

L'ŒUVRE ASTRONOMIQUE D'HENRI POINCARÉ.

PAR

H. v. ZEIPEL

à UPSAL.

Dans l'histoire de l'Astronomie, POINCARÉ restera toujours au premier rang des explorateurs les plus éminents qui par la force irrésistible de leur génie ont réussi à étendre les limites de la science de l'Univers. Au premier coup d'œil, cette opinion peut paraître étrange, puisque POINCARÉ n'était ni observateur ni calculateur. Mais pour justifier notre sentiment, il suffit de rappeler que l'Astronomie — dans ses efforts pour connaître les lois du mouvement et l'état physique des corps célestes et de l'Univers — doit nécessairement rester en coopération intime avec l'Analyse mathématique, la Mécanique et la Physique. C'est l'honneur impérissable de POINCARÉ d'avoir renforcé les liens qui doivent rattacher l'Astronomie à ces autres branches de la Science. Ainsi, l'Astronomie a pu profiter de la rigueur et de l'élégance des méthodes de l'Analyse moderne et des progrès récents de la Physique mathématique.

La plupart des travaux astronomiques de POINCARÉ se rapportent au problème des n corps et particulièrement au mouvement des planètes et des satellites dans notre système solaire. Pour bien faire comprendre l'importance de ces travaux, il convient de rappeler en peu de mots l'histoire de ce problème célèbre.

Il est bien connu que la découverte de l'attraction universelle avait été bien facilitée par ce fait que les masses des planètes sont petites par rapport à celle du Soleil. De même, la plupart des méthodes qui ont pour but le calcul du mouvement des corps célestes doivent leur succès à la petitesse des masses. Ainsi les fondateurs de la Mécanique céleste ont développé les coordonnées ou les éléments des planètes suivant les puissances d'un petit paramètre μ de l'ordre des masses. Ces développements perfectionnés plus tard par HANSEN, LEVERRIER, NEWCOMB, HILL et GAILLOT ont permis de déterminer quantitativement pour

plusieurs siècles le mouvement des planètes avec une exactitude comparable avec celle des observations.

Toutefois, étant donnés les termes séculaires où le temps sort des signes trigonométriques, ces théories classiques ne peuvent pas suffire pour des espaces de temps très longs. D'ailleurs, et pour la même raison, ces séries ne nous apprennent pas grand'chose au point de vue de la stabilité du système.

Pour démontrer la stabilité et afin d'étudier en général les orbites au point de vue qualitatif, LAGRANGE développa les perturbations séculaires les plus importantes en séries trigonométriques. Ensuite, DELAUNAY, dans sa théorie de la Lune, démontra qu'il est possible d'éviter complètement les termes séculaires. Mais c'est NEWCOMB qui énonça le premier en toute généralité que les coordonnées des planètes peuvent se développer en séries purement trigonométriques. Toutefois NEWCOMB n'est pas entré dans tous les détails de la démonstration. GYLDÉN s'occupa de la même question dans sa théorie des orbites absolues, mais sa théorie ne semble jamais avoir obtenu sa forme définitive. Ensuite MM. LINDSTEDT et BOHLIN ont traité certaines équations différentielles de types spéciaux qui se rencontrent dans la théorie de GYLDÉN, et ont montré que ces équations peuvent être intégrées au moyen de séries purement trigonométriques.

Mais la résolution complète du problème formel dont il s'agit fut réservée à POINCARÉ. Il y est arrivé en généralisant la méthode de M. LINDSTEDT. En somme, POINCARÉ démontre que les éléments canoniques des planètes peuvent se développer formellement en séries trigonométriques suivant les multiples d'un certain nombre d'arguments linéaires par rapport au temps. Les séries sont ordonnées aussi suivant les puissances des masses et de certaines quantités de l'ordre des excentricités et des inclinaisons. Mais POINCARÉ va beaucoup plus loin. Il montre, d'une part, que les séries en question ne sont pas convergentes, et que, par suite, elles ne donnent pas la solution complète du problème célèbre, la détermination du mouvement des corps célestes pour tous les temps. Mais il démontre, d'autre part, que les séries trigonométriques dont il s'agit sont semiconvergentes et qu'elles suffiront aux besoins de l'Astronomie pendant des espaces de temps extrêmement longs.

Dans ces derniers temps, M. K. SUNDMAN est arrivé à une solution du problème des Trois Corps par une voie tout à fait différente. Ce savant a appliqué une méthode générale due à POINCARÉ, laquelle donne la solution complète d'un système d'équations différentielles tout le long de l'axe réel, si la solution reste holomorphe dans une bande quelconque autour de cet axe. M. SUNDMAN a tourné la difficulté causée par la possibilité des chocs et a montré que les coordonnées des trois corps et le temps peuvent se développer suivant les puissances

d'une variable auxiliaire. Ces séries sont valables pour toutes les valeurs du temps. Mais il reste à voir si les séries de M. SUNDMAN convergent assez rapidement pour satisfaire aux besoins pratiques de l'Astronomie. En tout cas, les séries en question ne résolvent pas le problème de la stabilité. D'ailleurs la même méthode n'est peut-être pas applicable au problème général des n corps (où $n > 3$), puisque la nature des singularités des solutions de ce problème général reste encore inconnue.

Pour étudier au point de vue qualitatif les solutions du problème des n corps et d'autres problèmes de Dynamique beaucoup plus généraux, POINCARÉ s'est engagé dans une autre voie. Il cherche avant tout les solutions spéciales les plus simples. Il trouve ainsi les solutions périodiques dans lesquelles le système reprend après un certain temps sa configuration et ses vitesses relatives initiales. Il découvre aussi une classe de solutions plus générales: les solutions asymptotiques qui se rapprochent asymptotiquement d'une solution périodique pour $t = -\infty$ ou pour $t = +\infty$. Parmi ces solutions, il y en a d'ailleurs une infinité qui se rapprochent de la solution périodique non seulement pour $t = -\infty$ mais aussi pour $t = +\infty$. Ce sont les solutions doublement asymptotiques. Pour démontrer leur existence, POINCARÉ a dû inventer une notion nouvelle et extrêmement féconde: celle des invariants intégraux. Tous ces résultats sont établis avec la rigueur absolue qu'exigent les Mathématiques. La théorie des invariants intégraux lui permet aussi de traiter la question de la stabilité. Il trouve ainsi que dans un certain cas spécial du problème des Trois Corps, le système revient en général infiniment souvent aussi près que l'on veut de sa situation relative initiale. Les solutions qui ne jouissent pas de cette propriété sont infiniment peu probables.

En poursuivant les recherches dont nous venons de parler, POINCARÉ n'a pas réussi à pénétrer jusqu'au fond du problème proposé, qui est d'une complication extrême. Toutefois les résultats auxquels il est arrivé forment dans leur ensemble un terrain solide sur lequel les chercheurs de l'avenir pourront s'appuyer avec confiance.

Les solutions périodiques sont surtout utiles quand il s'agit de calculer le mouvement d'un système dont les conditions initiales sont voisines de celles qui correspondent exactement à la solution périodique. On peut alors prendre cette solution comme point de départ et développer ainsi la solution cherchée suivant les puissances d'un certain nombre de quantités petites. Ainsi on réussira parfois à résoudre certains problèmes où les méthodes anciennes ne sont pas applicables.

Pour le calcul des perturbations, le développement de l'inverse de la distance de deux planètes en série trigonométrique, suivant les multiples des anomalies

moyennes, est d'une importance capitale. Pour étudier les coefficients de ce développement, qui sont certaines fonctions des éléments, POINCARÉ applique les théories générales des singularités et des périodes des intégrales doubles. Enfin, pour calculer certains termes éloignés et de périodes très longues dans le développement considéré — termes qui donnent parfois naissance à des perturbations assez importantes — POINCARÉ fait usage de la méthode ingénieuse de M. DARBOUX qui donne l'expression asymptotique d'une fonction dépendant d'un grand nombre.

La plupart de ces travaux importants, concernant le mouvement des corps célestes et les propriétés générales des équations de la Dynamique, ont été publiés par POINCARÉ dans un grand mémoire couronné t. 13 des *Acta mathematica*, dans les trois volumes de son admirable ouvrage «Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» et dans les deux premiers volumes de ses «Leçons de Mécanique céleste.»

Les chefs-d'œuvre déjà mentionnés auraient suffi à créer la gloire impérissable d'un savant. Mais POINCARÉ a traité encore avec le même succès toute une foule de problèmes astronomiques des plus importants.

Rappelons dès maintenant qu'il a perfectionné la méthode de LAPLACE pour la détermination des orbites, de sorte que cette méthode élégante est devenue aussi la plus efficace au point de vue pratique.

Dans la Géodésie, POINCARÉ a attiré l'attention sur les mesures de la pesanteur en montrant que ces mesures suffisent pour déterminer les irrégularités du géoïde. Il a signalé aussi l'importance des mesures des azimuts dans les triangulations géodésiques.

La théorie des marées est certainement l'une des plus difficiles de la Mécanique céleste. Avant POINCARÉ, on ne savait traiter que des cas particuliers en admettant par exemple que la mer recouvre toute la Terre et que la profondeur de cette mer ne dépend que de la latitude. Déjà dans ses premiers travaux sur ce sujet, dans le *Journal de Mathématiques* de 1896, POINCARÉ a recherché la solution générale du problème. Les méthodes proposées et les résultats auxquels il est arrivé ont eu la plus grande influence sur le développement récent de la Physique mathématique en général. Maintenant, il est vrai, ces résultats s'obtiennent plus facilement par la méthode de M. FREDHOLM, laquelle constitue pour ainsi dire le point culminant de ce développement. C'est d'ailleurs POINCARÉ qui a appliqué le premier cette méthode ingénieuse à la résolution théorique du problème général des marées. La plupart des recherches de POINCARÉ sur la théorie en question se trouvent réunies dans le troisième volume de ses «Leçons de Mécanique céleste». C'est un travail d'une élégance et d'une clarté tout à fait remarquables.

La théorie des figures d'équilibre relatif des masses fluides est d'une importance capitale pour l'Astrophysique et pour la Cosmogonie. Une telle théorie nous permettrait de suivre le développement des nébuleuses et des astres et nous renseignerait probablement sur les causes de la variabilité des étoiles. Malheureusement les problèmes dont il s'agit ne semblent pas encore être abordables dans toutes leurs généralités. D'une part, nos connaissances sur la constitution de la matière au sein des étoiles, sous les pressions et les températures énormes qui y règnent, sont encore tout à fait insuffisantes même pour la mise en équations des problèmes; d'autre part, même dans le cas idéal où les problèmes peuvent être analytiquement posés, les difficultés analytiques paraissent encore insurmontables, à moins qu'on ne se trouve dans le voisinage d'une solution particulière et simple.

Et néanmoins POINCARÉ est arrivé à plusieurs résultats d'une grande généralité. Il a montré que la rotation doit être uniforme autour de l'un des axes principaux d'inertie de la masse; il a trouvé une limite supérieure de la vitesse de rotation; il a déduit la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre en tenant compte de la viscosité du fluide.

Même si le fluide est supposé homogène, les difficultés analytiques à surmonter sont considérables. L'une des plus belles découvertes de POINCARÉ se rapporte à ce cas idéal. Par une méthode extrêmement féconde, il démontre l'existence d'une infinité de nouvelles figures d'équilibre qui se rattachent, pour certaines valeurs du moment de rotation, aux ellipsoïdes déjà connus de MAC LAURIN et de JACOBI. On rencontre dans cette théorie la notion nouvelle des coefficients de stabilité, lesquels présentent des analogies intéressantes avec les exposants caractéristiques des solutions périodiques dans les problèmes de la Dynamique. POINCARÉ démontre que les ellipsoïdes de MAC LAURIN peu aplatis et les ellipsoïdes de JACOBI les moins allongés forment une suite continue de formes d'équilibre stables. Cette suite se prolonge après par des figures piriformes auparavant inconnues, dont la matière semble enfin vouloir se partager en deux parties.

Quoique les corps célestes ne soient pas homogènes, ces découvertes de POINCARÉ jettent une lumière assez claire sur la genèse des étoiles doubles et sur l'origine de la Lune. A ce point de vue, ces recherches forment pour ainsi dire le complément de celles de G. H. DARWIN sur l'évolution des systèmes doubles par l'influence des marées internes.

POINCARÉ a publié aussi des «Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques». Il y a exposé les hypothèses qui ont une base scientifique solide, en a fait une analyse approfondie et a signalé les objections que soulèvent les idées émises.

Personne n'était plus compétent que POINCARÉ pour se faire juge de toutes ces hypothèses parfois aussi incertaines qu'ingénieuses. —

Essayons enfin — ce qui est impossible — de caractériser en peu de mots l'esprit des travaux de POINCARÉ. Toujours ce sont les problèmes fondamentaux qui attirent son attention. Toujours il fait preuve d'une faculté de généralisation éminente. Son imagination paraît presque sans limites. Ses exposés se distinguent par une élégance et une limpidité extraordinaires. Les cas particuliers et les détails l'intéressent moins, ou peut-être le temps ne lui a pas permis de les approfondir.

Il est évident que, justement à cause de cette grande généralité, l'œuvre astronomique de POINCARÉ restera pour longtemps comme une véritable mine d'or pour les chercheurs qui veulent y pénétrer.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de donner une exposition rapide de cette œuvre gigantesque. Nous mettrons en lumière surtout les résultats, mais parfois aussi l'essentiel des méthodes.

1. Forme des équations du mouvement.

Dans l'étude si compliquée du mouvement des corps célestes, il importe de donner aux équations différentielles une forme aussi simple que possible.

On choisit d'ordinaire comme variables les coordonnées, X_1, X_2, \dots, X_{3N} des N planètes rapportées au centre du Soleil. Comme variables conjuguées Y_1, Y_2, \dots, Y_{3N} , on prend les composantes des quantités de mouvement dans ce mouvement relatif. La forme des équations devient alors semicanonique, et la fonction caractéristique change d'une planète à l'autre. Il y a là un inconvénient considérable, surtout quand il s'agit du calcul des perturbations d'ordre supérieur.

Pour obtenir la forme canonique, il faut choisir les variables d'une autre manière. C'est ainsi que RADAU a fait le choix suivant. Il désigne par X_1, X_2, X_3 les coordonnées de la planète P_1 par rapport au Soleil S , par X_4, X_5, X_6 les coordonnées de P_2 par rapport au centre de gravité de S et P_1 , par X_7, X_8, X_9 les coordonnées de P_3 par rapport au centre de gravité de S, P_1 et P_2 et ainsi de suite. Comme variables conjuguées, il prend $Y_i = m_i' \frac{dX_i}{dt}$, m_i' étant certaines masses fictives qui ne diffèrent que peu des masses réelles. Avec ces variables, les équations du mouvement prennent la forme canonique, la fonction caractéristique F étant l'énergie totale du système en supposant le centre de gravité comme fixe.

Les équations de RADAU n'ont pas été employées dans la pratique, puisque l'expression de F est trop compliquée quand il s'agit de calculer les perturbations d'ordre supérieur. Pour remédier à cet inconvénient, POINCARÉ [164; 187; 464, n° 26]¹ choisit les variables X_i comme dans les théories anciennes. Mais comme variables conjuguées Y_i , il prend les composantes des quantités de mouvement dans le mouvement *absolu* en supposant fixe le centre de gravité du système. Les équations ont encore la forme canonique, mais l'expression de l'énergie totale F en fonction des variables X_i, Y_i est beaucoup plus simple qu'avec les variables de RADAU.

Les masses des planètes étant petites, il convient d'employer comme variables les éléments du mouvement képlérien. POINCARÉ regarde les coordonnées relatives X et les composantes de la quantité du mouvement absolue Y qui correspondent à la planète P_k comme les coordonnées et les composantes de la quantité de mouvement d'un point mobile attiré suivant la loi de NEWTON par un centre fixe. La masse du centre fixe et celle du point mobile sont convenablement choisies. Soit dans l'orbite de ce point mobile $a_k, e_k, i_k, l_k, g_k, \theta_k$ le demigrand axe, l'excentricité, l'inclinaison, l'anomalie moyenne, la distance du périhélie au noeud et la longitude du noeud. Les X, Y qui correspondent à la planète P_k seront ainsi donnés comme certaines fonctions des éléments a_k, \dots, θ_k . Cela étant, POINCARÉ introduit au lieu des variables X, Y les variables [278, n° 11; 464, n° 56]

$$L_k = \beta_k \sqrt{a_k}, \quad G_k = L_k \sqrt{1 - e_k^2}, \quad \Theta_k = G_k \cos i_k \\ l_k, \quad g_k, \quad \theta_k$$

les β_k dépendant de la masse du Soleil et de celle de la planète P_k . Après ce changement de variables, les équations restent canoniques. La fonction caractéristique F peut se mettre sous la forme

$$F = F_0 + \mu F_1,$$

μ étant de l'ordre des masses des planètes. F_0 ne dépend que des L_k . Enfin μF_1 , qui s'appelle la fonction perturbatrice, est développable en série trigonométrique suivant les multiples des variables angulaires l, g, θ , les coefficients dépendant des variables conjuguées L, G, Θ . Avec les variables de POINCARÉ, la fonction perturbatrice est aussi simple que dans les théories anciennes. Mais le grand avantage, c'est qu'on aura une seule fonction perturbatrice pour toutes les planètes.

¹ Les nombres en crochets se rapportent à la bibliographie qui se trouve dans l'Analyse des Travaux Scientifiques de HENRI POINCARÉ faite par lui-même dans les Acta mathematica, tome 38.

Les équations dont nous avons parlé rentrent dans le type général [278, n° 13]

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

est développé suivant les puissances d'un petit paramètre μ ; F_0 est indépendant des y_i ; F_1, F_2, \dots sont périodiques par rapport aux y_i avec la période 2π .

L'étude du problème des $N + 1$ Corps est beaucoup compliquée par le fait que les périhélie et les noeuds sont fixes dans le mouvement non troublé. Il en résulte que F_0 ne dépend que des grands axes, c'est-à-dire seulement de quelques-unes des variables x_i . Seulement dans le cas spécial le plus simple du problème des Trois Corps, appelé le problème restreint, et qui comporte deux degrés de liberté, F_0 dépend de tous les x_i .

Si les excentricités et les inclinaisons sont petites, il est avantageux d'employer d'autres variables canoniques. POINCARÉ fait alors souvent l'usage des variables [278, n° 12; 464, n° 57]

$$L_k, \xi'_k = \sqrt{2(L_k - G_k)} \cos(g_k + \theta_k), \quad \xi''_k = \sqrt{2(G_k - \Theta_k)} \cos \theta_k, \\ \lambda_k, r'_k = -\sqrt{2(L_k - G_k)} \sin(g_k + \theta_k), \quad r''_k = -\sqrt{2(G_k - \Theta_k)} \sin \theta_k,$$

où $\lambda_k = l_k + g_k + \theta_k$ est la longitude moyenne de P_k . Les équations rentrent alors dans le type

$$(2) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \\ \frac{d\xi_k}{dt} = \frac{dF}{d\eta_k}, \quad \frac{d\eta_k}{dt} = -\frac{dF}{d\xi_k},$$

où

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

Ici F_0 ne dépend que des x ; F_1, F_2, \dots sont périodiques par rapport aux y avec la période 2π et développables suivant les puissances des ξ et des η .

2. Solutions périodiques.

C'est LAGRANGE qui le premier a démontré l'existence de solutions périodiques dans le problème des Trois Corps. Dans ces solutions de LAGRANGE, les rapports des distances mutuelles restent invariables et les trois corps forment ou

bien un triangle équilatéral ou bien ils se trouvent en ligne droite. Ces derniers temps, ces solutions de LAGRANGE ont acquis un intérêt particulier par la découverte des astéroïdes du type Hector ayant le même moyen mouvement que Jupiter. C'est à M. G. W. HILL que la science doit la découverte d'une classe nouvelle de solutions périodiques. En négligeant dans la théorie de la Lune l'excentricité de l'orbite terrestre et la parallaxe du Soleil, M. HILL parvient à démontrer l'existence d'orbites périodiques renfermant comme paramètre le rapport des durées du mois et de l'année. Elles présentent des conjonctions symétriques au commencement et au milieu de la période. Parmi les solutions périodiques de M. HILL, celle qui correspond au temps de révolution actuel de la Lune a servi, dans ces dernières années, comme point de départ pour la théorie de la Lune de M. E. W. BROWN.

Déjà dans ses premiers travaux sur les courbes définies par des équations différentielles, POINCARÉ fut conduit à l'étude des solutions périodiques. Dans ses recherches sur les solutions périodiques du problème des Trois Corps [38; 92; 183; 278] il se place dans les conditions actuelles de notre système solaire en admettant que les masses de deux corps sont petites par rapport à celle du troisième.

Il est ainsi conduit à étudier le système [183; 278, n° 37]

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n; \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les X_i étant développés suivant les puissances d'un petit paramètre μ . En supposant que pour $\mu = 0$ ces équations admettent une solution périodique connue

$$(4) \quad x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

de période T , il se propose de trouver la solution périodique du système (3) qui pour $\mu = 0$ se réduit à la solution périodique (4).

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$ et $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$. En généralisant [183; 278, n° 27] la méthode de CAUCHY appelée Calcul des Limites, POINCARÉ démontre que les ψ_i sont développables suivant les puissances des β_i , de τ et de μ , pourvu que les fonctions X_i soient holomorphes et uniformes au voisinage de la solution périodique (4). Évidemment les ψ_i s'annulent avec les β_i , τ et μ . C'est la condition de la solution périodique et cela s'écrit

$$(5) \quad \psi_i(\beta_1, \dots, \beta_n, \tau, \mu) = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Puisque les équations (3) ne contiennent pas le temps explicitement, il est permis de mettre par ex. $\beta_1 = 0$. On peut en général résoudre les équations (5) en mettant pour $\beta_2, \dots, \beta_n, \tau$ certaines séries convergentes ordonnées suivant les puissances de μ et divisibles par μ .

Ayant ainsi démontré l'existence de la solution périodique cherchée, POINCARÉ montre [278, n° 42] comment on peut développer les x_i en séries de FOURIER de l'argument $2\pi t : (T + \tau)$. Les coefficients de ces séries sont développés suivant les puissances de μ .

Il arrive souvent que les X_i sont périodiques de période 2π par rapport à certaines des variables x_i , par ex. par rapport à x_1, \dots, x_k . On peut alors regarder comme périodique une solution dans laquelle x_1, \dots, x_k augmentent de certains multiples de 2π , tandis que les autres x_i reprennent leurs valeurs. Alors dans l'exposé précédent, ψ_1, \dots, ψ_k signifient les incréments des x_1, \dots, x_k diminués par les multiples mentionnés de 2π . Les conditions (5) expriment encore la périodicité de la solution.

Si les équations (3) admettent s intégrales uniformes au voisinage de la solution (4), les conditions (5) ne sont pas indépendantes. Si $n-s$ des fonctions ψ_i s'annulent, les autres s'annulent alors en même temps. A ces $n-s$ conditions on peut alors adjoindre les s conditions qui expriment que les intégrales ont certaines valeurs constantes arbitraires. La solution périodique considérée contient alors ces s constantes comme paramètres.

Il peut arriver que certaines des fonctions ψ_a sont divisibles par μ et que la solution périodique (4) contient autant de paramètres arbitraires. Il faut alors déterminer ces paramètres de sorte que les équations $\frac{\psi_a}{\mu} = 0$ soient satisfaites pour $\beta_i = \tau = \mu = 0$. A chaque solution (4) ainsi déterminée correspond alors pour de petites valeurs de μ une solution périodique qui coïncide avec elle pour $\mu = 0$.

