ANALYSE

DES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

HENRI POINCARÉ

faite par lui-même.

BIBLIOGRAPHIE.

Ouvrages antérieurs à 1886.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.

1. 11 août 1879. Sur quelques propriétés des formes quadratiques.
2. 24 novembre 1879. Sur les formes quadratiques.
3. 22 mars 1880. Sur les courbes définies par une équation différentielle.
4. 7 juin 1880. Sur les formes cubiques ternaires.
5. 22 novembre 1880. Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire.
6. 14 et 21 février 1881. Sur les fonctions fuchsiennes.
7. 21 mars 1881. Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques.
8. 28 mars 1881. Sur la représentation des nombres par les formes.
9. 4 avril 1881. Sur une nouvelle application et quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes.
10. 11 avril 1881. Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes.
11. 18 avril 1881. Sur les fonctions fuchsiennes.
12. 18 avril 1881. Sur les fonctions abéliennes.
13. 23 et 30 mai 1881. Sur les fonctions fuchsiennes

14. 6 juin 1881. Sur une propriété des fonctions uniformes.
15. 27 juin 1881. Sur les fonctions fuchsiennes.
16. 11 juillet 1881. Sur les groupes kleinéens.
17. 18 juillet 1881. Sur une fonction analogue aux fonctions modulaires.
18. 8 août 1881. Sur les fonctions fuchsiennes.
19. 17 octobre 1881. Sur les fonctions fuchsiennes.
20. 5 décembre 1881. Sur les courbes définies par les équations différentielles.
21. 9 et 16 janvier 1882. Sur une extension de la notion arithmétique de genre.
22. 23 janvier 1882. Sur les fonctions fuchsiennes.
23. 13 février 1882. Sur les points singuliers des équations différentielles.
24. 17 février 1882. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries.
25. 27 mars 1882. Sur les groupes discontinus.
26. 10 avril 1882. Sur les fonctions fuchsiennes.
27. 24 avril 1882. Sur les fonctions fuchsiennes.
28. 22 mai 1882. Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires.
29. 3 juillet 1882. Sur les transcendantes entières.
30. 9 octobre 1882. Sur les fonctions fuchsiennes.
31. 30 octobre 1882. Sur les séries trigonométriques.
32. 22 janvier 1883. Sur les fonctions de deux variables.
33. 5 mars 1883. Sur les séries des polynômes.
34. 12 mars 1883. Sur les groupes des équations linéaires.
35. 16 avril 1883. Sur les fonctions à espaces lacunaires.
36. 30 avril 1883. Sur les groupes des équations linéaires.
37. 21 mai 1883. Sur les fonctions fuchsiennes.
38. 23 juillet 1883. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps.
39. 29 octobre 1883. Sur la reproduction des formes.
40. 5 et 26 novembre 1883. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires.
41. 3 décembre 1883 (en commun avec M. PICARD). Sur un théorème de RIEMANN relatif aux fonctions de n variables indépendantes admettant $2n$ systèmes de périodes.
42. 17 décembre 1883. Sur les équations algébriques.
43. 24 décembre 1883. Sur les séries trigonométriques.
44. 4 février 1884. Sur les courbes définies par les équations différentielles.
45. 11 février 1884. Sur les substitutions linéaires.
46. 25 février 1884. Sur les groupes hyperfuchsiens.

47. 31 mars 1884. Sur une équation différentielle.
48. 15 juillet 1884. Sur un théorème de M. Fuchs.
49. 3 novembre 1884. Sur les nombres complexes.
50. 17 novembre 1884. Sur la réduction des intégrales abéliennes.
51. 8 décembre 1884. Sur une généralisation des fractions continues.
52. 29 décembre 1884. Sur les intégrales de différentielles totales.
53. 5 janvier 1885. Sur une généralisation du théorème d'Abel.
54. 9 février 1885. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.
55. 16 mars 1885. Sur les fonctions abéliennes.
56. 20 avril et 27 juillet 1885. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.
57. 9 et 16 novembre 1885. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires.
58. 7 décembre 1885. Sur les séries trigonométriques.
59. 4 janvier 1886. Sur la transformation des fonctions fuchsiennes et la réduction des intégrales abéliennes.
60. 25 janvier 1886. Sur les résidus des intégrales doubles.
61. 29 mars 1886. Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques ternaires indéfinies.
62. 19 avril 1886. Sur la réduction des intégrales abéliennes.
63. 27 avril 1886. Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. (Réponse à M. Mathiessen.)

Thèse inaugurale.

(Paris, Gauthier-Villars; 1879.)

64. Sur les propriétés des fonctions définies par des équations aux différences partielles.

Acta Mathematica.

(Stockholm, Central-Tryckeriet.)

65. Théorie des groupes fuchsiens (t. I, p. 1 à 62; 1882).
66. Mémoire sur les fonctions fuchsiennes (t. I, p. 193 à 294; 1883).
67. Sur les fonctions de deux variables (t. II. p. 97 à 113; 1883).
68. Mémoire sur les groupes kleinéens (t. III, p. 49 à 92; 1883).
69. Sur les groupes des équations linéaires (t. IV, p. 201 à 312; 1884).

70. Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes (t. V, p. 209 à 278; 1884).
71. Sur un théorème de M. FUCHS (t. VII, p. 1 à 32; 1885).
72. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (t. VII, p. 259 à 380; 1885).
73. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (t. VIII, p. 295 à 344; 1886).

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

(Paris, Gauthier-Villars.)

74. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. [Première Partie] (3e série, t. VII, p. 375 à 422; novembre et décembre 1881).
75. — [Deuxième Partie] (3e série, t. VIII, p. 251 à 296; août 1882).
76. — [Troisième Partie] (4e série, t. I, p. 167 à 244; 1885).
77. — [Quatrième Partie] (4e série, t. II, p. 151 à 217; 1886).

Journal de l'École Polytechnique.

(Paris, Gauthier-Villars.)

78. Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles (XLVe Cahier, p. 13 à 26; 1878).
79. Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies (XLVIIe Cahier, p. 177 à 245; 1880).
80. Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. Première Partie (Le Cahier, p. 199 à 253; février 1881).
81. — Seconde Partie (LIe Cahier, p. 45 à 91; 1882).
82. Mémoire sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire (LVIe Cahier, p. 79 à 142; 1886).

American Journal of Mathematics.

(Baltimore, Johns Hopkins University.)

83. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies (Vol. VII, no 3, 56 pages; 1885).
84. Sur les functions abéliennes (Vol. VIII, no 4, p. 289 à 342).

Bulletin de la Société mathématique de France.

(Paris, Gauthier-Villars.)

85. Sur un théorème de la théorie générale des fonctions (t. XI, p. 112 à 125; 1883).
86. Sur les fonctions Θ (t. XI, p. 129 à 134; 1883).
87. Sur les fonctions entières (t. XI, p. 136 à 144; 1883).
88. Sur la réduction des intégrales abéliennes (t. XII, p. 124 à 143; 1884).
89. Remarques sur une méthode élémentaire de M. Appell pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques (t. XIII, p. 19 à 27; 1885).
90. Sur la représentation des nombres par les formes (t. XIII, p. 162 à 194; 1885).
91. Sur les déterminants d'ordre infini (t. XIV, p. 77 à 90; 1886).

Bulletin astronomique.

(Paris, Gauthier-Villars.)

92. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps (t. I, p. 65 à 74; février 1884).
93. Sur la convergence des séries trigonométriques (t. I, p. 319 à 327; juillet 1884).
94. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. [Premier Article] (t. II, p. 109 à 118; mars 1885).
95. — [Deuxième Article] (t. II, p. 405 à 413; septembre 1885).
96. Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne (t. II, p. 507 à 508; novembre 1885).
97 Sur une méthode de M. Lindstedt (t. III, p. 57 à 61; février 1886).

Association française pour l'avancement des Sciences.

(Congrès d'Alger, 1881.)

98. Sur les invariants arithmétiques (t. X, p. 109 à 117).
99. Sur l'application de la Géométrie non-euclidienne à la théorie des formes quadratiques (t. X, p. 132 à 138).

Acta Societatis Scientiarum Fennicæ.

(Helsingfors, Imprimerie de la Société finlandaise de Littérature.)

100. Sur les fonctions à espaces lacunaires (t. XII; 1883).

Mathematische Annalen.

(Leipzig. Teubner.)

101. Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires (Bd. XIX, p. 553 à 564, Bd. XX, p. 52—53; 1882).

Mémoires de l'Académie nationale des Sciences de Caen.

— Sur la théorie des fonctions fuchsiennes (Voir Comptes Rendus jusqu'au 27 juin 1881) (1882, p. 3—29).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

(Paris, Gauthier-Villars.)

102. Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une surface (2[e] série, t. XIII, p. 449—456; 1874).

Divers.

103. Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris, pendant l'année 1885—1886, et publié par l'Association amicale des Élèves et anciens Élèves de la Faculté. (Paris, au Siège social de l'Association à la Sorbonne.)
Première Partie: Cinématique pure. Mécanismes;
Seconde Partie: Potentiel. Mécanique des fluides.

104. Mémoire pour le concours du grand prix des Sciences mathématiques; 1880.

»Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.»

Ce Mémoire, qui a obtenu une mention très honorable, n'a pas été publié sous sa forme primitive.

Ouvrages publiés depuis 1886.

Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences.

105. Sur les Transformations des Surfaces en elles mêmes (1886; 2).
106. Sur une Classe étendue de Transcendantes uniformes (1886; 2).
107. Sur le Problème de la Distribution Electrique (1887; 1).
108. Sur un Théorème de M. LIAPOUNOFF relatif à l'équilibre d'une masse fluide (1887; 1).
109. Sur la Théorie Analytique de la Chaleur (1887; 1).
110. Notice sur la vie et les travaux de LAGUERRE (1887; 1).
111. Sur l'équilibre d'une masse hétérogène en rotation (1888; 1).
112. Sur la figure de la Terre (1888; 2).
113. Sur la Théorie Analytique de la Chaleur (1888; 2).
114. Sur les Satellites de Mars (1888; 2).
115. Sur les Séries de M. LINDSTEDT (1889; 1).
116. Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique (1889; 1).
117. Sur la loi électrodynamique de WEBER (1890; 1).
118. Rapport sur un Mémoire de M. CELLERIER intitulé: «Sur les variations des excentricités et des inclinaisons» (1890; 1).
119. Contribution à la théorie des expériences de HERTZ (1890; 2).
120. Sur le Développement approché de la fonction perturbatrice (1891; 1).
121. Sur l'expérience de M. WIENER (1891; 1).
122. Sur la réflexion métallique (1891; 1).
123. Sur l'équilibre des diélectriques fluides dans un champ électrique (1891; 1).
124. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles (1891; 1).
125. Sur la Théorie de l'Elasticité (1891; 1).
126. Sur la Théorie des Oscillations hertziennes (1891; 2).
127. Sur la Distribution des Nombres Premiers (1891; 2).
128. Sur un mode anormal de propagation des ondes (1892; 1).
129. Sur la Théorie de l'Elasticité (1892; 1).
130. Rapport sur un mémoire de M. BLONDLOT relatif aux oscillations hertziennes (1892; 1).
131. Sur la propagation des oscillations hertziennes (1892; 1).
132. Sur la Propagation des Oscillations Electriques (1892; 1).
133. Sur l'Application de la méthode de M. LINDSTEDT au problème des trois corps. (1892; 1).
134. Sur l'Analysis Situs (1892; 2).

135. Sur les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste (1892; 2).
136. Rapport sur le Concours du prix Bordin (1892; 2).
137. Sur la Théorie cinétique des gaz (deux notes) (1893; 1).
138. Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques (1893; 2).
139. Sur la généralisation d'un théorème d'EULER relatif aux polyèdres (1893; 2).
140. Observations sur une communication de MM. BIRKELAND et SARASIN sur la nature de la réflexion des ondes électriques au bout d'un fil conducteur (1893; 2).
141. Sur la propagation de l'électricité (1893; 2).
142. Sur certains développements en séries que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur (1894; 1).
143. Sur l'équation des vibrations d'une membrane (1894; 1).
144. Sur la Série de LAPLACE (1894; 1).
145. Rapport verbal concernant une démonstration du théorème de FERMAT, adressée par M. G. KORNECK (1894; 1).
146. Sur l'équilibre des mers (1894; 1).
147. Rapport sur un mémoire de M. STIELTJES intitulé: »Recherches sur les fractions continues» (1894; 2).
148. Rapport sur le Concours du prix Bordin (en commun avec MM. PICARD et APPELL) (1894; 2).
149. Sur un procédé de vérification applicable au calcul des Séries de la Mécanique Céleste (1895; 1).
150. Sur les fonctions abéliennes (1895; 1).
151. Sur la méthode de NEUMANN et le problème de DIRICHLET (1895; 1).
152. Observations au sujet d'une communication de M. DESLANDRES intitulée: «Recherches spectrales sur la rotation et les mouvements des planètes» (1895; 1).
153. Sur le spectre cannelé (1895; 1).
154. Remarque sur un mémoire de M. JAUMANN intitulé: »Longitudinales Licht» (1895; 2).
155. Réponses à M. JAUMANN (trois notes) (1896; 1).
156. Sur l'équilibre d'un corps élastique (1896: 1).
157. Observations au sujet d'une communication de M. PERRIN sur quelques propriétés des rayons RÖNTGEN (1896; 1).
158. Sur la divergence des séries de la Mécanique Céleste (1896; 1).
159. Sur la divergence des séries trigonométriques (1896; 1).
160. Observations au sujet d'une communication de M. DE METZ sur la photographie à l'intérieur des tubes de CROOKES (1896; 1).

161. Observations au sujet d'une communication de M. de Metz (1896; 2).
162. Remarques sur une expérience de M. Birkeland (1896; 2).
163. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action (1896; 2).
164. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps (1896; 2).
165. Rapport sur le mémoire de M. Hadamard (prix Bordin) (1896; 2).
166. Sur la méthode de Bruns (1896; 2),
167. Les solutions périodiques et le principe de moindre action (1897; 1).
168. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice (1897; 1).
169. Sur les fonctions abéliennes (1897; 1).
170. Rapport sur un mémoire de M. Hadamard (lignes géodésiques sur les surfaces à courbures opposées) (1897; 2).
171. Rapport sur un mémoire de M. Le Roy (Equations de la chaleur) (1897; 2).
172. Sur les périodes des intégrales doubles (1897; 2).
173. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice (1898; 1).
174. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$ (1898; 1).
175. Rapport sur le Concours du Grand prix des Sciences mathématiques (En commun avec M. Picard) (1898; 2).
176. Le phénomène de Hall et la théorie de Lorentz (1899; 1).
177. Sur les nombres de Betti (1899; 1).
178. Sur les groupes continus (1899; 1).
179. Appréciation d'un Ouvrage de M. V. Bjerknes intitulé: »Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte (1900; 1).
180. Rapport sur le projet de revision de l'arc méridien de Quito (1900; 2).

Acta mathematica.

181. Sur les Résidus des Intégrales Doubles (Tome 9).
182. Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (Réponse à M. Thomé) (Tome 10).
183. Sur le Problème des Trois Corps et les Equations de la Dynamique (Mémoire couronné dans le concours institué par S. M. le roi de Suède) (Tome 13).
184. Sur la Polarisation par Diffraction (Tome 16).
185. La Méthode de Neumann et le Problème de Dirichlet (Tome 20).
186. Sur la Polarisation par Diffraction (Suite) (Tome 20).

187. Sur une forme nouvelle des équations du problème des Trois Corps (Tiré du Bulletin Astronomique) (Tome 21).
188. Sur les rapports de l'Analyse Pure et de la Physique Mathématique (Conférence faite au congrès de Zürich; reproduite dans les comptes Rendus du congrès de Zürich et dans la Revue Générale des Sciences; traduite en anglais dans Bulletin of the American mathematical Society, 1898, et en polonais dans Wiadomosci Matematyczne) (Tome 21).
189. L'œuvre mathématique de WEIERSTRASS (Tome 22).
190. Les Propriétés du Potentiel et les Fonctions Abéliennes (Tome 22).

Journal des Mathématiques Pures et Appliquées.

(Journal de Liouville) (4e série).

191. Les Fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique (1887).
192. Sur une Classe Nouvelle de Transcendantes Uniformes (1890).
193. Extension aux nombres complexes de la Méthode de M. TCHEBICHEFF pour l'étude des Nombres premiers (1892).
194. Remarques diverses sur les fonctions abéliennes (1895).
195. Sur l'Equlibre et le Mouvement des Mers (deux articles) (1896).
196. Sur les Périodes des Intégrales doubles et le développement de la Fonction Perturbatrice (1897).
197. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$ (1898).

Journal de l'Ecole Polytechnique.

198. Notice sur Halphen (60e cahier, 1890).
199. Analysis Situs (2e série, 1er cahier, 1895).

American Journal of Mathematics. (Baltimore.)

200. Sur les Equations aux Dérivées partielles de la Physique Mathématique (Tome 12).
201. Sur les Fonctions à Espaces lacunaires (Tome 14).

Bulletin Astronomique.

202. Sur un moyen d'augmenter la Convergence des Séries Trigonométriques (Tome 3).
203. Sur la Figure de la Terre (Deux articles) (Tome 6).
204. Sur le Problème des Trois Corps (Tome 8).
205. Discours prononcé aux Obsèques de M. TISSERAND (reproduit dans l'Annuaire du Bureau des Longitudes) (T. 13).
— Sur une Forme nouvelle des équations du problème des Trois Corps (Voir aussi Acta Mathematica) (T. 14).
206. Sur les Périodes des Intégrales Doubles et le Développement de la Fonction Perturbatrice (T. 14).
207. Sur le Développement de la Fonction Perturbatrice (T. 14.)
208. Sur l'intégration des Equations du Problème des Trois Corps (T. 14).
209. Sur le Développement de la Fonction Perturbatrice (Deux notes) (T. 15).
210. Sur la Façon de grouper les Termes des Séries trigonométriques que l'on rencontre en Mécanique Céleste (T. 15).
211. Analyse d'un Ouvrage de CH. ANDRÉ intitulé: »Traité d'Astronomie stellaire» (T. 16).
212. Sur l'Equilibre d'un Fluide en Rotation (T. 16).
213. Sur les Quadratures Mécaniques (T. 16).
214. Sur le Mouvement du Perigée de la Lune (T. 17).
215. Sur le Déterminant de HILL (T. 17).
216. Sur les Equations du Mouvement de la Lune (T. 17).
217. Les Mesures de Gravité et la Géodésie (T. 18).

