix potentiels $g_{\alpha\beta}$ du ds^2 d'un univers einsteinien satisfont, dans les domaines vides de matière et en l'absence de champ électromagnétique, aux dix équations aux dérivées partielles du second ordre du cas extérieur

$$R_{\alpha\beta} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\lambda\beta} + \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\,\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\alpha}\,\Gamma^\lambda_{\mu\beta} = 0,$$

où l'on a posé ∂_λ pour $\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}$ et où les x^λ sont un systéme de quatre coordonnées spatio-temporelles quelconques.

Les dix équations ne sont pas indépendantes puisque les $R_{\alpha\beta}$ satisfont aux quatre conditions de conservation (identités de Bianchi)

$$\nabla_\lambda S^{\lambda\mu} \equiv 0 \quad \text{où} \quad S^{\lambda\mu} \equiv R^{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\mu} R.$$

1. Problème de Cauchy.

Le problème du déterminisme, dans la théorie de la gravitation relativiste, se pose, pour un espace-temps extérieur sous la forme du problème de Cauchy relatif au système d'équations aux dérivées partielles $R_{\alpha\beta} = 0$ et à des données initiales (potentiels et dérivées premières) portées par une hypersurface S quelconque.

L'étude des valeurs sur S des dérivées partielles successives des potentiels a montré que, si S n'est en aucun de ses points tangente à une variété caractéristique et si les données de Cauchy satisfont à quatre conditions données, le problème de Cauchy admet, relativement au système des équations $R_{\alpha\beta} = 0$, dans le cas analytique, une solution. Cette solution est unique, c'est-à-dire que, s'il existe deux solutions, elles coincident à un changement de coordonnées près (conservant S point par point et les valeurs sur S des données de Cauchy).

Si S est définie par l'équation $x^4 = 0$ les quatre conditions que doivent vérifier les donneés initiales sont les quatre équations

$$S^4_\lambda = 0$$

qui s'expriment en fonction des données seules.

2. Coordonnées isothermes.

La coordonnée x^λ est dite isotherme si les potentiels satisfont à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre suivante:

$$F^\lambda \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu})}{\partial x^\mu} = 0.$$

Les équations d'Einstein s'écrivent, en coordonnées quelconques,

$$R_{\alpha\beta} \equiv -G_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} = 0$$

avec

$$G_{\alpha\beta} \equiv \tfrac{1}{2} g^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + H_{\alpha\beta},$$

où $H_{\alpha\beta}$ est un polynôme des $g_{\lambda\mu}$, $g^{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées premières et

$$L_{\alpha\beta} \equiv \tfrac{1}{2} g_{\beta\mu} \partial_\alpha F^\mu + \tfrac{1}{2} g_{\alpha\mu} \partial_\beta F^\mu. \tag{2.1}$$

Nous voyons que si les quatre coordonnées sont isothermes, chaque équation $R_{\alpha\beta} = 0$ ne contient pas d'autres dérivées secondes que celles de $g_{\alpha\beta}$. Le système des équations d'Einstein prend alors la forme des systèmes étudiés aux chapitres précédents.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité de l'hypersurface S [1], supposer que les données initiales satisfont, outre les quatre conditions $S_\lambda^4 = 0$, les conditions d'isothermie:

$$F^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{\lambda\mu})}{\partial x^\lambda} = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0. \tag{2.2}$$

Nous résoudrons ce problème de Cauchy pour les équations $G_{\alpha\beta} = 0$, vérifiées par les potentiels en coordonnées isothermes, et nous montrerons ensuite que les potentiels obtenus définissent effectivement un espace-temps, rapporté á des coordonnées isothermes, et vérifient les équations de gravitation $R_{\alpha\beta} = 0$.