POINCARÉ applique les principes précédents à l'étude des solutions périodiques du problème des Trois Corps [92; 183; 278, nos 39, 40, 47, 48] en supposant, nous l'avons déjà dit, que les masses des planètes sont petites. En égalant à zéro le paramètre μ , qui est de l'ordre des masses, le problème admet des solutions périodiques très simples. On obtient une telle solution en supposant que les deux masses infiniment petites décrivent des cercles quelconques concentriques autour du Soleil et situés dans le même plan. On en obtient d'autres en supposant que pour $\mu = 0$ les orbites se réduisent à des ellipses et que les durées de révolution sont commensurables entre elles. Puisque, pour $\mu = 0$, les périhélie et les noeuds sont fixes, certaines des fonctions ψ_a sont divisibles par μ . Pour que les coefficients de μ dans les développements de ces fonctions ψ_a disparaissent, il faut

choisir les éléments (les grands axes exceptés) de sorte que les dérivées premières de la partie séculaire de la fonction perturbatrice (partie qui devient constante en vertu de la commensurabilité) s'annulent. POINCARÉ démontre ainsi l'existence de trois sortes de solutions périodiques dans le problème des Trois Corps. Au bout de la période, le système reprend la configuration qu'il avait au commencement, tout le système ayant seulement tourné un certain angle φ . Au commencement et au milieu de la période, les deux planètes se trouvent en conjonction symétrique, les vitesses étant perpendiculaires à la ligne ou au plan de conjonction. Les coordonnées relatives des deux planètes peuvent être développées en séries de FOURIER d'un seul argument, les coefficients étant des séries ordonnées suivant les puissances du petit paramètre μ .

— Pour les solutions *de la première sorte*, les inclinaisons sont nulles, les excentricités sont de l'ordre de μ et l'angle φ est fini. En y mettant $\mu = 0$, ces orbites se réduisent à des cercles concentriques autour du Soleil et situés dans le même plan. En ne considérant pas comme distinctes deux solutions qui diffèrent seulement par la position des axes, par l'origine du temps ou par le choix des unités de longueur et de temps, les solutions périodiques de la première sorte ne renferment qu'un seul paramètre, qui est le rapport $n:n'$ entre les moyens mouvements dans les deux orbites circulaires limites (pour $\mu = 0$). — Pour les solutions périodiques *de la seconde sorte*, les inclinaisons sont nulles, les excentricités finies et l'angle φ de l'ordre de μ . En y mettant $\mu = 0$, ces orbites se réduisent à deux ellipses à foyer commun situées dans un même plan et ayant leurs lignes d'apsides coïncidentes. Le rapport $n:n'$ des moyens mouvements dans ces ellipses est un nombre rationnel. Ces solutions sont caractérisées par le nombre rationnel $n:n'$ et par l'excentricité de l'une des ellipses limites qui y rentre comme paramètre arbitraire. — Pour les solutions périodiques *de la troisième sorte*, l'inclinaison n'est pas nulle, les excentricités sont petites et l'angle φ de l'ordre des masses. Pour $\mu = 0$ les orbites se réduisent à des ellipses peu excentriques ou circulaires ayant le Soleil au foyer et non pas situées dans le même plan. Les lignes d'apsides coïncident avec la ligne des noeuds ou y sont perpendiculaires. Le rapport $n:n'$ des moyens mouvements dans les deux ellipses limites est un nombre rationnel. Ce qui caractérise ces solutions périodiques de la troisième sorte, c'est d'une part le nombre rationnel $n:n'$ et d'autre part l'inclinaison des orbites limites, qui y rentre comme paramètre arbitraire.

Supposons donnée la valeur du petit paramètre μ . Si le rapport des moyens mouvements dans les orbites limites se rapproche d'un nombre rationnel de la forme $(p + 1):p$, p étant un entier, les orbites périodiques de la première sorte deviennent assez excentriques. Dans le voisinage immédiat de ces commensura-

bilités, il arrive même que les séries ordonnées suivant les puissances de μ qui donnent les solutions périodiques de la première sorte ne convergent plus pour la valeur considérée de μ . Pour examiner ce qui se passe alors, POINCARÉ se limite au problème restreint [367] en supposant que l'une des masses est nulle et que l'autre planète se meut dans un cercle. Si les séries mentionnées ordonnées suivant les puissances de μ , qui donnent les solutions périodiques de la première sorte, cessent d'exister, POINCARÉ montre qu'on peut les remplacer par des séries procédant suivant les puissances de $V\bar{\mu}$. L'excentricité e est alors de l'ordre de $V\bar{\mu}$, et c'est le rapport $\beta = \lim_{\mu=0} e:V\bar{\mu}$ qui rentre comme paramètre arbitraire.

Pour $\mu = 0$ l'orbite se réduit à un cercle, et le rapport entre les moyens mouvements devient $(p + 1):p$. Si β croît, il arrive enfin que ces nouvelles séries ordonnées suivant les puissances de $V\bar{\mu}$ ne convergent plus. POINCARÉ montre qu'on peut les remplacer alors par les séries ordonnées suivant les puissances de μ , les mêmes qui donnent les solutions périodiques de la seconde sorte. Ainsi au voisinage des commensurabilités mentionnées, les solutions périodiques de la première et de la seconde sorte ne sont pas analytiquement distinctes. En variant le paramètre, on passe des unes aux autres.

Évidemment, il est infiniment peu probable que les conditions initiales qui correspondent à une solution périodique se trouvent réalisées dans la nature. Mais il peut bien arriver et il arrive aussi souvent que le mouvement est à peu près périodique. Alors il convient de prendre la solution périodique comme point de départ et de développer les coordonnées ou les éléments suivant de petits paramètres, ainsi que l'ont fait déjà DELAUNAY, HILL et BROWN dans le cas de la Lune. Il semble que ce soit surtout les solutions périodiques de la première sorte qui auront ainsi une valeur pratique considérable et cela dans la théorie du mouvement des astéroïdes et des satellites.

3. Exposants caractéristiques.

Soit

$$(6) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

un système d'équations différentielles admettant une solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ de période T . Pour étudier les solutions voisines de cette solution, POINCARÉ introduit $x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$ et développe suivant les puissances des ξ . En ne conservant que les termes du premier degré, il arrive aux *équations aux variations* [183; 278, n° 53]

$$(7) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dX_i}{d\xi_j} \xi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Dans les coefficients des ξ au second membre, il faut introduire pour x_i ses développements en séries de FOURIER. Les équations aux variations qui correspondent à une solution périodique sont donc des équations homogènes et linéaires à coefficients périodiques.

On sait quelle est en général la forme des solutions de ces équations; on obtient n solutions particulières de la forme suivante

$$(8) \quad \xi_1 = e^{\alpha_p t} S_{1,p}, \dots, \xi_n = e^{\alpha_p t} S_{n,p} \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

les α_p étant des constantes et les $S_{i,p}$ des fonctions périodiques de même période que les $\varphi_i(t)$.

Si deux exposants α ont la même valeur, on aura une solution particulière de la forme

$$(9) \quad \xi_i = e^{\alpha t} (S_i + t S'_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les fonctions S_i et S'_i étant périodiques.

Les constantes α_p s'appellent les *exposants caractéristiques* de la solution périodique considérée.

La nature des solutions voisines dépend en premier lieu des valeurs des exposants caractéristiques. Si tous ces exposants qui ne sont pas nuls sont purement imaginaires, POINCARÉ dit que la solution périodique est *stable*; si au contraire, pour quelques-uns des exposants, les parties réelles ne sont pas nulles, la solution périodique est appelée *instable*. Si les valeurs initiales sont voisines de celles qui correspondent à une solution périodique stable, le mouvement restera pour longtemps semblable au mouvement périodique; au contraire, les solutions qui avoisinent à un instant donné une solution périodique instable, s'en éloignent *en général* beaucoup plus tôt.

Rappelons brièvement comment les exposants caractéristiques peuvent se calculer [183; 278, n° 60]. Soit T la période de la solution périodique génératrice $x_i = \varphi_i(t)$; soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$ et $x_i = \varphi_i(T) + \beta_i + \psi_i$ la valeur de x_i pour $t = T$. Alors POINCARÉ montre que les exposants caractéristiques α satisfont à l'équation

stante arbitraire essentielle C . Les exposants caractéristiques qui ne sont pas identiquement nuls dépendent de μ et de C . En faisant varier par ex. C , les solutions périodiques et leurs exposants caractéristiques varient aussi.

Supposons donc qu'un système quelconque d'équations différentielles possède des solutions périodiques qui dépendent d'un paramètre C . Il peut alors arriver que pour $C = C_0$ une solution périodique cesse d'exister. POINCARÉ démontre que cela ne peut se faire que si la solution se confond pour $C = C_0$ avec une autre solution périodique. Ainsi les solutions périodiques disparaissent (ou apparaissent) par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques [183; 278, n° 37].

Admettons qu'il s'agisse des équations de la Dynamique, et que pour $C = C_0$ plusieurs solutions périodiques se confondent. POINCARÉ démontre que cela arrive et ne peut arriver que si pour l'un des couples d'exposants caractéristiques on aura $\alpha T = \pm 2k\pi\sqrt{-1}$, k étant un entier. Soit pour $C > C_0$ p' le nombre des solutions périodiques considérées, pour lesquelles $\alpha T \mp 2k\pi\sqrt{-1}$ soit purement imaginaire, et p'' le nombre des solutions pour lesquelles cette quantité soit réelle. Soit q' et q'' les nombres correspondants pour $C < C_0$. Il n'y a alors que trois hypothèses possibles :

$$\begin{aligned} p' &= p'', & q' &= q''; \\ p' &= p'' + 1, & q' &= q'' + 1; \\ p' &= p'' - 1, & q' &= q'' - 1. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a

$$p' - q' = p'' - q''.$$

Dans le cas simple où il n'y a que deux degrés de liberté, comme dans le cas restreint du problème des Trois Corps, il n'y a qu'un seul couple d'exposants caractéristiques qui n'est pas identiquement nul. POINCARÉ trouve alors le théorème [280, n° 378] : *Si, en variant les paramètres, plusieurs solutions périodiques se confondent, alors il disparaît (ou apparaît) toujours autant de solutions stables que de solutions instables.*

Voici encore un autre théorème dans ce cas de deux degrés de liberté : *Si, pour certaines valeurs des paramètres, une solution périodique perd la stabilité ou l'acquiert (et cela de telle façon que l'exposant caractéristique α soit un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$), c'est qu'elle se sera confondue avec une autre solution périodique, avec laquelle elle aura échangé sa stabilité.*

4. Solutions asymptotiques.

En étudiant les solutions voisines d'une solution périodique instable, POINCARÉ a découvert une nouvelle classe de solutions auparavant tout à fait inconnue [183; 278, ch. VII]. Il les a appelées *solutions asymptotiques*. Il y en a deux familles: pour la première, la solution se rapproche asymptotiquement pour $t = -\infty$ de la solution périodique considérée, pour la seconde famille, ce rapprochement asymptotique aura lieu pour $t = +\infty$.

En partant des équations (6) et d'une solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ POINCARÉ y pose $x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$. Il vient alors

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i$$

les Ξ étant développés suivant les puissances des ξ_i , les coefficients de ces développements étant périodiques de période $T = 2\pi$.

Au lieu des variables ξ_i , POINCARÉ introduit des variables nouvelles r_i par une transformation linéaire dont les coefficients sont les fonctions périodiques $S_{i,p}$ qui entrent dans les solutions (8) des équations aux variations. Les équations différentielles des r_i ont alors la forme

$$(10) \quad \frac{dr_i}{dt} = H_i = \alpha_i r_i + H_i^{(2)} + H_i^{(3)} + \dots$$

$H_i^{(p)}$ étant un polynôme homogène de degré p en r_1, \dots, r_n avec des coefficients périodiques en t de période 2π . Les α_i sont les exposants caractéristiques.

POINCARÉ montre qu'on peut satisfaire formellement à ces équations en développant les r_i suivant les puissances de quantités $A_i e^{\alpha_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), les A_i étant des constantes arbitraires. Les coefficients de ces développements sont périodiques en t de période 2π . Il n'y aurait exception que dans le cas où il y aurait entre les α_i une relation de la forme

$$(11) \quad \gamma V - 1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k - \alpha_j = 0$$

pour des valeurs entières non négatives des β_k et entières (positives, négatives ou zéro) de γ .

En appliquant la méthode de CAUCHY appelée Calcul des Limites, POINCARÉ démontre que les séries en question convergent, si l'expression (11) ne peut de-

venir plus petite que toute quantité donnée ε ; c'est-à-dire si aucun des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les points dont les affixes sont les α et $+V\sqrt{-1}$, le second les points ayant les affixes α et $-V\sqrt{-1}$, — si aucun de ces polygones ne contient l'origine; c'est-à-dire si les parties réelles de toutes les quantités α sont différentes de zéro et du même signe.

Il peut arriver que ces conditions suffisantes pour la convergence ne soient remplies que pour un certain nombre des coefficients α , par ex. pour $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Si par ex. $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ont leurs parties réelles > 0 , on peut mettre $A_{m+1} = A_{m+2} = \dots = A_n = 0$ et développer les η_i en séries convergentes suivant les puissances des quantités $A_1 e^{\alpha_1 t}, \dots, A_m e^{\alpha_m t}$. On aura ainsi des solutions asymptotiques de la première famille. De même, aux exposants caractéristiques dont les parties réelles sont < 0 , correspondent des solutions asymptotiques de la deuxième famille.

Les principes précédents s'appliquent aussi aux équations canoniques avec n degrés de liberté. Toutefois deux exposants caractéristiques étant identiquement nuls et ainsi égaux entre eux, la dernière des équations qui correspondent aux équations (10) aura la forme

$$\frac{d\eta_{2n}}{dt} = c\eta_{2n-1} + H_{2n}^{(2)} + H_{2n}^{(3)} + \dots,$$

c étant une constante. Néanmoins le nouveau système se traite comme les équations (10) et tous les résultats précédents sur l'existence des solutions asymptotiques subsistent.

Si les équations canoniques sont du type (1), comme dans le problème des Trois Corps, les exposants caractéristiques se développent suivant les puissances de $V\bar{\mu}$ et contiennent cette quantité comme facteur. Certains diviseurs (11) sont donc de l'ordre de $V\bar{\mu}$. Mais, en revanche, les quantités à intégrer sont toujours aussi au moins du même ordre. POINCARÉ démontre qu'il existe aussi pour ces équations des solutions asymptotiques au voisinage de chaque solution périodique instable. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les exposants caractéristiques qui ont leur partie réelle positive quand $V\bar{\mu} > 0$. Pour les solutions asymptotiques de la première famille, les x_i et les y_i sont développables suivant les puissances de $\omega_1 = A_1 e^{\alpha_1 t}, \dots, \omega_k = A_k e^{\alpha_k t}$, les A_1, \dots, A_k étant des constantes arbitraires. Les coefficients de tous ces développements sont périodiques en t de même période que la solution périodique. Enfin les coefficients constants sont des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont développés suivant les puissances positives de $V\bar{\mu}$. Ces développements des x_i et y_i convergent uniformément tant que t est assez voisin de $-\infty$ et $V\bar{\mu} \geq 0$ et assez voisin de zéro. On aura aussi des solutions asymp-

totiques analogues qui se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique pour $t = +\infty$.

POINCARÉ démontre qu'en développant les coefficients fractionnaires suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, on n'aura que des puissances positives. Ainsi, pour les solutions asymptotiques des équations (1), les x_i et les y_i sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, $\omega_1, \dots, \omega_k$, les coefficients étant périodiques en t . On peut ordonner ces séries suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et déterminer les coefficients directement en partant des équations différentielles. Malheureusement ces séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ ne sont pas convergentes. Mais POINCARÉ démontre qu'elles sont semiconvergentes.

5. Non-existence des intégrales uniformes.

On sait que le problème des Trois Corps admet plusieurs intégrales très simples: celles du mouvement du centre de gravité, celles des aires et celle des forces vives. M. BRUNS a démontré qu'il n'existe pas de nouvelle intégrale algébrique en dehors de ces intégrales déjà connues.

POINCARÉ a complété la démonstration de M. BRUNS sur un point délicat et a confirmé les résultats auxquels ce savant était arrivé [166].

Mais POINCARÉ a examiné la question aussi d'un autre point de vue [278, ch. V]. Il admet toujours que deux des masses sont petites (de l'ordre de μ) par rapport à la troisième. En traitant, selon son habitude, la question d'une manière aussi générale que possible, POINCARÉ ne regarde pas seulement les équations spéciales du problème des Trois Corps, mais les équations générales du type (1). Il démontre que, sauf certains cas exceptionnels, les équations (1) n'admettent pas d'autre intégrale analytique et uniforme que l'intégrale $F = \text{const}$. Voici ce qu'il entend par là:

Soit Φ une fonction analytique et uniforme pour toutes les valeurs réelles des y , pour les valeurs suffisamment petites de μ et pour les valeurs des x appartenant à un certain domaine D ; le domaine D peut d'ailleurs être quelconque et être aussi petit que l'on veut. Enfin Φ doit être périodique par rapport aux y de période 2π . Dans ces conditions Φ est développable sous la forme

$$(12) \quad \Phi = \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \dots,$$

$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ étant uniformes par rapport aux x et aux y et périodiques par rapport aux y .

POINCARÉ démontre qu'en général une fonction Φ de cette forme ne peut pas être une intégrale des équations (1).

En supposant qu'il existe une telle intégrale \mathcal{O} distincte de F , il est permis de supposer que \mathcal{O}_0 n'est pas une fonction de F_0 . En effet, si \mathcal{O}_0 était une fonction de F_0 , POINCARÉ montre qu'il serait possible de déduire de \mathcal{O} et F une nouvelle intégrale \mathcal{O} de la nature considérée et pour laquelle \mathcal{O}_0 n'est pas une fonction de F_0 .

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction \mathcal{O} soit une intégrale s'écrit

$$(13) \quad [F, \mathcal{O}] = 0,$$

la quantité au premier membre étant la parenthèse de POISSON. En égalant à zéro les termes de diverses puissances en μ dans le premier membre, on obtient une infinité d'équations que nous nommerons (13^0) , (13^1) , (13^2) , ...

En partant de l'équation (13^0) , POINCARÉ fait voir d'une manière très simple que \mathcal{O}_0 ne peut pas dépendre de celles des variables y_1, y_2, \dots, y_n qui sont conjuguées aux variables dont dépend F_0 .

En mettant ensuite dans l'équation (13^1) les développements trigonométriques de F_1 et de \mathcal{O}_1 , il montre que les coefficients du développement de F_1 doivent satisfaire à certaines conditions spéciales pour qu'il existe un certain nombre d'intégrales de la forme (12) . Cela conduirait trop loin d'énumérer ici ces conditions dont l'énoncé est assez compliqué. POINCARÉ démontre que ces conditions ne sont pas satisfaites dans le problème des Trois Corps. Pour démontrer rigoureusement le théorème, quelque petit que soit le domaine D , il faut considérer des termes infiniment éloignés dans le développement de F_1 . POINCARÉ fut ainsi conduit à former certaines expressions asymptotiques pour les coefficients de très haut degré dans le développement trigonométrique de la fonction perturbatrice suivant les multiples des anomalies moyennes. Le résultat auquel arrive POINCARÉ s'énonce ainsi: *Quand deux des masses sont petites de l'ordre de μ , le problème des Trois Corps n'admet pas d'autres intégrales de la forme (12) que celles qui sont déjà connues.*

6. Séries de M. LINDSTEDT.

Pour déterminer le mouvement des planètes, les fondateurs de la Mécanique céleste ont cherché d'intégrer les équations différentielles en développant les inconnus suivant les puissances des masses. Les termes d'ordre n de ces développements sont des polynômes en t d'ordre n au plus, dont les coefficients sont des développements trigonométriques d'un certain nombre d'arguments. Depuis, ces méthodes classiques ont été perfectionnées et employées surtout par HANSEN, LEVERRIER, NEWCOMB, HILL et GAILLOT. Il a été ainsi possible de calculer le

mouvement des planètes pour plusieurs siècles avec une exactitude comparable avec celle des observations modernes.

Toutefois, étant donné que ces développements renferment le temps en dehors des signes sinus et cosinus, il est évident qu'ils ne peuvent pas suffire quand il s'agit de trouver les changements séculaires des orbites. Pour étudier ces changements, LAGRANGE développa sous forme trigonométrique les inégalités séculaires les plus importantes, pour lesquelles l'exposant du temps est égal à l'ordre par rapport aux masses. D'ailleurs LAGRANGE ne conserva que les termes du premier degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Il lui fallut pour ça résoudre un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. La théorie de LAGRANGE fut perfectionnée par LEVERRIER et CELLÉRIER qui ont conservé aussi les termes du troisième et du cinquième degré par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Toutefois, il restait à démontrer la possibilité d'éviter complètement les développements suivant les puissances du temps. C'est à DELAUNAY que revient l'honneur d'avoir formé le premier des séries générales purement trigonométriques satisfaisant formellement aux équations du mouvement. Mais DELAUNAY s'est occupé seulement de la théorie de la Lune.

C'est NEWCOMB¹ qui démontra le premier que les coordonnées des 8 planètes peuvent être développées en séries purement trigonométriques renfermant $3 \times 8 - 1 = 23$ arguments variant linéairement avec le temps. La démonstration de NEWCOMB repose sur la méthode de la variation des constantes un peu généralisée. Il avance par approximations successives, en partant des expressions de LAGRANGE où les termes séculaires les plus importants ont déjà la forme trigonométrique. Toutefois NEWCOMB avoue lui-même dans la préface de son mémoire que sa démonstration ne peut être considérée comme définitive. D'ailleurs, la méthode de NEWCOMB, comme celle de DELAUNAY, demande un grand nombre de changements de variables assez compliqués.

Le problème dont il s'agit fut résolu aussi par GYLDÉN dans sa théorie des orbites absolues. Mais le mode d'exposition de GYLDÉN est malheureusement très compliqué, et il n'est pas facile de dégager dans sa théorie l'idée fondamentale.

C'est pour simplifier les méthodes de GYLDÉN que M. LINDSTEDT commença à s'occuper de la question. M. LINDSTEDT² a traité les équations différentielles de la forme

$$(14) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1x + \Psi_2x^2 + \dots,$$

¹ Smithsonian Contr. to Knowledge, Vol. 21 (1874).

² Mém. de l'Acad. Imp. d. Sciences de St. Pétersbourg, Tome XXXI, n° 4 (1883)

où les fonctions Ψ_i , qui sont du premier ordre, ne renferment que des termes périodiques de la forme $\beta \cos(\lambda t + b)$, les λ étant incommensurables avec n . En supposant que l'équation ci-dessus présente certaines symétries, lesquelles d'ailleurs se trouvent réalisées dans la plupart des applications, M. LINDSTEDT démontre que x peut se développer en série trigonométrique, où un nouvel argument s'est introduit par l'intégration. M. LINDSTEDT¹ appliqua sa méthode au problème des Trois Corps en admettant que les excentricités, les inclinaisons et le rapport des rayons vecteurs des deux planètes sont des quantités petites. Il montre que les distances des trois corps peuvent alors être développées en séries trigonométriques avec quatre arguments.

Voilà à quel point se trouvait la théorie en question quand POINCARÉ commença à s'y intéresser. POINCARÉ se propose d'abord de perfectionner la méthode de M. LINDSTEDT. Il démontre [97] qu'on peut satisfaire formellement aux équations (14) par une série trigonométrique même dans le cas général où les fonctions Ψ_i ne présentent plus les symétries dont nous avons parlé. La démonstration très intéressante repose sur un théorème de GREEN d'après lequel une certaine intégrale, étendue sur une surface fermée quelconque, est nulle. POINCARÉ fait preuve ici, comme souvent, d'une pénétration géniale qui lui permet de découvrir les liens internes qui raccordent parfois entre elles des questions en apparence tout à fait indépendantes.

