LETTRES D'HENRI POINCARÉ À M. MITTAG-LEFFLER CONCERNANT LE MÉMOIRE COURONNÉ DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II.[1]

18 avril 1883.

. . . . .

J'ai lu avec un grand intérêt la lettre de M. WEIERSTRASS dont vous m'avez donné copie.[2] Il est bien clair comme le dit M. WEIERSTRASS que les coordonnées des planètes ne peuvent s'exprimer en séries ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{at}-1}{e^{at}+1}$$

que si l'on est certain d'avance que les planètes ne se rencontreront pas, et d'autre part on ne peut jamais en être certain.

Aussi je n'ordonnais pas suivant les puissances de

$$\frac{e^{at}-1}{e^{at}+1}$$

mais suivant celles de

$$\frac{e^{as}-1}{e^{as}+1}.$$

s est une variable auxiliaire qui jouit des propriétés suivantes:

1° t s'exprime comme les coordonnées en série ordonnée suivant les puissances de

$$\frac{e^{as}-1}{e^{as}+1}.$$

[1] H. POINCARÉ, Sur le problème des trois corps et les équations de la mécanique, ce journal, t. 13.

[2] Voir ce journal, t. 35, p. 35—36; Cf. aussi p. 45.

2° Si les planètes ne se rencontrent pas, quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$, t croît constamment de $-\infty$ à $+\infty$.

3° Si elles se rencontrent au temps t_0, quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$, t croît constamment de $-\infty$ à t_0. Les formules ne donnent plus rien à partir du temps t_0 et c'est d'ailleurs ce qu'elles ont de mieux à faire.

Maintenant je n'avais pas eu spécialement en vue le problème de la Mécanique Céleste; mon but était de montrer qu'on pouvait toujours résoudre des équations différentielles algébriques par des séries toujours convergentes pour toutes les valeurs réelles des variables. Les solutions de ce problème sont en nombre infini et celle que j'ai donnée n'est qu'un exemple. Il est clair que dans chaque cas particulier, il faut choisir la plus zweckmässig. Or je ne crois pas que dans le cas de la Mécanique Céleste celle que j'ai donné soit la plus zweckmässig, je crois qu'il y a mieux à trouver.[1]

. . . . .

Paris 16 juillet 1887.

. . . . .

Je n'ai pas oublié le prix du roi Oscar et je vous dirai même que ce prix me préoccupe exclusivement depuis un ou deux mois.

Mon ambition était de résoudre la première question, celle qui se rapporte au problème des n corps. Mais je n'ai pas arrivé encore à des résultats complètement satisfaisants, au moins dans le cas général.

J'ai toutefois obtenu quelques résultats qui ne sont pas sans intérêt et dont je ne veux vous citer qu'un seul.

Il s'agit du cas particulier où des trois corps, le 1^er^ et le 2^d^ ont une masse finie et le 3^e^ une masse nulle. Le 1^er^ et le 2^d^ décrivent une circonférence autour de leur centre de gravité commun et le 3^e^ se meut dans le plan de les circonférences.

Dans ce cas particulier, j'ai trouvé une démonstration rigoureuse de la stabilité et un moyen de déterminer des limites précises pour les éléments du 3^e^ corps.[2]

Vous savez que dans ce cas particulier M. Hill avait déjà donné une

[1] On sait que M. K. F. Sundman a démontré récemment qu'on peut choisir la variable auxiliaire s de sorte que les séries en question convergent pour toutes les valeurs de t même s'il y a des chocs entre les corps, pourvu que les constantes des aires ne soient pas toutes nulles. Cf. ce journal, t. 36, p. 105—179.

[2] On se rappelle que Poincaré a démontré que la masse nulle repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale, si l'on n'est pas placé dans certaines conditions initiales exceptionelles dont la probabilité est infiniment petite.

limite supérieure du rayon vecteur; j'ai reçu dernièrement un mémoire de M. Bohlin inseré dans le tome X des Acta où cette solution de M. Hill est reprise et complétée. Mais, il n'y a pas de limite inférieure et de plus la limite supérieure trouvée est trés éloignée de la limite précise. D'ailleurs possédant cette limite précise, j'ai plusieurs moyens de représenter le mouvement du 3[e] corps par des séries convergentes.