3. Résolution des problèmes de Cauchy pour les équations $G_{\alpha\beta} = 0$.

Nous appliquerons au système

$$G_{\alpha\beta} \equiv g^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + H_{\alpha\beta} = 0$$

les résultats du chapitre III en posant $g^{\lambda\mu} = A^{\lambda\mu}$, $H_{\alpha\beta} = f_s$, $g_{\alpha\beta} = W_s$. Faisons sur les données de Cauchy les hypothèses suivantes:

---

[1] Étant données un espace-temps et une hypersurface S ($x^4 = 0$) il existe toujours un changement de coordonnées $\breve{x}^\lambda = f(x^\mu)$, avec $\breve{x}^4 = 0$ pour $x^4 = 0$, tel que les potentiels $\breve{g}_{\alpha\beta}$ vérifient les conditions (2.2), (une hypersurface S peut toujours être intégrée dans une famille de variétés isothermes). Cf. la démonstration § 5.

Hypothèses.

Dans un domaine (d) de la surface initiale S, $x^4=0$, défini par

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d:$$

1°) Les données de Cauchy φ_s et ψ_s possèdent des dérivées partielles continues et bornées jusqu'aux ordres respectivement cinq et quatre.

2°) Dans le domaine (d) et pour ces données de Cauchy la forme quadratique $g^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal, S étant orientée dans l'espace: $g^{44} > 0$, $g^{ij} X_i X_j$ définie < 0 (remarquons en particulier que le determinant g des $g_{\lambda\mu}$ est $\neq 0$.

Nous déduisons de ces hypothèses l'existence d'un nombre l tel que pour $|g_{\alpha\beta} - \bar{\varphi}_s| \leq l$ on ait $g \neq 0$ et nous voyons que, pour des fonctions inconnues $g_{\alpha\beta} = W_s$, satisfaisant aux inégalités

$$(3.1) \qquad |W_s - \bar{\varphi}_s| \leq l, \quad \left|\frac{\partial W_s}{\partial x^i} - \frac{\partial \bar{\varphi}_s}{\partial x^i}\right| \leq l, \quad \left|\frac{\partial W_s}{\partial x^4} - \bar{\psi}_s\right| \leq l.$$

Les coefficients des équations $G_{\alpha\beta}=0$ (qui sont ici indépendants des variables x^α) satisfont, comme les données de Cauchy, aux hypothèses du chapitre III, c'est-à-dire que:

1°) Les coefficients $A^{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu}$ et $f_s = H_{\alpha\beta}$ admettent des dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'au quatriéme ordre continues et bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz $\left(g^{\lambda\mu}\right.$ et $H_{\alpha\beta}$ sont respectivement des fractions rationelles de dénominateur g des $g_{\lambda\mu} = W_s$, et des $g_{\lambda\mu} = W_s$ et $\left.\frac{\partial W_s}{\partial x^\alpha}\right)$.

2°) La forme quadratique $A^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal: $A^{44} > 0$, $A^{ij} X_i X_j$ définie < 0.

Nous pouvons donc appliquer au système $G_{\alpha\beta}=0$, pour le problème de Cauchy posé, la conclusion du chapitre III, qui s'énonce ainsi:

Il existe un nombre $\varepsilon(x^i) \neq 0$ tel que dans le domaine

$$|x^i - \bar{x}^i| < d, \quad |x^4| \leq \varepsilon(x^i)$$

le problème de Cauchy relatif aux équations $G_{\alpha\beta}=0$ admet une solution qui a des dérivées partielles continues et bornées jusqu'au quatrième ordre et qui vérifie les inégalités (3.1).

4. La solution du système $G_{\alpha\beta}=0$ vérifie les conditions d'isothermie.

1°) *La solution trouvée du système $G_{\alpha\beta}=0$ vérifie les quatre équations*

$$\partial_4 F^\mu = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0.$$

Nous avons supposé en effet que les donnés initiales satisfont aux conditions

$$\left.\begin{array}{lr} (4.1) & S_\lambda^4 = 0 \\ \text{et} & \\ (4.2) & F^\mu = 0 \end{array}\right\} \text{ pour } x^4 = 0.$$