Plus tard, POINCARÉ trouve [115; 279, n° 127] que l'équation (14) peut se réduire à un système canonique avec deux degrés de liberté, de la forme (1), F_0 dépendant de tous les x_i . Il se pose alors le problème d'intégrer formellement les équations générales de ce type sans introduire de développements suivant les puissances de t . Il suppose d'abord que F_0 dépend de toutes les variables x_1, \dots, x_n . Il démontre qu'on peut satisfaire alors aux équations (1) en mettant

$$(15) \quad \begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \dots, \\ y_i &= w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \dots, \end{aligned}$$

où

$$w_i = n_i t + \tilde{\omega}_i.$$

Les constantes d'intégration sont x_i^0 et $\tilde{\omega}_i$. Les constantes n_i dépendent des x_i^0 et sont développées suivant les puissances de μ . Les x_i^k et y_i^k sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux w_i et dépendent d'une manière quelconque des x_i^0 mais sont indépendants des $\tilde{\omega}_i$. Il est facile de former directement

¹ Ann. de l'École Normale, Sér. 3, Vol. 1 (1884).

les coefficients des développements, si la fonction caractéristique F , développée suivant les multiples des y_i , ne renferme que des cosinus. Mais en ne faisant pas cette hypothèse, on rencontre les mêmes difficultés que dans le cas général de l'équation (14). Par l'application de la méthode d'intégration de JACOBI, POINCARÉ évite ces difficultés [279, n° 125].

Pour appliquer la méthode de M. LINDSTEDT au problème général des Trois Corps, il était nécessaire de traiter le cas important d'exception où la fonction F_0 ne dépend pas de toutes les variables x_1, \dots, x_n . L'emploi de la méthode d'intégration de JACOBI conduit alors à certaines difficultés, puisque certaines quantités de l'ordre des excentricités apparaissent élevées à des puissances négatives [279, ch. XI, XII]. POINCARÉ évite la difficulté en faisant un changement de variables dans lequel il fait usage des solutions périodiques de la première sorte. Toutefois, il semble que l'emploi de l'équation aux dérivées partielles de JACOBI ne soit pas bien convenable dans le cas dont il s'agit.

POINCARÉ revient après quelques années à la même question [208], mais alors il part des équations (2). Il suppose d'abord que les ξ et η n'entrent pas, de sorte que F_0 dépende de toutes les variables de la première catégorie. Pour effectuer l'intégration, il détermine les fonctions x_i^k et y_i^k ($k > 0$) des développements (15) de sorte que la fonction F après la substitution ne dépende que des x_i^0 et non pas des w_i , et de sorte que l'expression

$$\sum_i x_i dy_i - \sum_i x_i^0 dw_i$$

soit une différentielle exacte. En prenant alors pour variables nouvelles les w_i et les x_i^0 , la forme canonique ne change pas, et comme F ne dépend que des x_i^0 ces quantités seront constantes, tandis que les w_i seront des fonctions linéaires du temps. — POINCARÉ démontre que les x_i^k et y_i^k se déterminent très facilement d'après ces principes.

D'une manière tout à fait analogue, POINCARÉ effectue l'intégration des équations générales (2). En ne supposant, pour simplifier, que deux planètes, il cherche à exprimer les variables en fonction de six constantes $x_1^0, x_2^0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ et de six arguments fonctions linéaires du temps $w_1, w_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. Les w varient rapidement et les ω très lentement. Il développe suivant les puissances de μ

$$(16) \quad \begin{aligned} x_i &= \sum_p \mu^p x_i^p, & y_i &= \sum_p \mu^p y_i^p, & i &= 1, 2. \\ \xi_k &= \sum_p \mu^p \xi_k^p, & \eta_k &= \sum_p \mu^p \eta_k^p, & k &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Les fonctions $x_i^p, y_i^p, \xi_k^p, \eta_k^p$ ($p > 0$) seront des fonctions périodiques des w , développées d'autres part suivant les puissances des quantités

$$\varrho_k e^{\omega_k V^{-1}}, \varrho_k e^{-\omega_k V^{-1}},$$

Elles dépendent en outre des x_i^0 d'une manière quelconque. Enfin les $y_i^0 - w_i$, les ξ_k^0 et les η_k^0 seront indépendants des w . Quand on annulera les ϱ_k , les fonctions $y_i^0 - w_i$, ξ_k^0 et η_k^0 se réduiront à zéro.

Cela étant, le problème dont il s'agit peut être remplacé par le suivant: déterminer les séries (16) de telle façon que d'une part la fonction F , quand on y a substitué les séries (16), se réduise à une fonction φ ne dépendant que des x_i^0 et ϱ_k et de sorte que d'autre part la quantité

$$\sum_i x_i dy_i + \sum_k \xi_k d\eta_k - \sum_i x_i^0 dw_i + \sum_k \varrho_k^0 d\omega_k$$

soit une différentielle exacte. Au lieu des variables x_i, y_i, ξ_k, η_k , on peut introduire alors les $x_i^0, \varrho_k, w_i, \omega_k$. La forme canonique subsiste. Puisque F ne dépend que des x_i^0 et des ϱ_k , ces quantités seront constantes, tandis que les w_i et les ω_k seront des fonctions linéaires du temps, dans lesquelles les coefficients de t sont développables suivant les puissances de μ et des ϱ_k^0 . — POINCARÉ démontre que les séries (16) peuvent être déterminées d'après ces principes.

Une dernière fois, POINCARÉ est revenu sur le problème fondamentale d'intégrer sous forme trigonométrique les équations du mouvement des planètes [464, ch X]. Cette fois, il part des séries mixtes que donne l'application de la méthode classique de LAGRANGE. Il en dérive une transformation canonique, laquelle conduit aux équations complètes des inégalités séculaires, jamais déduites auparavant.

POINCARÉ part des équations (2). Il y satisfait à l'aide de développements de la forme

$$x_i = x_i^0 + \delta x_i, y_i = w_i + y_i^0 + \delta y_i, \xi_k = \xi_k^0 + \delta \xi_k, \eta_k = \eta_k^0 + \delta \eta_k.$$

Les $\delta x_i, \delta y_i, \delta \xi_k, \delta \eta_k$ sont développables suivant les puissances de μ , de t , des ξ_k^0 , des η_k^0 et suivant les cosinus et les sinus de multiples des arguments $w_i = n_i^0 t$, c'est-à-dire que ces quantités peuvent être mises sous la forme

$$(17) \quad \sum \mu^a A M_0 t^m \cos \left(\sum_i p_i w_i + h \right).$$

Les p_i sont des entiers; A et n_i^0 ne dépendent que des constantes x_i^0 ; les h dépendent seulement des y_i^0 ; M_0 est un monôme entier par rapport aux ξ_k^0 et aux η_k^0 .

Les δx_i , δy_i , $\delta \xi_k$, $\delta \eta_k$ s'annulent pour $\mu = 0$; elles s'annulent également pour $t = 0$, de sorte que les constantes x_i^0 , y_i^0 , ξ_k^0 , η_k^0 sont les valeurs initiales des inconnus x_i , y_i , ξ_k , η_k pour $t = 0$.

Dans les développements (17), POINCARÉ regarde les w_i comme des variables indépendantes. Il y pose aussi $t = 0$, de sorte que les termes périodiques sont seuls conservés dans les perturbations δx_i , δy_i , $\delta \xi_k$, $\delta \eta_k$. En appelant $\mathcal{A}x_i$, $\mathcal{A}y_i$, $\mathcal{A}\xi_k$, $\mathcal{A}\eta_k$ ce que deviennent alors ces perturbations périodiques, POINCARÉ forme les équations

$$(18) \quad x_i = x_i^0 + \mathcal{A}x_i, \quad y_i = w_i + y_i^0 + \mathcal{A}y_i, \quad \xi_k = \xi_k^0 + \mathcal{A}\xi_k, \quad \eta_k = \eta_k^0 + \mathcal{A}\eta_k,$$

dans lesquelles les x_i^0 , w_i , ξ_k^0 , η_k^0 sont des variables nouvelles, tandis que les y_i^0 sont encore regardés comme des paramètres constants.

Évidemment, en introduisant dans F les fonctions (18) F ne dépendra pas des w_i ; en vertu de l'intégrale des forces vives.

Toutefois, POINCARÉ ne conserve pas les x_i^0 comme variables. En partant des développements (17), il forme certaines fonctions W_i indépendantes des w_i , développables suivant les puissances de μ , des ξ_k^0 et des η_k^0 , dépendant d'une manière quelconque des x_i^0 et se réduisant à x_i^0 pour $\mu = 0$. Il détermine ces fonctions de sorte que, après avoir introduit dans (18) les x_i^0 exprimés comme fonctions des W_i , des ξ_k^0 et des η_k^0 , l'expression

$$\sum_i x_i dx_i + \sum_k \xi_k d\eta_k - \sum_i W_i dw_i - \sum_k \xi_k^0 d\eta_k^0$$

devienne une différentielle exacte. La transformation est alors canonique. Comme F ne dépend pas des w_i , les W_i sont des constantes, et les équations différentielles deviennent

$$(19) \quad \begin{aligned} W_i &= \text{const} \\ \frac{d\xi_k^0}{dt} &= \frac{dF}{d\eta_k^0}, \quad \frac{d\eta_k^0}{dt} = -\frac{dF}{d\xi_k^0}, \\ \frac{dw_i}{dt} &= -\frac{dF}{dW_i} \end{aligned}$$

Les équations de la seconde ligne sont les équations complètes des inégalités séculaires. POINCARÉ montre qu'on peut y satisfaire en développant les ξ_k^0 et η_k^0 suivant les puissances des quantités

$$(20) \quad \rho_k e^{+(\sigma_k t + i k) V^{-1}},$$

les q_k et ε_k étant des constantes d'intégration. Les σ_k sont développables suivant les puissances de μ et des q_k^2 et sont divisibles par μ . D'ailleurs l'un des σ_k est identiquement nul en vertu des intégrales des aires.

Ayant déterminé ces développements pour ξ_k^2 et η_k^2 , on obtient les w_i par les équations de la troisième ligne des formules (19). En désignant par n_i certaines quantités constantes, développées suivant les puissances de μ et des q_k^2 , les $w_i - n_i t$ seront développés suivant les puissances des quantités (20).

Ainsi se trouvent déterminés les x_i^0 , w_i , ξ_k^0 et η_k^0 qui entrent dans les formules définitives (18).

7. Séries de M. BOHLIN.

L'application de la méthode de M. LINDSTEDT aux équations (1), où F_0 dépend de tous les x_1, \dots, x_n , suppose qu'il n'existe pas de relation à coefficients entiers entre les quantités $n_i^0 = -\frac{dF_0}{dx_i^0}$. En effet, dans les intégrations successives auxquelles conduit cette méthode, on voit apparaître des diviseurs de la forme $\sum m_i n_i^0$, les m_i étant des nombres entiers. Même dans le cas où un diviseur est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, les séries de M. LINDSTEDT deviennent illusoire, puisque pour certaines suites de termes (termes de même *classe*) les dénominateurs sont du même ordre de grandeur que les numérateurs correspondants.

On ne diminue pas la généralité en supposant que le petit diviseur soit n_1^0 , de sorte que $m_1 = 1$, $m_2 = 0, \dots, m_n = 0$.

Pour éviter les difficultés des petits diviseurs, une nouvelle méthode d'intégration fut imaginée par M. BOHLIN.¹ Il part de l'équation aux dérivées partielles de JACOBI

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \dots, \frac{dS}{dy_n}; y_1, \dots, y_n\right) = \text{const.}$$

Il s'agit d'intégrer cette équation en développant la fonction inconnue S suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. D'ailleurs les dérivées de S doivent être périodiques par rapport aux y . M. BOHLIN ne traite que le cas ordinaire, où le développement de y_1 renferme un terme proportionnel au temps. Il exclut le cas de la libration où la fonction y_1 contient seulement des termes périodiques.

Immédiatement après, et d'une manière indépendante, la nouvelle méthode d'intégration fut découverte aussi par POINCARÉ [183; 279; ch. XIX, XX]. Celui-ci a traité aussi le cas si important de la libration.

¹ Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl. Bd. 14, Afd. I, N:o 5. (1888).

Dans le cas ordinaire, les fonctions S_k qui apparaissent dans le développement

$$S = S_0 + \sqrt{\mu} S_1 + (\sqrt{\mu})^2 S_2 + (\sqrt{\mu})^3 S_3 + \dots$$

sont finies pour toutes les valeurs réelles de y_1, \dots, y_n . L'application de la méthode d'intégration de JACOBI est alors facile. La forme de la solution devient

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\mu})^k x_i^k, \quad y_i = \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{\mu})^k y_i^k.$$

Pour $k > 0$, les x_i^k et les y_i^k sont des fonctions périodiques de n arguments w_1, \dots, w_n linéaires par rapport au temps. Les x_i^0 sont des constantes; les $y_i^0 - w_i$ sont des fonctions périodiques de l'argument w_1 . Le coefficient de t dans cet argument est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$.

Dans le cas de la libration, les difficultés sont plus graves. Alors, la fonction S_1 devient imaginaire à moins que l'argument y_1 soit compris entre certaines limites. Quand ces limites sont atteintes, les fonctions S_3, S_4, \dots peuvent devenir infinies. La méthode d'intégration de JACOBI doit donc être abandonnée.

Au moyen d'une fonction S satisfaisant à l'équation de JACOBI à des termes de l'ordre $(\sqrt{\mu})^3$ près, POINCARÉ forme une transformation canonique par laquelle les équations différentielles (I) sont ramenées à un autre système canonique d'une forme analogue mais plus spéciale. La solution cherchée de ce nouveau système peut être obtenue par la méthode de M. LINDSTEDT.

Dans ce cas de la libration, la forme de la solution des équations (I) reste à peu près la même que dans le cas ordinaire. Seulement $y_1^0, y_2^0 - w_2, \dots, y_n^0 - w_n$ seront des fonctions périodiques de l'argument w_1 , dont le coefficient de t est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$.

POINCARÉ apporte aussi la plus grande attention au cas limite par lequel se fait le passage du cas ordinaire au cas de la libration. Ce cas limite correspond à une certaine relation entre les constantes d'intégration. Les divers termes du développement de la fonction S , qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles de JACOBI, sont alors finis pour toutes les valeurs des y_1, \dots, y_n . Ils sont périodiques de période 4π par rapport à y_1 et de période 2π par rapport aux y_2, \dots, y_n .

L'application de la méthode d'intégration de JACOBI au cas limite montre que les variables $x_1, x_k, y_1, y_k - w_k$ sont alors développables en séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et des cosinus et sinus des multiples de w_2, w_3, \dots, w_n et dont les coefficients sont des fonctions uniformes de w_1 ; ces fonctions uniformes sont développables suivant les puissances de $e^{\alpha w_1}$, si w_1 est négatif et suffisamment grand, et suivant celles de $e^{-\alpha w_1}$, si w_1 est suffisamment grand (α étant une con-

stante). On voit ainsi apparaître les puissances d'une exponentielle comme dans les solutions asymptotiques. Et en effet, pour $n = 2$, les séries dont il s'agit coïncident avec les développements semiconvergens des solutions asymptotiques suivant les puissances de $V\mu$. En ordonnant suivant les puissances de l'exponentielle seule (en réunissant en un seul tous les termes qui contiennent une même puissance de l'exponentielle mais des puissances différentes de $V\mu$), elles deviennent convergentes.

Pour $n > 2$, les solutions formelles dont il s'agit doivent être considérées comme une généralisation des solutions asymptotiques. Elles se rapprochent pour $t = +\infty$ ou pour $t = -\infty$ de certaines solutions renfermant $n - 1$ arguments qui forment une généralisation des solutions périodiques instables.

POINCARÉ a essayé d'étendre la méthode de M. BOHLIN au cas d'exception où F_0 ne dépend pas de toutes les variables x_1, \dots, x_n [279, ch. XXI]. Le problème générale du mouvement des planètes rentre dans ce cas. POINCARÉ forme alors aussi la fonction S de JACOBI, en la développant suivant les puissances de $V\mu$ et suivant les multiples des variables y_1, \dots, y_n . Toutefois, dans ce cas, les équations auxquelles conduit la méthode d'intégration de JACOBI ne peuvent plus se résoudre par le procédé employé auparavant, c'est-à-dire par le théorème de CAUCHY sur le développement des fonctions implicites. Les relations entre les variables x_i, y_i et les arguments w_i sont beaucoup plus compliquées que dans le cas où F dépend de tous les x_i . Les résultats obtenus par POINCARÉ dans le cas important d'exception dont il s'agit sont considérés par lui-même comme bien incomplets, de sorte que de nouvelles études deviendront nécessaires.

Après quelques années, POINCARÉ est revenu sur la méthode de M. BOHLIN en supposant encore que F_0 dépend de toutes les variables x_1, \dots, x_n [280, ch. XXV].

Il reprend d'abord le cas déjà traité où il n'y a qu'une seule relation linéaire à coefficients entiers entre les $n_i^0 = -\frac{dF_0}{dx_i^0}$. Rappelons que les x_i et les $y_i - w_i$ sont alors développables en séries trigonométriques de $n - 1$ arguments w_2, \dots, w_n . Quant aux coefficients de ces séries, POINCARÉ les avait développés auparavant en séries trigonométriques d'un argument réel w_1 . Maintenant, il montre que, pour les solutions voisines du cas limite, ces coefficients peuvent se développer suivant les puissances de deux quantités

$$Ae^{\alpha t} \text{ et } A'e^{-\alpha t},$$

où α est réel et développable suivant les puissances du produit (AA') . De cette manière, c'est la période imaginaire des coefficients qui vient en apparence et non plus la période réelle comme auparavant.

Ensuite, POINCARÉ généralise la méthode de M. BOHLIN en supposant qu'il y a k relations à coefficients entiers entre les n_i^0 . Il montre que les x_i et y_i sont alors développables suivant les multiples de $n-k$ arguments rapidement variables w_{k+1}, \dots, w_n et suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et de $2k$ quantités

$$A_1 e^{\alpha_1 t}, A'_1 e^{-\alpha_1 t}; \dots A_k e^{\alpha_k t}, A'_k e^{-\alpha_k t}$$

conjuguées deux à deux. Les A et A' sont des constantes arbitraires d'intégration; les exposants α , qui sont de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, peuvent se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et des $(A_1 A'_1), \dots (A_k A'_k)$. Dans le cas particulier où $k=n-1$, on retrouve les solutions asymptotiques en annulant tous les A ou tous les A' .

On voit ainsi que les solutions générales qui existent au voisinage d'une solution périodique (véritable ou généralisée avec plusieurs arguments) ne sont autre chose que des séries de M. BOHLIN.

8. Divergence des séries de MM. LINDSTEDT et BOHLIN.

On pourrait être tenté de croire que les développements trigonométriques généraux dont nous avons parlé donnent la solution rigoureuse et complète des équations de la Dynamique qui peuvent se mettre sous la forme (1). POINCARÉ a brisé ces espérances et montré que les séries en question ne peuvent pas être uniformément convergentes par rapport aux quantités arbitraires qu'elles renferment [183; 279, ch. XIII, XIX].

L'étude de la convergence des séries (15) se subdivise. Il faut d'abord examiner la convergence des développements pour x_i^k et y_i^k et ensuite la convergence des séries totales pour x_i et y_i .

Les quantités x_i^k et y_i^k ont la forme de séries trigonométriques des arguments w_1, \dots, w_n . Certains coefficients de ces séries sont agrandis en vertu des diviseurs $\sum m_i n_i^0$.

Dans l'étude de la convergence de ces séries, POINCARÉ s'appuie sur un théorème démontré auparavant par lui et d'après lequel la somme d'une série trigonométrique ne peut constamment rester inférieure à la moitié d'un quelconque de ses coefficients [31; 93].

Ensuite, étant données certaines valeurs de $\bar{n}_1^0, \dots, \bar{n}_n^0$, il montre d'une part qu'on peut toujours trouver, dans tout voisinage de ces valeurs, d'autres valeurs n_1^0, \dots, n_n^0 telles que les valeurs absolues des coefficients dans les développements de x_i^k et y_i^k ne soient pas limitées. Alors, ces développements ne sont pas uniformément convergents pour toutes les valeurs réelles du temps. Mais POINCARÉ

démontre aussi d'autre part que, dans tout voisinage de ces mêmes valeurs $\bar{n}_1^0, \dots, \bar{n}_n^0$, il existe d'autres valeurs n_1^0, \dots, n_n^0 pour lesquelles les séries convergent uniformément par rapport au temps.

Cela étant, les séries donnant x_i^k et y_i^k ne peuvent pas converger uniformément pour toutes les valeurs du temps et pour toutes les valeurs des x_i^0 dans un domaine aussi petit que l'on veut.

Pour éviter cette difficulté, POINCARÉ fait la remarque qu'on peut grouper les termes du développement de la fonction caractéristique F des équations (1) suivant les puissances de μ , de sorte que les développements pour x_i^k et y_i^k ne renferment qu'un nombre limité de termes. Il suffit alors d'examiner la convergence des développements totaux (15) pour x_i et y_i .

POINCARÉ démontre d'abord que ces séries ne peuvent pas converger uniformément pour toutes les valeurs réelles des w_i , pour les valeurs suffisamment petites de μ et pour les valeurs des x_i^0 comprises dans certains intervalles aussi petits que l'on veut. En effet, s'il y avait convergence, on pourrait résoudre les équations (15) par rapport aux x_i^0 et w_i . On trouverait ainsi n intégrales uniformes, périodiques par rapport aux y_i . Mais il y a plus. On pourrait choisir μ et les x_i^0 de sorte que la solution (15) soit périodique. En dérivant par rapport aux x_i^0 et par rapport aux paramètres additifs qui se trouvent dans les w_i , on obtiendrait un système complet de solutions des équations aux variations. Ces solutions seraient ou bien périodiques ou bien linéaires par rapport à t avec des coefficients périodiques. Ainsi tous les exposants caractéristiques de la solution périodique (15) seraient nuls. En général, il n'en est pas ainsi. Donc les séries (15) ne convergent pas uniformément par rapport aux quantités μ , w_i et x_i^0 .

Enfin, POINCARÉ se demande si les séries (15) peuvent converger uniformément pour toutes les valeurs réelles des w_i et pour les valeurs suffisamment petites de μ , les x_i^0 étant choisis convenablement. Les raisonnements qu'il fait ne lui permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Toutefois, pour certaines raisons, POINCARÉ regarde cette convergence comme fort invraisemblable.

D'une manière analogue, POINCARÉ démontre que les séries de M. BOHLIN sont divergentes au même titre que celles de M. LINDSTEDT. En effet, si les séries étaient convergentes, on obtiendrait, en résolvant les formules de JACOBI, n intégrales uniformes par rapport aux x et y et périodiques par rapport aux y , ce qui est impossible.

Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi les séries dont il s'agit sont divergentes. Pour les séries de M. LINDSTEDT, la divergence dépend des petits diviseurs s'introduisant par les intégrations; pour les séries de M. BOHLIN au contraire, elle résulte des grands multiplicateurs qui apparaissent en vertu des différentiations successives.

Toutefois, la divergence n'empêche pas que ces séries ne puissent rendre des services considérables d'une part dans l'étude qualitative des orbites et d'autre part quand il s'agit du calcul pratique des perturbations. En général, les astronomes ne se sont pas occupés de la question de la convergence; ils ont formé des séries satisfaisant formellement aux équations du mouvement; ils ont constaté que les premiers termes de ces séries diminuent plus ou moins rapidement et que la théorie est en général d'accord avec les observations.

C'est POINCARÉ qui le premier a expliqué d'une manière satisfaisante cet accord. Il a montré [279, ch. VIII] que les séries qui satisfont formellement à un système d'équations différentielles sont semiconvergentes et qu'elles représentent asymptotiquement la solution cherchée pour un certain temps limité. Pendant ce temps, les séries de la Mécanique céleste jouissent donc des mêmes propriétés que la série de STIRLING. Appelons par ex. X_i^p et Y_i^p les sommes que l'on obtient en négligeant dans les développements (15) et dans leurs arguments w_i tous les termes en μ^{p+1} , μ^{p+2} , ... On aura

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left| \frac{x_i - X_i^p}{\mu^p} \right| = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \left| \frac{y_i - Y_i^p}{\mu^p} \right| = 0.$$

Puisque μ est donné, l'approximation est limitée. D'ailleurs, l'approximation diminue quand l'intervalle du temps augmente. Toutefois, étant donné les petites valeurs des masses des planètes, les développements nouveaux de la Mécanique céleste représenteront probablement le mouvement des corps célestes avec une très grande approximation pendant des intervalles de temps extrêmement longs.