Circolo Matematico di Palermo.

218. Sur une Propriété des Fonctions Analytiques (T. 2).
219. Sur l'Intégration algébrique des Equations différentielles du 1^er^ ordre et du 1^er^ degré (T. 5).
220. Sur les Equations de la Physique Mathématique (T. 8).
221. Sur l'intégration algébrique des Equations différentielles du 1^er^ ordre et du 1^er^ degré (T. 11).
222. Complément à l'Analysis Situs (T. 13).

Archives des Sciences Physiques et Naturelles de Genève.

(3^e^ période.)

223. Contribution à la Théorie des Expériences de HERTZ (T. 24).
224. Sur le Calcul de la Période des Excitateurs hertziens (T. 25).
225. Sur la Résonance multiple des Oscillations hertziennes (T. 25).

Bulletin de le Société Mathématique de France.

226. Sur les Hypothèses Fondamentales de la géometrie (Traduit en russe dans Bulletin de la Société physico-matématique de Kasan, 1893) (T. 15).

Annuaire du Bureau des Longitudes.

227. La Lumière et l'Electricité d'après MAXWELL et HERTZ (Voir Revue Scientifique; traduit en anglais dans Nature, 1894, et dans Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, 1896) (1894).
228. Rapport sur la proposition d'unification des jours astronomique et civil (1895).
229. Les Rayons Cathodiques et les Rayons RÖNTGEN (Voir Revue Scientifique) (1897).
— Discours prononcé aux funérailles de TISSERAND (Voir Bulletin Astronomique et Mémoires de l'Institut) (1897).
230. Sur la Stabilité du Système Solaire (Voir Revue Scientifique; traduit en anglais dans Nature, 1898) (1898).
231. Discours prononcé à l'Inauguration de la statue de F. TISSERAND (1900).
— Rapport sur le Projet de Revision de l'Arc méridien de Quito (Voir Comptes Rendus, Revue Générale des Sciences et Association Géodésique internationale) (1901).

L'Eclairage Electrique.

(Paris, Carré et Naud.)

232. Apropos de la théorie de LARMOR (Quatre articles Tomes III et V, 1895).
233. Polémique avec M. JAUMANN (Quatre articles, 1895 et 1896).
234. Sur le Phénomène de ZEEMAN (1897).
235. Lettre sur la Décimalisation de l'Heure (1897).

236. La décimalisation de l'heure et de la circonférence (1897).
237. Observations au sujet de la Note de M. J. J. THOMSON intitulée: »On the Cathode Rays» (1897).
238. L'énérgie magnétique d'après MAXWELL et d'après HERTZ (1899).
239. Sur le Phénomène de ZEEMAN et la Théorie de LORENTZ (1899).
240. Sur l'induction Unipolaire (1900).

Nature.

(Londres.)

241. Polémique avec M. TAIT (1893).
242. FOURIER's Series (Lettre à A. A. MICHELSON) (1899).

Proceedings of the London Mathematical Society (Juin 1900).

243. Second Complément à l'Analysis Situs.

Revue de Métaphysique et de Morale.

(Paris, Armand Collin.)

244. Le Continu Mathématique (Janvier 1893).
245. Le Mécanisme et l'Expérience (Novembre 1893).
246. Le Mécanisme et l'Expérience (Réponse à M. LÉCHALAS) (Mars 1894).
247. Sur la Nature du Raisonnement Mathématique (Traduit en russe dans Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan, 1898) (Juillet 1894).
248. L'Espace et la Géométrie (Novembre 1895).
249. Réponse à quelques Critiques (Janvier 1897).
250. La Mesure du Temps (Janvier 1898).
251. Sur les Fondements de la Géométrie, à propos d'un livre de M. RUSSELL (Mai 1899).
252. Réponse à M. RUSSELL (Janvier 1900).
253. Comptes Rendus des Séances du Congrès de Philosophie; discussion; (Septembre 1900).

The Monist.

(Chicago.)

254. On the Foundations of Geometry (Octobre 1898).

Revue Générale des Sciences.

(Paris, Carré et Naud, puis Armand Collin.)

255. Le Problème des Trois Corps (T. 2; 1891).
256. Les Géométries non Euclidiennes (traduit en anglais dans Nature) (T. 2; 1891).
257. Lettre à M. Mouret sur les Géométries non euclidiennes (T. 3; 1892).
258. Les Formes d'équilibre d'une Masse fluide en Rotation (T. 3; 1892).
259. Sur la Théorie Cinétique des Gaz (T 5; 1894).
260. Les Rayons cathodiques et les Rayons Röntgen (T. 7; 1896).
261. La Vie et les Travaux de F. Tisserand (T. 7; 1896).
262. Les idées de Hertz sur la Mécanique (T. 8; 1897).
263. Réflexions sur le Calcul des Probabilités (T. 10; 1899).
— Les Rapports de l'Analyse et de la Physique mathématique (Voir Acta Mathematica et Congrès des Mathématiciens à Zürich) (T. 8; 1897).
— Rapport sur le projet de revision de l'arc méridien de Quito (Voir Comptes Rendus, Annuaire du Bureau des Longitudes et Association Géodésique internationale) (1900).
264. Sur les Rapports de la Physique mathématique et de la Physique expérimentale (Voir Revue Scientifique et Congrès International de Physique; traduit en allemand dans Physikalische Zeitschrift, 1900—1901, et en anglais dans The Monist, July 1902) (T. 11; 1900).

L'Enseignement Mathématique.

(Paris, Carré et Naud.)

265. La Notation Différentielle et l'Enseignement (T. 1).
266. La Logique et l'Intuition dans la Science Mathématique et l'Enseignement (T. 1).

L'Intérmédiaire des Mathématiciens.

(Paris, Gauthier Villars.)

267. Sur le faisceau de cubiques passant par huit points d'un plan (Question proposée) (T. 1).
268. Sur le réseau de quadriques passant par sept points donnés dans l'espace (Question proposée) (T. 1).

269. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (Réponse à une question proposée par M. APPELL) (T. 1).
270. Sur le théorème de GOLDBACH relatif aux nombres premiers (Question proposée en commun avec E. CATALAN) (T. 1).
271. Sur des courbes gauches particulières (Question proposée en commun avec M. LÉON AUTONNE) (T. 1).
272. Sur une propriété d'une fonction algébrique d'un arc (Réponse à une question proposée par M. H. DELLAC) (T. 1).
273. Sur certaines familles de courbes algébriques (Question proposée) (T. 1 et T. 7).

Cambridge Philosophical Transactions (Vol. XVIII).

Jubilé de sir G. G. Stokes.

274. Sur les Groupes Continus (1899).

Jubilé de Lorentz.

(Leyde 1900.)

275. La Théorie de LORENTZ et le Principe de Réaction (Voir Archives Néerlandaise des Sciences exactes et naturelles).

Archives Néerlandaise des Sciences exactes et naturelles.

— La théorie de LORENTZ et le Principe de Réaction (Voir Jubilé de LORENTZ) (1900).

Publications chez Gauthier Villars.

276. Notice sur les Travaux Scientifiques de M. POINCARÉ 1884.
277. » » » » » » » » 1886.
278. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste (Tome 1, 1892).
279. » » » » » » » (Tome 2, 1893).
280. » » » » » » » (Tome 3, 1899).
281. Leçons de M. TISSERAND sur la Détermination des Orbites; préface de M. POINCARÉ (Voir Bulletin des Sciences mathématiques) (1899).
282. Discours prononcé au Jubilé de M. HERMITE (Voir Revue des Questions scientifiques) (1892).
— Œuvres de LAGUERRE; préface de M. POINCARÉ (Voir Comptes Rendus) (1898).

283. Les Géométries non-euclidiennes; Note dans le Traité de Géométrie par E. Rouché et Ch. de Comberousse, IIe partie (1900).

Publications chez G. Carré et Naud.

284. Théorie Mathématique de la Lumière (Traduction en allemand: Berlin, Julius Springer, 1894) (Tome 1, 1889).
285. Théorie Mathématique de la Lumière (Tome 2, 1892).
286. Electricité et Optique (1ère Edition) (Traduction en allemand: Berlin, Julius Springer, 1891) (Tome 1, 1890).
287. Electricité et Optique (1ère Edition) (Traduction en allemand: Berlin, Julius Springer, 1891) (Tome 2, 1891).
288. Capillarité (1895).
289. Théorie de l'Elasticité (1892).
290. Théorie des Tourbillons (1893).
291. Thermodynamique (Traduction en allemand: Berlin, Julius Springer) (1892).
292. Les Oscillations Electriques (1894).
293. Théorie Analytique de la Propagation de la Chaleur (1895).
294. Calcul des Probabilités (1896).
295. Théorie du potentiel Newtonien (1899).
296. Cinématique et Mécanismes; Potentiel et Dynamique des Fluides (3e édition; les deux premières ont été publiées chez Hermann; vide sup. No 103) (1899).
297. La Théorie de Maxwell et les Oscillations hertziennes (Collection Scientia) (1899).
298. Electricité et Optique, 2e édition (1901).

Mémoires de l'Institut.

— Discours prononcé aux funérailles de Tisserand (Voir Bulletin Astronomique et Annuaire du Bureau des Longitudes) (1896).

299. La Géodésie Française, discours prononcé à la séance des Cinq Académies, le 25 Octobre 1900 (Voir Bulletin de la Société astronomique de France).

Bulletin de la Société astronomique de France.

— La Géodésie Française (Voir Mémoires de l'Institut) (1900).

Imprimerie Nationale.

300. Rapport sur le projet de décimalisation du Temps et de la Circonférence.

Revue Scientifique.

— La Lumière et l'Electricité d'après MAXWELL et HERTZ (Voir Annuaire du Bureau des Longitudes) (1894).

301. Discours prononcé au Jubilé de M. BERTRAND (Voir Annuaire de l'École Polytechnique) (1894).

— Les rayons cathodiques et les rayons RÖNTGEN (Voir Annuaire du Bureau des Longitudes) (1897).

— Sur la stabilité du système solaire (Voir Annuaire du Bureau des Longitudes) (1898).

— Sur les Rapports de la Physique Mathématique et de la Physique Expérimentale (Voir Revue Générale des Sciences et Congrès de Physique) (1900).

Comptes rendus des Séances de la Conférence générale de l'Association Géodésique internationale.

— Rapport sur le projet de revision de l'arc méridien de Quito (Voir Comptes Rendus, Annuaire du Bureau des Longitudes et Revue Générale des Sciences) (1901).

Annuaire de l'École Polytechnique.

— Discours prononcé au Jubilé de M. BERTRAND (Voir Revue Scientifique) (1895).

Bulletin des Sciences mathématiques.

— Préface de l'Ouvrage posthume de F. TISSERAND intitulé: Leçons sur la Détermination des Orbites (Voir Gauthier Villars) (2e série, t. 23; 1899).

Revue des Questions scientifiques.

(Louvain.)

— Discours prononcé au Jubilé de M. HERMITE (Voir Gauthier Villars) (2e s., t. 3, 1893).

Congrès Internationaux.

— Les Rapports de l'Analyse et de la Physique Mathématique (Voir Acta Mathematica et Revue Générale des Sciences) (Congrès des Mathématiciens à Zürich 1897).

— Sur les Rapports de la Physique Mathématique et de la Physique Expérimentale (Voir Revue Générale des Sciences et Revue Scientifique) (Congrès de Physique, Paris, 1900).

302. Sur les Principes de la Mécanique (congrès de Philosophie, Paris, 1900).

303. Sur le Rôle de la Logique et de l'Intuition dans la Science Mathématique (Congrès des Mathématiciens, Paris, 1900).

Divers.

304. Sur l'application du Calcul des Probabilités (Lettre de M. H. POINCARÉ à M. P. PAINLEVÉ: Le Procès Dreyfus devant le Conseil de Guerre de Rennes, 7 août—9 septembre 1899. Paris, P.-V. Stock, t. III, 1900).

Ouvrages publiés depuis 1901.

Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences.

305. Sur la théorie de la précession (1901; 1).

306. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique (traduit en russe dans Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan, 1901) (1901; 1).

307. Rapport sur les papiers laissés par HALPHEN (1901; 2).

308. Sur l'»Analysis situs» (1901; 2).

309. Sur la connexion des surfaces algébriques (1901; 2).

310. Rapport présenté au nom de la commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'équateur (1902; 1).

311. id. (1903; 1).

312. id. (1904; 1).

313. Théorie de la balance azimutale quadrifilaire (1904; 1).

314. Sur la méthode horistique de GYLDÉN (traduit en allemand dans Physikalische Zeitschrift, 1904) (1904; 1).

315. Rapport sur le Concours du Prix Leconte (1904; 2).
316. Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de Géométrie (1905; 1).
317. Sur la dynamique de l'électron (1905; 1).
318. Rapport présenté au nom de la commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'équateur (1905; 1).
319. Rapport sur un Mémoire de M. Bachelier intitulé: »Les probabilités continues» (1905; 2).
320. Rapport sur le Concours du Prix Damoiseau (1905; 2).
321. Sur des Membres de l'Académie des Sciences (1906; 1).
322. Sur des Membres de l'Académie des Sciences et sur des Membres de la Mission géodésique à l'équateur (1906; 2).
323. Rapport présenté au nom de la commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'équateur (1907; 2).
324. Rapport sur le Concours du Prix Vaillant (1907; 2).
325. Rapport sur le Concours du Prix Monthyon (1908; 2).
326. Remarques sur l'équation de Fredholm (1908; 2).
327. Sur quelques applications de la méthode de M. Fredholm (1909; 1).
328. Les ondes hertziennes et l'équation de Fredholm (1909; 1).
329. id. (1909; 1).
330. Sur la diffraction des ondes hertziennes (1909; 1).
331. id. (1909; 1).
332. id. (1909; 1).
333. id. (1909; 2).
334. Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques (1909; 2).
335. Sur une généralisation de la méthode de Jacobi (1909; 2).
336. Présentation du tome III des Leçons de Mécanique céleste professées à la Sorbonne (1910; 1).
337. Sur les signaux horaires destinés aux marins (1910; 1).
338. Sur l'envoi de l'heure par la télégraphie sans fil (1910; 2).
339. Présentation de la 2e édition de l'ouvrage Calcul des Probabilités (1911; 2).
340. Présentation des Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques (1911; 2).
341. Sur la théorie des quanta (1911; 2).
342. Sur la diffraction des ondes hertziennes (1912; 1).

Acta mathematica.

343. Sur les fonctions abéliennes (t. 26, 1902).
344. Sur la méthode horistique de GYLDÉN (t. 29, 1905).
345. Sur l'uniformisation des fonctions analytiques (t. 31, 1908).
346. Réflexions sur les notes de M. A. S. SCHOENFLIES et de M. E. ZERMELO (t. 32, 1909).
— Remarques diverses sur l'équation de FREDHOLM (t. 33, 1910): voir Assoc. franç. p. l'avanc. des sciences.
347. Rapport sur le Prix Bolyai décerné le 18 Octobre 1910 (t. 35, 1911).

Journal de mathématiques pures et appliquées.

(Journal de Liouville, 5e et 6e séries.)

348. Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques (1901).
349. Sur les cycles des surfaces algébriques. Quatrième complément à l'»Analysis situs» (1902).
350. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes (1903).
351. Sur les périodes des intégrales doubles (1906).

Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.

352. Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques (3e série t. 27; 1910).

Journal für die reine und angewandte Mathematik.

(Journal de Crelle).

353. Sur les invariants arithmétiques (t. 129; 1905).

Circolo Matematico di Palermo.

354. Quelques remarques sur les groupes continus (t. 15; 1901).
355. Cinquième complément à l'»Analysis situs» (t. 18; 1904).
356. Sur la dynamique de l'électron (t. 21; 1906).

357. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme (t. 23; 1907).
358. Nouvelles remarques sur les groupes continus (t. 25; 1908).
— L'avenir des mathématiques (t. 26; 1908): Voir Congrès de Rome.
359. Sur la réduction des intégrales abéliennes et les fonctions fuchsiennes (t. 27; 1909).
360. Sur la diffraction des ondes hertziennes (t. 29; 1910).
— Rapport sur le Prix Bolyai décerné le 18 Octobre 1910 (t. 31; 1911): voir Acta mathematica.
361. Sur un théorème en géométrie (t. 33; 1912).

Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

362. Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation (1902).

Proceedings of the Royal Society of London.

363. Sur la Stabilité de l'Équilibre des Figures Pyriformes affectées par une Masse fluide en Rotation (oct. 1901; t. 69).
364. Sur la diffraction des ondes électriques (mai 1903; t. 72).

Bulletin astronomique.

365. Sur les déviations de la verticale en Géodésie (t. 18; 1901).
366. Observations au sujet de l'article de F. H. Seares, intitulé: Sur les quadratures mécaniques (t. 18; 1901).
367. Les solutions périodiques et les planètes du type d'Hécube (t. 19; 1902).
368. Sur les planètes du type d'Hécube (t. 19; 1902).
369. Sur un théorème général relatif aux marées (t. 20; 1903).
370. Sur la méthode horistique. Observations sur l'Article de M. Backlund (t. 21; 1903).
371. Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace (t. 23; 1906).
372. Sur les petits diviseurs dans la théorie de la Lune (t. 25; 1908).
373. Sur la précession des corps déformables (t. 27; 1910).
374. Remarques sur l'hypothèse de Laplace (t. 28; 1911).
— Discours prononcé aux funérailles de M. Rodolphe Radau (t. 29; 1912): voir Mémoires de l'Institut.

Annuaire du Bureau des Longitudes.