Nous avons donc

$$S_\lambda^4 \equiv -g^{4\mu}\{G_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\lambda\mu}\, g^{\alpha\beta}\, G_{\alpha\beta} + L_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\lambda\mu}\, g^{\alpha\beta}\, L_{\alpha\beta}\}.$$

La solution du système $G_{\alpha\beta} = 0$ vérifie donc, compte tenu de l'expression de $L_{\alpha\beta}$ (2.1) les équations

$$-\tfrac{1}{2}\, g^{4\mu}\, g_{\lambda\alpha}\, \partial_\mu F^\alpha - \tfrac{1}{2}\, \partial_\lambda F^4 + \tfrac{1}{2}\, \delta_\lambda^4\, \partial_\alpha F_\alpha = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0,$$

d'où, d'après (4.2) ($F^\mu = 0$ et $\partial_i F^\mu = 0$),

$$-\tfrac{1}{2}\, g^{44}\, g_{\lambda\alpha}\, \partial_4 F^\alpha = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0.$$

Nous voyons finalement que la solution trouvée du système $G_{\alpha\beta} = 0$ vérifie les quatre équations

$$\partial_4 F^\mu = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0.$$

2°) *La solution trouvée de* $G^{\alpha\beta} = 0$ *vérifie* $F^\mu = 0$.

Cette propriété va résulter des conditions de conservation. Dix potentiels $g_{\alpha\beta}$ quelconques satisfont en effet aux quatre identités de Bianchi $\nabla_\lambda (R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\, g^{\lambda\mu} R) \equiv 0$, où $R^{\lambda\mu}$ est le tenseur de Ricci correspondant à ces potentiels.

Une solution du système $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ vérifie donc les quatre équations

$$\nabla_\lambda (L^{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\mu}\, L) = 0,$$

où $L^{\lambda\mu} = g^{\alpha\lambda}\, g^{\beta\mu}\, L_{\alpha\beta}$ et $L = g^{\alpha\beta}\, L_{\alpha\beta}$.

Il résulte de l'expression (2.1) de $L_{\alpha\beta}$ que ces équations s'écrivent

$$\tfrac{1}{2}\, g^{\alpha\lambda}\, \nabla_\lambda (\partial_\alpha F^\mu) + \tfrac{1}{2}\, g^{\beta\mu}\, \nabla_\lambda (\partial_\beta F^\lambda) - \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\mu}\, \nabla_\lambda (\partial_\alpha F^\alpha) = 0,$$

d'où, en développant et simplifiant,

$$\tfrac{1}{2}\, g^{\alpha\lambda} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\alpha\, \partial x^\lambda} + P_\mu (\partial_\alpha F^\lambda) = 0,$$

où P est une combinaison linéaire des $\partial_\alpha F^\lambda$ dont les coefficients sont des polynômes des $g^{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières.

Nous constatons donc que les quatre quantités F^μ (formées avec les $g_{\alpha\beta}$ solutions de $G_{\alpha\beta} = 0$) vérifient quatre équations aux dérivées partielles du type précédemment étudié. Les coefficients $A^{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu}$ et $f_s = P_\mu$ vérifient, dans D, les hypothèses du chapitre III. Les quantités F^μ sont par hypothèse nulles sur le domaine (d) de $x^4 = 0$, et nous avons montré qu'il en était de même de leurs dérivées premières $\partial_\alpha F^\mu$. Nous déduisons alors du théorème d'unicité que, dans D, nous avons

$$F^\mu = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\alpha F^\mu = 0.$$

Les potentiels, solutions du problème de Cauchy posé relativement au système $G_{\alpha\beta}=0$, vérifient donc effectivement dans (D) les conditions d'isothermie et constituent les potentiels d'un espace-temps einsteinien, solutions des équations de gravitation $R_{\alpha\beta}=0$.