9. Invariants intégraux.

Pour arriver à certains résultats délicats, dans ses recherches sur les équations de la Dynamique, POINCARÉ s'est appuyé souvent sur une notion nouvelle créée par lui, celle des invariants intégraux [183; 280, ch. XXII, XXIII].

Rappelons par quelques mots leur définition. Soit

$$(21) \quad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

un système d'équations différentielles. Soit x_1^0, \dots, x_n^0 un point quelconque d'un domaine $D(0)$ à k dimensions. Les valeurs initiales x_1^0, \dots, x_n^0 pour $t = 0$ définissent une certaine solution des équations (21). Soit dans cette solution x_1, \dots, x_n les valeurs des variables pour la valeur t de la variable indépendante. Quand le

point x_1^0, \dots, x_n^0 parcourt le domaine $D(o)$, le point x_1, \dots, x_n parcourt un domaine $D(t)$ appelé le conséquent de $D(o)$. Considérons une intégrale

$$I = \int F(x_1, \dots, x_n; dx_1, \dots, dx_n),$$

F étant une fonction homogène de degré k par rapport aux différentielles. Si la valeur de I étendue sur le domaine $D(t)$ est indépendante de t , POINCARÉ dit que I est un invariant intégral d'ordre k du système (21).

Comme exemple, citons le volume constant d'une partie déterminée d'un fluide incompressible dont le mouvement est permanent.

Soit d'une manière plus générale M le dernier multiplicateur du système (21). POINCARÉ démontre que

$$I = \int M dx_1 \dots dx_n,$$

est un invariant intégral.

Dans le cas des équations de la Dynamique, on peut former un certain nombre d'invariants intégraux très importants. Soit x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) les variables conjuguées. En partant des propriétés des équations aux variations, POINCARÉ démontre que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sum_i dx_i dy_i, \\ I_2 &= \int \sum_{i,k} dx_i dy_i dx_k dy_k, \\ &\dots \dots \dots \\ I_n &= \int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \dots dx_n dy_n \end{aligned} \tag{22}$$

sont des invariants intégraux. Le dernier peut être obtenu aussi par le dernier multiplicateur qui est ici égal à l'unité. Dans ses recherches sur les solutions périodiques du deuxième genre, sur les solutions doublement asymptotiques et sur la stabilité du mouvement, POINCARÉ a tiré un grand parti des invariants I_1 et I_n .

Soit x_i et y_i les projections des rayons vecteurs et des quantités de mouvement d'un système de points matériels. En supposant que la fonction des forces est homogène de degré p par rapport aux x , POINCARÉ démontre que l'expression

$$I = \int \sum_i (2x_i dy_i - p y_i dx_i)$$

est une fonction linéaire du temps.

En partant de ce théorème, POINCARÉ déduit certaines formules de vérification [149; 280, ch. XXIV] auxquelles doivent satisfaire les séries générales qui satisfont formellement aux équations différentielles de la Mécanique céleste, séries dont nous avons parlé dans les trois n^{os} précédents. Ces procédés de contrôle ont une grande importance pratique, vu les calculs longs et difficiles qui sont nécessaires pour déduire les séries en question.

10. Solutions périodiques du deuxième genre.

Les solutions périodiques dépendent en général d'un certain nombre de paramètres. Dans plusieurs problèmes de la Mécanique céleste, la quantité μ , qui est de l'ordre des forces perturbantes, est un de ces paramètres. Rappelons que dans le problème des Trois Corps les solutions périodiques de la première, de la seconde et de la troisième sorte renferment encore un paramètre essentiel.

Cela étant, POINCARÉ considère un système d'équations différentielles ayant une solution périodique P qui dépend d'un paramètre λ et dont la période est T . Désignons par P_0 et T_0 la solution périodique et sa période pour $\lambda = 0$. POINCARÉ se demande si les équations admettent d'autres solutions périodiques dont la période, pour de petites valeurs de λ , est à peu près un multiple pT_0 de T_0 , et lesquelles se confondent avec la solution périodique P_0 pour $\lambda = 0$. Ces solutions, si elles existent, s'appelleront *solutions périodiques du deuxième genre* [183; 280, ch. XXVIII].

Pour qu'une solution au voisinage de P_0 ait la période $p(T_0 + \tau)$, il faut et il suffit que τ et les valeurs initiales des variables satisfassent à certaines équations de condition. En formant ces équations et en partant aussi de l'équation qui donne les exposants caractéristiques de P_0 , considérée comme une solution périodique avec la période pT_0 , POINCARÉ arrive au résultat suivant: pour qu'il existe des solutions périodiques du deuxième genre, il faut que pour $\lambda = 0$ l'un des exposants caractéristiques de P_0 , qui n'est pas identiquement nul, soit un multiple de $\frac{2\pi\sqrt{-1}}{pT_0}$ (soit $\alpha_1 = \frac{2k\pi\sqrt{-1}}{pT_0}$, k et p étant des entiers).

Cette condition n'est pas suffisante en général, puisque les nouvelles solutions peuvent ne pas être réelles. Mais POINCARÉ démontre que la condition énoncée est aussi suffisante pour l'existence de solutions périodiques du deuxième genre, quand il s'agit des équations de la Dynamique.

Pour la démonstration, POINCARÉ part de l'invariant intégral I_1 des formules (22). En désignant par ξ_i et η_i les valeurs de x_i et y_i pour $t = 0$ et par X_i et Y_i les valeurs de x_i et y_i pour $t = pT$ on aura

$$\iint \sum_i (dX_i dY_i - d\xi_i d\eta_i) = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à une aire quelconque A . En remplaçant l'intégrale double par une intégrale simple étendue au contour de l'aire A , POINCARÉ trouve que l'expression

$$dS_p = \sum_i [(X_i - \xi_i) d(Y_i + \eta_i) - (Y_i - \eta_i) d(X_i + \xi_i)]$$

est une différentielle exacte.

S_p est une fonction holomorphe des ξ_i , des η_i et de T au voisinage des valeurs ξ_i^0 , η_i^0 , T_0 , en désignant par ξ_i^0 , η_i^0 , les valeurs initiales qui correspondent à la solution périodique P_0 . POINCARÉ démontre que S_p est aussi holomorphe par rapport aux variables $X_i + \xi_i$, $Y_i + \eta_i$ et T .

On peut regarder T comme le paramètre qui caractérise la solution périodique. Les conditions de périodicité, qui s'écrivent

$$(23) \quad X_i - \xi_i = 0, \quad Y_i - \eta_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

prennent la forme

$$\frac{dS_p}{d(X_i + \xi_i)} = 0, \quad \frac{dS_p}{d(Y_i + \eta_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou bien

$$(24) \quad \frac{dS_p}{d\xi_i} = 0, \quad \frac{dS_p}{d\eta_i} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ces équations sont satisfaites par les valeurs $\xi_i = \bar{\xi}_i$, $\eta_i = \bar{\eta}_i$ (fonctions de T) qui correspondent à la solution périodique P de période T . POINCARÉ pose $\xi_i = \bar{\xi}_i + \xi'_i$, $\eta_i = \bar{\eta}_i + \eta'_i$. S_p devient une fonction des ξ'_i et des η'_i qui est stationnaire quand les ξ'_i et les η'_i s'annulent, T étant quelconque. Les termes du second ordre par rapport aux ξ'_i et η'_i peuvent se mettre sous la forme d'une somme de carrés de fonctions linéaires et homogènes par rapport aux ξ'_i et η'_i . En développant les formules, POINCARÉ démontre que les coefficients de deux de ces carrés, ayant le même signe, renferment le facteur $\sin \frac{\alpha_1 p T}{V - 1}$, lequel s'annule en changeant son signe quand T passe par T_0 . Les coefficients des autres carrés ne s'annulent pas alors.

En partant de cette propriété de la fonction S_p , POINCARÉ démontre que les équations (24) resp. (23) possèdent encore des solutions réelles différentes de

$\xi_i = \bar{\xi}_i$, $\eta_i = \bar{\eta}_i$ et qui coïncident avec cette solution pour $T = T_0$. Ces nouvelles solutions donnent les valeurs initiales des solutions périodiques du deuxième genre.

Les résultats subsistent aussi dans le cas où la fonction caractéristique F des équations différentielles est périodique par rapport aux y_i de période 2π et si, dans la solution périodique, les y_i augmentent de $2m_i\pi$ au bout de la période T (m_i étant entier). On n'aura qu'à remplacer Y_i par $Y_i - 2m_i p\pi$ dans les raisonnements.

POINCARÉ a fait une étude plus détaillée des solutions périodiques du deuxième genre dans le cas relativement simple où il n'y a que deux degrés de liberté (renfermant comme cas spécial le problème restreint des Trois Corps). Il montre alors comment on peut former effectivement ces solutions [280, ch. XXX]. Les développements, auxquels il arrive, procèdent suivant les puissances de $\sqrt{\lambda}$. Quand $p > 4$, on aura deux solutions périodiques du deuxième genre essentiellement différentes, qui se confondent pour $\lambda = 0$ avec la solution périodique du premier genre, et qui sont réelles toutes les deux ou bien pour $\lambda > 0$ ou bien pour $\lambda < 0$. L'une de ces solutions périodiques du deuxième genre est stable, l'autre instable. Quand $p = 2, 3$ ou 4 , les choses se compliquent et plusieurs hypothèses sont possibles.

Dans le cas des équations (1), on aura des solutions périodiques du premier genre dans lesquelles les variables y_i augmentent de multiples de 2π au bout de la période. Les exposants caractéristiques sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et sont divisibles par $\sqrt{\mu}$. Pour les solutions périodiques du deuxième genre qui y correspondent, le nombre p est donc nécessairement considérable et la période très longue.

Supposons deux degrés de liberté. Admettons que pour $\mu = \mu_0$, l'un des exposants caractéristiques de la solution périodique du premier genre soit un multiple de $\frac{2\pi\sqrt{\mu-1}}{pT_0}$. En admettant que μ_0 ne soit pas trop grand, POINCARÉ démontre que c'est pour $\mu > \mu_0$ qu'existent alors les deux solutions périodiques du deuxième genre.

Le problème restreint des Trois Corps rentre dans ce cas, et alors ce sont les solutions périodiques de la deuxième sorte qu'il faut regarder comme du premier genre.

Mais le problème restreint possède aussi des solutions périodiques de la première sorte. Si la masse μ est petite, les deux exposants caractéristiques qui ne sont pas identiquement nuls sont voisins de $\pm \frac{\pi\sqrt{\mu-1}}{T}$, T étant la période. On peut regarder μ comme constante, tandis que la constante C de l'intégrale de

JACOBI joue le rôle du paramètre λ . En admettant que la masse de la planète perturbante (Jupiter) soit $\frac{1}{10}$, la masse du Soleil étant choisie comme unité, G. H.

DARWIN¹ a calculé par quadratures mécaniques les solutions périodiques de la première sorte pour diverses valeurs de C . Pour une certaine valeur C_0 (correspondant à un moyen mouvement de l'astéroïde un peu plus grand que trois fois celui de Jupiter), DARWIN trouve que l'exposant caractéristique passe par la valeur $\frac{\pi\sqrt{-1}}{T_0}$ (T_0 étant la période qui correspond à C_0). Pour les valeurs de C un peu plus grandes que C_0 ($T < T_0$), l'exposant caractéristique est purement imaginaire, et l'orbite périodique stable; au contraire, quand C est un peu plus petit que C_0 , l'exposant caractéristique est complexe, et l'orbite périodique est instable.

POINCARÉ a repris la question [280, nos 381—384] par la voie analytique en négligeant, pour abrégé, tous les termes de courte période dans le développement de la fonction perturbatrice. Les équations du mouvement peuvent alors être complètement intégrées. POINCARÉ arrive aux conclusions suivantes: pour deux valeurs C_0 et C_1 ($C_0 > C_1$), correspondant à des moyens mouvements un peu plus grands et un peu plus petits que le triple du moyen mouvement de Jupiter, la solution périodique de la première sorte change sa stabilité. Si C est un peu plus grand que C_0 , la solution périodique de la première sorte (considérée comme du premier genre) est stable. Quand C passe par C_0 , cette solution devient instable. En même temps, deux solutions périodiques stables et du deuxième genre apparaissent qui n'existaient pas pour $C > C_0$. Elles coïncident pour $C = C_0$ avec la solution périodique de la première sorte. La période de ces deux solutions (qui ne sont pas essentiellement différentes l'une de l'autre) est d'abord deux fois celle de la solution périodique du premier genre. Entre C_0 et C_1 , la solution périodique de la première sorte reste instable. Quand C passe par C_1 , cette solution redevient stable. En même temps apparaissent deux solutions périodiques (pas essentiellement distinctes) instables et du deuxième genre, coïncidant pour $C = C_1$ avec la solution périodique de la première sorte et n'existant que pour $C < C_1$. Leur période est d'abord deux fois celle de la solution périodique de la première sorte. POINCARÉ fait la remarque que les solutions périodiques du deuxième genre qui apparaissent ainsi quand C passe par C_0 et C_1 ne sont autre chose que les solutions appelées auparavant solutions périodiques de la seconde sorte.

¹ Acta mathematica, Tome 21 (1897).

POINCARÉ n'a pas étudié d'une manière générale la stabilité des solutions périodiques de la première sorte dans le problème des Trois Corps. Il me semble qu'une telle étude pourrait nous donner des renseignements importants sur les limites entre lesquelles peuvent exister des orbites générales à peu près circulaires. Peut-être serait-il possible d'expliquer ainsi les lacunes fameuses dans l'anneau des astéroïdes.

II. Nouvelles généralités sur les solutions périodiques.

Quand il s'agit de démontrer l'existence de certaines solutions dans un problème dynamique, il est souvent utile d'appliquer les principes du calcul des variations. En effet, à chaque système dynamique correspond une intégrale, nommée *l'action maupertuisienne*, dont la variation est nulle quand l'intégration s'effectue le long d'une orbite du système. Pour que l'action soit effectivement minima en suivant une orbite S entre deux points M_0 et M_1 , il faut et il suffit qu'il n'y ait aucun foyer de M_0 entre M_0 et M_1 . Rappelons que le foyer de M_0 est un point M'_0 sur l'orbite S tel qu'il y ait des orbites qui se rapprochent de M_0 et de M'_0 à des distances infiniment petites du second ordre.

POINCARÉ applique la théorie des foyers aux solutions périodiques des équations de la Dynamique ayant deux degrés de liberté [280, ch. XXIX]. Il montre que chaque point d'une orbite périodique stable possède un foyer. Au contraire, les orbites périodiques instables peuvent se répartir en deux catégories. Sur une orbite périodique de la première catégorie aucun point n'a de foyer. Une orbite périodique de la seconde catégorie se partage en un nombre pair d'arcs. Chacun des points de l'un des arcs aura son premier foyer sur l'arc suivant.

Cela étant, POINCARÉ démontre la proposition: *Pour qu'une courbe fermée corresponde à une action moindre que toutes les courbes fermées infiniment voisines, il faut et il suffit que cette courbe fermée corresponde à une solution périodique instable de la première catégorie.*

En partant du principe de moindre action, POINCARÉ démontre encore une fois l'existence des solutions périodiques du deuxième genre, en supposant qu'il y a deux degrés de liberté et qu'il s'agit du mouvement *absolu* [280, nos 371—376]. Soit P une orbite périodique stable renfermant un paramètre λ . Soit T la période et admettons que pour $\lambda = 0$ l'exposant caractéristique α ait la valeur $\alpha = 2k\pi\sqrt{-1} : pT$, k et p étant des entiers ($p > 4$). POINCARÉ démontre d'abord que, sur l'orbite périodique qui correspond à $\lambda = 0$, chaque point coïncide avec son $2k^{\text{ième}}$ foyer et qu'on arrive à ce foyer après avoir fait p fois le tour de l'orbite P . Puis il démontre que, λ étant à peu près zéro et situé d'un certain

côté de zéro, il est possible de dresser par chaque point M de l'orbite périodique deux autres orbites qui se recoupent en ce même point après avoir fait p fois le tour de l'orbite P et en la coupant $2k$ fois. A chaque point de P correspondent ainsi deux *boucles*. En faisant la même construction pour tous les points M de P , on obtiendra deux séries de boucles. L'action calculée le long d'une de ces boucles variera avec la position du point M ; pour chaque série elle aura au moins un maximum et un minimum. POINCARÉ démontre que, si l'action est ainsi maxima ou minima, les deux tangentes de la boucle au point M coïncident de sorte que la boucle est une solution périodique. On obtiendra ainsi $4k$ solutions périodiques mais dont seulement deux sont essentiellement différentes. L'une correspond au maximum, l'autre au minimum de l'action. Les solutions ainsi trouvées sont évidemment les solutions périodiques du deuxième genre.

La démonstration ne s'étend au cas du mouvement *relatif* que si l'action reste positive tout le long de P , ce qui n'arrive pas toujours. —

POINCARÉ a consacré [361] ses derniers efforts à la démonstration d'un théorème de Géométrie qui lui permettrait d'étendre considérablement nos connaissances sur les solutions périodiques des problèmes de la Dynamique ayant deux degrés de liberté. Le théorème dont il s'agit fut démontré quelques mois après la mort de POINCARÉ par M. G. D. BIRKHOFF¹. En voici l'énoncé:

Regardons une couronne limitée par deux circonférences concentriques. Supposons qu'une transformation ponctuelle biunivoque transforme la couronne en elle-même, de sorte que les deux circonférences tournent en sens contraires. Admettons de plus que la transformation conserve les aires ou, plus généralement, qu'elle admet un invariant intégral positif, c'est-à-dire qu'il existe une fonction positive $f(x, y)$ telle que l'on ait

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(X, Y) dX dY,$$

les deux intégrales étant étendues à une aire quelconque et à sa transformée. Alors, il existera toujours à l'intérieur de la couronne deux points qui ne seront pas altérés par la transformation.

POINCARÉ applique [361] ce théorème, de l'exactitude duquel il était convaincu, aux problèmes de Dynamique ayant deux degrés de liberté et en particulier au problème restreint des Trois Corps. Rappelons brièvement en quoi consiste ce problème: Un corps A , dont la masse est infiniment petite, est attirée par deux corps S (Soleil) et J (Jupiter), qui se meuvent en cercles concentriques.

¹ Transactions of the American Mathematical Society, Vol 14, Nr 1 (1912).

Le mouvement de A a lieu dans le plan de ces cercles. Le problème restreint admet une intégrale première, appelée l'intégrale de JACOBI. Il est bien connu par les travaux de MM. HILL et BOHLIN que, pour des valeurs grandes de la constante de l'intégrale de JACOBI, le mouvement de A est limité par une certaine courbe fermée, sur laquelle la vitesse relative de A est nulle. Si la constante de JACOBI est assez grande, il y a trois courbes limites fermées, la première entourant le corps S , la seconde le corps J et la troisième l'infini.

POINCARÉ admet que la force vive dans le mouvement relatif ait une valeur déterminée et si grande que la courbe limite entourant S existe; il admet aussi que le corps A se trouve à l'origine du temps à l'intérieur de cette courbe. Cela étant, *en admettant qu'il existe une solution périodique stable*, POINCARÉ montre qu'il y a nécessairement une infinité de solutions périodiques (ce qui n'était démontré auparavant que pour de petites valeurs du rapport des masses de J et de S). Rappelons en peu de mots les principes de la démonstration.

Étant donnée l'intégrale de JACOBI, qui donne en chaque point la grandeur de la vitesse relative, le mouvement dépend seulement de trois éléments: les deux coordonnées relatives du point mobile A et la direction de sa vitesse relative. POINCARÉ montre qu'on peut faire correspondre d'une manière univoque à chaque élément un point de l'espace. A chaque solution correspond ainsi une courbe dans cet espace; et par chacun des points de cet espace passe toujours une courbe et une seule. A chaque solution périodique correspond une courbe fermée et inversement. Soit C_0 la courbe fermée qui correspond à la solution périodique stable donnée. Imaginons maintenant une aire D limitée par cette courbe. POINCARÉ suppose que cette aire D est simplement connexe et ne se recoupe pas elle-même, et de plus qu'elle est *sans contact*, c'est-à-dire qu'en aucun point de cette aire une courbe C (correspondant à une solution générale) ne vient toucher la surface courbe dont cette aire fait partie.

Soit alors P un point quelconque de D , et P' le conséquent de P c'est-à-dire le point où la courbe C , qui passe par P , recoupe la prochaine fois l'aire D . POINCARÉ démontre que la transformation T qui fait passer d'un point à son conséquent est une transformation ponctuelle continue de l'aire D en elle-même. D'ailleurs, il résulte de la théorie des invariants intégraux [280, ch XXVII] que la transformation T admet un invariant intégral positif.

Soit maintenant $\pm \alpha \sqrt{-1}$ les exposants caractéristiques de la solution périodique stable considérée. POINCARÉ démontre qu'on peut assimiler l'aire D à l'aire d'un cercle, au point de vue de l'Analysis Situs, de cette manière que par la transformation T ce cercle se transforme en lui-même, la périphérie ayant tourné l'angle $2\pi : (\alpha + m)$, m étant un certain entier.

Un théorème de KRONECKER enseigne alors qu'il y a, à l'intérieur de D , un nombre *impair* de points inaltérés par la transformation; à chacun de ces points correspond une solution périodique; une au moins de ces solutions est stable. Soit P_0 le point correspondant; nous pouvons choisir nos coordonnées de sorte que ce point corresponde au centre du cercle.

Soit $\pm \beta \sqrt{-1}$ les exposants caractéristiques de la solution périodique stable qui correspond à la courbe fermée C'_0 qui passe par P_0 . POINCARÉ démontre que, par la transformation T , la région près du centre du cercle tourne de l'angle $2\pi(\beta + n)$ autour du centre, n étant un certain entier.

L'aire du cercle peut être considérée comme une couronne dont le rayon intérieur est nul. Cela posé, effectuons d'abord la transformation T^p , puissance $p^{\text{ème}}$ de T , et ensuite une seconde transformation qui tourne tout le plan du cercle l'angle $2q\pi$, q étant un entier quelconque. En combinant ces transformations, les deux circonférences de la couronne tourneront les angles

$$(25) \quad 2\pi \left(\frac{p}{\alpha + m} + q \right) \text{ et } 2\pi(p(\beta + n) + q).$$

A moins que $(\beta + n)(\alpha + m) = 1$, on pourra trouver une infinité de couples de nombres entiers p et q tels que les deux angles (25) soient de signes contraires. Le théorème géométrique de POINCARÉ-BIRKHOFF est donc applicable.

Comme p et q peuvent prendre une infinité de valeurs, cela nous fait une infinité de solutions périodiques.

En variant les données du problème, les solutions périodiques et les exposants caractéristiques changent. Les solutions périodiques qui correspondent au couple p, q ne peuvent disparaître qu'en se confondant avec l'une ou l'autre des deux solutions périodiques qui correspondent aux courbes fermées C_0 et C'_0 , c'est-à-dire si

$$-\frac{q}{p} = \frac{1}{\alpha + m} \text{ ou } \beta + n.$$

On retrouve ainsi les solutions périodiques du deuxième genre.

Il reste à dire que, pour de petites valeurs de la masse μ du corps J , on peut s'arranger de sorte que C_0 et C'_0 correspondent aux deux solutions périodiques de la première sorte.