375. Sur la télégraphie sans fil (traduit en allemand dans Deutsche Mechaniker-Zeitung, 1902) (1902).
— Discours prononcé aux funérailles de M. A. CORNU (1903): voir Mémoires de l'Institut.
376. Notice sur M. MAURICE LŒWY (1908).
377. Note sur la XVI^e conférence de l'association géodésique internationale (1911).
378. Notice nécrologique sur M. BOUQUET DE LA GRYE (1911).
379. Discours prononcé aux funérailles de M. PAUL GAUTIER (1911).
— Discours prononcé aux funérailles de M. RODOLPE RADAU (1913): voir Mémoires de l'Institut.

Bulletin de la Société mathématique de France.

380. Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes (t. 29; 1901).
381. Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'»Analysis situs» (t. 30; 1902).

Bulletin de le Société Française de Physique.

382. Sur M. A. CORNU (lettre à M. C.-M. GARIEL; avril 1902).
— Discours prononcé aux funérailles de M. A. CORNU (avril 1902): voir Mémoires de l'Institut.
383. Sur les Travaux de la Société Française de Physique (janvier 1903).
384. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz (juillet 1906).

Transactions of the American mathematical Society.

385. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes (1905).

Journal de Physique théorique et appliquée.

386. Réflexions sur la théorie cinétique des gaz (4^e série, t. 5; 1906).
387. Sur la théorie des quanta (5^e série, t. 2; 1912).
388. Les rapports de la matière et de l'éther (5^e série, t. 2; 1912).

Bulletin des Sciences mathématiques.

389. Analyse d'un mémoire de M. ZAREMBA (2^e série, t. 26; 1902).
— Fondements de la Géométrie (t. 26; 1902 et t. 27; 1903): voir Journal des Savants.
390. L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique (traduit en anglais dans Congress of Arts and Science, Universal Exposition, Saint-Louis, 1905, dans The Monist, 1905, et dans Bulletin of the American mathematical Society, 1906; en japonais dans Tokyobuteu ri gakkozashi, 1905) (t. 28; 1904).
— L'avenir des mathématiques (t. 32; 1908): voir Congrès de Rome.
— Rapport sur le Prix Bolyai décerné le 18 Octobre 1910 (t. 35; 1911): voir Acta mathematica.

L'Eclairage électrique.

391. Sur les excitateurs et résonateurs hertziens (t. 29; 1901).
392. Sur les propriétés des anneaux à collecteurs (deux notes) (t. 30; 1902).
393. A. CORNU (t. 31; 1902).
394. Sur les expériences de M. CRÉMIEU et une objection de M. WILSON (lettres; t. 31; 1902).
395. Sur la propagation du courant en période variable sur une ligne munie de récepteurs (t. 40; 1904).
396. A. POTIER (t. 43; 1905).
397. Sur le récepteur téléphonique (t. 50; 1907).
398. Sur quelques théorèmes généraux relatifs à l'électrotechnique (t. 50; 1907).

La lumière électrique.

399. Lord KELVIN (2^e série, t. 1; 1908).
400. Sur la théorie de la commutation (2^e série, t. 2; 1908).
401. Sur la télégraphie sans fil (2^e série, t. 4; 1908).
— Sur la diffraction des ondes hertziennes (2^e série, t. 8; 1909): voir Comptes Rendus.
402. Sur la diffraction des ondes hertziennes (traduit en allemand dans Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie, 1910) (2^e série, t. 10 et t. 11; 1910).
403. Sur diverses questions relatives à la télégraphie sans fil (conférence: 2^e série, t. 13; 1911).

Mathematische Naturwissenschaftliche Blätter.

404. Ueber einige Gleichungen in der Theorie der HERTZ'schen Wellen (1910).

Comptes rendus des sessions de l'Association française pour l'avancement des sciences.

405. Remarques diverses sur l'équation de FREDHOLM (38e série. Lille 1909).
406. La mécanique nouvelle (*ibid.* 1909).

Journal des Savants.

407. Fondements de la géométrie (analyse de l'ouvrage de DAVID HILBERT) (traduit en anglais dans Bulletin of the American mathematical Society, 1903) (1902).

Revue de Métaphysique et de Morale.

408. Sur la valeur objective de la science (mai 1902).
409. L'espace et ses trois dimensions (mai et juillet 1903).
410. COURNOT et le principe du calcul infinitésimal (1905).
411. Les mathématiques et la logique (novembre 1905, janvier et mai 1906).
412. A propos de la Logistique (novembre 1906).
413. La logique de l'infini (juillet 1909).
414. Pourquoi l'espace a trois dimensions (juillet 1912).

Mind.

415. Lettre de M. H. POINCARÉ à M. G. F. STOUT (janvier 1906).

Revue générale des sciences pures et appliquées.

416. A propos des expériences de M. CRÉMIEU (t. 12; 1901).
417. Sur la dynamique de l'électron (t. 19; 1908).

— L'invention mathématique (t. 19; 1908): voir Bulletin de l'Institut général Psychologique.

— L'Avenir des Mathématiques (t. 19; 1908): voir Congrès de Rome.

418. SULLY PRUDHOMME mathématicien (t. 20; 1909).

Revue du Mois.

419. Le Hasard (mai 1907).

— L'invention mathématique (juillet 1908): voir Bulletin de l'Institut général Psychologique.

— Vue d'ensemble sur les hypothèses cosmogoniques (octobre 1911): préface de l'ouvrage Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, publié chez Hermann.

La Revue des Idées.

— L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique (1904): voir Bull. des Scienc. Math.

Scientia (Rivista di Scienza).

— L'Avenir des Mathématiques (1908): voir Congrès de Rome.

420. L'évolution des lois (1911).

421. La logique de l'infini (1912).

422. L'espace et le temps (1912).

Revue Scientifique (Revue rose).

— Sur la télégraphie sans fil (4e série, t. 17; 1902): voir Annuaire du Bureau des Longitudes.

— La mécanique nouvelle (47e année, 2e sem. 1909): voir Assoc. franç. p. l'avanc. des sciences.

423. L'hypothèse des quanta (50e année, 1e sem. 1911).

Bulletin de la société astronomique de France.

424. Les Progrès de l'Astronomie en 1901 (discours; mai 1902).

425. Sur la vie et les Travaux de M. FAYE (discours; novembre 1902).

426. Grandeur de l'astronomie (conférence; mai 1903).
427. La terre tourne-t-elle ? (mai 1904).
428. Une image de l'Univers (janvier 1905).
429. La voie lactée et la théorie des gaz (traduit en tchèque dan Ziva, 1907) (conférence; avril 1906).
430. Allocution prononcée au Jubilé de M. CAMILLE FLAMMARION (mars 1912).

Bulletin de la société industrielle de Mulhouse.

431. Conférence sur les comètes (1910).

L'année psychologique.

432. La relativité de l'espace (t. 13; 1907).

Foi et Vie (Paris).

433. La morale et la science (13e année. 1910).
434. Les conceptions nouvelles de la matière (15e année 1912).

Comptes rendus des Séances de la Conférence générale de l'Association Géodésique internationale.

— Rapports présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Équateur (1905 et 1908): voir Comptes Rendus.

The Electrician.

435. Entropy (février 1903).

Journal de l'Université des Annales.

436. La télégraphie sans fil (conférence; avril 1909).

Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan.

437. Rapport relatif au III^{e} Concours du Prix LOBATSCHEWSKIJ décerné le 14 février 1904 (2^{e} série, t. 14; 1904).

The Athenæum.

438. La fin de la matière (février 1906).

The Monist.

439. Le choix des faits (avril 1909).

Conférences du Musée pédagogique.

440. Les définitions générales en Mathématiques (traduit en italien dans Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario, 1905, et en espagnol dans Gazeta de Matemáticas, 1905) (conférence; 1904).

L'Enseignement Mathématique.

— Les définitions générales en Mathématiques (juillet 1904): voir Conférences du Musée pédagogiques.

— L'invention mathématique (septembre 1908): voir Bulletin de l'Institut général Psychologique.

Bulletin de l'Institut général Psychologique.

441. L'invention mathématique (conférence; mai—juin 1908).

Mémoires de l'Institut.

442. Discours prononcé aux funérailles de M. A. CORNU (1902).
443. Rapport relatif à la Fondation JEAN DEBROUSSE (1903).
444. id. (1904).
445. id. (1905).
446. id. (1906).
— Sur des Membres de l'Académie des Sciences et sur des Membres de la Mission géodésique à l'équateur (1906): voir Comptes Rendus.
447. Sur la Vie et l'Œuvre poétique et philosophique de SULLY PRUDHOMME (discours prononcé par HENRI POINCARÉ à l'Académie française, en y venant prendre séance; 1909).
448. Discours lu aux funérailles de M. HIPPOLYTE LANGLOIS (1909).
449. Discours prononcé à l'Inauguration du Monument élevé à la Mémoire d'OCTAVE GRÉARD (1909).
450. Discours prononcé aux funérailles de M. RODOLPHE RADAU (1911).

L'Université de Paris.

451. Sur la vérité scientifique et sur la vérité morale (allocution prononcée au 19e Banquet de l'Association générale des Étudiants de Paris; juin 1903).

Questions du temps présent (Paris).

— La morale et la science (1910): voir Foi et Vie.

La Revue de Jean Finot (Paris).

— La morale et la science (1910): voir Foi et Vie.

Revue international de l'Enseignement.

— Sur la nécessité de la culture scientifique (t. 58; 1909): voir Divers.
452. Allocution prononcée au Jubilé de M. GASTON DARBOUX (t. 59; 1912).

Journal de l'École Polytechnique.

— Notice sur la Vie et les Œuvres d'ALFRED CORNU (2e série, 10e cahier; 1905): voir Divers.

Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft.

453. Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques (octobre 1910).

Revue politique et littéraire (Revue bleue).

454. Sur la participation des Savants à la Politique (5e série, t. 1; 1904).

Le Matin (Paris).

455. Sur l'Œuvre de MARCELIN BERTHELOT (25 mars 1907).
456. Comment se fait la Science (25 novembre 1908).
457. Comment on invente. Le travail de l'inconscient (24 décembre 1908).

Le Temps (Paris).

458. Compte rendu d'ensemble des Travaux du IVe Congrès des Mathématiciens tenu à Rome en 1908 (21 avril 1908).
— Discours prononcé à l'Inauguration du Monument élevé à la Mémoire d'OCTAVE GRÉARD (12 juillet 1909): voir Mémoires de l'Institut.
— Sur la représentation proportionnelle (2 février 1911): voir F. Alcan.

L'Opinion (Paris).

459. Sur la prépondérance politique du Midi (25 mars 1911).

Est Républicain (Nancy).

460. Toast prononcé au Banquet de la Société amicale des Lorrains de Meurthe-et-Moselle (19 juin 1909).

Le Petit Temps (Paris).

— Sur la nécessité de la culture scientifique (1 août 1909): voir Divers.

Magyar Szó (Budapest).

461. Sur la culture scientifique en Hongrie (25 décembre 1906).

Ouvrages publiés chez Gauthier Villars (Carré et Naud).

462. Figures d'équilibre d'une masse fluide (1902).
463. La Théorie de MAXWELL et les Oscillations hertziennes (Collection Scientia), 2e et 3e éditions (Traduction en anglais: London, New York, 1904, 1905; en allemand: Leipzig, Johann Ambrosius Barth, 1909) (1904, 1907).
464. Leçons de mécanique céleste professées à la Sorbonne (tome I, 1905).
— » » » » » » » » (tome II, 1907—09).
— » » » » » » » » (tome III, 1910).
465. Thermodynamique, 2e édition (1908).
466. Calcul des Probabilités, 2e édition (1912).
— A. POTIER; préface des Mémoires sur l'Électricité et l'Optique par A. POTIER (1912): voir L'Éclairage électrique.

Ouvrage publié chez Hermann.

467. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques (Traduction en roumain du chapitre IX: Orion, Bucuresti, 1912) (1911).

Ouvrage publié chez Teubner.

468. Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik (1910).

Ouvrages publiés chez Flammarion (Paris).

469. La science et l'hypothèse (Traduction en allemand: Leipzig, B. G. Teubner, 1904, 1906; en anglais: Londres, Walter Scott, 1905, New York 1905,

1907; en espagnol: Madrid, José Ruiz, 1907; en hongrois: Budapest, 1908; en japonais: Tokyo, 1909; en suédois: Stockholm, Albert Bonnier, 1910) (1902; complété en 1907).

470. La valeur de la science (Traduction en allemand: Leipzig, B. G. Teubner, 1906; en espagnol: Madrid, José Ruiz, 1906; en anglais, New York, 1907) (1905).

471. Science et Méthode (Traduction en allemand: Leipzig, B. G. Teubner, 1909; en espagnol: Madrid, José Ruiz, 1906; en anglais du chapitre intitulé Les Logiques nouvelles: The Monist, avril 1912) (1908).

472. Savants et écrivains (1910).

Ouvrage publié par la Carnegie Institution of Washington.

473. Préface de l'Ouvrage de George William Hill, intitulé: »Collected Mathematical Works» (1905).

Ouvrage publié chez Dunod et E. Pinat (Paris).

474. Préface de l'Ouvrage de Devaux-Charbonnel, intitulé: »État actuel de la Science électrique» (1908).

Ouvrage publié chez F. Alcan (Paris).

475. Sur la représentation proportionelle; préface de l'ouvrage de Georges Lachapelle intitulé: »La représentation proportionnelle en France et en Belgique (1911).

Ouvrage publié chez A. Fayard (Paris).

476. Les Sciences et les Humanités (1911).

Ouvrage publié chez M. Weissenbruch (Bruxelles).

477. Le libre Examen en matière scientifique (conférence faite le 21 novembre 1909 aux Fêtes organisées par l'Université libre de Bruxelles pour le LXXV[e] Anniversaire de sa Fondation) (1910).

Ouvrage publié chez Hachette (Paris).

478. Ce que disent les choses, par H. Poincaré, E. Perrier, P. Painlevé: cinq articles de H. Poincaré intitulés: Les astres. En regardant tomber une pomme. La Chaleur et l'Énergie. Les Mines. L'Industrie électrique (1912).

Atti del IV° Congresse internazionale dei Matematici (Rome).

479. L'avenir des Mathématiques (1908).

Divers.

480. Sur la Part des Polytechniciens dans l'Œuvre scientifique du XIX^e siècle (allocution prononcée à la 36^e Assemblée générale de la Société amicale de secours des anciens élèves de l'École Polytechnique; Compte rendu, Gauthiers Villars, 1903).
481. Notice sur la Vie et les Œuvres d'Alfred Cornu (Alfred Cornu, Rennes, Francis Simon, 1904).
482. Cours d'Astronomie générale, avec un Supplément intitulé Mécanique céleste, professé à l'École Polytechnique en 1906—1907 (École Polytechnique, autographié).
483. Sur l'application du Calcul des Probabilités (Rapport fait par MM. Darboux, Appell et Poincaré, sur l'Ordonnance du 18 avril 1904 de la Cour de Cassation: Affaire Dreyfus. La Revision du Procès de Rennes. Enquête de la Chambre criminelle de la Cour de Cassation, 5 mars—19 novembre 1904. Paris, Ligue des Droits de l'Homme, t. III, 1909).
484. Sur la nécessité de la culture scientifique (discours prononcé à la distribution solennelle des Prix au Lycée Henri IV, à Paris, le 31 juillet 1909; Palmarès du Lycée Henri IV, 1909—1910).
485. Discours prononcé par M. H. Poincaré, au nom du Bureau des Longitudes, à la Réception en Sorbonne des Membres de l'Expédition dans l'Antarctique, commandée par le D^r J. Charcot (Paris, 7, rue Saint-Benoît, 1910).
486. La mécanique nouvelle (conférence faite le 14 obtobre 1910 à l'Université de Berlin; traduite en allemand dans Himmel und Erde, 1910).
487. Le démon d'Arrhenius (Hommage à Louis Olivier, Paris, 1911).

488. Préface de l'Ovrage de JACQUES LUX intitulé: »Histoire de deux Revues françaises: La Revue bleue et La Revue scientifique 1863—1911» (Edition des deux Revues, Paris).

489. Sur les invariants arithmétiques (conférence faite à l'Université de Londres le 10 mai 1912).

490. La théorie du rayonnement (conférence faite à l'Université de Londres le 11 mai 1912).

491. Sciences et Humanités (conférence faite le 22 mai 1912 à la Société des Amis des Gymnasiums, à Vienne, Autriche).

RÉSUMÉ ANALYTIQUE.

INTRODUCTION.

J'ai classé les travaux que j'ai à résumer sous les sept rubriques suivantes:

1°. Equations Différentielles.

2°. Théorie générale des Fonctions.

3°. Questions diverses de Mathématiques pures (Algèbre, Arithmétique, Théorie des Groupes, Analysis Situs).

4°. Mécanique Céleste.

5°. Physique Mathématique.

6°. Philosophie des Sciences.

7°. Enseignement, vulgarisation, divers (Bibliographie, rapports divers).

Inutile d'ajouter que je n'ai pas poursuivi tous ces buts différents indépendamment les uns des autres et qu'il y a entre eux plus d'une connexion imprévue. On s'apercevra en effet que quelques mémoires ont dû figurer plusieurs fois, sous deux ou trois rubriques différentes.

Les chiffres entre parenthèses, en caractères gras, renvoient aux numéros de la bibliographie.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. **Généralités.** (64, 78, 83, 57, 73, 182, 278 chap. II.)

Dès que les principes du Calcul infinitésimal furent établis, l'analyste se trouva en face de trois problèmes:

Résolution des équations algébriques;

Intégration des différentielles algébriques;

Intégration des équations différentielles.

L'histoire de ces trois problèmes est la même. Après de longs et vains efforts pour les ramener à des problèmes plus simples, les géomètres se sont enfin résignés à les étudier pour eux-mêmes, et ils en ont été récompensés par le succès.

Longtemps on a pu espérer que l'on pourrait résoudre toutes les équations par radicaux. On y a renoncé, et aujourd'hui les fonctions algébriques nous sont aussi bien connues que les radicaux auxquel on voulait les ramener. De même les intégrales de différentielles algébriques, que l'on a cherché longtemps à ramener aux fonctions logarithmiques ou trigonométriques, s'expriment aujourd'hui à l'aide de transcendantes nouvelles.