5. Unicité.

Pour montrer qu'il n'existe qu'un seul espace-temps extérieur correspondant aux conditions initiales données sur S, il faut montrer que toute solution du problème de Cauchy ainsi posé relativement aux équations $R_{\alpha\beta}=0$ peut se déduire par un changement de coordonnées de la solution de ce problème de Cauchy relativement aux équations $G_{\alpha\beta}=0$. Nous savons (chapitre IV) que cette dernière solution est unique.

Considérons donc une solution $g_{\alpha\beta}$ du problème de Cauchy relativement aux équations $R_{\alpha\beta}=0$ et cherchons une transformation de coordonnés

$$\breve{x}^{\alpha}=f^{\alpha}(x^{\beta}).$$

Conservant S point par point et telle que les potentiels dans le nouveau système de coordonnées, soient $\breve{g}_{\alpha\beta}$, vérifient les quatre équations

$$\breve{F}^{\lambda}=0.$$

Nous savons que les quatre quantités $\breve{F}^{\lambda}$ sont des invariants qui vérifient les identités

$$\breve{F}^{\lambda}\equiv\breve{\Delta}_2\,\breve{x}^{\lambda}=\Delta_2 f^{\lambda}.$$

Pour que les équations $\breve{F}^{\lambda}=0$ soient vérifiées il faut et il suffit donc que les fonctions f satisfassent aux équations

$$\Delta_2 f^{\alpha}\equiv g^{\lambda\mu}\left(\frac{\partial^2 f^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\mu}}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\rho}}\right)=0 \tag{5.1}$$

qui sont des équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires, hyperboliques normales dans le domaine (D).

Si nous prenons pour valeurs des fonctions f^{α} et de leurs dérivées premières, sur S, les valeurs suivantes (qui sont telles que le changement de coordonnées conserve S point par point).

$$\left.\begin{array}{ll} f^4=0, & \partial_\alpha f^4=\delta^4_\alpha \\ f^i=x^i, & \partial_\alpha f^i=\delta^i_\alpha \end{array}\right\}\ \text{pour}\ x^4=0, \tag{5.2}$$

nous voyons que les problèmes de Cauchy ainsi posés admettent (cf les théorèmes d'existence) dans (D) et relativement aux équations (5.1) des solutions possédant les dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre continues et bornées.

Nous avons ainsi défini un changement de coordonnés $\breve{x}^{\lambda}=f^{\lambda}(x^{\alpha})$ tel que, dans le nouveau système de coordonnées, les potentiels $\breve{g}_{\alpha\beta}$ vérifient les conditions d'isothermie $\breve{F}^\lambda = 0$. Il nous reste à montrer que ce changement de coordonnées détermine de façon unique les données de Cauchy $\breve{g}_{\alpha\beta}(x^4=0)$ et $\breve{\partial}_4 \breve{g}_{\alpha\beta}(x^4=0)$, en fonction des données primitives $g_{\alpha\beta}(x^4=0)$ et $\partial_4 g_{\alpha\beta}(x^4=0)$.

Nous savons que, $g_{\alpha\beta}$ étant les composantes d'un tenseur covariant à deux indices

$$g_{\alpha\beta} = \breve{g}_{\lambda\mu}\, \partial_\alpha f^\lambda\, \partial_\beta f^\mu, \tag{5.3}$$

d'où, d'après (5.2),

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \breve{g}_{\alpha\beta} \\ \partial_i\, g_{\alpha\beta} &= \breve{\partial}_i\, \breve{g}_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \text{ pour } x^4 = \breve{x}^4 = 0.$$

Reste à calculer les dérivées des potentiels par rapport à x^4 et $\breve{x}^4$ pour $x^4 = \breve{x}^4 = 0$. φ étant une fonction quelconque d'un point de l'espace-temps nous avons

$$\partial_4 \varphi = \breve{\partial}_\lambda \varphi\, \partial_4 f^\lambda,$$

d'où

$$\partial_4 \varphi = \breve{\partial}_4 \varphi \quad \text{pour} \quad x^4 = \breve{x}^4 = 0. \tag{5.4}$$