Évidemment, ces dernières recherches de l'illustre savant ouvrent des perspectives très étendues sur la théorie générale des solutions périodiques. POINCARÉ dit lui-même qu'il entrevoit, mais d'une manière beaucoup plus vague, qu'on pourrait se servir de cette méthode pour montrer que les solutions périodiques sont *überalldicht*.

12. Solutions doublement asymptotiques.

Les solutions asymptotiques qui existent au voisinage d'une solution périodique instable se partagent en deux familles. La première famille renferme les solutions qui pour $t = -\infty$ se rapprochent asymptotiquement de la solution périodique; dans la seconde famille au contraire, ce rapprochement asymptotique a lieu pour $t = +\infty$. Il est facile d'étudier les solutions asymptotiques de la première famille pour des valeurs très grandes et négatives de t ; mais il est encore impossible de poursuivre cette étude pour des valeurs très grandes et positives de t . Inversement, l'étude des solutions asymptotiques de la seconde famille doit être très compliquée pour des valeurs très grandes et négatives de t .

L'une des plus belles découvertes de POINCARÉ se rattache à la théorie des solutions asymptotiques. La théorie des invariants intégraux, créée dans ce but, lui permet en effet de démontrer l'existence de solutions doublement asymptotiques qui se rapprochent asymptotiquement d'une solution périodique d'une part pour $t = -\infty$ et d'autre part pour $t = +\infty$ [183; 280, ch. XXVII, XXXIII].

Dans l'étude de ces solutions, POINCARÉ se borne à un cas très particulier, celui du problème restreint des Trois Corps. Il admet que le rapport μ des deux masses attirantes est très petit. Il admet aussi que la constante de JACOBI a une valeur si grande que la courbe limite entourant S existe, et que le corps A se trouve à l'origine du temps à l'intérieur de cette courbe. Alors le corps A n'en sortira jamais. (Cf. page 345, 346).

Les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme (1) avec deux degrés de liberté. POINCARÉ démontre d'abord que l'on peut définir les variables canoniques x_1, x_2, y_1, y_2 de sorte que la variable angulaire y_2 soit toujours croissante. Il y parvient en choisissant les variables de manière que les solutions périodiques de la première sorte et à mouvement rétrograde prennent une forme particulièrement simple.

Enfin, pour faciliter l'exposition, POINCARÉ fait usage d'un mode de représentation géométrique. Par les conditions

$$0 \leq y_1 < 2\pi, \quad 0 \leq y_2 < 2\pi, \quad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C$$

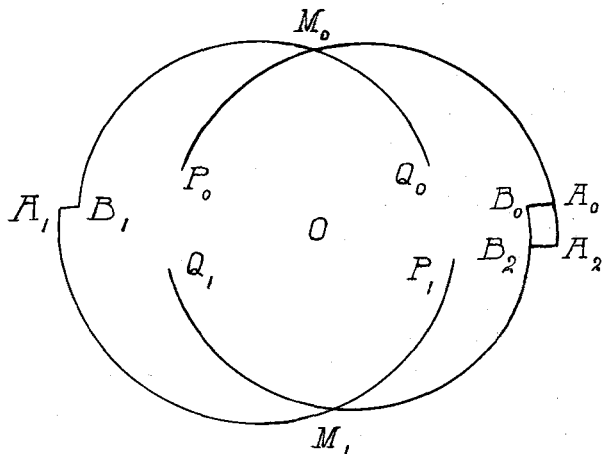
se définit une multiplicité à trois dimensions. Entre cette multiplicité et les points X, Y, Z de l'espace tout entier, POINCARÉ établit une correspondance ponctuelle biunivoque au moyen des relations

$$X = \frac{\sqrt{z} \cos y_2}{\sqrt{4+z-2\cos y_1}}, \quad Y = \frac{\sqrt{z} \sin y_2}{\sqrt{4+z-2\cos y_1}}, \quad Z = \frac{2 \sin y_1}{\sqrt{4+z-2\cos y_1}},$$

où $z = x_2 : x_1$. A la surface $z = \text{const.}$ correspond ainsi un tore autour de l'axe des Z . Ce tore se réduit à l'axe des Z pour $z = 0$ et au cercle $Z = 0, X^2 + Y^2 = 1$ pour $z = \infty$.

Pour une orbite quelconque, le point représentatif X, Y, Z tourne toujours autour de l'axe des Z dans le sens direct. A chaque solution périodique correspond une courbe fermée faisant un certain nombre de tours autour de l'axe des Z .

Regardons une solution périodique instable de la deuxième sorte et l'ensemble des solutions asymptotiques qui y correspondent. Ces solutions engendrent dans l'espace X, Y, Z deux surfaces asymptotiques se coupant suivant la courbe fermée qui correspond à la solution périodique. Pour $\mu = 0$ les solutions asymptotiques deviennent toutes périodiques, les deux surfaces asymptotiques coïncident et se réduisent à l'un des tores mentionnés, qui coupe le demi-plan XZ (où $X > 0, Y = 0$) suivant un certain cercle C . Supposons maintenant $\mu > 0$ et très petit. Admettons, pour fixer les idées, que l'orbite périodique rencontre le demi-plan XZ en deux points M_0 et M_1 . Ces points se trouvent à peu près aux deux bouts d'un diamètre du cercle C . Soit $P_0 M_0 A_0$ et $P_1 M_1 A_1$ deux parties de l'intersection de la première surface asymptotique avec le demi-plan XZ et $Q_0 M_0 B_1, Q_1 M_1 B_0$ deux parties de l'intersection de la seconde surface asymptotique avec ce même demi-plan. Si μ est assez petit, les deux courbes $M_0 A_0$ et $M_1 B_0$ suivent étroitement le cercle C aussi loin que l'on peut admettre que A_0 et B_0 se trouvent sur le même rayon du cercle C . POINCARÉ montre sur un exemple particulier que les deux branches $M_0 A_0$ et $M_1 B_0$ ne coïncident pas en général. Cela étant, soit A_1 et B_1 les premiers conséquents de A_0 et B_0 , A_2 et B_2 les premiers conséquents de A_1 et B_1 . POINCARÉ montre que les distances $A_0 A_2$ et $B_0 B_2$ sont de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, tandis que les distances $A_0 B_0$ et $A_2 B_2$ sont de l'ordre infini par rapport à μ .



POINCARÉ démontre que les deux arcs $A_0 A_2$ et $B_0 B_2$ se coupent nécessairement. S'il en est ainsi, l'existence d'une solution doublement asymptotique est évidente.

C'est dans cette démonstration qu'intervient la théorie des invariants intégraux. En partant de l'invariant intégral

$$\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

et en introduisant comme variables d'intégration $C, y_2, \sqrt{X^2 + Y^2}$ et Z , POINCARÉ arrive à un invariant intégral positif, où la fonction à intégrer est périodique par rapport à y_2 . En y mettant successivement $y_2 = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ et en laissant de côté dC et dy_2 , il trouve enfin une intégrale

$$I = \iint \Phi(X, Z) dX dZ$$

jouissant de la propriété suivante. Soit σ une courbe fermée quelconque dans le demi-plan XZ . Les orbites qui passent par σ forment une surface tubulaire dont les intersections successives avec le demi-plan XZ soit $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ (appelées les conséquents de σ). Alors, l'intégrale I , étendue successivement sur les aires limitées par $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$, aura toujours la même valeur. Enfin, en vertu des suppositions faites, la fonction Φ est finie et positive dans tout le demi-plan.

Comme courbe σ , POINCARÉ choisit la courbe fermée $M_0 A_0 B_0 M_1 A_1 B_1 M_0$. Sa conséquente σ_1 sera $M_1 A_1 B_1 M_0 A_2 B_2 M_1$. Puisque l'intégrale I aura la même valeur pour l'aire limitée par σ que pour l'aire limitée par σ_1 , les arcs $A_0 A_2$ et $B_0 B_2$ ne peuvent pas être situés comme le montre la figure. Car alors l'intégrale I étendue sur l'aire $A_0 A_2 B_2 B_0$ serait nulle, ce qui n'a pas lieu. Ainsi les arcs $A_0 A_2$ et $B_0 B_2$ se coupent nécessairement. Par leur point de rencontre passe évidemment une solution doublement asymptotique.

POINCARÉ va beaucoup plus loin en démontrant qu'il existe une infinité de solutions doublement asymptotiques. Pour le faire voir, il choisit A_0 sur la solution doublement asymptotique déjà trouvée. Alors A_0 et B_0 coïncident d'une part et A_2 et B_2 d'autre part. Cela étant, de l'existence de l'intégrale I il n'est pas difficile de tirer la conséquence qu'il passe en effet une infinité de solutions doublement asymptotiques entre A_0 et A_2 .

Citons enfin quelques mots de POINCARÉ en ce qui concerne ces solutions: «Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

«On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de BOHLIN sont divergentes.»

Évidemment, en vertu de leur caractère tout à fait spécial, il est infiniment peu probable qu'une solution asymptotique ou doublement asymptotique se trouve jamais réalisée dans la nature. Néanmoins l'importance de ces solutions au point de vue des recherches qualitatives ne peut être estimée trop haut. Prises ensemble avec les solutions périodiques, ces nouvelles solutions découvertes par POINCARÉ forment pour ainsi dire le canevas du tissu si enchevêtré formé par la totalité des orbites générales.

13. Stabilité du mouvement.

La question sur la stabilité du système solaire n'a pas cessé d'intéresser les astronomes et les géomètres. Rappelons à cet égard les théorèmes célèbres de LAGRANGE et de POISSON sur l'invariabilité des grands axes et aussi les travaux classiques de LAGRANGE, de LEVERRIER et de CELLÉRIER sur le développement trigonométrique des perturbations séculaires des autres éléments. Étant donné l'état plutôt formel de la science en ce temps-là il n'est pas étonnant que les géomètres fussent alors convaincus de la stabilité du mouvement.

Aujourd'hui nous sommes plus sceptiques. Il arrive souvent avec le développement de la science que les difficultés paraissent s'augmenter à la lumière des découvertes nouvelles. Par ses travaux admirables sur la convergence des séries trigonométriques [93], sur les solutions périodiques, asymptotiques et doublement asymptotiques, POINCARÉ a dirigé ainsi l'attention sur de nouvelles difficultés qui embrouillent la question de la stabilité du mouvement. Voilà déjà qui est important, car avant de pouvoir vaincre les difficultés il faut les connaître.

Mais POINCARÉ a étudié aussi directement le problème de la stabilité du mouvement et est arrivé à des découvertes très importantes. C'est encore la théorie des invariants intégraux qui lui a servi comme point de départ dans ces recherches [183; 280, ch. XXVI].

Rappelons d'abord la définition précise de la stabilité donnée par POINCARÉ : Pour qu'il y ait stabilité complète dans le problème des Trois Corps, il faut trois conditions :

- 1° Qu'aucun des trois corps ne puisse s'éloigner indéfiniment;
- 2° Que deux des corps ne puissent se choquer et que la distance de ces deux corps ne puisse descendre au-dessous d'une certaine limite;

3° Que le système vienne repasser une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa situation initiale.

Si la troisième condition est seule remplie, sans que l'on sache si les deux premières le sont, POINCARÉ dit qu'il y a seulement *stabilité à la POISSON*.

Cela étant, POINCARÉ démontre qu'il y a stabilité à la POISSON, si le mouvement est limité à un certain domaine et si, de plus, il existe un invariant intégral positif et fini dans ce domaine.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de considérer le mouvement permanent d'un fluide incompressible enfermé dans un vase. Dans ce cas, le volume d'une partie quelconque du fluide est invariable pendant le mouvement, c'est-à-dire l'intégrale triple qui mesure ce volume est un invariant intégral.

Soit U_0 un volume quelconque intérieur du vase, les molécules liquides qui remplissent ce volume à l'instant zéro rempliront à l'instant τ un certain volume U_1 , à l'instant 2τ un certain volume $U_2 \dots$, et à l'instant $n\tau$ un certain volume U_n .

Le volume V du vase étant fini, les volumes U_0, U_1, \dots, U_n ne peuvent pas tous être extérieurs les uns aux autres, si n est assez grand. Si U_i et U_k ont une partie commune, il en sera de même de U_0 et U_{k-i} , puisque le mouvement est permanent. On peut donc choisir le nombre α de telle sorte que U_0 et U_α aient une partie commune. Après des considérations de cette nature, POINCARÉ arrive à la conclusion, qu'il y a des molécules qui traversent le volume U_0 une infinité de fois tant avant qu'après l'époque zéro, et cela quelque petit que soit ce volume.

D'autre part, en général, il y a d'autres molécules qui ne traversent U_0 qu'un nombre fini de fois. POINCARÉ montre que ces dernières doivent être regardées comme exceptionnelles ou, pour préciser d'avantage, que la *probabilité* qu'une molécule ne traversera U_0 qu'un nombre fini de fois est infiniment petite, si l'on admet que cette molécule est à l'intérieur de U_0 à l'origine du temps.

Enfin, ces résultats sont indépendants de la définition du mot probabilité.

Les principes mentionnés s'appliquent presque sans modification au problème restreint des Trois Corps. Soit S et J les deux masses attirantes se mouvant en cercles concentriques. Soit A la masse infiniment petite se mouvant dans le plan de ces cercles sous l'attraction de S et J . Pour des valeurs assez grandes de la constante de l'intégrale de JACOBI, le mouvement relatif de A par rapport à la ligne tournante SJ est limité par l'une ou par l'autre de trois courbes fermées C_1, C_2 et C_3 entourant respectivement les points S, J et ∞ . POINCARÉ admet que la valeur de la constante de JACOBI est si grande que les deux courbes C_1 et C_2 existent et que le corps A se trouve, à l'origine du temps, à l'intérieur de C_1 (ou de C_2). Alors, le corps A n'en sortira jamais, et la première condition de stabilité est remplie.

Les équations pouvant se mettre sous la forme canonique, il existe certainement un invariant intégral positif. En désignant par ξ, η les coordonnées relatives de A et par ξ', η' les composantes de la vitesse relative, l'invariant intégral devient

$$I = \int d\xi d\eta d\xi' d\eta'.$$

POINCARÉ montre que cette intégrale est finie si l'intégration est effectuée sur le domaine limité par la courbe C_1 (ou C_2) et par deux valeurs de la constante de JACOBI voisines l'une de l'autre. Dans l'étude du mouvement dont il s'agit, l'intégral I peut donc jouer le même rôle que le volume invariable d'une partie du liquide dans le cas du mouvement permanent d'un fluide incompressible. Il en résulte que la troisième condition de stabilité est aussi remplie. La masse A repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale, si l'on n'est pas placé dans certaines conditions initiales exceptionnelles dont la probabilité est infiniment petite. La théorie des solutions asymptotiques montre que de telles orbites exceptionnelles existent vraiment.

En voulant appliquer ces considérations au problème général des Trois Corps on rencontre certaines difficultés. Les limites que l'intégrale des forces vives impose au mouvement ne suffisent pas pour rendre l'invariant intégral fini. Mais par l'introduction d'une nouvelle variable indépendante t' au lieu du temps t , POINCARÉ déduit néanmoins un invariant intégral positif qui est fini. Toutefois il peut arriver que t devient infini pour des valeurs finies de t' . En prolongeant la solution au delà d'une telle valeur de t' , on rencontrera une autre trajectoire qui doit être considérée comme un prolongement analytique de l'autre. Ainsi, on arrive à la conclusion que l'orbite considérée et ses prolongements analytiques mentionnés repasseront en général une infinité de fois aussi près que l'on veut de la situation initiale.

«Il semble d'abord que cette conséquence ne puisse intéresser que l'analyste et n'ait aucune signification physique. Mais cette manière de voir ne serait pas tout à fait justifiée. On peut conclure en effet que si le système ne repasse pas une infinité de fois aussi près que l'on veut de sa position primitive, le temps pendant lequel le périmètre du triangle des trois corps reste inférieur à une quantité donnée est toujours fini.»

14. Théorie de la Lune.

Dans la théorie de la Lune de DELAUNAY, les éléments elliptiques sont développés en séries trigonométriques suivant les multiples de quatre arguments

$w_i = n_i t + \tilde{w}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) fonctions linéaires du temps; n_1 et n_2 sont les moyens mouvements de la Lune et du Soleil, n_3 et n_4 sont ceux du périégée et du noeud. DELAUNAY pose $n_2 : n_1 = m$. Les coefficients des séries trigonométriques ainsi que les quantités n_3 et n_4 sont développés suivant les puissances de m et de certaines petites quantités α, e', e, γ qui signifient respectivement le rapport entre les distances moyennes de la Lune et du Soleil, l'excentricité de l'orbite terrestre, les modules de l'excentricité et le module de l'inclinaison de l'orbite de la Lune. Les formules de DELAUNAY ne contiennent que des puissances positives de m, α, e', e et γ .

POINCARÉ démontre [372] que, si on poussait assez loin les développements de DELAUNAY, on arriverait à des termes où m figurerait à une puissance négative. Dans l'expression de la longitude, les termes correspondants renferment au moins en facteur $e'^4 e \gamma^2$ et dans l'expression de la latitude au moins $e'^4 e^2 \gamma$.

La démonstration de POINCARÉ est intéressante aussi au point de vue de la méthode. Il part d'équations différentielles de la forme (2). Au moyen de transformations canoniques successives, il arrive à d'autres équations de la même forme mais où le développement de F , jusqu'à un degré quelconque, est indépendant des variables y et ne dépend des ξ et η que dans la combinaison $\xi^2 + \eta^2$. En négligeant les autres termes de F , l'intégration des équations est immédiate. C'est peut-être la manière la plus rapide de démontrer les théorèmes fondamentaux relatifs à la forme des développements qui satisfont aux équations (2), bien que cette méthode ne puisse être recommandée pour le calcul direct de ces développements.

En somme, l'apparition des puissances négatives de m est due à l'introduction de petits diviseurs d'intégration de l'ordre de m^3 . D'ailleurs, l'existence de ces petits diviseurs de l'ordre de m^3 dépend de ce fait que, dans les expressions des moyens mouvements du noeud et du périégée, les termes en m^2 sont égaux et de signes contraires, c'est-à-dire en rapport rationnel. —

En mettant $e' = e = \gamma = 0$, les développements de DELAUNAY ne renferment qu'un seul argument $\tau = w_1 - w_2$. La solution est alors périodique.

En négligeant les paramètres α et e' , les équations du mouvement de la Lune deviennent particulièrement simples. Ces équations simplifiées ont été l'objet de recherches magistrales de M. HILL.¹

Ce savant a calculé directement la solution périodique mentionnée tout à l'heure (pour $\alpha = 0$). Il a développé les coordonnées relatives de la Lune en séries de FOURIER de l'argument τ . Les coefficients qui dépendent de m apparaissent sous la forme de séries à termes rationnelles qui convergent très rapidement.

¹ American Journal of Mathematics, Vol. I (1878). Coll. Works Vol. I p. 284.

α, e', e, γ M. BROWN est conduit chaque fois à un système d'équations linéaires à seconds membres. Le système se partage en deux, l'un du quatrième et l'autre du second ordre. L'essentiel de la méthode de M. BROWN, c'est que la valeur numérique de m est introduite dès le commencement, de sorte que les développements suivant les puissances de m ou de $m:(1-m)$ sont évités.

POINCARÉ propose une autre méthode pour le calcul des termes de degré supérieur [216; 464, ch. XXIX]. Cette méthode tout à fait analytique est très originale mais moins directe que celle de M. BROWN. Les développements procèdent suivant les puissances de $m:(1-m)$, α, e', e, γ . Dans la méthode de POINCARÉ, les systèmes d'équations linéaires à seconds membres qu'il faut résoudre sont seulement du deuxième ordre.

15. Théorie des petites planètes.

A côté de la théorie de la Lune, la théorie du mouvement d'une petite planète troublée par Jupiter doit être considérée comme un cas particulier assez simple du problème des Trois Corps.

En négligeant l'excentricité de l'orbite de Jupiter, les équations se mettent sous la forme (2) avec trois degrés de liberté. On aura un couple x, y et deux couples ξ, η ; y sera la différence des deux longitudes moyennes, les autres variables $x, \xi', \eta', \xi'', \eta''$ seront définies comme à la page 316.

Si l'excentricité de l'orbite de Jupiter n'est pas négligée, la fonction F dépend aussi de l'anomalie moyenne de Jupiter, c'est-à-dire du temps. Pour éliminer le temps, on peut introduire un couple $x' y'$ (y' étant cette anomalie moyenne et x' une variable auxiliaire). Le problème est alors ramené à la forme canonique (2) avec quatre degrés de liberté (deux couples x, y et deux couples ξ, η).

En voulant intégrer ces équations par des séries, il faut distinguer les planètes ordinaires et les planètes caractéristiques. La période de révolution de ces dernières est à peu près commensurable avec celle de Jupiter.

En voulant appliquer les séries de M. LINDSTEDT aux planètes ordinaires et les séries de M. BOHLIN (généralisées) aux planètes caractéristiques, on rencontre cette difficulté que les termes en μ dans les expressions des moyens mouvements du noeud et du périhélie sont égaux et de signes contraires. Pour éviter la difficulté en question, on pourrait appliquer un procédé analogue à celui employé par POINCARÉ dans la théorie de la Lune (page 354). On démontrerait ainsi que les séries de M. LINDSTEDT (pour les astéroïdes ordinaires) ne renferment que des puissances positives de la masse perturbante μ . Au contraire, pour les planètes caractéristiques, en admettant que le petit diviseur Δ , dû à la commensurabilité

M. HILL ne s'est pas occupé de la question de convergence. Les travaux généraux de POINCARÉ sur les solutions périodiques montrent que la convergence a certainement lieu.

Pour étudier les solutions voisines de la solution périodique, M. HILL¹ a formé les équations aux variations. Elles peuvent se mettre sous la forme particulièrement simple

$$(26) \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2} + \{\Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\tau + 2\Theta_2 \cos 4\tau + \dots\} z = 0.$$

Le coefficient Θ_k contient en facteur m^{2k} de sorte que les coefficients Θ décroissent très rapidement. On aura deux équations de la forme (26). L'une donne les inégalités du premier degré par rapport au module γ ; l'autre les inégalités du premier degré par rapport au module e . Les parties principales des moyens mouvements du noeud et du périhélie (parties indépendantes de α , e' , e , γ) sont déterminées par les exposants caractéristiques des équations (26).

Une équation de cette forme admet deux solutions

$$z = \sum_k b_k e^{\pm (2k+g)\tau \sqrt{-1}}.$$

Il s'agit de déterminer l'exposant caractéristique g et les rapports des coefficients b_k . M. HILL a ramené le problème à la résolution d'une infinité d'équations du premier degré à une infinité d'inconnues. M. HILL admet sans démonstration que les déterminants d'ordre infini qu'on rencontre ainsi sont convergents.

POINCARÉ démontre la convergence et en même temps la légitimité de la méthode de M. HILL [91; 279, nos 185—189; 215]. Par ces travaux de HILL et POINCARÉ, les déterminants d'ordre infini ont été introduits dans l'analyse. Il est inutile de rappeler ici l'importance capitale de cette notion nouvelle.

POINCARÉ donne aussi une autre méthode pour calculer l'exposant caractéristique g et les coefficients b_k [214; 464 nos 332—335]. Il développe en effet les inconnues $\cos g\pi$ et $b_k : b_0$ suivant les puissances des quantités Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 , ... En vertu d'un théorème général démontré par POINCARÉ [69], les séries en question représentent des fonctions entières et sont ainsi toujours convergentes.

Il est bien connu que M. E. W. BROWN² a élaboré dans ces derniers temps une théorie complète pour la Lune en partant des travaux mentionnés de M. HILL. Pour déterminer les inégalités d'un degré quelconque par rapport aux quantités

¹ Acta mathematica Vol. VIII (1886) [1877].