Il devait en être à peu près de même des équations différentielles. Le nombre des équations intégrables par quadratures est extrêmement restreint, et tant qu'on ne s'est pas décidé à étudier les propriétés des intégrales en elles-mémes, tout ce domaine analytique n'a été qu'une vaste *terra incognita* qui semblait à jamais interdite au géomètre.

C'est CAUCHY qui y a pénétré le premier, grâce à l'invention d'une méthode ingénieuse qu'il a appelée *calcul des limites*. A sa suite, MM. FUCHS, BRIOT et BOUQUET, et M[me] KOWALEVSKI ont employé avec succès la même méthode.

Ce sont donc les travaux de ces géomètres qui m'ont servi de point de départ.

En présence d'un problème si compliqué, ces divers savants, au lieu d'étudier la manière d'être des intégrales des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles *pour toutes les valeurs de la variable*, c'est-à-dire dans tout le plan, se sont d'abord occupés de déterminer les propriétés de ces intégrales *dans le voisinage d'un point donné*. Ils avaient ainsi reconnu que ces propriétés sont très différentes selon qu'il s'agit d'un point ordinaire ou d'un point singulier. Dans le voisinage d'un point ordinaire, l'équation différentielle peut se mettre sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

et y peut se développer suivant les puissances de $x - x_0$.

Dans le voisinage d'un point singulier, l'équation différentielle peut se mettre sous l'une des deux formes

$$(x - x_0)\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2}$$

$$(x - x_0)^m \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3}$$

si elle est du premier ordre ou, sous des formes analogues, si elle est d'un ordre supérieur ou aux dérivées partielles. Dans le cas où l'équation différentielle se met sous la forme (2) (ou sous des formes analogues pour le second ordre ou les ordres supérieurs), MM. Briot et Bouquet avaient signalé certaines propriétés des intégrales, et M. Fuchs en avait donné le développement en séries dans le cas particulier des équations linéaires.

J'ai complété les résultats de Cauchy relatifs aux points ordinaires (278, Ch. II) en montrant dans quelles conditions la solution peut être développée non seulement suivant les puissances de la variable indépendante, mais suivant celles des valeurs initiales, ou celle d'un petit paramètre arbitraire, dans le cas où les équations différentielles dépendent d'un pareil paramètre. J'ai montré comment ces séries procédant suivant les puissances de ce paramètre ou des valeurs initiales peuvent encore rester convergentes non seulement pour les petites valeurs de la variable indépendante, mais pour des valeurs quelconques de cette variable. Mais je me suis surtout occupé d'étudier ce qui se passe dans le voisinage d'un point singulier.

J'ai cherché d'abord à étudier l'équation (2), supposée non linéaire et à trouver le développement en séries de ses intégrales. J'ai reconnu (78)[1] que ces intégrales peuvent se développer suivant les puissances de $(x - x_0)$ et de $(x - x_0)^\lambda$, λ étant une constante facile à déterminer, ou, dans un cas particulier, suivant les puissances de $(x - x_0)$ et de $\log (x - x_0)$. Le résultat peut d'ailleurs s'étendre aux équations d'ordre supérieur.

J'ai voulu ensuite (64) étudier du même point de vue les équations aux dérivées partielles du premier ordre. CAUCHY et Mme KOWALEVSKI nous avaient appris comment on peut développer en séries les intégrales de ces équations dans le voisinage d'un point ordinaire. Il restait à étudier ces intégrales dans le voisinage d'un point singulier, comme l'avaient fait MM. BRIOT et BOUQUET pour les équations différentielles. En abordant ce problème, je rencontrai deux sortes de singularités: les premières accidentelles et spéciales à l'intégrale particulière que l'on envisage, les secondes essentielles et provenant de l'équation aux différences partielles elles-mêmes. Dans le premier cas, je vis aisément que les intégrales satisfont à des équations algébriques, dont les coefficients sont holomorphes par rapport aux variables. Dans le second cas, les difficultés à surmonter étaient plus grandes.

J'ai envisagé d'abord l'équation

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \cdots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda z, \tag{4}$$

où les x sont des fonctions holomorphes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (quand ces variables sont suffisamment voisines de zéro) et s'annulent avec ces variables.

Pour que cette équation admette une intégrale holomorphe, il faut d'abord que λ satisfasse à une certaine équation algébrique de degré n; mais cette condition n'est pas suffisante; les racines de cette équation doivent de plus être assujetties à une condition spéciale: le polygone convexe qui contient tous les points du plan qui représentent ces racines ne doit pas contenir l'origine. Si cette condition est remplie, il y a toujours une intégrale holomorphe, et il n'y en a pas, en général, dans le cas contraire. Nous verrons plus loin quelles sont les conséquences de ce fait dans la théorie générale des fonctions.

Considérant ensuite les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n},$$

[1] Les chiffres placés entre parenthèses renvoient aux numéros de la Bibliographie.

je reconnus que les intégrales de ce système sont de la forme

$$\frac{T_1^{\lambda_1}}{K_1} = \frac{T_2^{\lambda_2}}{K_2} = \cdots = \frac{T_n^{\lambda_n}}{K_n},$$

où les T sont des fonctions holomorphes par rapport aux x, où les λ sont les racines de l'équation algébrique dont nous venons de parler et les K des constantes d'intégration.

Cela n'est vrai d'ailleurs que si les λ satisfont à la condition énoncée plus haut, et, dans ce cas, il est possible de trouver le développement des diverses intégrales particulières de l'équation (4).

Tout ce que je viens de dire ne s'applique qu'aux points singuliers les plus simples, analogues à celui de l'équation (2). Pour les singularités d'ordre plus élevé, telles que celle que présente l'équation (3), on ne sait presque rien. Ces singularités d'ordre supérieur se présentent en particulier dans l'étude des équations linéaires, dont les intégrales sont dites alors *irrégulières;* mais, même dans ce cas spécial, nous ne savons à leur sujet que fort peu de chose.

M. Thomé, qui les a étudiés, a montré que les équations sont alors satisfaites formellement par des séries de la forme suivante

$$e^{P(x)}\varphi\left(\frac{1}{x}\right),$$

P_x étant un polynôme entier en x et $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ étant une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. (Je suppose ici, pour fixer les idées, qu'on a rejeté le point singulier à l'infini.) Mais, pour que ces séries représentassent les intégrales cherchées, il faudrait qu'elles fussent convergentes, ce qui n'a lieu que dans des cas très particuliers. J'eus l'idée d'appliquer à ces intégrales irrégulières la transformation de Laplace (104, 83, 73 et 182), et j'obtins ainsi sous une forme nouvelle et simple la condition de convergence de ces séries; mais le cas de la convergence n'était qu'exceptionnel, et il semblait que, dans le cas général, on ne pût rien tirer des développements de M. Thomé. Il n'en était rien. On connaît depuis longtemps une série, celle de Stirling, qui, bien que divergente, peut être légitimement employée pour représenter la fonction

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)};$$

car, si x est très grand, l'erreur commise sur cette fonction en s'arrêtant dans la série à un terme de rang convenable est extrêmement petite. J'ai montré que les séries de M. THOMÉ jouissent de la même propriété. Alors même qu'elles sont divergentes, elles représentent les intégrales des équations proposées de la même manière que la série de STIRLING représente la fonction $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. J'ai trouvé en outre, en passant, un certain nombre de propriétés des équations linéaires, entre autres celle-ci:

Si une équation linéaire d'ordre n a pour coefficients des polynômes entiers d'ordre $m (m < n)$, elle admettra $n - m$ intégrales holomorphes dans tout le plan.

Mais l'étude des intégrales des équations différentielles *dans le voisinage d'un point donné*, quelle que soit son utilité au point de vue du calcul numérique, ne saurait être regardée que comme un premier pas. Ces développements, qui ne sont valables que dans un domaine très limité, ne nous apprennent pas, au sujet de ces équations, ce que nous apprennent les fonctions Θ au sujet des intégrales des différentielles algébriques: ils ne peuvent pas être considérés comme une véritable intégration.

Il faut donc les prendre comme point de départ dans une étude plus approfondie des intégrales des équations différentielles où l'on se proposera de sortir des domaines limités, où l'on s'était systématiquement cantonné, pour suivre les intégrales dans toute l'étendue du plan.

Mais cette étude peut être faite à deux points de vue différents:

1°. On peut se proposer d'exprimer les intégrales à l'aide de développements *toujours* valables et non plus limités à un domaine particulier. On est conduit ainsi à introduire dans la Science de nouvelles transcendantes; mais cette introduction est nécessaire, car les fonctions anciennement connues ne permettent d'intégrer qu'un très petit nombre d'équations différentielles.

2°. Mais ce mode d'intégration, qui nous fait connaître les propriétés des équations au point de vue de la théorie des fonctions, ne saurait suffire à lui seul si l'on veut appliquer les équations différentielles, par exemple, à des questions de Mécanique ou de Physique. Nos développements ne nous apprendraient pas, à moins d'un travail considérable, si par exemple la fonction va constamment en croissant, ou si elle oscille entre certaines limites, si elle peut croître au delà de toute limite. En d'autres termes, si l'on considère la fonction comme définissant une courbe plane, on ne saurait pas quelle est la forme générale de cette courbe. Dans certaines applications, toutes ces questions ont autant d'importance que le calcul numérique, et il y avait là un nouveau problème à résoudre.

Dans les paragraphes qui vont suivre, je vais exposer les efforts que j'ai faits pour trouver la solution de ces deux problèmes.

II. Fonctions fuchsiennes. (6, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 25, 26, 27, 28, 30, 34, 36, 37, 59, 61, 65, 66, 68, 69, 70, 101, 104, 174, 191, 197).

Désirant, comme je l'ai expliqué plus haut, exprimer les intégrales des équations différentielles à l'aide de séries *toujours* convergentes, j'étais naturellement conduit à m'attaquer d'abord aux équations linéaires. Ces équations, en effet, qui ont été dans ces derniers temps l'objet des travaux de MM. Fuchs, Thomé, Frobenius, Schwarz, Klein et Halphen, étaient les mieux connues de toutes; on possédait depuis longtemps les développements de leurs intégrales *dans le voisinage d'un point donné* et, dans un assez grand nombre de cas, on était parvenu à les intégrer complètement à l'aide des fonctions anciennement connues. C'était donc en en abordant l'étude que j'avais le plus de chances d'arriver à un résultat.

Mais il était nécessaire de plus de faire une hypothèse au sujet des coefficients des équations que je voulais étudier. Si j'avais pris, en effet, pour coefficients des *fonctions quelconques*, j'aurais obtenu également pour les intégrales des *fonctions quelconques* et, par conséquent, je n'aurais pu dire quelque chose de précis au sujet de la nature de ces intégrales, ce qui était mon but. J'étais donc conduit à examiner les équations linéaires à coefficients rationnels et algébriques. Je supposerai, pour simplifier un peu l'exposé qui va suivre, que les coefficients sont rationnels.

Voici maintenant la classification que j'ai adoptée pour ces équations linéaires et qui est la plus naturelle au point de vue du problème que nous voulons résoudre (28, 70). Soit y une intégrale d'une équation linéaire d'ordre n à coefficient rationnels. Posons

$$z = e^{\int \lambda dx}\left(F_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + F_{n-2}\frac{d_{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + F_1\frac{dy}{dx} + F_0 y\right), \tag{5}$$

λ et les F étant des fonctions rationnelles de x. Il est clair que z satisfera comme y à une équation linéaire d'ordre n à coefficients rationnels. Je dirai que ces deux équations appartiennent à la même *famille*. On voit aisément, en effet, que la connaissance des propriétés de la fonction y entraîne celle des propriétés de la fonction z.

Il y a dans chaque famille une infinité d'équations différentes, mais certaines fonctions des coefficients ont même valeur pour les équations d'une même famille; en d'autres termes, il y a, comme je l'ai montré dans ma Note du 22 mai 1882, des *invariants* qui demeurent inaltérés par la substitution représentée par l'équation (5). Ces invariants ne sont pas les mêmes que ceux de M.

HALPHEN. Ce savant géomètre envisage la transformation qui consiste à remplacer x par une fonction *quelconque* de x' et à multiplier y par une autre fonction *quelconque* de x'. Au contraire, les fonctions qui entrent dans ma substitution (5) ne sont pas *quelconques*, mais *rationnelles*. Rien ne saurait mieux faire comprendre la différence du point de vue de M. HALPHEN et du mien. M. HALPHEN cherche avant tout des relations entre diverses intégrales, et il peut impunément introduire dans ses calculs des fonctions quelconques; au contraire, mon but étant d'étudier la *nature* de l'intégrale elle-même, cette nature serait évidemment altérée, si je multipliais l'intégrale par une fonction quelconque, comme le fait M. HALPHEN.

Mais cette étude intime de la nature des fonctions intégrales ne peut se faire que par l'introduction de transcendantes nouvelles, dont je vais maintenant dire quelques mots. Ces transcendantes ont une grande analogie avec les fonctions elliptiques, et l'on ne doit pas s'en étonner, car si j'imaginais ces fonctions nouvelles, c'était afin de faire pour les équations différentielles linéaires ce qu'on avait à l'aide des séries Θ elliptiques et abéliennes, pour les intégrales des différentielles algébriques.

C'est donc l'analogie avec les fonctions elliptiques qui m'a servi de guide dans toutes mes recherches. Les fonctions elliptiques sont des fonctions uniformes qui ne sont pas altérées quand on augmente la variable de certaines périodes. Cette notion est tellement utile dans l'Analyse mathématique, que tous les géomètres ont dû penser depuis longtemps qu'il conviendrait de la généraliser en cherchant des fonctions uniformes d'une variable x qui demeurent inaltérées, quand on fait subir à cette variable certaines transformations, mais ces transformations ne peuvent pas être choisies d'une manière quelconque. Elles doivent évidemment former un groupe, et, de plus, on ne doit pas pouvoir trouver dans ce groupe une transformation infinitésimale, c'est-à-dire qui ne fasse varier x que d'un infiniment petit. Sans cela, en répétant indéfiniment cette transformation, on ferait varier x d'une façon continue, et notre fonction uniforme, qui ne serait pas altérée quand la variable augmenterait d'une manière continue, se réduirait à une constante. En d'autres termes, notre groupe doit être *discontinu* (104, 6, 65). Le premier problème à résoudre est donc de trouver tous les groupes discontinus que l'on peut former.

Dans le cas des fonctions elliptiques, les transformations du groupe (qui est évidemment discontinu) consistent à ajouter à x certaines constantes. Ici encore une nouvelle analogie avec les fonctions elliptiques peut nous venir en aide. Pour étudier ces fonctions, on divise le plan en une infinité de parallélogrammes connus sous le nom de *parallélogrammes des périodes*. On peut obtenir tous les parallélogrammes en transformant l'un d'eux par les diverses substitutions du groupe, de sorte que la connaissance de la fonction à l'intérieur de l'un des parallélogrammes entraîne sa connaissance dans tout le plan. De même, si nous envisageons un groupe discontinu plus compliqué, engendrant une transcendante d'ordre plus élevé, nous pourrons partager le plan (ou la région du plan où la fonction existe) en une infinité de régions ou de polygones curvilignes, de telle façon qu'on puisse obtenir toutes ces régions en appliquant à l'une d'elles toutes les transformations du groupe. La connaissance de la fonction à l'intérieur d'un de ces polygones curvilignes entraîne sa connaissance pour toutes les valeurs possibles de la variable.

Il est aisé de voir quelle est l'espèce particulière de groupes discontinus qu'il convient d'introduire. On se rapelle quel est le mode de génération des fonctions elliptiques: on considère certaines intégrales appelées *de première espèce*, ensuite, par un procédé connu sous le nom d'*inversion*, on regarde la variable x comme fonction de l'intégrale; la fonction ainsi définie est uniforme et doublement périodique.

De même ici, nous envisagerons une équation linéaire du second ordre et, par une sorte d'inversion, nous regarderons la variable x comme fonction, non plus d'une intégrale, mais du *rapport* z des deux intégrales de notre équation. Dans certains cas, la fonction ainsi définie sera uniforme, et alors elle demeurera inaltérée par une infinité de substitutions linéaires changeant z en $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

Pour cela, le groupe formé par ces substitutions doit être discontinu, et il est aisé de voir que les polygones curvilignes dont il a été question plus haut sont limités par des arcs de cercle. J'ai supposé d'abord que les coefficients des substitutions $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ étaient réels ou, ce qui revient au même, que ces substitutions n'altéraient pas un certain cercle appelé *fondamental*. Dans ce cas, les arcs de cercle qui servent de côtés à nos polygones curvilignes sont orthogonaux à ce cercle fondamental.

Quelle est alors la condition pour que le groupe engendré par un polygone curviligne donné soit discontinu? Pour résoudre ce problème, il y avait à surmonter une difficulté spéciale que je veux expliquer en quelques mots. Partant du polygone curviligne générateur, on construit aisément les polygones voisins, puis les polygones voisins de ceux-ci, et ainsi de suite. On a ainsi une sorte de surface qui va sans cesse en s'accroissant, et ce qu'il s'agit de faire voir, c'est que cette surface ne va pas se recouvrir elle-même partiellement ou totalement, c'est-à-dire qu'un polygone nouvellement annexé à notre surface ne va pas recouvrir en partie un polygone anciennement construit. Pour cela, il ne suffit pas de remarquer que notre surface est simplement connexe et sans point de ramification (*unverzweigt*). Cette façon de raisonner n'est qu'un paralogisme qui a déjà entraîné quelques savants dans diverses erreurs et qui, dans le problème qui nous occupe, nous égarerait certainement. Il faut encore faire voir que la surface recouvre une partie du plan qui est elle-même simplement connexe (le contraire pourrait avoir lieu et une surface simplement connexe pourrait, en se recouvrant plusieurs fois elle-même, couvrir une région plane à connexion multiple). Ici la région simplement connexe, recouverte une fois et une seule par notre surface, est la superficie du cercle fondamental.