Maintenant, est-ce bien là ce qu'avait trouvé Lejeune Dirichlet et même avait-il réellement trouvé quelque chose, je n'en sais rien; mais je suis sûr maintenant qu'on ne doit pas chercher à intégrer le problème par les fonctions connues ou par rien qui y ressemble. Car les particularités inattendues que présentent les fonctions où je suis conduit les éloignent tout à fait de toutes les fonctions connues.

J'espère maintenant que je pourrai aborder le cas général et que d'ici au 1[er] juin j'aurai, sinon résolu complètement la question (cela, je ne l'espère pas) mais trouvé des résultats assez complets pour pouvoir être envoyés au concours. Je crois me rappeler qu'on ne doit envoyer au concours que des mémoires *inédits*, et que le nom de l'auteur doit rester secret, étant enfermé sous un pli cacheté qu'on ne doit ouvrir qu'au dernier moment.

Quant au mot inédit, il doit je pense être entendu dans un sens absolu, c'est à dire que les résultats n'auront pu être antérieurement énoncés et résumés dans une note aux Comptes Rendus.

. . . . .

5 février 1889.

. . . . .

Merci de votre lettre; malheureusement je ne puis pas vous donner des renseignements plus complets au sujet de la méthode de M. Gyldén; je ne puis démontrer la divergence de ses développements, mais je n'en puis non plus démontrer la convergence.

Pour établir cette convergence, si toutefois elle a lieu, il me faudrait d'abord avoir une idée tout à fait nette de la façon dont ces développements peuvent être obtenus. Or c'est ce que je ne puis faire sans avoir étudié à fond le mémoire de M. Gyldén en commençant par la 1[ère] ligne et finissant par la dernière. C'est là un travail que je n'ai pas encore eu le temps de faire.

Vous avouerai-je que je trouve le style de M. Gyldén un peu rebutant et qu'il me donne beaucoup de mal à lire.

J'ai l'habitude, quand je lis un mémoire, de le parcourir d'abord rapidement de façon à me donner une idée de l'ensemble et de revenir ensuite sur les points qui me semblent obscurs. Je trouve plus commode de refaire les démonstrations que d'approfondir celles de l'auteur. Mes démonstrations peuvent être généralement beaucoup moins bonnes mais elles ont pour moi l'avantage d'être miennes. Or c'est ce qu'il m'est impossible de faire avec M. GYLDÉN, ses résultats ne sont jamais assez übersichtlich pour cela.

Tout cela soit dit pour vous expliquer comment je n'ai pris encore une connaissance plus approfondie du mémoire en question. Toutefois j'en ai vu assez pour voir qu'il obtient dans certains cas une *libration*; or ce qui fait que les développements de M. LINDSTEDT sont certainement divergents c'est ceci. S'ils convergeaient il n'y aurait jamais de libration, et il y en a certainement.

Les mêmes raisons n'existent donc pas pour conclure à la divergence des séries de M. GYLDÉN. Maintenant il reste bien entendu que, jusqu'à nouvel ordre, je regarde la divergence comme plus probable.

Une autre raison qui m'empêche de rien pouvoir affirmer, c'est que dans ces développements, autant que je puis comprendre, les termes ne se déduisent pas les uns des autres par une règle inflexible. A chaque approximation il faut faire intervenir sa *jugeotte* (comme on dit vulgairement) pour décider dans quel sens on doit aiguiller (comme on dit dans les chemins de fer).

Or c'est là un élément qu'il est difficile d'introduire dans une démonstration de convergence ou de divergence.

. . . . .

1 mars 1889.

. . . . .

Venons à ce que vous me dites de M. GYLDÉN. M. GYLDÉN dit avoir démontré l'existence des solutions asymptotiques et nous nous prétendons qu'il ne l'a pas fait. D'où vient cela! De ce que les mots démonstration et convergence n'ont pas le même sens pour lui et pour nous. M. GYLDÉN croit avoir démontré la convergence d'une série lorsqu'il a fait voir que les premiers termes vont en décroissant et qu'il est invraisemblable qu'un des 99 premiers termes par exemple ait une valeur très grande.