Nous trouvons, d'autre part, en dérivant l'égalité (5.3) par rapport à x^4

$$\partial_4 g_{\alpha\beta} = \partial_4 \breve{g}_{\lambda\mu}\, \partial_\alpha f^\lambda\, \partial_\beta f^\mu + \breve{g}_{\lambda\mu} (\partial^2_{\alpha 4} f^\lambda\, \partial_\beta f^\mu + \partial^2_{\beta 4} f^\mu\, \partial_\alpha f^\lambda),$$

d'où

$$\partial_4 g_{\alpha\beta} = \partial_4 \breve{g}_{\alpha\beta} + \breve{g}_{\lambda\beta}\, \partial^2_{\alpha 4} f^\lambda + \breve{g}_{\mu\alpha}\, \partial^2_{\beta 4} f^\mu \quad \text{pour} \quad x^4 = 0. \tag{5.5}$$

Nous déduisons aussi des valeurs initiales (5.2) des f^λ:

$$\partial^2_{\alpha i} f^\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad x^4 = 0.$$

Les f^λ vérifient d'autre part les conditions d'isothermie (5.1), d'où

$$g^{44}\, \partial^2_{44} f^\lambda = g^{\alpha\beta}\, \Gamma^{p}_{\alpha\beta} \quad \text{pour} \quad x^4 = 0.$$

$\partial^2_{44} f^\lambda$ est donc déterminé de manière unique par les données de Cauchy primitives; il en est bien ainsi également de $\partial_4 \breve{g}_{\alpha\beta}$ pour $x^4 = 0$.

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Étant donnée une solution $g_{\alpha\beta}$ du problème de Cauchy relativement aux équations $R_{\alpha\beta} = 0$ (les données initiales satisfaisant sur S aux hypothèses précédemment énoncées de dérivabilité) il existe un changement de coordonnées, conservant S points par point, tel que les potentiels $\breve{g}_{\alpha\beta}$ dans le nouveau système de coordonnées vérifient partout les conditions d'isothermie et constituent la solution, unique, d'un problème de Cauchy, univoquement déterminé, relativement aux équations $G_{\alpha\beta} = 0$.

Nous concluons donc, en termes de relativité:

Théorème. Il existe un espace-temps extérieur et un seul correspondant aux conditions initiales données sur S.

Bibliographie.

1. G. Darmois, *Les équations de la gravitation einsteinienne.* Mém. Sc. Math. fasc. 25, Paris 1927.
2. A. Lichnerowicz, *Problèmes globaux en mécanique relativiste.* Actual. Sci. Ind. 833, Paris 1939.
3. J. Hadamard, *Le Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Paris 1932.
4. M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy.* Acta Math. 81, Uppsala 1949.
5. Fl. Bureau, *L'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique normal.* Mém. Soc. Royale Sc. de Liège. Vol. 3, 1938.
6. H. Lewy—K. Friedrichs, *Das Anfangswertproblem einer beliebigen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in zwei Variabeln. Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeitsbereich der Lösung.* Math. Ann. 99, Berlin 1928.
7. J. Schauder, *Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen.* Fundam. Math. 24, 1935.
8. ——, *Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf Absolutbeträge der Lösungen beziehende Abschätzungen.* Comm. Math. Helv. 9, 1936—37.
9. G. Herglotz, *Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.* Leipz. Ber. 80, 1927.
10. I. Petrowsky, *Über das Cauchysche Problem über Systeme von partiellen Differntialgleichungen.* Rec. Math. Moscou, N. s. 2, 1937.
11. S. L. Sobolev, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales.* Rec. Math. Moscou, N. s. 1, 1936.
12. K. Stellmacher, *Zum Anfangswertproblem der Gravitationsgleichungen. Ausbreitungsgesetze für charakteristische Singularitäten der Gravitationsgleichungen.* Math. Ann. 115, Berlin 1938.
13. S. Christianovich, *Le problème de Cauchy pour les équations non linéaires hyperboliques.* Rec. Math. Moscou, N. s. 2, 1937.