Il s'agit donc de démontrer qu'en construisant successivement tous nos polygones, comme je l'ai dit plus haut, on ne sortira jamais de ce cercle et qu'on atteindra forcément un point *quelconque* du cercle. La seconde de ces propositions m'aurait peut-être arrêté longtemps sans l'aide que j'ai trouvée dans une théorie fort différente: je veux parler de la *Géométrie non euclidienne*. Cette Géométrie, fondée sur l'hypothèse que la somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits, ne semble d'abord qu'un simple jeu de l'esprit qui n'a d'intérêt que pour le philosophe, sans pouvoir être d'aucune utilité au mathématicien. Il n'en est rien; les théorèmes de la géométrie de Lowatschevski sont aussi vrais que ceux de la géométrie d'Euclide, à la condition qu'on les interprète comme ils doivent l'être. Ainsi, par exemple, ces théorèmes ne sont pas vrais de la ligne droite, telle que nous la concevons, mais ils le deviennent si, partout où Lowatschevski dit une droite», nous disons un cercle qui coupe orthogonalement le cercle fondamental». Je me trouvais donc en présence de toute une théorie, imaginée, il est vrai, dans un but métaphysique, mais dont chaque proposition, convenablement interprétée, me fournissait un théorème applicable à la Géométrie ordinaire. Il se trouva qu'en combinant tous ces théorèmes, j'obtins aisément la solution de la difficulté dont j'ai parlé plus haut.

Je pus ainsi construire tous les groupes discontinus formés de substitutions, n'altérant pas le cercle fondamental, et je les appelai *groupes fuchsiens*.

Mais un problème important se posait: étant donné un groupe fuchsien, existe-t-il des fonctions uniformes inaltérées par les substitutions de ce groupe (66)? C'est ce que j'ai démontré et j'ai donné à ces fonctions le nom de M. Fuchs. Pour arriver à ce résultat, il eût été possible, dans certains cas particuliers, d'appliquer la proposition connue sous le nom de *principe de Dirichlet*, si souvent appliquée par Riemann et démontrée plus récemment par M. Schwarz. Je ne connaissais pas ce principe à cette époque, mais l'eussé-je connu, que je ne m'en serais pas servi; car il ne pouvait me donner la solution du problème que dans certains cas particuliers et, même dans ces cas, il pouvait servir à démontrer l'existence de la fonction, mais il n'en donnait pas le développement analytique.

C'est encore à l'analogie avec les fonctions elliptiques que j'ai dû faire appel. On sait que ces fonctions peuvent être regardées comme le quotient de deux transcendantes, non plus seulement uniformes, mais encore entières, et que l'on appelle les séries Θ. Les fonctions ne sont plus doublement périodiques, mais elles sont multipliées par une exponentielle quand la variable augmente d'une période. De même ici, je devais chercher à exprimer les fonctions fuchsiennes par le quotient de deux trancendantes finies et uniformes, tout à fait analogues aux fonctions Θ, et se reproduisant multipliées par un facteur simple, quand la variable z subit une des transformations du groupe.

Je trouvai aisément des séries satisfaisant à ces conditions et je les appelai *thêtafuchsiennes*. Le quotient de deux pareilles séries était évidemment une fonction fuchsienne: j'avais donc du même coup démontré l'existence de ces fonctions et trouvé leur expression analytique. Le quotient de l'unité par une série thêtafuchsienne est susceptible aussi d'un développement simple, et c'est la considération de ces développements nouveaux qui m'a permis de démontrer réciproquement que toute fonction fuchsienne peut être regardée comme le quotient de deux séries thêtafuchsiennes.

Ces fonctions fuchsiennes sont de deux sortes, les unes existant dans tout le plan, les autres n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Dans les deux cas, il y a entre deux fonctions fuchsiennes qui ont même groupe une relation algébrique. La détermination du *genre* de cette relation est d'une importance capitale; je l'ai obtenue d'abord par des procédés analytiques, et plus simplement ensuite par la géométrie de situation.

Grâce à ces relations algébriques, il est possible d'utiliser les fonctions fuchsiennes pour l'étude des fonctions et des courbes algébriques. Ainsi l'*on peut exprimer les coordonnées des points d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes, c'est-à dire uniformes, d'un même paramètre.* On peut alors se servir de ces expressions des coordonnées pour arriver à un certain nombre de théorèmes sur ces courbes. On peut s'en servir également pour exposer d'une façon plus simple la théorie des fonctions abéliennes.

Si, dans une intégrale abélienne de première espèce, on remplace la variable par une fonction fuchsienne de z, cette intégrale devient à son tour une fonction uniforme de z dont on trouve aisément le développement analytique. Ainsi ces intégrales, qu'on savait déjà obtenir à l'aide des fonctions Θ, sont susceptibles d'une expression analytique entièrement différente, où entrent des transcendantes ne dépendant que d'une seule variable.

Mais ce n'est pas tout. Toute fonction fuchsienne peut être regardée comme provenant de l'inversion d'une équation du second ordre à coefficients algébriques, c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir en regardant la variable x comme fonction du rapport z des intégrales de cette équation. Nos transcendantes nous fournissent donc immédiatement l'intégration d'une infinité d'équations linéaires que l'on peut appeler *fuchsiennes.*

Pour que l'analogie avec les fonctions elliptiques fût complète, il faudrait que les autres propriétés de ces fonctions, telles que les lois d'addition, de multiplication et de transformation pussent s'étendre aux nouvelles transcendantes.

La théorie de la transformation se généralise immédiatement, avec cette différence toutefois que le groupe des fonctions fuchsiennes étant beaucoup plus compliqué que celui des fonctions elliptiques, les cas à considérer sont beaucoup plus nombreux et variés. Ce qui en fait surtout l'intérêt, c'est qu'on peut s'en servir pour jeter quelque lumière sur la question de la réduction des intégrales abéliennes (59). J'y reviendrai plus loin.

Au contraire, le théorème d'addition ne peut pas s'étendre à toutes les fonctions fuchsiennes. Cela n'est possible que dans un cas particulier et pour une classe spéciale de ces transcendantes (61, 191). Je veux parler de ces fonctions fuchsiennes qui tirent leur origine de la considération des formes quadratiques ternaires indéfinies et sur lesquelles je reviendrai dans le paragraphe relatif à l'Arithmétique.

Les substitutions linéaires dont les coefficients ne sont plus réels, mais quelconques, peuvent aussi former des groupes discontinus que j'ai appelés *kleinéens* (15, 16, 68). Pour démontrer l'existence de ces groupes, je rencontrais la même difficulté que pour les groupes fuchsiens, et il semblait au premier abord impossible d'appliquer la géométrie non-euclidienne. Dans certains cas particuliers la difficulté était facile à surmonter; mais, dant le cas général, elle subsistait tout entière. J'imaginai alors un artifice qui me permît de me servir de la géométrie non euclidienne, non plus à deux, mais à trois dimensions, et je démontrai aisément l'existence des groupes kleinéens. Je n'avais plus qu'à appliquer les méthodes qui m'avaient réussi une première fois pour trouver une nouvelle catégorie de fonctions tout à fait analogues aux fonctions fuchsiennes. La seule différence digne d'être signalée est celle qui résulte de la forme du domaine à l'intérieur duquel ces fonctions existent. Ce domaine, au lieu d'être un cercle, est limité par une courbe non analytique qui n'a pas de rayon de courbure déterminé. Dans d'autres cas, ce domaine est limité par une infinité de circonférences.

Les fonctions fuchsiennes sont susceptibles d'une autre mode de généralisation: je veux parler des fonctions hyperfuchsiennes imaginées par M. PICARD. Mais, comme elles ne peuvent guère s'appliquer aux équations différentielles proprement dites, je me réserve d'y revenir dans la deuxième Partie, consacrée à la théorie générale des fonctions.

Les résultats déjà obtenus faisaient dès lors pressentir quel intérêt il y aurait à déterminer les coefficients du groupe d'une équation linéaire en fonction des coefficients de l'équation elle-même (34, 36, 69). Ce problème n'était pas nouveau et il avait déjà fait l'objet des travaux de divers mathématiciens allemands, entre autres de MM. FUCHS et HAMBURGER. J'ai imaginé de nouvelles méthodes de calcul numérique, analogues à celles de ces savants, et j'ai reconnu qu'on pouvait varier ces procédés à l'infini. Mais ces méthodes ne nous apprennent rien, au point de vue de la théorie générale des fonctions, sur les propriétés des transcendantes, dont elles donnent seulement la valeur numérique. Il fallait chercher aussi à résoudre le problème à ce nouveau point de vue. J'ai obtenu dans cette voie divers résultats qui peuvent présenter quelque intérêt. Ainsi les coefficients du groupe considérés comme fonctions de certains coefficients de l'équation (les autres coefficients étant regardés comme constants) en sont des fonctions entières. J'ai étudié également les fonctions inverses qui, dans certains cas, sont uniformes.

Les résultats ainsi obtenus ne donnaient encore qu'une solution bien incomplète du problème que je m'étais proposé, c'est-à-dire l'intégration des équations différentielles linéaires. Les équations que j'ai appelées plus haut *fuchsiennes*, et qu'on peut intégrer par une simple inversion, ne sont que des cas très particuliers des équations linéaires du second ordre. On ne doit pas s'en étonner si l'on réfléchit un peu à l'analogie avec les fonctions elliptiques. Le procédé de l'inversion ne permet de calculer que les intégrales elliptiques de première espèce. Pour les intégrales de deuxième et troisième espèce, il faut procéder d'une autre manière.

Envisageons, par exemple, l'intégrale de deuxième espèce

$$u = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Pour l'obtenir, nous considérerons comme équation auxiliaire celle qui donne l'intégrale de première espèce

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

d'où par inversion

$$x = \operatorname{sn} z.$$

Remplaçant x par sn z, on trouve que u est égal à une fonction uniforme de z, $Z(z)$, qui augmente d'une constante quand z augmente d'une période. On est donc conduit à employer ici un procédé analogue: étant donnée une équation linéaire E d'ordre quelconque, à coefficients algébriques en x, on se sert d'une équation auxiliaire E' du second ordre, et cette équation auxiliaire doit être choisie de telle façon que x soit fonction fuchsienne du rapport z des intégrales de E' et que les intégrales de E soient des fonctions uniformes de z.

Est-il toujours possible de faire ce choix de manière à satisfaire à toutes ces conditions? Telle est la question qui se pose naturellement. Cela revient d'ailleurs à demander si, parmi les équations linéaires qui satisfont à certaines conditions, qu'il est inutile d'énoncer ici, il y a toujours une équation fuchsienne. Je suis parvenu à démontrer qu'on devait répondre affirmativement à cette question. Je ne puis expliquer ici en quoi consiste la méthode dont nous nous sommes servis d'abord, M. KLEIN et moi, dans l'étude de divers exemples particuliers; comment M. KLEIN a cherché à appliquer cette méthode dans le cas général, ni comment j'ai comblé les lacunes qui subsistaient encore dans la démonstration du géomètre allemand, en introduisant une théorie qui a les plus grandes analogies avec celle de la réduction des formes quadratiques (18, 19, 26, 27, 69).

On peut arriver au même résultat par une voie entièrement différente, comme l'ont reconnu divers savants. Il suffit de démontrer que l'équation

$$\Delta u = e^u$$

admet toujours sur une surface de RIEMANN donnée une solution présentant des singularités données. M. PICARD a donné le premier une démonstration de ce théorème; j'en ai donné une (174, 197) qui est entièrement différente et qui permet de compléter le résultat de M. PICARD en l'étendant à un cas que ce géomètre avait laissé de côté et qui est important au point de vue de la théorie des fonctions fuchsiennes. C'est celui où l'un des sommets du polygone générateur se trouve sur le cercle fondamental.

Ainsi l'équation auxiliaire E' existera toujours; mais il ne suffit pas de pouvoir démontrer son existence, il faut encore savoir la former. C'est là l'objet de la dernière Partie de mon Mémoire *Sur les groupes des équations linéaires.* J'ai donné, dans cette dernière Partie, des procédés pour calculer les coefficients de l'équation E', non pas exactement, ce qui est impossible, mais avec une approximation aussi grande que l'on veut.

Si maintenant on considère le rapport z des intégrales de cette équation auxiliaire, x est une fonction fuchsienne de z que j'appelle $f(z)$, et les intégrales de l'équation E sont des fonctions uniformes de z, qui subissent des transformations linéaires lorsque z subit une transformation du groupe, de la même manière que la fonction $Z(z)$ augmente d'une constante quand z augmente d'une période (70). Ces fonctions uniformes jouent pour l'intégration de l'équation E le même rôle que la fonction $Z(z)$ joue pour le calcul des intégrales elliptiques de seconde espèce. C'est pour cette raison que je les ai appelées *zêtafuchsiennes*.

Ces fonctions zêtafuchsiennes sont évidemment susceptibles d'être mises sous la forme du quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z. Ces deux séries sont convergentes à l'intérieur du cercle fondamental. Si la fonction $f(z)$ n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental (ce que nous supposons), la variable z ne peut *jamais* sortir de ce cercle, en sorte que nos deux séries sont toujours convergentes. D'ailleurs, les coefficients de ces séries se calculent aisément par récurrence. A ce point de vue, on peut donc déjà dire que ces développements nous donnent l'intégration complète de l'équation E, puisqu'ils sont toujours valables au lieu d'être limités à un domaine particulier. Je ne me suis cependant pas contenté de ce résultat, car il est possible de donner des fonctions zêtafuchsiennes des développements beaucoup plus satisfaisants pour l'esprit, parce que les termes sont liés les uns aux autres par une loi simple, et que, par conséquent, le développement met en évidence les propriétés caractéristiques de ces fonctions. C'est ainsi que l'expression de $\operatorname{sn} z$ par les séries d'EISENSTEIN est beaucoup plus satisfaisante pour l'esprit (quoique moins convergente) que le développement de cette fonction suivant les puissances de z et de k^2. C'est dans ce but que j'ai exprimé les fonctions zêtafuchsiennes, par le quotient de deux séries; le dénominateur est une série thêtafuchsienne et le numérateur est une série à termes rationnels, où l'expression du terme général est fort simple.

Ainsi, il est possible d'exprimer les intégrales des équations linéaires à coefficients algébriques, à l'aide des transcendantes nouvelles, de la même manière que l'on a exprimé, à l'aide des fonctions abéliennes, les intégrales des différentielles algébriques. D'ailleurs ces dernières intégrales elles-mêmes sont susceptibles d'être obtenues aussi par l'intermédiaire des fonctions fuchsiennes, et l'on en a ainsi une expression nouvelle, entièrement différente de celle où entrent les séries Θ à plusieurs variables.

III. Équations non linéaires. (24, 48, 71).

Il resterait à faire pour les équations non linéaires ce que j'ai fait pour les équations linéaires, c'est-à-dire trouver des développements des intégrales qui soient *toujours* convergents. Je n'ai pu y parvenir; j'ai seulement reconnu que l'on peut, d'une infinité de manières, exprimer ces intégrales par des séries qui convergent pour toutes les valeurs réelles de la variable. Voici comment j'ai opéré (24, 77).

Je mets les équations différentielles sous la forme

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n},$$

les X_n étant des polynômes entiers par rapport aux variables x. Cela est toujours possible. J'introduis ensuite une variable auxiliaire s définie par l'équation

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{ds}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2+1}.$$

Je puis alors démontrer que si α est convenablement choisi, les variables x peuvent se développer suivant les puissances croissantes de

$$\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1},$$

et que les développements restent valables pour toutes les valeurs réelles de s.

Si l'on applique ce qui précède au problème des trois corps, on verra que, quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$, t varie de $-\infty$ à $+\infty$, de sorte que les développements restent convergents pour toutes les valeurs réelles du temps. Il n'y aurait d'exception que dans l'hypothèse, assez peu vraisemblable d'ailleurs, où deux corps viendraient se choquer à l'époque t_0, et les développements ne nous apprendraient rien sur ce qui se passerait après l'époque du choc; le problème d'ailleurs ne se pose même pas. Si de plus on *suppose* que les éléments initiaux aient été choisis de telle sorte que les distances mutuelles restent constamment supérieures à une limite donnée, on peut remplacer la variable auxiliaire s par le temps lui-même et développer suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}.$$

Ainsi que je l'ai dit plus haut, je n'ai donné cette solution qu'à titre d'exemple.

Une pareille intégration est d'un caractère bien différent et évidemment beaucoup moins satisfaisante pour l'esprit que l'intégration des équations linéaires par les fonctions fuchsiennes. Aussi y avait-il lieu de se demander si les méthodes qui avaient réussi pour les équations linéaires n'étaient pas applicables à d'autres classes d'équations, quoiqu'elles ne le fussent pas dans le cas général.

Un peu de réflexion fait tout de suite comprendre quelle est la différence essentielle entre le cas général et celui des équations linéaires. Les équations linéaires n'ont qu'un nombre fini de points singuliers, tandis que les équations non linéaires en ont en général une infinité. On est donc amené à rechercher s'il n'existe pas d'autres classes d'équations dont les points singuliers soient en nombre fini.

M. FUCHS a publié, dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin, un Mémoire où il expose les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation différentielle et, en particulier, pour qu'une équation du premier ordre n'ait qu'un nombre fini de points singuliers. On put croire un instant que l'on était sur la voie d'une nouvelle catégorie de transcendantes uniformes et d'une nouvelle classe d'équations intégrables.

Je fus donc amené à faire un examen plus approfondi de la question (48, 71); mais cet examen m'obligea à renoncer à l'espoir que j'avais conçu. Les équations du premier ordre qui satisfont aux conditions de M. FUCHS, ou bien se ramènent à l'équation de RICCATI et par elle aux équations linéaires, ou bien sont intégrables par les fonctions elliptiques ou algébriques. On n'est donc jamais conduit à une classe réellement nouvelle d'équations intégrables. M. PAINLEVÉ a été plus heureux en passant aux équations d'ordre supérieur.

Quoi qu'il en soit, le résultat de M. FUCHS conserve encore son intérêt, puisqu'il nous fait connaître une catégorie d'équations différentielles intégrables algébriquement. Mais, en tout cas, le problème de l'intégration des équations non linéaires ne peut être regardé comme résolu.