Cela peut être très suffisant pour les applications astronomiques mais ne saurait contenter le géomètre.

Venons au détail.

Voici l'équation étudiée par M. GYLDÉN:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma A \sin(a\zeta + bt + c) \tag{1}$$

A, a, b et c étant des constantes qui dans les notations de M. GYLDÉN ont une expression assez compliquée. Il existe il est vrai d'autres arguments ζ', ζ''; mais M. GYLDÉN les regarde provisoirement comme connus en fonctions du temps de sorte que nous pouvons les faire rentrer dans le terme bt. L'équation est ainsi ramenée au 2^d ordre. Il y aurait évidemment des objections à faire à cette façon de simplifier le problème; mais il ne convient pas d'y insister, puisque elles sont de même nature que celles que soulève l'intégration de l'équation simplifiée elle-même. Considérons donc seulement l'équation (1) qui est de même forme que celles dont je me suis le plus occupé et qui correspondent aux cas où il n'y a que 2 degrés de liberté.

M. GYLDÉN commence par faire un triage parmi les termes du second membre. Il met à part ceux qui lui semblent devoir jouer un rôle important et qu'il appelle caractéristiques. Voilà un premier exemple de cette intervention de l'appréciation personnelle, de la jugeotte dont je vous parlais la dernière fois qui donne aux méthodes de M. GYLDÉN une grande souplesse mais ne me permet pas d'aborder une démonstration de la convergence.

M. GYLDÉN pose ensuite (page 213[1]):

$$\zeta = c + nt + Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots$$

et il détermine Z_0, Z_1, etc. par une série d'équations analogues à (1) en s'arrangeant de telle façon que chacune d'elles ne contienne qu'un seul terme caractéristique.

Quant au menu fretin des termes non caractéristiques il les répartit entre ces équations d'une façon arbitraire; deuxième intervention de la jugeotte. Chacune des équations est ensuite intégrée par le moyen des fonctions elliptiques; mais est-elle intégrée définitivement? Non, quand on aura intégré la première, puis la seconde, il faudra modifier la première et l'intégrer de nouveau et ainsi de suite. Voici en effet ce que dit à ce sujet M. GYLDÉN page 243:

Bei dem Fortgange dieser Operationen muss man sich indessen erinnern, dass bei der Bildung der Functionen (X) Glieder entstehen können, von denen ein Theil mit vorhergehenden charact. Gliedern zu vereinigen sind und *also die Werthe der vorhergehenden Moduln etwas verändern*, . . .

[1] Acta mathematica, t. 9.

Ces retours en arrière doivent, ce me semble, prodigieusement agacer les calculateurs, et j'ai cherché avec soin à les éviter. On les rencontre non seulement dans la méthode de M. GYLDÉN mais dans celle de DELAUNAY. Vous concevez sans peine qu'ils rendent impossible toute démonstration de convergence.

M. GYLDÉN arrive ensuite à une série (20) page 244 dont il dit qu'elle converge parce que dit il:

die Verhältnisse $\frac{K}{K_1}, \frac{K_1}{K_2}, \ldots$ *unseren Annahmen nach, . . .* eine gegebene Grösse nicht übersteigen.

En réalité, cela veut dire que la série ne converge que si l'on *suppose* (unseren Annahmen nach) que ces rapports restent inférieurs à une certaine limite, et que si cela n'avait pas lieu il faudrait avoir recours à une autre méthode, celle qui est exposée pages 257 à 263. Mais comment pourra-t-on savoir d'avance si cette condition est remplie; puisque le module k, calculé d'abord, va être incessamment modifié par les retoures en arrière dont je parlais tout à l'heure et qu'il n'est pas certain qu'il ne va pas s'approcher indéfiniment de 1.

Mais ce n'est pas tout. La série (20) n'est pas l'expression complète de Z. On l'obtient en laissant de côté les termes provenant des termes non caractéristiques que M. G. considère comme trop petits pour pouvoir altérer la convergence. Cela est-il légitime? De ce que ces termes sont très petits, il suit que leur influence ne sera pas sensible avant la 50^e approximation par exemple, mais non qu'elle ne le sera jamais, ni même qu'elle ne pourra pas devenir très grande.