² Memoirs of the Royal Astron. Soc. t. LIII, LIV, LVII.

approchée, est de l'ordre de $V\bar{\mu}$, on rencontrerait (comme dans la théorie de la Lune) dans les séries de M. BOHLIN généralisées des termes d'ordre négatif, Δ et $V\bar{\mu}$ étant du premier ordre. Toutefois dans les développements des coordonnées de l'astéroïde, les termes correspondants sont au moins du 7^e degré par rapport aux excentricités et à l'inclinaison. Évidemment, l'introduction des termes d'ordre négatif par rapport à Δ et $V\bar{\mu}$ n'empêche pas que les séries de M. BOHLIN ainsi généralisées ne renferment que des termes d'ordre positif, en admettant que chacune des quantités e' , e et γ est aussi de l'ordre de $V\bar{\mu}$. On pourrait ainsi pousser l'approximation jusqu'à un ordre quelconque.

En mettant dans tous ces développements $e' = e = \gamma = 0$, on rencontrerait la solution périodique de la première sorte qui correspond au rapport admis entre les moyens mouvements. Évidemment, on pourrait aussi faire la théorie de l'astéroïde en partant de cette solution périodique (analogue à celle de M. HILL dans le cas de la Lune) et en appliquant ensuite la méthode de M. BROWN ou de POINCARÉ pour le calcul des termes renfermant les puissances de e' , e et γ .

Quand il s'agit d'une théorie approchée permettant de retrouver l'astéroïde pendant quelques centaines d'années, on pourrait se contenter des premiers termes des séries mentionnées. Plusieurs astronomes se sont occupés en détail de cette question de donner des expressions générales permettant de calculer rapidement les perturbations les plus importantes.

POINCARÉ a ébauché une méthode de ce genre applicable aux planètes caractéristiques [368; 464, n^{os} 206—210]. Les équations sont de la forme (2) avec trois degrés de liberté (un couple x , y et deux couples ξ , η). Les ξ et η sont de l'ordre de l'excentricité et de l'inclinaison. En première approximation, POINCARÉ néglige dans F tous les termes qui dépendent de la variable angulaire y , qui signifie la différence des deux longitudes moyennes. Les variables sont choisies de sorte que l'intégration des équations ainsi abrégées nous donne les perturbations qui varient lentement à cause de la petitesse de μ ou en vertu de la commensurabilité approchée entre les moyens mouvements. Les inégalités obtenues ainsi en première approximation sont les plus importantes, puisqu'elles ont été agrandies par les petits diviseurs. Enfin, dans une seconde approximation, POINCARÉ tient compte aussi des termes de F qui dépendent de la variable y . Les perturbations qui en résultent sont moins considérables.

16. Développement de la fonction perturbatrice.

Dans notre système solaire, les masses des huit planètes principales sont très petites par rapport à celle du Soleil. Les masses des astéroïdes et des comètes

sont même tout à fait insensibles. Le mouvement de l'un quelconque de tous ces corps, qui ne se rapproche pas trop d'une planète principale, aura donc lieu à peu près suivant les lois de Képler au moins pendant un certain temps limité. Les forces qui empêchent le mouvement de rester képlérien dérivent d'une fonction de force qui s'appelle la fonction perturbatrice.

En choisissant dans la théorie des planètes les variables proposées par POINCARÉ (voir page 315), la fonction perturbatrice ne sera autre chose que la fonction μF_1 de la page 315. Elle sera la même pour toutes les planètes et aura la forme [164; 187; 464, n° 43]

$$\mu F_1 = \sum m_i m_j \left\{ \frac{1}{\mathcal{A}_{i,j}} - V_i V_j \cos W_{i,j} \right\},$$

m_i et m_j étant les masses des planètes P_i et P_j , $\mathcal{A}_{i,j}$ leur distance mutuelle, V_i et V_j les vitesses *absolues* des planètes P_i et P_j (le centre de gravité de tout le système étant supposé fixe) et enfin $W_{i,j}$ l'angle compris entre les directions de ces vitesses.

En introduisant pour les coordonnées relatives et les vitesses absolues les expressions des coordonnées et des vitesses dans le mouvement képlérien autour d'un centre fixe d'attraction, la fonction perturbatrice et ses dérivées par rapports aux variables employées deviennent des fonctions périodiques de toutes les anomalies moyennes, développables en séries trigonométriques suivant les multiples de ces anomalies, les coefficients des développements étant des fonctions des autres éléments elliptiques ou canoniques. Avant de pouvoir calculer les perturbations, il faut savoir calculer les coefficients de ces développements.

Le développement de la seconde partie de la fonction perturbatrice, celle qui dépend des vitesses, n'offre pas de difficultés sérieuses [187; 464, n° 239]. Il s'agit donc avant tout de développer l'inverse de la distance \mathcal{A} de deux planètes en série trigonométrique suivant les multiples des deux anomalies moyennes.

Le développement analytique de la fonction perturbatrice a fait l'objet de travaux d'un grand nombre d'astronomes et de géomètres. Le développement analytique le plus simple est celui de NEWCOMB.

En supposant nulles les excentricités, le développement de la fonction \mathcal{A}^{-1} suivant les multiples des deux longitudes, comptées à partir du noeud, est assez simple. Les coefficients de ce développement dépendent des grands axes et de l'inclinaison mutuelle des orbites et sont connus sous le nom des coefficients de JACOBI.

NEWCOMB a déduit les coefficients du développement général de la fonction \mathcal{A}^{-1} suivant les multiples des deux longitudes moyennes et des deux anomalies

moyennes et suivant les puissances des excentricités, en effectuant sur les coefficients de JACOBI certaines opérations différentielles. *Les opérateurs de NEWCOMB* sont certains polynômes à coefficients rationnels du symbole différentiel $D = \alpha \frac{d}{d\alpha}$, α étant le rapport des deux grands axes. Pour calculer successivement les coefficients de ces opérateurs, NEWCOMB a donné des formules de récurrence assez compliquées.

POINCARÉ a simplifié beaucoup [464, ch XIX] la théorie des opérateurs de NEWCOMB, en montrant que ces opérateurs rentrent comme coefficients dans le développement de la fonction

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D E^{V^{-1}sv}$$

suivant les multiples de l'anomalie moyenne et suivant les puissances de l'excentricité (r, a, v désignent le rayon vecteur, le demi grand axe et l'anomalie vraie, tandis que s est un nombre entier). Le développement trigonométrique de la fonction considérée avait été étudié déjà par HANSEN.

Étant donnée cette découverte de POINCARÉ, il était facile de déduire pour les opérateurs de NEWCOMB certaines formules de récurrence beaucoup plus simples que celles qu'avait employées NEWCOMB lui-même. Ainsi, le calcul des termes de degré très élevé dans le développement de la fonction perturbatrice a été considérablement simplifié. —

Soit maintenant l et l' les anomalies moyennes, u et u' les anomalies excentriques des deux planètes. On aura les développements

$$A^{-1} = \sum_{m,m'} A_{m,m'} E^{V^{-1}(ml+m'l')} = \sum_{m,m'} B_{m,m'} E^{V^{-1}(mu+m'u')},$$

(E étant la base des logarithmes naturels).

Pour étudier les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ de ces développements, POINCARÉ les exprime au moyen d'intégrales doubles. En mettant

$$x = E^{V^{-1}u}, \quad y = E^{V^{-1}u'}$$

il obtient la formule [209; 464, n° 242].

$$A_{m,m'} = -\frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{VE^{\Omega} dx dy}{A \cdot x^{m+1} y^{m'+1}},$$

V , Ω et \mathcal{A}^2 (le carré de la distance) étant certains polynomes en x , $\frac{1}{x}$, y et $\frac{1}{y}$. Pour obtenir l'expression de $B_{m,m'}$, il faut mettre $V \equiv \Omega \equiv 1$ dans l'expression de $A_{m,m'}$. Les intégrations doivent s'effectuer suivant les cercles $|x|=1$, $|y|=1$ dans les plans des variables complexes x et y . La fonction $x^2 y^2 \mathcal{A}^2$ est un polynome du sixième degré en x et y dont les coefficients dépendent des éléments des orbites.

Les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ peuvent se développer suivant les puissances des excentricités et de l'inclinaison. Par les travaux de LEVERRIER, de NEWCOMB et de BOQUET, on connaît les premiers termes de ces développements (jusqu'au huitième degré incl.). POINCARÉ montre comment il est possible de trouver les rayons de convergence des ces développements [209, 464, ch XX]. Il s'agit d'indiquer les singularités qui déterminent les domaines de convergence.

Pour cela, POINCARÉ se pose le problème général de trouver les singularités d'une fonction définie par une intégrale complexe prise suivant une courbe ou une surface fermée. En connaissant les relations qui donnent les singularités de la fonction sous le signe d'intégration, considérée comme fonction des variables d'intégration, il est possible d'écrire les relations qui donnent les singularités de l'intégrale, considérée comme fonction des paramètres. Il faut exprimer que deux singularités de la fonction sous le signe d'intégration coïncident, et que ces deux singularités se sont trouvées auparavant sur des côtés opposés du chemin d'intégration, de sorte qu'il n'est pas possible de les éviter en déformant ce chemin. Il n'est pas difficile d'écrire les conditions pour que deux singularités coïncident. La difficulté est de trouver parmi toutes les singularités possibles celles qui appartiennent à la branche considérée de la fonction multiforme qui est définie par l'intégrale donnée.

POINCARÉ résout la question complètement quand les excentricités sont nulles ou quand l'inclinaison est nulle. Pour le cas général, la discussion devient trop compliquée. Mais POINCARÉ arrive presque immédiatement à la conclusion: Pour tous les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$, les développements possèdent le même domaine de convergences. —

Ensuite POINCARÉ poursuit l'étude des coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ dans une autre direction. Évidemment, le calcul de ces coefficients serait facilité par l'emploi de formules de récurrence. POINCARÉ a ébauché la question en démontrant l'existence de relations linéaires entre les coefficients A et B et leurs dérivées par rapport aux éléments qu'ils renferment [168; 196; 206; 207; 351; 464, ch XXI].

Dans ces recherches, POINCARÉ considère les intégrales

$$II = \iint \frac{H E^\Omega dx dy}{xy F^s},$$

étendues suivant une surface fermée dans le domaine des variables complexes x et y . Ω et F sont des polynômes donnés en x, x^{-1}, y et y^{-1} , H un polynôme arbitraire; $2s$ est un nombre entier et impair. POINCARÉ démontre que les intégrales II , considérées comme fonctions des paramètres qui entrent dans Ω et F , peuvent se réduire à un certain nombre d'entre elles qui sont linéairement indépendantes. Si f et ω sont les degrés des polynômes F et Ω , le nombre des intégrales II qui sont linéairement indépendantes est $\leq 8(f + \omega)^2$. Si les polynômes F, Ω et H sont symétriques, de sorte que leurs signes ne changent pas si x et y changent leurs signes simultanément, alors le nombre des intégrales linéairement indépendantes est $\leq 4(f + \omega)^2$. Ces nombres ne dépendent pas de s .

Les coefficients $A_{m,m'}$ et $B_{m,m'}$ ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre quelconque par rapport aux éléments sont des expressions de la forme II .

Pour les coefficients $B_{m,m'}$, on a $f = 2, \omega = 0, 4(f + \omega)^2 = 16$. Si l'on envisage le développement de la fonction \mathcal{A}^{-1} suivant les anomalies excentriques, il y aura ainsi, entre les coefficients, des relations linéaires de récurrence dont les coefficients seront des fonctions rationnelles des éléments. Ces relations permettent d'exprimer tous ces coefficients en fonction de seize entre eux. De plus, chacun des coefficients $B_{m,m'}$, considéré comme fonction de l'un quelconque des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du seizième ordre au plus, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des éléments.

Pour les coefficients $A_{m,m'}$, on a $f = 2, \omega = 1, 4(f + \omega)^2 = 36$. Le polynôme Ω , qui dépend de m et m' , n'est pas le même pour deux coefficients $A_{m,m'}$ différents. Par suite, on ne peut trouver ainsi des formules de récurrence à coefficients rationnels entre les $A_{m,m'}$. Mais chacun de ces coefficients, considéré comme fonction de l'un quelconque des éléments, satisfait à une équation différentielle linéaire du trente-sixième ordre au plus.

L'intégrale II est une période de l'intégrale double indéfinie

$$I = \iint \frac{H E^\Omega dx dy}{xy F^s}.$$

Soit k le nombre des périodes fondamentales. Ce nombre k ne dépend pas des polynômes H et Ω mais seulement du polynôme F . Considérons $k + 1$ intégrales II qui peuvent différer par rapport à H et Ω , le domaine d'intégration et le polynôme F étant le même dans toutes. Chacune de ces $k + 1$ intégrales II s'exprime au moyen des périodes fondamentales correspondantes par la même

fonction linéaire à coefficients entiers. Si les paramètres qui entrent dans Π décrivent dans leurs plans des contours fermés, les périodes subiront une transformation linéaire qui sera la même pour tous les Π . Il en résulte qu'il existe entre $k + 1$ quelconques des intégrales Π une relation linéaire à coefficients uniformes par rapport aux paramètres qui entrent dans F .

Pour les coefficients $B_{m,m'}$, on a $k \leq 16$. Alors, il en est ainsi de même pour l'ensemble des coefficients A et B et de toutes leurs dérivées.

Ainsi, entre tous les coefficients $A_{m,m'}$ et leurs dérivées, il existe des relations linéaires à coefficients uniformes par rapport aux éléments, de sorte que toutes ces quantités peuvent s'exprimer par seize entre elles.

POINCARÉ semble espérer qu'une étude plus détaillée des périodes de l'intégrale double qui correspond à $B_{m,m'}$ montrera que le nombre k est < 16 , quand il s'agit du développement de la fonction perturbatrice.

Si les excentricités sont nulles, la fonction F se simplifie de sorte que $k = 4$. Les relations linéaires correspondantes étaient connues déjà par JACOBI.

JACOBI a démontré aussi, par des considérations tout à fait élémentaires, que les B peuvent s'exprimer linéairement par quinze entre eux. On aurait donc $k \leq 15$ dans le cas général. —

Arrivons maintenant aux recherches de POINCARÉ sur les expressions asymptotiques des termes de degré très élevé dans le développement de la fonction \mathcal{A}^{-1} [120; 173; 278, ch. VI; 464, ch. XXIII].

Supposons que les moyens mouvements n et n' de deux planètes soient à peu près commensurables de sorte que $mn + m'n'$ soit une quantité très petite. Alors les perturbations des longitudes qui après deux intégrations proviennent du terme dont l'argument est $ml + m'l'$ peuvent devenir sensibles quoique le coefficient $A_{m,m'}$ soit lui-même très petit. Il serait alors important d'avoir une expression analytique qui se rapproche de $A_{m,m'}$ quand m et m' sont très grands. Pour trouver une telle expression, POINCARÉ pose

$$\Phi(z) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} A_{av+b, cv+d} \cdot z^v,$$

a, b, c, d étant de petits entiers donnés. Cette fonction peut se mettre sous la forme d'une intégrale simple

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} J^{-1} z^{-(a\theta + \gamma d)} t^{bc - ad - 1} dt,$$

prise le long de la circonférence $|t| = 1$. Dans \mathcal{A} (la distance des deux planètes) il faut introduire

$$EV^{-1}l = z^a t^{-c}, \quad EV^{-1}l' = z^\gamma t^a$$

α et γ étant deux entiers tels que $\alpha\alpha + c\gamma = 1$.

Pour trouver l'expression asymptotique des coefficients $A_{av+b, cv+d}$ pour ν très grand, POINCARÉ applique la méthode importante de M. DARBOUX, qui donne précisément l'expression asymptotique des coefficients éloignés d'une série de puissance, quand on connaît la nature des singularités de la fonction sur le cercle de convergence.

La détermination des points singuliers de la fonction $\Phi(z)$ ne présente pas de difficultés, puisque c'est une fonction donnée par une intégrale simple prise le long d'un contour fermé. Pas de difficultés non plus en ce qui concerne la nature de ces points singuliers, qui sont bien tels que suppose la méthode de M. DARBOUX. La difficulté provient de ce fait que tous les points singuliers qu'on trouve n'appartiennent pas à la branche considérée de la fonction $\Phi(z)$. La discussion pour reconnaître l'admissibilité des points singuliers est assez délicate et a été jusqu'ici le principal obstacle à l'emploi général de cette méthode. POINCARÉ n'en a fait l'application que dans le cas spécial où l'inclinaison est nulle, l'une des excentricités nulle et l'autre très petite.

Ce serait certainement un travail utile de poursuivre ces recherches, au moins dans le cas où les excentricités et l'inclinaison sont petites.

17. Détermination des orbites.

Le mouvement d'une planète ou comète qui ne se rapproche pas trop d'une planète principale reste sensiblement képlérien pendant un certain temps. Pendant ce temps, les éléments osculateurs de l'orbite ne varient que très peu et peuvent être regardés comme invariables au moins dans une première approximation. Après la découverte d'un tel astre, il importe de déterminer les éléments de son orbite en partant d'observations séparées l'une de l'autre par quelques semaines. Pour le calcul des six éléments, trois observations complètes, donnant la longitude et la latitude géocentrique (λ et β), sont en général nécessaires.

Le problème de la détermination des orbites au moyen d'observations voisines fut résolu par LAPLACE en 1780. Rappelons brièvement les principes de sa solution. En partant des observations, au moins trois en nombre, et en employant la méthode d'interpolation, LAPLACE calcule pour une certaine époque t_0 la longitude λ et la latitude β de l'astre ainsi que les deux premières dérivées de ces angles. Les coordonnées rectangulaires héliocentriques de l'astre à l'époque t_0 sont alors des fonctions linéaires, à coefficients connus, de la distance géocentri-

que inconnue ϱ . En introduisant ces coordonnées et leurs dérivées secondes dans les équations du mouvement képlérien, LAPLACE obtient trois équations linéaires par rapport à ϱ et ses dérivées ϱ' et ϱ'' , équations dont les coefficients dépendent de la distance héliocentrique r de l'astre à l'époque t_0 . En éliminant ϱ' et ϱ'' , il trouve une relation entre ϱ et r . La résolution du triangle formé par le Soleil, la Terre et l'astre donne encore une relation entre ces mêmes quantités. En éliminant r entre ces deux relations, il obtient une équation du 7^e degré qui détermine ϱ . Cette quantité connue, les équations du mouvement donnent l'inconnue ϱ' comme fonction linéaire de ϱ . En connaissant ainsi ϱ et ϱ' , il est possible de calculer pour $t = t_0$ les valeurs initiales des coordonnées héliocentriques et de leurs dérivées du premier ordre. Enfin, en partant de ces valeurs initiales, LAPLACE arrive facilement aux valeurs cherchées des éléments.

LAPLACE n'avait pas élaboré son procédé dans tous ses détails. Les méthodes les plus usitées dans la pratique ont été celle de GAUSS et celles qui en sont dérivées. GAUSS part de trois équations linéaires entre les trois distances géocentriques inconnues ϱ_1 , ϱ_2 et ϱ_3 , équations qui expriment que le mouvement est plan. Les coefficients de ces équations dépendent des deux rapports entre les surfaces des trois triangles plans formés par le Soleil et par deux quelconques des trois positions de l'astre. Ces rapports sont développables suivant les puissances des intervalles de temps $t_2 - t_1$ et $t_3 - t_2$. Dans les développements de GAUSS et d'ENCKE, les coefficients ne dépendent que de la distance héliocentrique r_2 ; les développements plus approchés d'OPPOLZER renferment r_1 et r_3 , tandis que dans les développements encore plus exacts de GIBBS les coefficients renferment toutes les distances r_1 , r_2 et r_3 . En éliminant ϱ_1 et ϱ_3 , GAUSS et ENCKE obtiennent une équation pour ϱ_2 , donnant ϱ_2 avec une erreur du premier ordre par rapport aux intervalles $t_2 - t_1$ et $t_3 - t_2$. L'équation de GAUSS pour ϱ_2 est analogue à l'équation pour ϱ de LAPLACE. Dans la méthode d'OPPOLZER, on aura à résoudre deux équations algébriques entre ϱ_1 et ϱ_3 . L'erreur des inconnues qui s'obtiennent par des approximations successives est du second ordre. Enfin dans la méthode de GIBBS on aura trois équations entre ϱ_1 , ϱ_2 et ϱ_3 , et l'erreur des inconnues est du troisième ordre. En connaissant les coordonnées héliocentriques qui correspondent aux observations extrêmes ainsi que l'intervalle de temps $t_3 - t_1$, il est facile de calculer les éléments. Dans les méthodes de GAUSS, d'ENCKE, d'OPPOLZER et de GIBBS, le degré de l'exactitude augmente d'une unité si les observations sont équidistantes de sorte que $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$.

POINCARÉ a perfectionné considérablement [371] la méthode de LAPLACE en choisissant pour l'époque t_0 la valeur moyenne des trois époques d'observation t_1 , t_2 et t_3 . Alors, les erreurs des valeurs interpolées de la longitude et de la

latitude géocentrique sont du troisième ordre, tandis que les valeurs des deux premières dérivées de ces angles sont en erreur du second ordre par rapport aux intervalles de temps. Il en résulte que les valeurs calculées de q , q' etc. et de tous les éléments sont en erreur du second ordre. Ainsi, la méthode de LAPLACE donne en général une plus grande approximation que celle de GAUSS, quoique la rapidité des calculs soit la même dans les deux méthodes. Si les observations sont équidistantes, ces deux méthodes sont équivalentes. La méthode d'OPPOLZER l'emporte sur celle de LAPLACE seulement si les observations sont équidistantes, mais les calculs qu'elle exige sont plus compliqués. Enfin la méthode de GIBBS donne toujours la plus grande exactitude mais seulement au prix d'un travail considérable de calcul. D'ailleurs, il ne faut pas pousser l'approximation des calculs trop loin, puisque les observations sont elles-mêmes erronées.

Les erreurs du second ordre dans la méthode de LAPLACE dépendent des dérivées du troisième et du quatrième ordre de la longitude λ et de la latitude β pour $t=t_0$. POINCARÉ montre comment ces dérivées λ^{III} , λ^{IV} , β^{III} , β^{IV} et enfin les corrections du second ordre des éléments peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles par rapport aux q , $\cos \lambda$, $\sin \lambda$, λ' , λ'' , $\cos \beta$, $\sin \beta$, β' , β'' (q étant lui-même racine de l'équation déjà mentionnée du 7^e degré).

POINCARÉ démontre aussi qu'il est possible d'exprimer de la même manière les corrections dues à l'aberration.

POINCARÉ indique enfin comment on peut appliquer, par la méthode d'interpolation et au début du calcul, la correction de la parallaxe aux coordonnées de la Terre et éviter ainsi toute espèce de tâtonnement.

La méthode de LAPLACE, bien que présentant certains avantages dont le principal est la facilité de se servir de plus de trois observations, était tombée dans un injuste discrédit. Grâce à POINCARÉ, cette méthode élégante et pratique a été enfin réhabilitée. —

Les méthodes déjà mentionnées et ayant pour but la détermination des éléments elliptiques supposent que les intervalles entre les époques des trois observations sont petits, sans toutefois être trop petits. La résolution du problème plus général de calculer les éléments moyennant trois observations quelconques est beaucoup plus difficile. On aura évidemment six équations pour déterminer les six éléments inconnus, mais ces équations sont transcendantes comme l'équation de KÉPLER. Le problème est donc théoriquement possible, mais les ressources actuelles de l'Analyse ne permettent pas de le résoudre en toute rigueur et dans toute sa généralité.

Toutefois POINCARÉ fait la remarque que, si l'orbite est parabolique, il est

possible de déterminer les éléments moyennant trois observations complètes et quelconques [281]. En effet, dans ce cas, les équations de condition deviennent algébriques et le nombre des équations dépasse par l'unité le nombre des inconnues. Les équations devant être compatibles, on aura une certaine relation entre les données d'observation et exprimant que le mouvement est parabolique. Toutes réductions faites, on aura enfin les éléments de l'orbite parabolique sous la forme de fonctions rationnelles des époques des trois observations ainsi que des cosinus et sinus des trois longitudes et latitudes observées. Évidemment, il serait intéressant de former ces expressions rationnelles. Il pourrait arriver que l'application de cette méthode directe soit plus simple que l'emploi des méthodes actuellement en usage.