IV. Intégration des équations par les fonctions algébriques et abéliennes.
(7, 10, 40, 124, 219, 221).

Bien que le problème de l'intégration des équations linéaires soit résolu dans le cas général par l'emploi de nos transcendantes nouvelles, ce résultat laisse subsister tout entier l'intérêt qui s'attache aux cas particuliers où l'intégration peut se faire au moyen de fonctions plus simples, telles que les fonctions algébriques, elliptiques et abéliennes. D'ailleurs les procédés d'intégration par les fonctions algébriques et elliptiques rentrent facilement dans la méthode générale qui comprend ainsi comme cas particuliers les procédés déjà connus. Il en résulte que cette méthode jette quelque lumière sur les difficultés qui se rapportent à l'emploi des procédés particuliers. En ce qui concerne la recherche des cas d'intégrabilité algébrique, le premier problème à résoudre était de former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Ce résultat a été obtenu par M. JORDAN il y a quelques années; mais je ne crois pas que ce savant ait démontré qu'à tout groupe d'ordre fini correspond une équation linéaire intégrable algébriquement. L'emploi des fonctions fuchsiennes m'a fait voir aisément (40) qu'à tout groupe d'ordre fini correspond, non pas une, mais une infinité d'équations dont les intégrales sont algébriques. Pénétrant ensuite plus profondément dans la question, j'ai cherché à quelles conditions une fonction algébrique dont on se donne le groupe de GALOIS satisfait à une équation linéaire d'ordre p. J'ai trouvé que certains déterminants dont les éléments s'expriment tantôt à l'aide des racines de l'unité, tantôt à l'aide des périodes des intégrales abéliennes de première espèce correspondant à la fonction algébrique considérée, devaient être nuls à la fois. D'autre part, on peut, sauf dans certains cas exceptionnels, trouver un système fondamental d'intégrales de première espèce, tel que les périodes normales de l'une quelconque d'entre elles soient des fonctions linéaires à coefficients entiers des périodes normales de la première. Je fus ainsi conduit à exprimer la condition cherchée sous la forme de certaines relations entre les périodes normales des intégrales de première espèce qu'on peut former avec la fonction algébrique considérée.

Au contraire, les procédés d'intégration par les fonctions abéliennes ne rentrent pas dans la méthode générale. On y est conduit en cherchant à généraliser les méthodes d'intégration par les fonctions elliptiques (10). On sait que la théorie des fonctions elliptiques permet de calculer les intégrales des équations linéaires du second ordre dans trois cas entièrement différents:

1°. Lorsque, les coefficients étant rationnels, il y a trois points singuliers tels que la différence des racines des trois équations déterminantes soit respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$, ou bien $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$, ou bien encore $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

2°. Lorsque, les coefficients étant rationnels, il y a quatre points singuliers tels que la différence des racines de chaque équation déterminante soit $\frac{1}{2}$;

3°. Lorsque, les coefficients étant doublement périodiques, les intégrales n'offrent d'autre singularité que des pôles.

M. APPELL a généralisé le troisième cas en montrant que, lorsque le groupe de l'équation linéaire se réduit à un faisceau, la dérivée logarithmique de certaines intégrales est algébrique et que l'intégration peut s'effectuer par les fonctions abéliennes. J'ai voulu de même généraliser le premier et le second cas.

Je suis arrivé ainsi à une infinité d'équations linéaires du troisième ordre à coefficients algébriques dont les intégrales s'expriment à l'aide des fonctions abéliennes de deux variables. De même, les fonctions abéliennes à p variables permettent d'intégrer une infinité d'équations linéaires d'ordre $p + 1$.

J'ai indiqué ensuite succinctement les principales propriétés des groupes de ces équations.

Je me suis préoccupé aussi de rechercher des cas où les équations non linéaires sont susceptibles d'intégration algébrique, mais je me suis restreint aux équations du 1^{er} ordre et du 1^{er} degré.

La voie avait été ouverte par M. DARBOUX. J'e l'ai suivie à mon tour dans deux mémoires insérés aux *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (219, 221). Le problème doit se poser ainsi: étant donnée une équation différentielle, reconnaître par un nombre fini d'opérations, si elle est ou non intégrable algébriquement. Ce problème pourrait évidemment être regardé comme résolu si l'on savait déterminer une limite supérieure du degré de l'intégrale générale, si on la suppose algébrique.

Après avoir donné un certain nombre de relations numériques entre le degré de l'intégrale générale, son genre, le nombre des points singuliers des diverses espèces, le nombre des valeurs remarquables pour lesquelles la courbe algébrique qui représente l'intégrale générale se décompose et les degrés des composantes, je résous le problème dans un cas particulier, celui où les deux entiers caractéristiques relatifs à tous les cols sont égaux à 1.

Dans le cas général, je n'ai obtenu que des résultats partiels; j'ai par exemple limité le nombre des valeurs remarquables pour lesquelles notre courbe se décompose et le nombre des composantes; mais il y a encore deux entiers qui jouent un rôle dans le problème et qui restent inconnus, ce qui m'empêche de limiter le degré, sauf dans certains cas particuliers.

Quand on veut aller plus loin, les inégalités algébriques dont je me suis servi ne peuvent plus suffire et les difficultés à vaincre sont d'une nature pour ainsi dire arithmétique; c'est ce que je montre sur un exemple simple où ces difficultés peuvent être surmontées grâce à l'emploi des fonctions elliptiques.

Je termine par une étude de ce qui se passe dans le voisinage de certains points singuliers. Dans le voisinage d'un noeud quelconque, on peut trouver deux séries infinies X_1 et X_2 procédant suivant les puissances des variables et qui égalées à zéro, fournissent deux solutions particulières de l'équation différentielle. On voit alors que l'intégrale générale si elle est algébrique se réduit à une fonction rationnelle homogène de deux puissances entières de X_1 et X_2. Or à chaque nœud correspondra une semblable expression de notre intégrale générale. Si nous égalons deux de ces expressions, la discussion de l'égalité ainsi obtenue, discussion où s'introduisent les fonctions fuchsiennes, conduit à plusieurs résultats importants.

V. Courbes définies par les équations différentielles. (3, 20, 23, 74, 75, 76, 77).

Alors même qu'on parviendrait à faire pour une équation quelconque ce que j'ai fait pour les équations linéaires, c'est-à-dire à trouver des développements des intégrales valables dans toute l'étendue du plan, ce ne serait pas une raison pour laisser de côté les résultats que l'on peut obtenir par d'autres méthodes, car il peut arriver que ces méthodes nous fassent découvrir certaines particularités que les développements ne mettraient pas immédiatement en évidence. C'est ce qui m'a décidé à me placer à un point de vue nouveau et je ne saurais mieux le faire comprendre qu'en reproduisant ce que j'écrivais au moment où je commençais ces recherches[1]:

»Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement, ainsi qu'on a fait pour les intégrales de différentielles algébriques, qu'on s'est efforcé longtemps d'exprimer en termes finis.

Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée *dans le voisinage d'un des points du plan.* Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction *dans toute l'étendue du plan.* Dans cette recherche, notre point de départ sera évidemment ce que l'on sait déjà de la fonction étudiée *dans une certaine région du plan.*

L'étude complète d'une fonction comprend deux parties: 1° partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction; 2° partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.

Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles: c'est la partie qualitative; puis on calcule la valeur numérique de ces

[1] *Journal de Liouville,* 3e série, t. VII.

racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même, pour étudier une courbe algébrique, on commence par *construire* cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche quelles sont les branches de courbes fermées, les branches infinies, etc. Après cette étude qualitative de la courbe, on peut en déterminer exactement un certain nombre de points.

C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant: *Construire les courbes définies par des équations différentielles.*

Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction, et elle y conduira d'autant plus facilement que l'on connaît déjà des séries convergentes qui représentent la fonction cherchée dans une certaine région du plan, et que la principale difficulté qui se présente est de trouver un guide sûr pour passer d'une région ou la fonction est représentée par une série à une autre région du plan où elle est exprimable par une série différente.[1]

D'ailleurs cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt de premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons par exemple le problème des trois corps: ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites?

Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres. Je n'ai pas eu la prétention de le parcourir tout entier, mais j'ai voulu du moins en franchir les frontières, et je me suis restreint à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire à l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.»

---

[1] Ces considérations m'ont effectivement servi de guide dans des recherches relatives au calcul numérique de la fonction (24).

Je commençai donc mes recherches (3, 74) par l'étude des courbes définies par les équations différentielles de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \tag{1}$$

où X et Y sont des polynômes entiers en x et y, et je reconnus d'abord que ces courbes pouvaient représenter la forme de courbes fermées ou celle de spirales. Je démontrai également le théorème suivant:

Si une courbe définie par une équation de la forme (1) *n'a pas de point d'arrêt et ne coupe aucune courbe algébrique qu'en un nombre fini de points réels, elle est une courbe fermée.*

Pour pousser plus loin l'étude de la forme de ces courbes, j'ai dû commencer par rechercher ce qui se passe dans le voisinage d'un point singulier quelconque. En réalité, le problème était résolu par les travaux antérieurs de MM. Briot et Bouquet et par les miens (*Journal de l'École Polytechnique*, XLV^e Cahier, et Thèse inaugurale), mais j'avais à approprier la solution à mon nouveau but; dans les Mémoires que je viens de citer, et où je me plaçais au point de vue de la théorie des fonctions, j'attachais une égale importance au réel et à l'imaginaire. Pour mon but nouveau de géométrie qualitative, le réel seul m'intéressait et je devais faire une discussion spéciale qui me conduisît à distinguer quatre sortes de points singuliers (sans parler de points singuliers plus compliqués qui ne se présentent que dans certains cas particuliers et qui peuvent être regardés comme composés de plusieurs points singuliers simples confondus).

J'ai donné à ces quatre sortes les noms suivants:

1°. Les *cols*, par lesquels passent deux courbes définies par l'équation et deux seulement;

2°. Les *nœuds*, où viennent se croiser une infinité de courbes définies par l'équation;

3°. Les *foyers*, autour desquels ces courbes tournent en s'en rapprochant sans cesse à la façon d'une spirale logarithmique;

4°. Les *centres*, autour desquels ces courbes se présentent sous la forme de cycles fermés s'enveloppant mutuellement et enveloppant le centre. (On ne rencontre les centres que dans des cas très exceptionnels.)

J'ai étudié ensuite la distribution de ces divers points singuliers dans le plan. J'ai montré ainsi qu'il y en avait toujours (à distance finie ou infinie) et qu'il y avait toujours une relation simple entre le nombre des cols, des foyers et des centres, et que, sur la courbe $X = 0$, les cols ou les nœuds et foyers se succédaient alternativement.

Ces problèmes résolus, je me suis occupé des contacts que peut avoir une courbe algébrique donnée avec les courbes définies par l'équation (1) et j'ai vu que, dans un très grand nombre de cas, il existe des branches de courbes fermées qui ne touchent en aucun point aucune des courbes qui satisfont à notre équation différentielle. Je les ai appelées *cycles sans contact* (75).

Il est facile de comprendre l'importance de la détermination des cycles sans contact; on voit aisément en effet qu'une courbe définie par l'équation (1) ne peut rencontrer un pareil cycle en plus d'un point. Si donc on imagine un point mobile décrivant notre courbe, dès qu'il sera sorti d'un cycle sans contact, il n'y pourra plus rentrer. En d'autres termes, si ce point a occupé une fois une position donnée, il ne pourra plus jamais y revenir, ni même revenir dans le voisinage immédiat de cette position. Les coordonnées du point n'oscilleront pas entre certaines limites et ne pourront être représentées par des séries trigonométriques, de sorte que, si l'on voulait appliquer à la trajectoire de ce point mobile le même langage qu'emploient les astronomes pour les orbites des planètes, il faudrait dire que l'orbite de ce point est *instable*.

Outre les cycles sans contact, il y a un autre genre de courbes fermées qui jouent un rôle capital dans cette théorie: ce sont les *cycles limites*. J'appelle ainsi les courbes fermées qui satisfont à notre équation différentielle et dont les autres courbes définies par la même équation se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre. Cette seconde notion n'est pas moins importante que la première. Supposons en effet que l'on ait tracé un cycle limite; il est clair que le point mobile dont nous parlions plus haut ne pourra jamais le franchir et qu'il restera toujours à l'intérieur de ce cycle, ou toujours à l'extérieur. Il est vrai que les cycles limites sont en général des courbes transcendantes qu'on ne saurait tracer exactement. Mais on peut souvent tracer deux courbes algébriques fermées, concentriques l'une à l'autre, déterminant une sorte d'anneau, de telle façon qu'on peut distinguer dans le plan trois régions, l'intérieur de l'anneau, la région annulaire et l'extérieur de l'anneau. Supposons que l'on ait démontré d'une manière quelconque que le cycle limite se trouve dans la région annulaire; on sera certain alors que, si notre point mobile est à l'intérieur de l'anneau, il ne pourra jamais aller à l'extérieur de cet anneau. On peut donc, malgré l'*instabilité* de ce point mobile, assigner des limites supérieures à ses coordonnées.

Je reconnus ensuite qu'on pouvait dans tous les cas sillonner le plan par une infinité de courbes fermées, s'enveloppant mutuellement et rappelant par leur forme et leur disposition les courbes de niveau d'un plan topographique. Pour poursuivre cette comparaison, je dirai que, dans ce plan topographique, les sommets et les fonds seraient représentés par les nœuds et les foyers, et les cols par les points singuliers que j'ai appelés plus haut de ce nom. Parmi ces courbes fermées, les unes sont des cycles sans contact, les autres sont des cycles limites. A part ces cycles limites, les courbes définies par notre équation différentielle sont des spirales se rapprochant asymptotiquement des points singuliers et des cycles limites.

Après avoir démontré que le nombre des cycles limites est fini, sauf dans certains cas exceptionnels, j'ai donné une méthode générale pour déterminer ce nombre et pour tracer des régions annulaires dans lesquelles se trouve un cycle limite, et un seul.

A la fin du Mémoire, j'ai donné plusieurs exemples d'applications de cette méthode. Je citerai seulement le dernier de ces exemples, celui de l'équation

$$\frac{dx}{-y+x(x^2+y^2-2x-3)(x^2+y^2-2x-8)}=\frac{dy}{x+y(x^2+y^2-2x-3)(x^2+y^2-2x-8)}.$$

J'ai divisé le plan en quatre régions, limitées par les trois cercles[1]

$$(2) \qquad x^2+y^2=1, \qquad x^2+y^2=2x+5{,}5, \qquad x^2+y^2=16,$$

qui s'enveloppent mutuellement. De ces quatre régions, la deuxième et la troisième contiennent un cycle limite et n'en contiennent qu'un, les deux autres n'en contiennent pas. Il suit de là que si, à l'origine des temps, notre point mobile est à l'intérieur du premier des cercles (2), il ne pourra jamais sortir du second et que, s'il est à l'intérieur du second, il ne pourra jamais sortir du troisième.

Il y a un cas particulier qui mérite de fixer l'attention, bien qu'il ne se présente que très exceptionnellement: c'est celui où toutes les courbes définies par l'équation (1) sont des courbes fermées qui s'enveloppent mutuellement à la façon des courbes de niveau d'un plan topographique. C'est là le seul cas où, pour employer de nouveau une comparaison empruntée à l'Astronomie, le point mobile dont il a été question plus haut a une orbite *stable*. C'est le seul cas, en effet, où l'on ne puisse pas sillonner le plan de cycles sans contact (76).

[1] De telle façon que la première région soit intérieure au premier des cercles (2), la deuxième comprise entre le premier et le deuxième de ces cercles, la troisième comprise entre le deuxième et le troisième, et la quatrième région extérieure au troisième cercle.

Pour que ce cas particulier se présente, il faut une infinité de conditions, et l'on pourrait croire d'abord qu'il est impossible de reconnaître si elles sont toutes remplies à la fois. Cela est, au contraire, le plus souvent très facile, et l'on démontre *a priori* que ces conditions doivent être toutes satisfaites, dans un certain nombre de cas, et, en particulier, quand on a

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = 0.$$

J'ai appliqué ces principes à une équation différentielle rencontrée par DELAUNAY dans la théorie de la Lune.

J'abordai ensuite (20, 76) l'étude des équations du premier ordre et de degré supérieur de la forme suivante

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{3}$$

F désignant un polynôme entier en x, y et $\frac{dy}{dx}$. Pour étudier plus facilement cette équation, j'emploie trois variables auxiliaires ξ, η, ζ, liées aux variables primitives, de telle façon que x, y et $\frac{dy}{dx}$ soient des fonctions rationnelles de ξ, η et ζ, et je considère ces trois variables comme les coordonnées d'un point dans l'espace. L'équation (3) signifie alors que ce point est situé sur une certaine surface algébrique. J'ai soin de choisir mes nouvelles variables, de telle façon que cette surface n'ait pas de nappes infinies et se réduise à un certain nombre de nappes fermées. J'envisage en particulier une de ces nappes, que j'appelle S. Grâce aux conventions faites, par chaque point non singulier de S passera une courbe définie par l'équation (3) et une seule. Quant aux points singuliers, ils se subdivisent en cols, en foyers, ne nœuds et en centres et jouissent des mêmes propriétés que les points que j'ai appelés plus haut de ces noms.

Une notion qui joue ici un rôle capital, c'est le *genre* de la nappe S. Je dirai que cette nappe est de genre 0, si elle est convexe à la façon d'une sphère; de genre 1, si elle présente un *trou* à la façon d'un tore; de genre 2, si elle présente deux trous, etc.

J'ai démontré une relation très simple entre le genre de cette nappe et le nombre des cols, des foyers et des nœuds qui s'y trouvent. C'est la généralisation d'une relation dont j'ai parlé plus haut et qui s'applique aux équations du premier ordre et du premier degré.