Bornons-nous donc à une des équations qui donnent Z_0, Z_1, etc. c'est à dire à une équation de la forme (1) ne contenant qu'un seul terme caractéristique.

La méthode de M. GYLDÉN consiste à appeler $2V$ l'argument de ce terme caractéristique et à écrire ensuite l'équation sous la forme:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + A \sin 2V = \lambda X.$$

A est une constante, λX représente l'ensemble des termes non caractéristiques et λ est un coëff. très petit. (M. GYLDÉN ne met pas ce coëff. en évidence de cette façon, mais il entre dans ses termes.) Ensuite il développe V suivant les puissances croissantes de λ. Mais là encore il ne parvient pas à démontrer d'une façon satisfaisante la convergence de son procédé. Il est évident que les approximations successives introduiront de nouveaux termes caractéristiques. Il est probable que s'il s'introduit de semblables termes, M. G. en tient compte comme des premiers et introduit de nouvelles équations de LAMÉ, qui vont encore nous forcer à modifier notre module primitif et à retourner en arrière comme je l'ai expliqué plus haut. Il me paraît impossible de fonder là dessus aucune démonstration rigoureuse de la convergence.

Les solutions asymptotiques correspondent au cas où l'un des modules devient égal à 1. M. Gyldén annonce que ce cas ne peut pas se présenter pour plus d'un module; c'est là un point important sur lequel je crois nécessaire d'insister ... Après avoir examiné à fond la démonstration que donne M. G. de son affirmation, j'ai reconnu qu'elle est suffisante bien que cela n'apparaisse pas ainsi au premier abord. Il me semble toutefois que si M. G. avait dirigé son calcul comme il le fait dans le § II au lieu de le diriger comme il le fait dans le § III, il aurait pu rencontrer plusieurs modules égaux à 1; mais cela demanderait à être examiné de plus près.

Voyons ce qu'il dit au sujet de la démonstration de la convergence (Cf. dans mon mémoire 1ère partie, chapitre I, § 2 et chapitre III, § 13. M. G. dit page 261: Die Glieder in V_1 mit dem Factor $e^{-\xi}$ oder mit ganzen positiven Potenzen dieser Grösse multiplicirt erscheinen und also mit wachsendem ξ sehr rasch abnehmen ... also schliessen wir dass die Darstellung der Function V_1 immer convergent ist, wenn ξ auf positive Werthe beschränkt bleibt.

Ce qui revient à admettre le principe suivant:

Toute série procédant suivant les puissances croissantes d'une variable plus petite que 1 est convergente à moins qu'on n'ait des raisons sérieuses de douter de cette convergence.

Remarquons que cette série n'est qu'une première approx. mais que les approx. suivantes introduiraient des séries qui seraient de même forme.

Je crois pouvoir conclure ainsi:

M. G. n'a pas démontré la convergence de ses séries. Si sa démonstration est bonne pour les séries de la page 261 qui convergent effectivement, pourquoi ne l'est-elle pas pour les séries des pages 237, 243, etc., qui sont très probablement divergentes.

Le raisonnement par lequel M. G. croit pouvoir établir l'existence des solutions asymptotiques n'est ni plus rigoureux que celui par lequel Delaunay l'établissait avant lui, ni plus rigoureux que celui par lequel M. Lindstedt démontre qu'il n'y en a pas.

Allons bon! voilà que je suis encore une fois obligé de retirer ce que je viens de dire, ce diable de M. G. est vraiment difficile à saisir et on y découvre à chaque instant du nouveau. Je vous disais tout à l'heure que les raisons d'après lesquelles M. G. établit qu'un seul module pouvait être égal à 1 me semblaient bonnes. Je ne le crois plus maintenant. Voici pourquoi. Reportez vous aux pages 260 à 261 de son mémoire. Nous y trouvons la formule (32) qui donne le terme de V_1 qui correspond au terme de X qui a pour coëff. P_0. Envisageons le terme qui a pour coëff. P_1 et qui s'écrit

$$-s A_1 P_1 \sin\varphi \cos(2\lambda_1 nt + 2\varDelta_1).$$

Introduisons ce terme dans la formule (30) à la place de X nous aurons une formule analogue à (32) et dont le second terme s'écrira (Remarquez que ce terme ne se détruira par avec le 1[er]):

$$V_1 = \frac{\beta}{2\alpha^2}\frac{1}{e^\xi + e^{-\xi}}\int \cos\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)\sin\varphi\,(e^\xi - e^{-\xi})\,d\xi,$$