18. Figure de la Terre.

Dans son travail célèbre *Figure de la Terre tirée des lois de l'Hydrostatique* (1740), CLAIRAUT a étudié l'état d'équilibre d'une masse fluide hétérogène qui se trouve en rotation lente autour d'un axe et dont les particules sont soumises à la loi de l'attraction universelle. Si la rotation est nulle, on suppose que les surfaces d'égale densité sont sphériques et concentriques et que la densité diminue constamment quand on s'éloigne du centre. Soit $D(r)$ la densité moyenne à l'intérieur de la sphère de rayon r . En vertu de la rotation lente, les surfaces de niveau primitivement sphériques deviennent sensiblement des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe de rotation. L'aplatissement e de la surface de niveau de rayon moyen r satisfait à l'équation de CLAIRAUT:

$$D(r r' + r_1^2 + 5 r) + 2r D'(1 + r_1) = 0,$$

où $r_1 = r e' : e$. (r_1' , D' , e' signifient les dérivées de r_1 , D et e par rapport à r).

Pour r_1 il faut prendre la solution particulière qui satisfait à la condition $r_1 = 0$ pour $r = 0$.

Rappelons aussi que si r_1 est la valeur de r_1 à la surface l'aplatissement e_1 de la surface libre est donné dans la théorie de CLAIRAUT par la formule

$$e_1 (r_1 + 2) = \frac{5}{2} \varphi,$$

φ étant le rapport entre la force centrifuge à l'équateur et la pesanteur à la surface libre. Cela étant, la fonction e est complètement déterminée à l'intérieur du corps.

Ajoutons enfin que CLAIRAUT avait déjà démontré que $0 < \eta_1 < 3$ de sorte que

$$\frac{\varphi}{2} < e_1 < \frac{5}{4}\varphi.$$

POINCARÉ, en traitant le problème de CLAIRAUT, montre que la solution particulière définie par la condition $\eta = 0$ pour $r = 0$ existe toujours et qu'elle est unique [112; 203; 462, ch IV]. POINCARÉ montre de plus qu'on a toujours

$$(27) \quad 0 \leq \eta \leq 3.$$

Ces inégalités lui permettent de compléter un résultat obtenu par RADAU. En partant de la théorie de CLAIRAUT, ce savant avait déduit la formule curieuse

$$\frac{\frac{2}{5} \sqrt{\frac{5\varphi}{2e_1} - 1}}{1 - \frac{e_1 - \varphi}{I}} = \frac{1 + \frac{\xi}{2} - \frac{5\xi^2}{10}}{\sqrt{1 + \xi}} \equiv K(\xi),$$

où I désigne le rapport $(C-A):C$, (A et C étant les deux moments d'inertie principaux de la Terre), tandis que ξ est une certaine valeur inconnue de η à l'intérieur du corps.

Les valeurs de I et φ sont connues: la première est mesurée par la précession des équinoxes, la seconde par la physique. On a trouvé $I = 1:305,31$, $\varphi = 1:288,38$.

RADAU avait admis que $\eta' > 0$, de sorte que $0 < \xi < \eta_1 = 0,544$. On a alors $K < 1,00075$. Cela étant, la valeur $e_1 = 1:293,5$ (CLARKE 1880) ne peut pas satisfaire à la formule de RADAU. Ainsi, les valeurs admises de I et de e_1 ne sont pas d'accord avec la théorie de CLAIRAUT.

Étant donnée l'inégalité (27) de POINCARÉ, il arrive qu'on a toujours $K < 1,00075$, puisque $0 < \xi < 3$. Le résultat de RADAU subsiste donc aussi dans les cas où η' peut devenir négatif à l'intérieur du corps.

Ajoutons que les valeurs suivantes de l'aplatissement: $e_1 = 1:299,2$ (BESSEL 1841); $e_1 = 1:298,3$ (HELMERT 1907); $e_1 = 1:297,0$ (HAYFORD 1909) ne sont pas en contradiction avec la théorie de CLAIRAUT. —

POINCARÉ a aussi écrit deux mémoires qui se rapportent étroitement aux méthodes actuellement en usage dans la Géodésie. Il est bien connu que les surfaces de niveau de la Terre, qui sont orthogonales aux directions de la pesanteur, ne sont pas tout à fait des ellipsoïdes de révolution. Le géoïde (consti-

tuant la surface libre moyenne de la mer prolongée analytiquement, ou par des nivellements pensés au-dessous des continents) présente en vérité des soulèvements et des abaissements de quelques centaines de mètres par rapport au sphéroïde de référence. Rappelons aussi que les opérations géodésiques ordinaires, qui embrassent des mesures de distances, d'angles horizontaux et verticaux ainsi que des déterminations d'azimuts et de latitudes — que toutes ces opérations ont pour but d'étudier en détail les irrégularités du géoïde.

Les mesures de l'intensité de la pesanteur sont aussi d'une importance capitale dans les recherches géodésiques. Au moyen de ces mesures M. HELMERT a déterminé l'aplatissement de la Terre. Il semble toutefois qu'on n'ait pas encore tiré tout le parti possible de cette espèce d'observations.

Dans le premier des deux mémoires mentionnés [217] POINCARÉ montre que les mesures de l'intensité de la pesanteur, si elles sont assez multipliées et suffisamment exactes, peuvent remplacer les opérations géodésiques ordinaires et qu'elles suffisent pour déterminer complètement la forme du géoïde.

Mais avant de pouvoir utiliser ainsi les valeurs mesurées de la gravité, il faut y appliquer deux corrections: d'abord la correction de FAYE dépendant de l'altitude et donnant la réduction au niveau de la mer et ensuite une seconde correction qui s'obtient par le *procédé de condensation* de M. HELMERT. Après l'application de ces deux corrections, on trouve, à des quantités près du second ordre par rapport à l'aplatissement, la valeur g' de la gravité qu'on aurait observée sur le géoïde, si toutes les masses situées à l'extérieur d'une sphère S tangente intérieure du géoïde avaient été condensées sur cette sphère. Les changements du géoïde en vertu de la condensation sont du second ordre et peuvent être négligés. Après la condensation, on peut développer le potentiel V dû à l'attraction suivant les puissances négatives de r , les coefficients du développement étant des fonctions sphériques, et ce développement sera convergent sur toute la surface de la Terre.

Soit ζ le soulèvement du géoïde au-dessus de la sphère S . Il est clair qu'il y aura des relations simples (en négligeant les quantités du second ordre par rapport à l'aplatissement) entre les coefficients correspondants dans les développements de V , de g' et de ζ suivant les fonctions sphériques.

Soit maintenant

$$g' - g'_0 = \sum_{n \geq 2} g'_n X_n$$

le développement suivant les fonctions sphériques X_n qui donne les valeurs observées et corrigées g' . POINCARÉ démontre que le soulèvement ζ du géoïde au-

dessus de la sphère S est donné, aux termes du second ordre près, par le développement

$$g'_0 \zeta = \sum_{n=2} \frac{g'_n X_n}{n-1} + \mathcal{O},$$

\mathcal{O} étant une fonction linéaire connue du carré du cosinus de la latitude.

Il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients g'_n , qui convergent nécessairement très lentement. En effet la fonction $2\pi(g'_0 \zeta - \mathcal{O})$ aura la forme d'une intégrale, qui donne le potentiel d'une couche sphérique attirante, dont la densité est donnée par la fonction connue $g' - g'_0$, la loi de l'attraction étant représentée par une certaine fonction de la distance, et coïncidant à peu près avec la loi universelle.

En introduisant dans cette intégrale, au lieu de $g' - g'_0$, seulement la perturbation locale pour un certain lieu, l'intégrale en question donnera le soulèvement du géoïde qui correspond à cette perturbation.

POINCARÉ a développé cette idée aussi d'une autre manière en négligeant, non plus le carré de l'aplatissement, mais le carré du relèvement du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde, c'est-à-dire une quantité beaucoup plus petite. Alors, au lieu de la sphère S , on aura à faire avec un ellipsoïde, et les fonctions de LAMÉ s'introduiront au lieu des fonctions sphériques. —

Dans un autre mémoire, POINCARÉ traite la question des déviations de la verticale en Géodésie [365]. Il s'agit d'un géoïde très peu différent d'un ellipsoïde de révolution. Soit M un point quelconque du géoïde, N sa projection sur l'ellipsoïde de telle façon que MN soit normale à l'ellipsoïde. On définit la position de M en donnant la longitude l et la latitude λ de N ainsi que la longueur ζ de la ligne MN . Soit MP la verticale vraie au point M . On définit la déviation de cette verticale en donnant les composantes ξ et η de l'angle très petit de MN avec MP vers le Nord et vers l'Est.

Le long d'une courbe quelconque sur le géoïde, l , ζ , ξ , η ainsi que l'azimut φ de la tangente seront certaines fonctions de λ . Soit l' et l'' les deux dérivées premières de l par rapport à λ . En négligeant toujours les termes du second ordre, POINCARÉ démontre que sur une courbe quelconque, $\text{tg } \varphi$ est une fonction linéaire et homogène de l' et η dont les coefficients dépendent de λ . Il donne ensuite l'équation d'une ligne géodésique quelconque sur le géoïde. Ce sera une relation linéaire et homogène entre l' , l'' , ξ et η dont les coefficients dépendent de λ et φ .

Cela étant, POINCARÉ admet qu'on décrit par des moyens géodésiques une ligne géodésique sur le géoïde en partant d'un point A . Admettons, pour sim-

plifier l'exposition, que l'azimut φ s'annule en A . En suivant cette ligne géodésique, la longitude ne sera pas constante. L'équation de la ligne géodésique sera en effet

$$-l'' \cos \lambda + 2l' \sin \lambda - \eta = 0.$$

Ensuite l'azimut ne restera pas constamment nul. On aura

$$\varphi = l' \cos \lambda + \eta \operatorname{tg} \lambda.$$

Il s'agit de calculer η en connaissant φ par observation. En différentiant l'expression de φ par rapport à λ , on aura trois relations linéaires en l' et l'' . Après avoir éliminé l' et l'' , on obtient pour η une équation différentielle linéaire et du premier ordre. L'intégration donne

$$\eta - \eta_0 = \varphi \cot \lambda + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \varphi \cot^2 \lambda \, d\lambda,$$

η_0 et λ_0 étant les valeurs de η et λ au point A .

En général, on a négligé le second terme dans l'expression de $\eta - \eta_0$. POINCARÉ veut dire que cela n'est pas permis dans les régions équatoriales si $\lambda - \lambda_0$ est du même ordre que la latitude λ .

Dans le cas général où l'azimut en A n'est pas nul, on rencontre une correction analogue qu'il ne faut pas négliger dans le voisinage de l'équateur.

Ainsi, si l'on veut déterminer la déviation η en mesurant des azimuts, il ne suffit pas toujours de faire ces mesures au commencement et à la fin de l'arc. Parfois, il est nécessaire de les faire aussi en des stations intermédiaires.

POINCARÉ est d'avis qu'on peut expliquer ainsi pourquoi M. OUDEMANS dans sa triangulation de Java avait trouvé que les déviations de la verticale déduites des mesures d'azimut étaient en général et systématiquement trois fois plus grandes que les déviations déduites des mesures de longitude.

19. Théorie des marées.

Dans la théorie des marées, il s'agit d'étudier les oscillations de la mer sous l'influence de l'attraction de la Lune et du Soleil. Le potentiel de cette attraction se compose d'un grand nombre de termes de la forme $Ce^{\lambda t}$, C étant une fonction sphérique du second degré des coordonnées du lieu, λ une constante purement imaginaire et t le temps.

Étant donnée la petitesse de tous ces termes, qui sont divisés par la troisième puissance de la distance de l'astre, il est permis d'étudier séparément les oscillations harmoniques causées par chacun d'eux et d'appliquer ensuite le principe de la superposition des petits mouvements.

D'après leurs périodes, les oscillations harmoniques se partagent en plusieurs groupes. On aura ainsi un groupe de marées à courtes périodes (semi-diurnes et diurnes), qui dépendent de la rotation de la Terre. On aura aussi des marées lunaires à longues périodes (semi-mensuelles et mensuelles) ainsi que des marées solaires à longues périodes (semi-annuelles et annuelles).

Pour déterminer les marées à longues périodes, LAPLACE et ses successeurs avaient négligé l'accélération et la vitesse du liquide. Le problème des marées est alors relativement simple et peut se résoudre par les méthodes de la Statique. Il suffit d'exprimer que le potentiel des forces agissantes est constant sur la surface de la mer. Cette condition s'écrit

$$(28) \quad g\zeta + II + \Phi = k.$$

Ici ζ désigne le déplacement vertical et cherché de l'eau. Le premier terme $g\zeta$ est le potentiel de la gravité. Le second terme II est le potentiel du bourrelet liquide qui se trouve entre la surface soulevée ou déprimée et la surface d'équilibre de la mer, c'est-à-dire le potentiel au point considéré d'une couche sphérique dont la densité est donnée par la fonction inconnue ζ . Le troisième terme Φ représente la partie considérée du potentiel de l'astre. Enfin la constante k du second membre doit être choisie de sorte que la masse totale du bourrelet soit nulle.

Le problème en question fut résolu déjà par BERNOULLI dans le cas où il n'y a pas de continents, et par Lord KELVIN en supposant que II soit négligeable. ζ est alors une fonction linéaire de Φ , et la marée statique aura pour effet de modifier périodiquement l'aplatissement de l'ellipsoïde de révolution formé par la surface de la mer. En calculant ainsi les marées à longues périodes et en comparant les résultats des calculs avec celui des observations, DARWIN a trouvé des écarts qui ne peuvent s'expliquer que si l'on admet que la Terre n'est pas tout à fait rigide mais qu'elle se déforme en même temps que la mer sous l'attraction des astres. D'après ce savant, la Terre serait à peu près aussi rigide que l'acier.

Toutefois, il n'est pas certain que l'effet du bourrelet soit négligeable. POINCARÉ a donc résolu le problème dans toute sa généralité [146, 195]. En introduisant pour ζ sa valeur exprimée en II et en $\frac{dII}{dr}$ à la surface, les équations qui définissent le potentiel II deviennent

$$\Delta \Pi = 0$$

à l'intérieur de la Terre et

$$2 \frac{d\Pi}{dr} + \Pi = \xi \varepsilon \Pi + \frac{4\pi}{g} \varepsilon (\Phi - k)$$

à la surface. On a posé $\xi = \frac{4\pi}{g}$. D'ailleurs ε est $= 0$ sur les continents et $= 1$ sur la mer.

En mettant $\xi = 0$, on se trouve dans les conditions de Lord KELVIN. POINCARÉ développe Π suivant les puissances de ξ . Il démontre d'une manière très ingénieuse que Π et ζ sont des fonctions méromorphes de ξ n'ayant que des pôles simples, réels et positifs.

Soit ξ_1, ξ_2, \dots ces pôles. Le résidu U_i de Π par rapport au pôle ξ_i satisfait aux relations homogènes qu'on obtient en supprimant $\Phi - k$ dans la seconde des équations ci-dessus et en y écrivant U_i au lieu de Π , ξ_i au lieu de ξ . On aura donc, en supposant le développement convergent,

$$\Pi = \sum \frac{U_i}{\xi - \xi_i} = \sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i}.$$

Les constantes A_i dépendent de la fonction Φ et les u_i sont certaines *fonctions fondamentales* qui dépendent seulement de la forme des continents et qui se réduisent aux fonctions sphériques ordinaires quand il n'y a pas de continents. Ces fonctions satisfont aux relations

$$\int \varepsilon u_i u_k d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k, \end{cases}$$

$d\sigma$ étant l'élément de la sphère. Il est donc facile de calculer les coefficients du développement d'une fonction quelconque en série de fonctions fondamentales. Évidemment, A_i sera le coefficient de u_i dans le développement de la fonction $-\frac{4\pi}{g}(\Phi - k)$. Les A_i sont linéaires en k . Enfin, la constante k se détermine par la condition que la masse du bourrelet soit nulle.

Ainsi, le problème des marées statiques se rapporte à la formation des fonctions fondamentales u_i . Le calcul de ces fonctions dans le cas de la nature serait sans doute extrêmement compliqué à cause de la forme capricieuse des continents. Mais il serait évidemment possible d'appliquer la méthode en admettant que les côtes sont définies par certaines fonctions simples et de comparer ensuite le résultat avec celui qu'on obtient en négligeant avec Lord KELVIN l'attraction du bourrelet.

Évidemment, le problème peut se résoudre aussi par la méthode de M. FREDHOLM, puisque la relation (28) est une équation intégrale. Il est intéressant de reconnaître que POINCARÉ avait démontré déjà en 1894 que la solution du problème spécial dont il s'agit est une fonction méromorphe de ξ . —

Pour étudier les marées qui correspondent à une valeur quelconque de λ , il faut avoir recours aux méthodes de l'Hydrodynamique. En négligeant les termes du second ordre par rapport aux accélérations et aux vitesses du liquide, les équations du mouvement deviennent linéaires. Enfin, puisque la profondeur de la mer est relativement petite, on n'aura que deux variables indépendantes: la colatitude θ et la longitude ψ . Les équations de la théorie des marées, déduites déjà par LAPLACE, deviennent ainsi

$$(29) \quad \frac{d}{d\theta} \left(h_1 \sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) + \frac{d}{d\psi} \left(\frac{h_1}{\sin \theta} \frac{d\varphi}{d\psi} \right) + \frac{\partial (h_2, \varphi)}{\partial (\theta, \psi)} = \zeta \sin \theta \\ = \frac{\sin \theta}{g} \{ \lambda^2 \varphi - \Pi - C e^{i t} \}.$$

ζ est l'élévation inconnue de l'eau; Π est le potentiel du bourrelet, dont l'épaisseur est ζ ; φ est une fonction inconnue auxiliaire; on a de plus

$$h_1 = \frac{\lambda^2 h}{\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2 \theta}, \quad h_2 = \frac{2\omega \cos \theta}{\lambda} h_1,$$

h étant la profondeur de la mer; ensuite ω est la vitesse de rotation de la Terre; enfin le coefficient C dans le terme considéré du potentiel de l'astre est une fonction sphérique du second ordre de la forme $f(\theta) e^{s\psi} V^{-1}$ ($s = 0, \pm 1$ ou ± 2).

Si la profondeur h s'annule aux côtes, la solution du problème sera déterminée par la condition que φ reste fini. Au contraire, si h ne s'annule pas, la condition aux limites s'écrira

$$\frac{d\varphi}{dn} - \frac{2\omega \cos \theta}{\lambda} \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

les dérivées étant prises suivant le normal et la tangente de la côte.

En supprimant les forces extérieures ($C = 0$), il est possible de satisfaire aux équations (29) en choisissant pour λ certaines valeurs spéciales. Les solutions dont il s'agit donnent les oscillations *propres* de la mer avec les périodes $\frac{2\pi \sqrt{-1}}{\lambda}$. Si, au contraire, C et λ sont donnés, la solution des équations (29) qui s'annule avec C définira une oscillation *contrainte* ayant la période $\frac{2\pi \sqrt{-1}}{\lambda}$.

Dans le cas relativement simple où il n'y a pas de continents et où la profondeur h ne dépend que de θ , la fonction φ (et aussi ζ) aura la forme $e^{s\psi}V^{-1+\lambda t}F(\theta)$. On n'aura donc qu'une seule variable indépendante θ . Il est alors possible d'intégrer les équations (29) en développant les fonctions inconnues φ et ζ en séries suivant les *fonctions adjointes de rang s* , lesquelles entrent comme coefficients de $e^{s\psi}V^{-1}$ dans les expressions des fonctions sphériques. M. HOUGH a effectué les calculs nécessaires en choisissant pour h quatre valeurs constantes ($h = 2, 4, 8, 17^{km}$).

M. HOUGH a fait ainsi la découverte intéressante qu'en faisant tendre λ vers zéro, on n'obtient pas la marée statique de LAPLACE. On obtient au contraire un état particulier d'équilibre, qui est caractérisé par l'existence de courants continus régnant sous la surface libre sans en altérer la forme. Ce sont les *marées statiques de la seconde sorte*, tandis que les marées calculées par la théorie de l'équilibre s'appellent les *marées statiques de la première sorte*.

S'il n'y avait pas de frottement, toutes les marées à longues périodes se rapprocheraient des marées statiques de la seconde sorte. Au contraire, si le frottement était considérable, les marées à longues périodes seraient à peu près égales aux marées statiques de la première sorte. M. HOUGH a montré qu'il faut une dizaine d'années pour que le frottement se puisse sentir. Par conséquent les marées annuelles et de périodes plus courtes seront bien de la deuxième sorte; au contraire, la marée ayant pour période 18 ans serait une marée de première sorte, que l'on devrait calculer par la théorie de l'équilibre.

Vu l'importance des marées statiques de la seconde sorte, POINCARÉ en a donné la théorie complète [464, t. 3, ch. 8]. Il s'agit de calculer le terme principal \mathcal{O} de $\lambda^2\varphi$, qui reste finie pour $\lambda = 0$. Ce terme \mathcal{O} ne dépend que de la variable $r = h : \cos \theta$. La fonction $\mathcal{O}(r)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre, dont le second membre dépend aussi du bourrelet Π . On obtient \mathcal{O} par approximations successives en négligeant d'abord Π .

Malheureusement l'application de cette méthode au calcul des marées statiques de la seconde sorte se heurte à des difficultés pratiques insurmontables, vu la complication de la fonction h qui définit la profondeur de la mer. Néanmoins il reste un résultat bien simple: les courants internes se propagent toujours suivant les lignes $r = \text{const}$, lignes qu'on peut facilement tracer sur la carte. Toutefois ces courants sont bien faibles (leur vitesse est de quelques mètres par heure seulement) de sorte qu'il est très difficile de les déceler par l'observation. —

Avant la découverte de la méthode de M. FREDHOLM, POINCARÉ [195] avait essayé d'intégrer d'une manière générale les équations de la théorie des marées en développant les fonctions inconnues suivant les puissances de λ et en négligeant l'influence du bourrelet. Pour déterminer les coefficients des développe-

ments, on est ramené à des équations différentielles linéaires du second ordre et avec une seule variable indépendante. Les fonctions φ et ζ considérées comme fonctions de λ n'auront d'autres singularités que les valeurs particulières λ_α ($\alpha = 1, 2, 3 \dots$) qui correspondent aux diverses oscillations propres. En connaissant les valeurs λ_α les plus voisines de l'origine, il serait possible d'augmenter le domaine de convergence des développements.

Pour trouver les λ_α , POINCARÉ étudie d'abord les oscillations propres d'un système mécanique ayant n degrés de liberté autour d'une position d'équilibre stable. Rappelons que les λ_α satisfont alors à une équation algébrique de degré $2n$. POINCARÉ démontre [195, 464 ch. 1] que la quantité $-\lambda_\alpha^2$ est le minimum absolu d'un certain rapport R_α entre deux formes quadratiques qui se forment facilement, quand on connaît les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système. Cette propriété des quantités λ_α peut se généraliser à un système qui dépend d'un nombre infini de paramètres. Il arrive alors que la quantité $-\lambda_\alpha^2$ est le minimum absolu d'un certain rapport R_α entre deux intégrales qui renferment un certain nombre de fonctions arbitraires. Pour trouver λ_α , il s'agit de déterminer ces fonctions de sorte que le rapport en question soit aussi petit que possible. Mais, évidemment, POINCARÉ a trouvé ici plutôt une propriété générale des quantités λ_α qu'une méthode pratique pour en calculer les valeurs. —

Il est bien connu que la théorie des équations intégrales de M. FREDHOLM permet de résoudre un grand nombre de problèmes de la Physique Mathématique qui étaient auparavant inabordables. POINCARÉ a appliqué cette méthode [464, ch. 10] pour intégrer complètement les équations de la théorie des marées, quelles que soient la forme des continents et la loi des profondeurs de la mer.