La suite de la discussion est d'ailleurs tout à fait la même que pour les courbes définies par l'équation (1), c'est-à-dire par une équation du premier degré. La nappe S est sillonnée d'une infinité de courbes fermées, qui sont des cycles sans contact ou des cycles limites; il y a toutefois une différence essentielle sur laquelle je désirerais appeler l'attention. Supposons, par exemple, que la nappe S soit un tore et qu'un cercle méridien de ce tore soit un cycle sans contact; contrairement à ce que nous avons remarqué dans le cas des équations du premier degré, rien ne s'oppose à ce qu'une courbe définie par notre équation différentielle vienne couper ce cercle méridien en plusieurs points et même en une infinité de points. Si cela arrive et qu'un point mobile décrive cette courbe en partant d'une position initiale donnée, il finira toujours par revenir dans une position aussi voisine qu'on le voudra de cette position initiale. On pourra donc dire que ce point mobile décrit une trajectoire *stable*.

Ainsi la stabilité qui, lorsqu'il s'agissait des équations du premier degré, ne se présentait que dans des cas très particuliers, n'est plus une exception quand il s'agit d'équations de degré supérieur.

D'ailleurs les points, en nombre infini, où le point mobile vient successivement rencontrer le cercle méridien, jouissent d'une propriété arithmétique inattendue.

Appelons μ un certain nombre incommensurable; appelons M_i le point où le point mobile vient rencontrer pour la $i^{\text{ème}}$ fois le cercle méridien. Cherchons dans quel ordre circulaire ces points M_i se rencontrent sur ce cercle. *Cet ordre sera le même que celui des nombres* $\mu i - E(\mu i)$.

Passons maintenant (23, 77) aux équations du second ordre, que j'écrirai sous la forme suivante

$$(4) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

X, Y et Z désignant des polynômes entiers en x, y et z, et les variables x, y et z étant regardées comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Nous pouvons alors étudier les courbes qui satisfont à ces équations et que j'appellerai les courbes C, et nous verrons que par chaque point de l'espace vient passer une courbe C et une seule, si toutefois on excepte les points singuliers, c'est-à-dire les points d'intersection des trois surfaces

$$(5) \qquad X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

L'étude de ces points singuliers s'imposait tout d'abord. Je reconnus qu'il y en a de quatre sortes (sans parler des points singuliers que ne se rencontrent que très exceptionnellement, par exemple, les centres):

1°. Les *nœuds*, où viennent converger toutes celles des courbes C qui passent assez près du point singulier;

2°. Les *cols*, où viennent converger une infinité de ces courbes dont l'ensemble forme une surface et où passe, en outre, une autre courbe satisfaisant à l'équation et non située sur cette surface;

3°. Les *foyers*, où passe une courbe C et une seule, pendant que les autres courbes se rapprochent asymptotiquement du point singulier à la façon des spirales;

4°. Les *cols foyers*, par lesquels passe une courbe C et une seule, pendant qu'une infinité d'autres, dont l'ensemble forme une surface, se rapprochent asymptotiquement du point singulier.

J'ai étudié également le cas où les trois surfaces (5) ont une courbe commune qui devient alors une *ligne singulière*. J'ai reconnu que les différents points d'une ligne singulière ont des propriétés analogues à celles des points singuliers ordinaires dont nous venons de parler.

Dans le cas des équations du premier ordre, nous avons trouvé une relation entre les nombres des points singuliers des diverses espèces. Il n'en existe pas de pareille pour les équations du second ordre. Une analyse approfondie montre qu'il doit y en avoir pour toutes les équations d'ordre impair, et qu'au contraire les équations d'ordre pair n'en possèdent pas.

Néanmoins un assez grand nombre de propriétés des équations du premier ordre s'étendent à celles du second. Les surfaces sans contact sont tout à fait analogues aux cycles sans contact, et l'on peut démontrer, par exemple, qu'à l'intérieur de toute surface sans contact (si elles ne sont pas triplement connexes) il y a toujours des points singuliers.

On a vu, plus haut, que c'est l'étude des points singuliers des équations du premier ordre qui nous a fait connaître les principales propriétés des courbes définies par ces équations; au contraire, la théorie des points singuliers des équations du second ordre ne saurait suffire à elle seule pour nous faire pénétrer aussi profondément dans la connaissance des courbes C. Il faut introduire, en outre, une notion nouvelle qui joue, dans une certaine mesure, le même rôle que les points singuliers. Soient C_0 une courbe *fermée* quelconque satisfaisant à notre équation, et D un domaine comprenant tous les points suffisamment voisins de C_0; nous pouvons étudier la forme et la disposition générale des courbes C à l'intérieur de ce domaine. On reconnaîtra ainsi, indépendamment d'un grand nombre de cas moins importants, quatre cas principaux, qui sont les suivants:

1°. On peut faire passer par la courbe C_0 deux surfaces que l'on peut sillonner par une infinité de courbes C satisfaisant aux équations (4). Les autres courbes C, après être entrées dans le domaine D et s'être rapprochées de C_0, s'en éloignent ensuite et finissent par sortir du domaine. Je n'ai rien à ajouter sur ce premier cas, qui nous apprend peu de chose sur les propriétés de nos courbes.

2°. On peut construire une surface S présentant une forme annulaire analogue à celle du tore, et à l'intérieur de laquelle se trouve la courbe C_0, de la même façon que le cercle, lieu des centres des cercles méridiens, se trouve à l'intérieur d'un tore. De plus, cette surface S n'est tangente en aucun point, à aucune des courbes C: c'est une surface sans contact. Considérons un point mobile décrivant une courbe C; dès qu'il sera sorti de la surface S, il n'y pourra plus rentrer; nous avons donc *instabilité*, et cela semble être ici le cas général.

3°. On peut construire une surface S analogue à celle dont nous venons de parler; mais elle ne sera pas une surface sans contact, elle sera au contraire sillonnée par une infinité de courbes C. Alors, si notre point mobile est situé sur la surface S, il y restera toujours; de plus, s'il part d'une position initiale quelconque, il finira toujours par revenir aussi près que l'on veut de cette position. Son orbite est donc *stable*.

4°. Dans le quatrième cas enfin, le point mobile peut aller aussi près que l'on veut d'un point *quelconque* du domaine D, et, s'il part d'une position initiale donnée, il finira toujours par revenir aussi près que l'on veut de cette position. Dans ce sens, il y a donc *stabilité*, et la démonstration de cette stabilité serait complète, si l'on savait assigner des limites aux coordonnées du point mobile.

Malheureusement, mes méthodes ne me permettent presque jamais de distinguer le troisème cas du quatrième, ni, dans le quatrième, de trouver les limites entre lesquelles les coordonnées du point mobile restent comprises. C'est là une lacune importante que jusqu'ici j'ai vainement essayé de combler.

Ce troisième et ce quatrième cas ne se présentent que si X, Y et Z satisfont à une infinité de conditions, de sorte qu'ils semblent d'abord très exceptionnels. Ils ont néanmoins une grande importance pratique. On peut d'ailleurs démontrer qu'ils se présenteront toujours si le dernier multiplicateur M, défini par l'équation

$$\frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} + \frac{d(MZ)}{dz} = 0,$$

est toujours uniforme et positif dans le domaine considéré. Or cette circonstance se rencontre précisément dans la plupart des applications.

Pour étendre les résultats précédents aux équations d'ordre supérieur au second, il faut renoncer à la représentation géométrique qui nous a été si commode, à moins d'employer le langage de l'hypergéométrie à n dimensions. Mais ce langage est si peu familier à la plupart des géomètres qu'on perdrait ainsi les principaux avantages que l'on peut attendre de la représentation en question. Les résultats n'en subsistent pas moins, et l'on retrouve les quatre cas dont nous avons parlé plus haut. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que le troisième et le quatrième cas, c'est-à-dire ceux qui correspondent à la stabilité, se rencontrent précisément dans les équations générales de la Dynamique. Cette circonstance doit nous faire d'autant plus désirer de voir se combler la lacune que j'ai signalée plus haut.

Pour aller plus loin, il me fallait créer un instrument destiné à remplacer l'instrument géométrique qui me faisait défaut quand je voulais pénétrer dans l'espace à plus de trois dimensions. C'est la principale raison qui m'a engagé à aborder l'étude de l'Analysis Situs; mes travaux à ce sujet seront exposés plus loins dans un paragraphe spécial.

J'ai poursuivi ensuite mes recherches sur les courbes définies pas les équations différentielles, mais les résultats nouveaux que j'ai obtenus se rapportant avant tout à la Mécanique Céleste seront exposés dans la Quatrième Partie de cette Notice.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE DES FONCTIONS.

VI. Théorie générale des fonctions d'une variable.

(14, 29, 33, 35, 44, 85, 87, 100, 201, 218).

La théorie des fonctions d'une seule variable complexe a fait dans ces derniers temps des progrès considérables, grâce aux travaux de M. WEIERSTRASS et de M. MITTAG-LEFFLER.

Ces fonctions peuvent se répartir en trois classes: 1° fonctions uniformes existant dans toute l'étendue du plan; 2° fonctions uniformes à espaces lacunaires, c'est-à-dire n'existant pas dans toute l'étendue du plan; 3° fonctions non uniformes.

Parmi les fonctions de la première classe, les plus importantes sont les fonctions entières, c'est-à-dire celles qui peuvent se développer suivant les puissances de x, en séries toujours convergentes. M. WEIERSTRASS a fait voir qu'une pareille fonction peut toujours se décomposer en un produit d'une infinité de *facteurs primaires*. Un facteur primaire de genre n est le produit $\left(1-\frac{x}{a}\right) e^{P(x)}$, $P(x)$ étant un polynôme entier de degré n. Une fonction de genre n est une fonction entière dont tous les facteurs primaires sont de genre inférieur.

Cette classification des fonctions entières en genres soulève un grand nombre de problèmes intéressants. J'ai voulu contribuer (87) à la solution de ces problèmes en étudiant la manière dont une fonction de genre n se comporte à l'infini et la rapidité avec laquelle décroissent les coefficients de son développement suivant les puissances de x. Je suis arrivé ainsi aux résultats suivants:

1°. Si $F(x)$ est une fonction de genre n et si le module de x croît indéfiniment avec un argument tel que $e^{ax^{n+1}}$ tende vers 0, le produit $F(x)\,e^{ax^{n+1}}$ tend aussi vers 0.

2°. L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} F(z)\, dz$$

représente une fonction entière de $\frac{1}{x}$.

3°. Si A_p est le coefficient de x^p dans le développement de $F(x)$, on a

$$\lim A_p \sqrt[n+1]{p!} = 0 \text{ (pour } p = \infty).$$

4°. Si $F(x)$ est une fonction de genre 0, elle est susceptible d'être représentée par la série d'Abel étudiée par M. Halphen dans le tome X du *Bulletin de la Société mathématique de France*, et cela quelle que soit la constante β.

Malheureusement les réciproques de ces propositions ne sont pas toujours vraies. Il est aisé de voir la raison pour laquelle il est impossible de trouver un critère infaillible, donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit du genre n. En effet, la classification des fonctions en genres se rattache très étroitement à la théorie de la convergence des séries. Il y a donc toujours, ainsi que l'a montré M. Hadamard des cas douteux où l'on peut hésiter entre le genre n et $n + 1$. Mais M. Hadamard a montré quel parti on peut tirer de ces réciproques malgré les restrictions auxquelles elles sont soumises.

Pour qu'une fonction dont les zéros sont, par ordre de module croissant,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p, \quad \ldots,$$

soit de genre n, la première condition et la plus importante, c'est que la série

$$\frac{1}{a_1^{n+1}} + \frac{1}{a_2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{a_p^{n+1}} + \cdots$$

soit convergente. Or il n'y a point de critère de la convergence d'une série pouvant s'appliquer à tous les cas. C'est pour cela qu'il n'y a pas non plus de critère permettant de reconnaître dans tous les cas si une fonction est du genre n.

Outre les fonctions entières, la première classe comprend: 1° les fonctions qui ont des pôles; 2° celles qui ont un nombre fini de points singuliers essentiels; 3° celles qui en ont un nombre infini parmi lesquels on peut trouver des points singuliers *isolés* (j'appelle ainsi les points singuliers autour desquels on peut tracer un cercle assez petit pour ne contenir aucun autre point singulier);

4° celles qui ont une ligne singulière; 5° celles qui, ayant un nombre infini de points singuliers, mais n'ayant pas de lignes singulières, n'ont cependant pas de points singuliers isolés. (Les Allemands disent alors que les points singuliers forment *eine perfecte Menge.*) J'ai donné, pour la première fois,[1] un exemple de fonctions de cette dernière catégorie; ce sont les fonctions fuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan. En appliquant un théorème de M. PICARD, on peut voir en effet que ces fonctions ne peuvent avoir des points singuliers isolés.

Passons maintenant à la deuxième classe, celle des fonctions à espaces lacunaires signalées pour la première fois par M. WEIESTRASS. J'ai été conduit par deux voies différentes (100) à m'occuper de ces fonctions. En premier lieu les fonctions fuchsiennes et kleinéennes n'existent en général qu'à l'intérieur d'un cercle ou d'un domaine plus compliqué; elles me fournissaient donc un exemple de fonctions à espaces lacunaires. Les résultats de ma thèse inaugurale me conduisaient également à des fonctions présentant des lacunes. Si l'on veut bien en effet se reporter au paragraphe que j'ai intitulé *Généralités sur les équations différentielles* et à l'équation (4) de ce paragraphe, on verra que cette équation (4) n'a d'intégrale holomorphe que si le polygone convexe, qui contient tous les points représentatifs des différentes racines d'une certaine équation algébrique, ne contient pas l'origine. Cela ne pourrait pas arriver, si l'intégrale holomorphe de l'équation (4), *considérée comme fonction des racines de cette équation algébrique,* n'était une fonction à espace lacunaire.

Cette remarque m'a fait découvrir toute une classe de fonctions présentant des lacunes. Voici quel est leur mode de génération. On pose

$$\varphi(x) = \sum \frac{A_n}{x - b_n},$$

en supposant que la série ΣA_n soit absolument convergente et que les points b_n soient intérieurs à un certain domaine D ou situés sur le contour de ce domaine, et cela de telle façon que, si l'on prend sur ce contour un arc quelconque et aussi petit qu'on voudra, il y ait toujours sur cet arc une infinité de points b_n.

La fonction $\varphi(x)$ est alors une fonction uniforme admettant le domaine D comme espace lacunaire. Comme exemple particulier, j'ai cité la série

---

[1] *Fonctions fuchsiennes (passim).*

$$\varphi(x) = \sum \frac{u^m v^n w^p}{x - \dfrac{m\alpha + n\beta + p\gamma}{m + n + p}},$$

où u, v, w sont des constantes données, de module inférieur à 1, où α, β, γ sont des constantes imaginaires quelconques et où m, n et p peuvent prendre sous le signe Σ tous les systèmes de valeurs entières et positives.

La fonction $\varphi(x)$ a alors pour espace lacunaire le triangle $\alpha\beta\gamma$.

Il importe de se rendre compte de la véritable nature de ces fonctions à espaces lacunaires. Il arrive souvent que les développements en séries, à termes rationnels par exemple, sont convergents à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de ce domaine et ne divergent que sur le contour même du domaine. Les deux parties du plan où la série converge sont alors complètement séparées par une ligne le long de laquelle le développement cesse d'être valable. Doit-on cependant considérer les deux fonctions représentées par le développement à l'intérieur et à l'extérieur du domaine comme le prolongement analytique l'une de l'autre? Plusieurs géomètres étaient autrefois tentés de le croire. M. Weierstrass a montré pour la première fois que leur point de vue était faux, en donnant des exemples de séries qui représentent dans des domaines différents des fonctions manifestement différentes. J'en ai moi-même rencontré un exemple dont je veux ici dire un mot. Certains développements qui représentent à l'intérieur du cercle fondamental une de ces fonctions que j'ai appelées plus haut *thêtafuchsiennes* représentent 0 à l'extérieur de ce cercle.

J'ai voulu donner (35) un argument nouveau à l'appui de la manière de voir de Weierstrass. Considérons une fonction $F(x)$ admettant un domaine D comme espace lacunaire, et une autre fonction $F_1(x)$ n'existant au contraire qu'à l'intérieur de ce domaine et admettant par conséquent tout le reste du plan comme espace lacunaire. Divisons le contour du domaine D en deux arcs A et B. J'ai démontré qu'on pouvait trouver deux fonctions uniformes $\Phi(x)$ et $\Phi_1(x)$ existant dans tout le plan et admettant seulement, la première A, la seconde B comme ligne singulière; et cela de telle sorte que

$$\Phi + \Phi_1 = F \text{ à l'extérieur de } D,$$

$$\Phi + \Phi_1 = F_1 \text{ à l'intérieur de } D.$$

Si la fonction F avait un prolongement analytique naturel à l'intérieur de D, ce prolongement devrait être F_1; mais nous avons choisi cette fonction F_1 *d'une manière tout à fait arbitraire,* en l'assujettissant seulement à n'exister qu'à l'intérieur de D. Il est donc dénué de sens de parler du prolongement naturel d'une fonction à l'intérieur d'un de ses espaces lacunaires. J'avais en même temps ramené l'étude des fonctions à espaces lacunaires à celle des transcendantes uniformes à ligne singulière essentielle. Je suis revenu sur la même question dans un mémoire plus étendu (201).

La théorie des fonctions non uniformes est loin d'être aussi avancée que celle des fonctions uniformes. J'ai montré d'abord (218) que le nombre de leurs déterminations s'il est infini est de la $1^{\text{ère}}$ puissance au sens de Cantor.

Quoiqu'on connaisse assez bien la manière d'être de ces fonctions non uniformes *dans le voisinage d'un point donné,* quoique l'introduction des surfaces de Riemann ait jeté beaucoup de lumière sur les parties encore obscures de leur théorie, il y a encore bien de progrès à faire avant de connaître leurs principales propriétés. J'étais donc animé du désir de ramener leur étude à celle des transcendantes uniformes. La théorie des fonctions fuchsiennes me rapprochait déjà du but; j'avais démontré, en effet, que si $f(x, y)=0$ est l'équation d'une courbe algébrique quelconque, on peut choisir un paramètre z de telle façon que x et y soient des fonctions uniformes de ce paramètre. J'avais ainsi résolu le problème pour les plus simples des fonctions non uniformes, c'est-à-dire pour les fonctions algébriques.