β étant un coëff. analogue à β_1. Si nous négligeons les puissances supérieures de $e^{-\xi}$ il vient:

$$\frac{1}{e^\xi + e^{-\xi}} = e^{-\xi};\ \sin\varphi\,(e^\xi - e^{-\xi}) = \frac{\sqrt{2}\,e^{-\xi}}{\sqrt{1 + e^{-2\xi}}}(e^\xi - e^{-\xi}) = \sqrt{2}$$

d'où:

$$V_1 = \frac{\beta}{2\sqrt{2}\,\alpha\lambda_1}\,e^{-\xi}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right).$$

Le diviseur d'intégration est $\alpha\lambda_1$ et je ne vois aucune raison pour qu'il soit plus grand que α^2 contrairement à ce que dit M. G. page 263 ligne 13 et 14.

M. G. objecterait que $e^{-\xi}$ devient très petit mais cela ne saurait suffire.

Encore une remarque; M. G. ne suppose nulle part que les quantités qu'il appelle λ, λ_1, etc. soient commensurables entre elles; or cette condition est nécessaire pour qu'il y ait une solution asymptotique. C'est la preuve que sa démonstration est insuffisante.

En relisant ma lettre je m'aperçois que j'ai l'air de vouloir démolir complètement le mémoire de GYLDÉN; ce n'est nullement mon intention; j'y trouve de très belles choses; j'ai cherché seulement à faire ressortir combien les mots démonstration et convergence ont un sens différent pour lui et pour nous.

Le problème n'est abordé qu'au point de vue de l'astronomie purement pratique qui est peut être le plus important, mais qui n'est pas le mien. Je crois que même à ce point de vue, mes méthodes seront plus simples et paraîtront telles quand je les aurai développées suffisamment; mais peut-être est-ce moi qui ne comprend pas encore bien celles de M. G.

Pardon, mon cher ami, de vous imposer la lecture d'une lettre aussi longue et aussi décousue. Je voulais la jeter au feu; car je vais vous en écrire une autre plus posément après avoir approfondi le mémoire de M. G. Je vois que je ne le possède pas encore à fond puisque je trouve encore de temps en temps des sujets d'étonnement.

J'ai cru néanmoins devoir vous envoyer celle-ci de telle sorte que vous puissiez la lire et correspondre encore avec moi avant le 13 mars.

. . . . .

5 mars 1889.

. . . . .

Dans ma dernière lettre, j'ai cherché à vous montrer que les démonstrations de convergence de M. G. sont insuffisantes; il me reste à examiner si ses développements convergent effectivement (bien qu'il ne l'ait pas démontré) en me bornant au cas où il existe réellement des solutions asymptotiques.

Je considère donc l'équation suivante

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + n^2 s A \sin V \cos V = n^2 (X)$$

où

$$(X) = \Sigma s_1 A_1 \sin(\lambda_1 n t + m V + h).$$

h est une constante et je suppose pour éviter quelques unes des difficultés que je vous signalais la dernière fois que λ_1 et m sont entiers.

Que fait M. GYLDÉN? Il pose:

$$V = V_0 + V_1, \; V_0 = -2 \operatorname{arc\,tg} e^{-\xi} + \frac{\pi}{2} \text{ (page 257)}$$

$$\xi = \alpha n t + c.$$

α est un coëfficient qu'on se réserve de modifier à chaque approximation. Sa valeur exacte est cependant entièrement déterminée et *ne peut pas ne pas l'être* puisque αn n'est autre chose que ce que j'ai appelé l'exposant caractéristique.