En faisant de la surface de la sphère terrestre une représentation conforme sur une Carte géographique et en désignant par x, y les coordonnées rectangulaires sur cette Carte du point θ, ψ , les équations de la théorie des marées prennent la forme

$$\frac{d}{dx} \left(h_1 \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(h_1 \frac{d\varphi}{dy} \right) + \frac{\partial (h_2, \varphi)}{\partial (x, y)} = \frac{1}{k^2 g} (\lambda^2 \varphi - \Pi - C e^{\lambda t}) = \frac{\zeta}{k^2},$$

k étant le rapport de similitude (la signification des autres quantités se trouvant à la page 373). De plus, il faut tenir compte des conditions aux limites déjà mentionnées (page 373).

POINCARÉ fait d'abord abstraction de l'attraction du bourrelet de sorte que $\Pi = 0$. Alors, il s'agit d'intégrer une équation de la forme

$$(30) \quad \mathcal{A}\varphi = a \frac{d\varphi}{dx} + b \frac{d\varphi}{dy} + c\varphi + f \equiv F,$$

a, b, c, f étant des fonctions données de x et y . Ces fonctions sont finies à moins que

$$h = 0 \text{ ou } \lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2 \theta = 0.$$

Les valeurs de θ qui satisfont à la dernière condition appartiennent aux *parallèles critiques*.

POINCARÉ admet d'abord que la mer est limitée par des falaises verticales et qu'elle n'est pas traversée par un parallèle critique. Alors les coefficients a, b, c, f sont finis.

La condition sur le contour sera

$$\frac{d\varphi}{dn} + C \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

C étant une fonction donnée de s ($C = -\frac{2\omega \cos \theta}{\lambda}$).

En désignant par $G(x, y; \xi, \eta)$ la fonction de GREEN généralisée relative à l'aire considérée qui est définie par la condition aux limites

$$\frac{dG}{dn} + C \frac{dG}{ds} = 0,$$

la fonction φ satisfaisant à l'équation (30) sera encore définie par l'équation

$$-2\pi\varphi = \int F' G d\sigma',$$

F' étant ce que devient F en y substituant pour x, y les coordonnées ξ, η de l'élément $d\sigma'$. En intégrant par parties, pour faire disparaître les dérivées de φ qui se trouvent dans l'expression de F' , POINCARÉ arrive à une équation intégrale renfermant une intégrale simple et une intégrale double. Le noyau de l'intégrale simple devient infini comme un logarithme, celui de l'intégrale double est infini du premier ordre quand la distance des points x, y et ξ, η s'annule. Ainsi, la méthode des noyaux réitérés est applicable, et la méthode de M. FREDHOLM peut donner l'expression de la fonction inconnue φ .

Ensuite, POINCARÉ passe au cas plus général, en admettant que la profondeur h s'annule aux côtes et que la mer est traversée par des parallèles critiques. Il considère d'abord l'équation

$$\Delta u - cu = f,$$

laquelle peut se résoudre par la méthode précédente. La solution aura la forme

$$u = \int f' \bar{G}(x, y; \xi, \eta) d\sigma',$$

\bar{G} étant une fonction de GREEN généralisée et f' ce que devient f en y mettant ξ, η au lieu de x, y .

Cela étant, la fonction cherchée φ satisfait à la relation

$$\varphi = \int \left\{ a' \frac{d\varphi'}{d\xi} + b' \frac{d\varphi'}{d\eta} + f' \right\} \bar{G} d\sigma'.$$

Après l'intégration par parties, on sera conduit à une équation intégrale. POINCARÉ démontre qu'on peut déformer l'aire d'intégration afin d'éviter la frontière et les parallèles critiques où les coefficients sont infinis. La méthode de M. FREDHOLM reste ainsi applicable.

POINCARÉ démontre enfin que, en voulant tenir compte du bourrelet, on aura à résoudre deux équations intégrales à deux fonctions inconnues φ et ζ ; la méthode de M. FREDHOLM conduit encore au but.

Évidemment, l'application *pratique* de la méthode de M. FREDHOLM au problème *général* des marées conduirait à des calculs trop compliqués. Toutefois, il est probable que la méthode se montrera utile quand il s'agira de certains cas particuliers plus simples. —

POINCARÉ se demande aussi [464, ch. 10] s'il ne serait pas possible de se servir, dans la théorie des marées, d'une méthode toute nouvelle de M. RITZ. Cette méthode s'applique au cas où l'on a à déterminer une fonction par le calcul des variations. L'expression dans l'intégrale dont il faut chercher le minimum est un polynôme du second degré, non homogène, par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées premières. M. RITZ développe la fonction inconnue en série $\sum \alpha_n \psi_n$ suivant certaines fonctions ψ_1, ψ_2, \dots dont le choix dépend des conditions aux limites. Les inconnues du problème sont alors les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Elles se déterminent par une infinité d'équations linéaires.

POINCARÉ démontre que le problème des marées peut en effet se réduire à la recherche du minimum d'une certaine intégrale. Mais il n'entre pas dans tous les détails nécessaires, de sorte que l'application de la méthode de M. RITZ à la théorie des marées reste encore une question ouverte. —

POINCARÉ a traité aussi [464, ch. 19] la question de savoir si l'attraction de la Lune et du Soleil sur le bourrelet de l'eau soulevée ne pourrait augmenter séculairement la durée de la rotation terrestre. L'importance du problème est évidente, puisqu'il s'agit de l'invariabilité de l'unité de temps qui nous sert à évaluer la durée des mouvements des corps célestes.

POINCARÉ démontre que le moment de la résultante de l'action de la Lune et du Soleil sur le bourrelet des eaux soulevées a toujours sa valeur moyenne nulle, de sorte que, s'il n'y avait pas de frottement, il ne pourrait y avoir aucun changement séculaire dans la durée de la rotation de la Terre.

En partant des recherches de M. HOUGH sur l'effet du frottement des marées, POINCARÉ montre que l'action de la Lune par l'intermédiaire des marées est plus de 100 000 fois trop faible pour expliquer l'avance séculaire résiduelle de 4'' que présente la longitude moyenne de la Lune.

Ajoutons enfin que DARWIN, en faisant intervenir les marées du noyau terrestre, a pu attribuer à celui-ci la viscosité nécessaire pour obtenir l'augmentation voulue de la durée du jour sidéral.

20. Figures d'équilibre de masses fluides.

Une théorie générale de l'équilibre relatif d'une masse fluide hétérogène, soumise seulement aux forces intérieures dues à l'attraction newtonienne, serait évidemment de la plus haute importance pour l'Astrophysique. Elle nous permettrait de suivre le développement des nébuleuses et des étoiles. Elle nous donnerait peut-être aussi la solution de l'énigme des étoiles variables et des étoiles «nouvelles». POINCARÉ a fait faire à cette théorie les plus importants progrès.

Ainsi il a démontré d'abord [462, ch. 2] qu'une masse fluide quelconque en équilibre relatif se trouve nécessairement en rotation uniforme autour d'un axe fixe, qui coïncide avec l'un des axes principaux d'inertie de la masse.

Cela étant, considérons une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. L'Hydrostatique montre que, dans le cas de l'équilibre relatif, les surfaces de niveau sont les surfaces d'égale pression et aussi d'égale densité. A la surface libre, la pression est nulle. La surface libre est donc une surface de niveau, et la résultante de l'attraction et de la force centrifuge est perpendiculaire à la surface libre. Voilà des conditions nécessaires pour l'équilibre relatif.

POINCARÉ fait la remarque qu'il faut aussi que cette résultante soit dirigée vers l'intérieur de la masse, autrement une partie se détacherait. Pour qu'il en soit ainsi, POINCARÉ démontre [94; 462, ch. 1] qu'il faut que

$$\omega^2 < 2\pi \rho_m,$$

ω étant la vitesse de rotation et ρ_m la densité moyenne de la masse fluide.

Rappelons maintenant la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre. D'après le principe des vitesses virtuelles, il faut et il suffit que le travail résultant

tant d'un déplacement virtuel soit nul. Ce travail comprend le travail de l'attraction, plus le travail dû à la force centrifuge. Soit $-W$ l'énergie potentielle, I le moment d'inertie par rapport à l'axe. La condition d'équilibre est donc que

$$(31) \quad \delta W + \frac{\omega^2}{2} \delta I = 0$$

pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

Soit ρ la densité, V le potentiel et U la fonction de force totale de sorte que

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

En désignant par $d\tau$ l'élément de volume on aura

$$W = \int \frac{\rho V}{2} d\tau,$$

$$I = \int \rho(x^2 + y^2) d\tau,$$

les intégrales étant étendues à tout l'espace. La condition (31) peut donc s'écrire

$$(32) \quad \int U \delta \rho d\tau = 0$$

pour toutes les variations $\delta \rho$ qui sont compatibles avec les liaisons. —

Jusqu'ici nous n'avons pas parlé de la stabilité de l'équilibre.

Quand il s'agit de l'équilibre absolu, la question est facile. La condition nécessaire et suffisante de la stabilité est alors que l'énergie potentielle $-W$ soit minima.

Au contraire, dans le cas de l'équilibre relatif, le problème est beaucoup plus difficile. LORD KELVIN a distingué alors entre deux sortes de stabilités: la stabilité ordinaire ayant lieu quand il n'y a pas de frottement, et la stabilité séculaire qui se trouve réalisée même avec frottement. L'étude de la stabilité séculaire est beaucoup plus simple que celle de la stabilité ordinaire. LORD KELVIN a énoncé que la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire, c'est que $W + \frac{\omega^2}{2}I$ soit maximum.

POINCARÉ fait remarquer [72] que ce résultat n'est pas applicable quand il s'agit de l'équilibre d'un fluide. En effet, la démonstration de LORD KELVIN suppose que tout mouvement détermine un frottement, mais cela n'a pas toujours lieu pour la masse fluide, qui peut se déplacer d'un bloc comme un corps solide.

Pour traiter la question rigoureusement, POINCARÉ introduit une nouvelle notion: celle du *solide équivalent* à la masse fluide [462, ch. 2]. C'est un solide

où, à l'instant considéré, les molécules ont la même position que dans le système fluide. La vitesse de son centre de gravité est la même que pour le fluide. Les trois moments de rotation autour des axes principaux d'inertie sont les mêmes que pour la masse fluide. Son mouvement est donc bien défini à l'instant considéré, mais le solide équivalent à l'instant t n'est pas le solide équivalent à l'instant t' .

POINCARÉ démontre que la force vive du fluide est égale à la force vive T'' du solide équivalent, augmentée de la force vive T''' du fluide dans le mouvement relatif par rapport à des axes invariablement liés au solide équivalent.

Cela étant, la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire de l'équilibre relatif d'un fluide, c'est que l'énergie totale

$$(33) \quad \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{I} - W$$

du solide équivalent soit minima, en considérant le moment de rotation μ comme donné.

Grâce à la notion nouvelle du solide équivalent, la démonstration de ce théorème important est presque immédiate [462, ch. 2]. Elle repose sur le principe que l'énergie totale $T'' + T''' - W$ ne peut jamais croître (principe de dégradation de l'énergie).

POINCARÉ démontre aussi [462, ch. 2] que, pour la stabilité séculaire, il est nécessaire que l'axe de rotation soit le plus petit axe de l'ellipsoïde d'inertie relatif à la masse fluide. —

Retournons maintenant à la condition (31) ou (32).

Admettons dès maintenant que le fluide est homogène et que $\rho = 1$. On aura alors $\delta\rho = 0$, sauf dans le voisinage de la surface libre, où $\delta\rho = \pm 1$. Alors, la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre, c'est que la surface libre soit une surface de niveau.

Étant donné ce principe, on a trouvé, il y a longtemps, que chaque ellipsoïde de révolution aplati qui est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe peut se trouver en équilibre relatif, si seulement la vitesse de rotation est convenablement choisie. Soit s le rapport des axes. Le moment de rotation μ croît constamment de zéro vers l'infini, quand s augmente de l'unité vers l'infini. Ce sont les ellipsoïdes de MAC LAURIN.

Rappelons aussi qu'il y a une suite d'ellipsoïdes à trois axes (ellipsoïdes de JACOBI) qui sont des figures d'équilibre, si seulement la rotation a lieu autour de l'axe le plus petit et avec une vitesse convenable. Soit s et t les longueurs des autres axes par rapport au plus petit axe. t sera une certaine fonction de s .

On a toujours $1 < s < \infty$, $\infty > t > 1$ et $\frac{dt}{ds} < 0$. Le moment de rotation μ est minimum ($= \mu_0$) quand $s = t = s_0$ et croît sans cesse vers l'infini quand s ou t augmente de s_0 vers l'infini.

Une solution d'un problème d'équilibre quelconque qui dépend d'un paramètre arbitraire μ est appelée par POINCARÉ une *série linéaire de formes d'équilibre* [72].

Il peut arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. POINCARÉ dit alors que c'est une *forme de bifurcation*.

Il peut arriver également que deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles, viennent, quand on fait varier le paramètre μ , à se confondre, puis à disparaître, parce que les racines des équations d'équilibre deviennent imaginaires. La forme d'équilibre correspondante s'appellera alors *forme limite*.

D'après cette terminologie, les ellipsoïdes de MAC LAURIN et de JACOBI sont deux séries linéaires de formes d'équilibre. Pour $\mu = \mu_0$ ($s = t = s_0$), les deux séries se coupent dans une forme de bifurcation. Cette forme est en même temps une forme limite pour la série de JACOBI, qui n'existe que pour $\mu > \mu_0$.

POINCARÉ a fait l'une de ses plus belles découvertes en démontrant [72; 462 ch. 7] que chacune des deux séries linéaires considérées de formes d'équilibre (celle de MAC LAURIN et celle de JACOBI) renferme une infinité de formes de bifurcation, où apparaissent de nouvelles séries linéaires de formes d'équilibre.

L'étude des formes limites et des formes de bifurcation est intimement liée à l'étude de la stabilité de l'équilibre.

Pour trouver ces formes particulières, POINCARÉ admet d'abord que le système dépend d'un nombre fini de variables x_1, \dots, x_n . Il s'agit alors de résoudre des équations de la forme

$$(34) \quad \frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \dots = \frac{dF}{dx_n} = 0,$$

F étant une fonction des variables x_1, \dots, x_n et d'un paramètre μ . Soit $x_\nu = \varphi_\nu(\mu)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) une série linéaire de formes d'équilibre.

Pour que la forme qui correspond à $\mu = \mu_0$ soit une forme limite ou une forme de bifurcation, il faut évidemment que $\mu = \mu_0$ est une racine du Hessien de F par rapport aux x_1, \dots, x_n , où on a posé $x_\nu = \varphi_\nu(\mu)$.

POINCARÉ démontre [72] qu'on aura certainement une forme de bifurcation si le Hessien change son signe quand on traverse μ_0 .

Supposons que les équations (34) soient satisfaites pour $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_n \equiv 0$. En développant F suivant les puissances des x_ν , on peut toujours écrire les termes du second degré sous la forme d'une somme de carrés $\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i^2$, les Y_i étant homo-

gènes et linéaires par rapport aux x_i . D'après POINCARÉ, les α_i s'appellent *coefficients de stabilité* [72].

Admettons que F soit l'énergie du système. Pour qu'il y ait équilibre stable, il faut et il suffit que tous les coefficients de stabilité soient positifs.

Supposons maintenant que α_i change son signe, tandis que les autres α_i ne s'annulent pas quand on traverse μ_0 . Après avoir éliminé x_2, \dots, x_n des équations (34), on obtient une relation

$$(35) \quad \Phi(x_1, \mu) = 0$$

à laquelle correspond un certain nombre de courbes (au moins deux) passant par le point $x_1 = 0, \mu = \mu_0$ du plan des x_1, μ . A chacune de ces courbes correspond une série linéaire de formes d'équilibre.

En admettant que les $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont > 0 pour $\mu = \mu_0$, POINCARÉ démontre qu'il y a *échange de stabilité* pour $\mu = \mu_0$ [72]. Voici ce qu'il entend par là: les formes qui se prolongent de part et d'autre de μ_0 deviennent instables pour $\mu > \mu_0$ si elles étaient stables pour $\mu < \mu_0$ et vice versa; enfin les branches de la courbe (35) qui partent vers le même côté de la ligne $\mu = \mu_0$ correspondent alternativement à des formes stables et à des formes instables.

Tous ces résultats subsistent si la fonction F dépend d'un paramètre μ et d'une infinité de variables $x_1, x_2, \dots, x_p, \dots$, en supposant toutefois que, dans le développement de F suivant les puissances des x , les termes du second degré

$$(36) \quad \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_p x_p^2 + \dots$$

soient tous quadratiques et que les coefficients de stabilité α_i soient positifs à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

POINCARÉ démontre [72] ainsi le théorème suivant: Si, en traversant μ_0 , l'un des coefficients α_i change son signe tandis que tous les autres ne s'annulent pas, la forme d'équilibre $x_i = 0$ sera une forme de bifurcation pour $\mu = \mu_0$; si, de plus, tous les autres α_i sont positifs pour $\mu = \mu_0$, il y aura échange de stabilité pour $\mu = \mu_0$.

POINCARÉ a appliqué ces principes à l'étude des figures d'équilibre qui diffèrent peu des ellipsoïdes de MAC LAURIN et de JACOBI. Soit E un quelconque de ces ellipsoïdes. La fonction (33) jouera le rôle de F . Une figure quelconque voisine de E est définie par l'élévation ζ de sa surface au dessus de la surface de E .

La théorie des fonctions de LAMÉ fournit [72; 462, ch. 6] une suite de fonctions orthogonales y_i , jouant par rapport à la surface E le même rôle que les

fonctions sphériques par rapport à la sphère. L'élévation ζ peut se développer en série suivant les fonctions y_i , de sorte que

$$\zeta = \sum x_i y_i,$$

les x_i étant des constantes arbitraires. Ainsi la fonction (33) se trouve développée suivant les puissances des x_i . Les termes du premier degré disparaissent, puisque E est une figure d'équilibre. Les termes du second degré sont de la forme (36), puisque les fonctions y_i sont des fonctions orthogonales.

Les coefficients de stabilité α_i dépendent seulement du paramètre s (ou du moment de rotation μ) qui définit complètement la forme de E . En variant s (ou μ), certains de ces coefficients ne s'annulent jamais, les autres s'annulent une seule fois et en changeant le signe.

Pour les ellipsoïdes de MAC LAURIN, tous les α_i sont > 0 , tant que $\mu < \mu_0$. L'équilibre est alors stable. Pour $\mu = \mu_0$, un premier coefficient α change son signe. On retrouve ainsi la forme de bifurcation où apparaissent les ellipsoïdes de JACOBI. Pour $\mu > \mu_0$, les ellipsoïdes de MAC LAURIN sont instables. En faisant croître μ à partir de μ_0 , on rencontre, parmi les ellipsoïdes de MAC LAURIN, une infinité de formes de bifurcation, où apparaissent de nouvelles séries linéaires de formes d'équilibre. Elles sont toutes instables.

Pour les ellipsoïdes de JACOBI, on aura une nouvelle suite de coefficients de stabilité α_i . En vertu du principe de l'échange des stabilités, ils sont tous positifs, quand μ est un peu plus grand que μ_0 . Soit μ_1 la première valeur de μ pour laquelle un coefficient α disparaît. Tant que $\mu_0 < \mu < \mu_1$, les ellipsoïdes de JACOBI sont stables. Pour $\mu > \mu_1$, ces ellipsoïdes sont instables. En faisant croître μ à partir de μ_1 , on rencontre une infinité de formes de bifurcation où de nouvelles séries linéaires de formes d'équilibre rencontrent la série de JACOBI. Ces nouvelles figures d'équilibre sont toutes instables.

Retournons à la forme de bifurcation pour $\mu = \mu_1$. C'est une forme limite pour la nouvelle série linéaire de formes d'équilibre qui y apparaissent. D'après les calculs de DARWIN, cette nouvelle série est réelle quand μ est un peu plus grand que μ_1 . Étant donné le principe de l'échange des stabilités, les nouvelles figures d'équilibre «*les aploïdes de Poincaré*» sont donc stables. (D'après M. LIAPOUNOFF, c'est le contraire qui aurait lieu.)

Dans ce qui précède, nous avons regardé le moment de rotation comme paramètre variable et la densité du fluide comme invariable. Imaginons maintenant que la masse fluide homogène se contracte lentement en se refroidissant. En vertu de la viscosité, le fluide tendra toujours à prendre une forme d'équi-

libre relatif stable. S'il n'y a pas de forces extérieures, le moment de rotation restera constant. Si la masse est d'abord à peu près sphérique, elle parcourra dans son développement les formes d'équilibre stables déjà mentionnées. Elle aura d'abord la forme d'un ellipsoïde de MAC LAURIN dont l'aplatissement augmente constamment. Dès que la première forme de bifurcation sera atteinte, la masse prendra la forme d'un ellipsoïde de JACOBI. Le rapport du grand axe au petit axe croîtra constamment; celui du moyen axe au petit axe diminuera. On arrivera ensuite à la seconde forme de bifurcation. Désormais, la masse aura la forme d'un apioïde de POINCARÉ. La plus grande partie du corps tendra à se rapprocher de la forme sphérique, tandis que la plus petite partie semblera vouloir se détacher de la masse principale. Il paraît difficile de suivre plus loin le développement. Peut-être le corps finira-t-il par se partager en deux corps isolés. Peut-être aussi le développement sera-t-il soudainement interrompu par une forme limite. Alors, l'équilibre finira par être bouleversé, et la masse prendra après une période d'oscillations considérables une forme d'équilibre toute à fait différente. —

Ajoutons que POINCARÉ [94; 95; 72; 462, ch. 8], en partant de la condition (31), a démontré aussi l'existence d'une série linéaire de formes d'équilibre où la masse fluide homogène prend la forme d'un anneau très mince et peu différent d'un tore. La vitesse de rotation ω est très petite. En faisant ω infiniment petite, l'anneau prend la forme d'un cercle de rayon infiniment grand. Ces figures annulaires sont probablement instables. —

Rappelons enfin quelques résultats généraux sur les formes d'équilibre de masses fluides homogènes obtenus par POINCARÉ.

Si la rotation est nulle, la sphère est évidemment une figure d'équilibre. M. LIAPOUNOFF a démontré que la valeur absolue W de l'énergie potentielle atteint son maximum absolu, si la masse a la forme d'une sphère. POINCARÉ donne une nouvelle démonstration de ce théorème [108; 212; 462, ch. 2]. Il démontre d'abord que, pour chaque figure d'équilibre sans rotation, on a

$$W = \frac{6}{5} \frac{T^2}{C},$$

T étant le volume et C la capacité électrostatique du corps. Il montre ensuite que la capacité électrostatique, qui dépend de la forme du conducteur, a un minimum absolu et que ce minimum est atteint seulement pour la sphère. Il en résulte le théorème de M. LIAPOUNOFF.

POINCARÉ est arrivé aussi [462, ch. 2] au résultat que voici: Pour un fluide homogène en équilibre relatif, la quantité $W - \omega^2 I$ a toujours le même signe que $2\pi - \omega^2$.

Il prouve, d'autre part [462, ch. 2], qu'on aura pour toutes les figures d'équilibre la relation

$$W + \frac{\omega^2}{2} I = \frac{3}{5} U_0 T,$$

U_0 étant la valeur constante de la fonction de force U à la surface libre. En regardant ω comme paramètre variable et le volume T comme constant, les quantités W , I et U_0 varient avec ω . En partant de la relation indiquée tout à l'heure, POINCARÉ démontre que U_0 croît toujours avec ω . Si alors ω peut croître indéfiniment sans que la figure d'équilibre cesse d'exister, il en sera de même avec U_0 . Quand U_0 sera trop grand, la surface du corps ne pourra plus rencontrer l'axe, et la masse prendra enfin la forme annulaire.