L'équation devient alors:

$$\frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - (2 \sin^2 V_0 - 1) V_1 = \frac{1}{\alpha^2}(X) + \left(1 - \frac{sA}{\alpha^2}\right) \sin V \cos V + Y$$

$$Y = -\sin V \cos V + \sin V_0 \cos V_0 - V_1 (2 \sin^2 V_0 - 1).$$

M. G. donne le développement de Y suivant les puissances de V_1 page 236 ligne

7 (en comptant les formules pour une ligne). En appelant $\frac{1}{\alpha^2}X$ le second membre de l'équation précédente il vient:

$$\frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - (2\sin^2 V_0 - 1) V_1 = \frac{X}{\alpha^2} \tag{1}$$

qui ne diffère pas de l'équation (6) de M. G. page 236.

Cela posé, voici comment on fera pour intégrer (1) par approx. successives. On fera d'abord dans X $V_1 = 0$, on aura une équation linéaire en V_1, on l'intégrera, on substituera dans X à la place de V_1 la valeur approchée ainsi obtenue, on aura une nouvelle équation linéaire qui donnera une valeur plus approchée de V_1 qu'on substituera de nouveau dans X et ainsi de suite.

A chaque approximation on dispose de trois arbitraires à savoir: deux constantes d'intégration et α qu'on s'est réservé de modifier à chaque approx.

L'intégration de l'équation (1) quand on y regarde X comme connu nous donne conformément à la formule (32) de la page 261

$$\begin{aligned} -2\alpha^2 V_1 = (e^\xi - e^{-\xi}) & \left[\int_{-\infty}^{\xi} \frac{X d\xi}{e^\xi + e^{-\xi}} + C_1\right] \\ & - \frac{1}{e^\xi + e^{-\xi}}\left[\int_{-\infty}^{\xi} X(e^\xi - e^{-\xi}) d\xi + C_2\right] \\ & + \frac{4}{e^\xi + e^{-\xi}} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi \left(\int_{-\infty}^{\xi} \frac{X d\xi}{e^\xi + e^{-\xi}} + C_1\right). \end{aligned}$$

Je n'écris pas la formule tout à fait comme M. GYLDÉN afin de mettre en évidence les deux constantes d'intégration C_1 et C_2.

Considérons d'abord les valeurs *négatives* de ξ; pour ces valeurs X peut être développé suivant les puissances croissantes de e^ξ, de V_1 et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{\xi}{\alpha}$. Si on remplace V_1 par la valeur trouvée dans l'approx. précédente, X sera développé suivant les puissances de e^ξ et les sinus des multiples de $\frac{\xi}{\alpha}$.

Nous voulons que l'approximation suivante de V_1 donnée par la formule (32) soit de même forme. Elle ne doit donc contenir, ni terme en $e^{-\xi}$, ni terme en ξe^ξ.

Pour qu'elle ne contienne pas de terme en $e^{-\xi}$, il faut que la constante C_1 soit nulle.

Pour qu'elle ne contienne pas de terme en ξe^{ξ}, il faut que X ne contienne pas de terme en e^{ξ}.

Supposons donc que X ne contienne pas de terme en e^{ξ} et choisissons $C_1 = 0$.

Il nous reste deux arbitraires C_2 et α; nous pourrons en disposer et *cela d'une infinité de manières* de telle façon qu'à l'approx. suivante X ne contienne encore pas de terme en e^{ξ}.

Nous pouvons donc d'une infinité de manières trouver une série satisfaisant formellement à l'équation (1) et développée suivant les puissances de e^{ξ} et les sinus des multiples de $\frac{\xi}{\alpha}$. Parmi ces séries, en nombre infini, *une seule* peut être convergente pour les valeurs négatives de ξ; en effet j'ai dit plus haut que la valeur de α devait être entièrement déterminée.

Considérons maintenant les valeurs positives de ξ.

Pour ces valeurs X peut être développé suivant les puissances croissantes de $e^{-\xi}$. Nous voulons que V_1 soit de même forme, et ne contienne ni terme en e^{ξ}, ni terme en $\xi e^{-\xi}$.

Pour qu'il ne contienne pas de terme en e^{ξ} il faut que

$$C_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X d\xi}{e^{\xi} + e^{-\xi}}.$$

Pour qu'il ne contienne pas de terme en $\xi e^{-\xi}$, il faut que X ne contienne pas de terme en $e^{-\xi}$.

Nous supposerons qu'il en soit ainsi et nous voulons qu'il en soit encore ainsi à l'approx. suivante. Nous disposerons donc de C_2 et de α pour annuler les termes en $e^{-\xi}$ dans l'approx. suivante de X.

Nous pouvons le faire d'une infinité de manières, nous obtenons donc encore une infinité de séries, parmi lesquelles *une seule* peut converger.

Admettons, ce qui est probablement exact (je dis probablement parce que je n'ai pas entièrement vérifié l'identité de ces séries avec les miennes) qu'il y ait effectivement une série qui converge pour les valeurs positives de ξ et une autre pour les valeurs négatives.

Ces deux séries sont-elles la continuation analytique l'une de l'autre, correspondent-elles aux mêmes valeurs de C_1, de C_2 et de α? M. GYLDÉN ne le dit pas expressément mais son texte le laisse entendre et je crois que c'était bien là sa pensée. Je sais d'ailleurs qu'il en est effectivement ainsi, puisque j'ai démontrée que les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées; mais dans les démonstrations de M. G. je ne vois aucune bonne raison de le croire.

1°. Pour que C_1 ait la même valeur pour ξ négatif et pour ξ positif, il faut que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X\,d\xi}{e^{\xi}+e^{-\xi}}=0.$$

Pourquoi en serait-il ainsi; si je prends un des termes de X, par exemple

$$\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi+H_1\right)$$

je reconnais aisément que l'intégrale correspondante qui est très facile à calculer, n'est pas nulle à moins que H_1 ne soit nul.

Pourquoi les intégrales provenant des différents termes se détruiraient-elles? Je n'en verrais aucune raison si je ne savais d'avance que les surf. asympt. sont fermées.[1]

2°. Je veux maintenant que C_2 et α aient même valeur pour ξ positif ou négatif.

Il faut donc que je dispose de ces deux constantes de façon qu'à l'approx. suivante, si on développe X suivant les puissances de e^{ξ}, on n'ait pas de terme en e^{ξ} et si on développe X suivant les puissances de $e^{-\xi}$, on n'ait pas de terme en $e^{-\xi}$. Il est clair que je puis le faire, puisque j'ai deux arbitraires et deux conditions à remplir. Mais pourquoi parmi les séries en nombre infini que l'on peut former, la seule série convergente serait-elle précisément celle qui correspond à ce choix particulier de C_2 et de α.

Il n'y a ici encore aucune raison pour le croire, à moins qu'on ne sache d'avance que les surf. asympt. sont fermées.

3°. Ce n'est d'ailleurs pas ce choix que fait M. G. au moins si l'on rapporte à sa formule (3) de la page 236.

Il commence par disposer de α de façon à annuler le terme en e^{ξ} (ou $e^{-\xi}$) dans $X-(X)$ et probablement se servirait ensuite de la constante C_2 pour annuler le terme correspondant dans (X).

[1] POINCARÉ a reconnu plus tard que le théorème sur lequel il s'appuie ici n'est pas exact. Nous avons cru pourtant devoir reproduire cette lettre parce que c'est un point de moindre importance pour la question dont il s'agit.

Ce choix doit conduire à un résultat divergent puisque nous venons de voir que la manière d'obtenir une série convergente est *unique*.

En résumé, si on suit à la lettre les indications de M. G. en se fiant à sa formule (3) page 237 on arrive à une série divergente.

Si on laisse de côté cette formule à la quelle je suppose que M. G. ne tient guère, on arrive à une infinité de séries dont une seule converge et on n'a aucun moyen de reconnaître quelle est celle qui converge.

Il me paraît probable que l'on obtiendra cette série convergente en choisissant les constantes de façon que la série pour ξ négatif et celle pour ξ positif se raccordent. Mais je ne vois dans le mémoire de M. G. aucune bonne raison pour cela, je n'y suis conduit que par une application des résultats de mon travail couronné (encore faudrait-il pour en être absolument sûr, un examen plus approfondi).

Un dernier mot; la dernière fois j'ai parlé des raisonnements par lesquels DELAUNAY établit l'existence des solutions asympt. Il faut bien s'entendre. DELAUNAY n'a énoncé nulle part un pareil résultat, j'ai voulu dire simplement que sa méthode appliquée au cas particulier traité par M. G. l'aurait conduit à des développements de même forme.