J'étais donc (85) naturellement porté à me demander si cette propriété est particulière aux fonctions algébriques, ou si l'on peut l'étendre à une fonction non uniforme quelconque. J'ai pu répondre à cette question et démontrer le théorème très général suivant:

Soit une fonction analytique quelconque de x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z, telle que x et y soient fonctions uniformes de z.

Mon point de départ a été la démonstration du principe de Dirichlet donnée par M. Schwarz. Mais ce principe n'aurait pu à lui seul me permettre de triompher des difficultés qui provenaient de la grande généralité du théorème à démontrer. Il faut d'abord définir la surface de Riemann à une infinité de feuillets dont je cherche à faire, sur une partie du plan, la représentation conforme. Je choisis cette surface de façon qu'elle soit simplement connexe, que tous les points singuliers restent en dehors de la surface proprement dite et se trouvent pour ainsi dire sur sa frontière, et enfin de façon que la fonction y ne puisse prendre deux valeurs différentes en un même point de la surface.

Je découpe une portion finie R de cette surface, et j'en fais sur un cercle la représentation conforme, ce que le théorème de M. Schwarz me permet de faire. Cette représentation se fait à l'aide d'une certaine fonction analytique u. Faisons ensuite croître indéfiniment la région R; nous aurons la représentation conforme d'une portion de plus en plus étendue de notre surface de Riemann. Il me faut alors faire voir que la fonction analytique u dont je parlais plus haut tend vers une limite finie et déterminée. Quand cela est fait, les premières difficultés seules sont vaincues. En effet, il reste à démontrer que la limite de la fonction u est elle-même une fonction analytique. Pour cela, il faut que la fonction analytique u tende *uniformément* vers sa limite (*gleichmässig*), ce que je suis parvenu à démontrer.

Ainsi, l'étude des fonctions non uniformes est ramenée, dans tous les cas possibles, à l'étude bien plus facile des fonctions uniformes.

Je rattacherai à ces recherches, relatives aux fonctions d'une variable, les travaux que j'ai consacrés à l'étude des séries de polynômes (33, 83). Et en effet, il y a un fait qui joue un rôle très important dans la théorie des fonctions: c'est que les régions où une fonction quelconque peut être représentée par une série de puissances sont limitées par des cercles. On peut donc supposer qu'on pourra tirer un profit analogue de la connaissance des régions où conviennent des développements d'autre forme.

J'ai cherché, en particulier, les conditions de convergence des séries dont le $n^{\text{ième}}$ terme est un coefficient constant multiplié par un polynôme entier $P_n(x)$ de degré n, en supposant qu'il y ait entre un certain nombre de polynômes P_n consécutifs une relation de récurrence. Les séries ordonnées suivant les polynômes de Legendre n'en sont évidemment que des cas particuliers. J'ai trouvé que les régions où ces séries convergent sont limitées par certaines *courbes de convergence* et j'ai déterminé ces courbes en remarquant que la série

$$\Sigma P_n z^n,$$

cosidérée comme fonction de z, satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes entiers en z et en x.

VII. Théorie générale des fonctions de deux variables. (32, 67, 190).

Il semble d'abord que, pour étudier les fonctions de deux variables, il suffit d'appliquer, sans y rien changer, les principes qui ont servi à établir les propriétés des fonctions d'une seule variable. Il n'en est rien; il y a entre les deux théories des différences essentielles et l'on ne saurait passer de l'une à l'autre par une simple généralisation.

Cette différence apparaît dès que l'on considère les polynômes entiers qui sont décomposables en facteurs s'il n'y a qu'une variable et ne le sont plus dans le cas contraire. Je laisserai de côté pour le moment les difficultés que l'on a éprouvées en voulant généraliser la théorie des résidus de CAUCHY, car j'y veux consacrer le paragraphe suivant. J'insisterai seulement sur un exemple qui met bien en évidence les différences dont je viens de parler: c'est l'étude des fonctions méromorphes dans tout le plan, c'est-à-dire des transcendantes qui ne présentent à distance finie d'autres singularités que des infinis.

On sait que M. WEIERSTRASS a démontré que, si une fonction d'une seule variable est méromorphe dans tout le plan, elle peut être regardée comme le quotient de deux fonctions entières. Pour arriver à ce résultat, le célèbre géomètre de Berlin *construit* une fonction entière qui s'annule pour tous les infinis de la fonction méromorphe donnée. Le produit des deux fonctions, ne devenant plus infini, est une fonction entière. Pour construire la transcendante en question, il faut considérer *séparément* les différents infinis de la fonction méromorphe donnée.

La méthode de M. WEIERSTRASS paraît donc, au premier abord, ne pas pouvoir s'étendre aux fonctions de deux variables, dont les infinis sont non plus des points isolés, mais des multiplicités continues, et ne peuvent par conséquent être envisagés *séparément*. Aussi les géomètres qui tentaient de généraliser le théorème de M. WEIERSTRASS ont-ils été longtemps arrêtés (32, 67).

J'eus l'idée de tourner la difficulté en généralisant la notion de fonction de deux variables. Soit en effet $V + iW$ une fonction des variables imaginaires $x + iy$ et $z + it$. La partie réelle V satisfera à l'équation

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{d^2 V}{dt^2} = 0. \tag{1}$$

Mais cette condition n'est pas suffisante pour que V soit la partie réelle d'une fonction de nos deux variables. Il faut en outre que V satisfasse aux relations

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 V}{dx\,dz} + \frac{d^2 V}{dy\,dt} = 0. \tag{2}$$

Envisageons maintenant toutes les fonctions V qui satisfont à l'équation (1) sans être assujetties à satisfaire aux équations (2). On pourra alors construire une fonction qui remplira cette unique condition (1) et qui de plus admettra une partie seulement des infinis de la fonction méromorphe donnée *sans en admettre d'autres*. Cela était impossible au contraire quand cette fonction restait assujettie aux conditions (2).

Pouvant alors considérer séparement les infinis de notre fonction méromorphe, nous n'avons plus qu'à appliquer la méthode même de M. WEIERSTRASS pour construire une fonction e^V qui s'annule pour tous les infinis de la fonction méromorphe donnée et telle que V satisfasse à l'équation (1). On peut même en trouver une infinité. Soient en effet V_0 l'une d'elles et G une fonction entière, c'est-à-dire toujours finie, de x, y, z, t, satisfaisant à l'équation $\Delta G = 0$; toutes les fonctions $V_0 + G$ rempliront, comme la fonction V_0 elle-même, les conditions énoncées plus haut. Il reste à faire voir que, parmi ces fonctions, $V_0 + G$, il y en a une qui peut être regardée comme la partie réelle d'une fonction de $x + iy$ et de $z + it$, ce qui veut dire que l'on peut disposer de la fonction entière G, de telle façon que

$$\frac{d^2(V_0 + G)}{dx^2} + \frac{d^2(V_0 + G)}{dy^2} = \frac{d^2(V_0 + G)}{dx\,dz} + \frac{d^2(V_0 + G)}{dy\,dt} = 0.$$

C'est ce que j'ai fait, démontrant ainsi le théorème suivant:

Si une fonction de deux variables imaginaires est partout méromorphe, elle sera le quotient de deux fonctions entières. Je suis revenu sur cette même question (190) et je suis parvenu à simplifier considérablement les démonstrations.

En ce qui concerne les fonctions non uniformes, j'ai contribué à l'étude de leurs propriétés dans le voisinage d'un point donné, par les lemmes que j'ai démontrés au début de ma thèse inaugurale. Supposons qu'une équation

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

définissant z comme fonction implicite de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit satisfaite pour le système de valeurs

$$z = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

et que nous étudions la fonction dans un domaine voisin de ce système de valeurs. Je suppose de plus que dans ce domaine la fonction F soit holomorphe. On sait depuis longtemps que, si $\frac{dF}{dz}$ n'est pas nul, z est fonction holomorphe de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. J'ai cherché ce qui se passe lorsque $\frac{dF}{dz}$ est nul en même temps que $\frac{d^2F}{dz^2}, \frac{d^3F}{dz^3}, \ldots, \frac{d^{m-1}F}{dz^{m-1}}$, mais que la $m^{\text{ième}}$ dérivée $\frac{d^mF}{dz^m}$ n'est pas nulle. J'ai démontré que dans ce cas z satisfait à une équation algébrique de la forme

$$z^m + B_{m-1} z^{m-1} + B_{m-2} z^{m-2} + \cdots + B_1 z + B_0 = 0,$$

dont les coefficients A sont des fonctions holomorphes des x. J'ai obtenu ensuite un résultat analogue pour le cas où l'on a p fonctions implicites de n variables définies par p équations simultanées.

VIII. Intégrales multiples. (52, 53, 60, 105, 172, 168, 181, 196, 206).

La théorie qui a le plus contribué à faciliter l'étude des fonctions d'une variable est certainement celle des intégrales prises entre des limites imaginaires. Elle conduit, comme on le sait, à envisager les périodes de ces intégrales et à distinguer les périodes polaires (correspondant aux résidus) des périodes cycliques. Un des points les plus importants est d'ailleurs l'étude des intégrales abéliennes, c'est-à-dire des intégrales de différentielles algébriques; cette théorie est ordinairement présentée sous une forme géométrique, ce qui a amené à dire, pour abréger, que ces intégrales «appartiennent à une courbe algébrique».

Quand on passe aux fonctions de deux variables, la notion de ces intégrales et de leurs périodes peut se généraliser à deux points de vue différents: par les intégrales de différentielles totales et par les intégrales doubles. Je ne m'étendrai pas beaucoup sur le premier de ces modes de généralisation. Il ne m'appartient pas, en effet: c'est M. Picard qui en a tiré les premiers et les plus beaux résultats. Je n'ai fait qu'appeler l'attention (52), à la suite de la Note de M. Picard, sur quelques points de détail. Ainsi ce géomètre avait démontré qu'une surface algébrique ne possède d'intégrales abéliennes de différentielles totales de première espèce que dans des cas particuliers.

Je veux dire que, si

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'équation d'une surface algébrique définissant z en fonction de x et de y, il n'y aura pas, en général, de différentielle exacte

$$P\,dx + Q\,dy,$$

où P et Q soient rationnels en x, y, z, de telle façon que l'intégrale

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

reste toujours finie.

Partant de là, j'ai trouvé les conditions pour qu'une surface du quatrième ordre possède de pareilles intégrales. Il faut et il suffit qu'elle soit une surface réglée ou qu'elle se ramène à une surface de révolution par une transformation linéaire. J'ai indiqué également un certain nombre de cas où il n'y a jamais, et d'autres où il y a toujours, des intégrales de première espèce.

J'ai reconnu que le théorème d'Abel s'étendait immédiatement aux intégrales de différentielles totales de première espèce; mais il semblait au premier abord qu'il ne serait plus applicable aux surfaces qui ne possèdent pas de pareilles intégrales, c'est-à-dire la grande majorité des surfaces algébriques.

Il n'en était rien. J'ai démontré (53) le théorème suivant:

Si (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\ldots$, (x_q, y_q, z_q) sont les q points d'intersection d'une surface algébrique S et d'une courbe algébrique C; si $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1)$, $\ldots$ sont les q points d'intersection de cette même surface S avec une corbe C' infiniment peu différente de C, on aura un certain nombre de relations de la forme

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_q dx_q = 0,$$

où X_i est une fonction rationnelle de x_i, y_i, z_i. Ces relations peuvent être regardées comme la généralisation du théorème d'Abel.

Les difficultés qui s'attachent à l'étude des intégrales doubles et multiples étendues à un domaine imaginaire sont d'une nature différente. Il semble que la théorie des intégrales simples prises entre des limites imaginaires serait d'une exposition beaucoup plus laborieuse si l'on n'avait pour s'y guider une représentation géométrique. On perd ce guide quand on passe aux intégrales doubles; il faudrait alors recourir à la Géométrie à quatre dimensions, ce qui serait une complication plutôt qu'une simplification.

Cet obstacle ne paraît pas d'abord très sérieux; cependant il arrêta longtemps les géomètres. M. Picard, à propos des fonctions hyperfuchsiennes, avait traité une question qui présente quelque analogie avec celle qui nous occupe, mais qui n'est pourtant pas la même; les quantités qu'il a ainsi introduites ne peuvent être en aucune façon regardées comme la généralisation des périodes des intégrales simples. Il importe de ne pas les confondre avec les périodes cycliques que ce même savant a étudiées peu de temps après la publication de ma première Note à ce sujet, et qui se rattache, au contraire, très directement à la théorie que j'ai cherché à fonder.

Je fus donc le premier à étudier méthodiquement cette importante question dans une Note (60) que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Academie le 25 janvier 1886 et dont j'ai développé les résultats dans un Mémoire plus étendu (181).

Le premier point était d'imaginer un mode de représentation géométrique sans employer l'espace à quatre dimensions. On peut y arriver par diverses méthodes que je n'exposerai pas ici et dont j'ai fait tour à tour usage. Il faut ensuite donner une définition des intégrales doubles prises dans un domaine imaginaire. Grâce aux modes de représentation dont je viens de parler, on peut donner cette définition sans qu'il subsiste aucune équivoque. Il faut ensuite démontrer le théorème fondamental, analogue à celui de CAUCHY, et d'après lequel une intégrale double prise le long d'un contour fermé est nulle en général. Cette démonstration ne présente aucune difficulté. On peut trouver sous une forme simple les conditions d'intégrabilité de différentielles doubles

$$A\,dy\,dz + B\,dx\,dz + C\,dx\,dy + \cdots,$$

qu'il faut d'abord définir sans ambiguïté. Ces conditions présentent presque la même forme que celles qui expriment l'intégrabilité d'une différentielle ordinaire. Seulement certains signes qui sont tous positifs pour les intégrales d'ordre pair, et, en particulier, pour les intégrales doubles, sont, au contraire, alternativement positifs et négatifs quand il s'agit d'intégrales d'ordre impair et en particulier d'intégrales simples. Ces conditions une fois trouvées, le théorème fondamental s'ensuit immédiatement.

Il admet cependant des exceptions, comme la proposition correspondante de la théorie de CAUCHY, et ce sont ces exceptions qui sont l'origine des périodes des intégrales doubles. Ces périodes se distinguent, comme dans le cas d'une seule variable, en périodes cycliques et en périodes polaires. Je me suis occupé, en particulier, des périodes polaires ou, si l'on veut, des résidus des intégrales doubles. M. PICARD a étudié ensuite les périodes cycliques.

J'ai envisagé l'intégrale d'une fonction rationnelle que j'ai écrite sous la forme suivante

$$\int\!\!\int \frac{f(x,\,y)\,dx\,dy}{\varphi(x,\,y)\,\psi(x,\,y)},$$

en décomposant le dénominateur en facteurs irréductibles, et j'ai reconnu que cette intégrale présente trois sortes de périodes:

1°. Celles de la première sorte sont égales à $2i\pi$ multiplié par l'une des périodes de première espèce de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{f\,dx}{\varphi \frac{d\psi}{dy}}$$

(rapportée à la courbe algébrique $\psi = 0$).

2°. Celles de la seconde sorte se rapportent aux divers points d'intersection des deux courbes $\varphi = \psi = 0$ et sont égales à

$$\pm 4\pi^2 \frac{f(x_0, y_0)}{\Delta(x_0, y_0)},$$

$\Delta(x, y)$ étant le déterminant de φ et de ψ par rapport à x et à y; et x_0 et y_0 étant les coordonnées du point d'intersection.

3°. Enfin celles de la troisième sorte se rapportent aux divers points doubles de ces deux courbes et ont une expression analogue.

Mais la théorie serait incomplète si l'on se bornait à ces trois sortes de périodes. Il peut arriver que la fonction sous le signe intégral devienne infinie en divers points du contour d'intégration sans que l'intégrale elle-même cesse d'être finie. Cette circonstance ne pouvait pas se produire dans le cas des intégrales simples, lorsque la fonction à intégrer était rationnelle; il n'en est plus de même ici. D'un autre côté, on ne saurait exclure de parti pris les intégrales de cette sorte; car, autant qu'on en peut juger aujourd'hui, elles doivent jouer un rôle important dans les applications.

Or les intégrales de cette nouvelle sorte ont un caractère bien différent de celui des intégrales à périodes. Celles-ci, en effet, ou bien restent constantes quand on fait varier le chemin d'intégration d'une manière continue, ou bien s'accroissent par sauts brusques; celles-là, au contraire, varient d'une façon continue comme le chemin d'intégration lui-même. C'est là la principale différence entre la théorie nouvelle et celle de Cauchy.

Ces résultats s'appliquent, *mutatis mutandis*, aux transcendantes et, en particulier, aux fonctions uniformes.

Cette théorie nouvelle sera-t-elle aussi féconde que l'ont été les découvertes de Cauchy? Elle est encore trop jeune pour qu'on puisse se prononcer sur ce point. Certainement quelques-uns des résultats qu'on peut obtenir ainsi, et par une généralisation immédiate des méthodes de Cauchy, auraient pu être atteints plus aisément par d'autres voies. Mais on peut espérer qu'il n'en sera pas toujours de même, et déjà je suis sur la voie de propositions réellement nouvelles sur la théorie des fonctions abéliennes.

Les périodes dont il a été question jusqu'ici sont analogues à celles qui se rapportent aux singularités polaires des intégrales simples. Mais lorsque la fonction sous le signe $\int$ n'est pas uniforme, les intégrales multiples peuvent outre ces périodes polaires présenter des périodes cycliques.

C'est une question de Mécanique Céleste, celle du développement de la fonction perturbatrice qui m'a amené à m'en occuper.

Si la fonction sous le signe $\int$ dépend d'un paramètre (comme par exemple les intégrales elliptiques du module) les périodes cycliques seront des fonctions de ce paramètre. De même que dans le cas des intégrales simples, ces fonctions seront définies par des équations linéaires à coefficients algébriques. J'ai étudié ces équations linéaires et leurs groupes (172). J'ai montré qu'il y a un lien intime entre l'équation linéaire qui définit les périodes des intégrales doubles dépendant du radical $\sqrt{F(x, y)}$ et celle qui définit les périodes des intégrales abéliennes simples engendrées par la courbe algébrique $F(x, y) = 0$. J'ai fait voir par quelle transformation on peut passer de l'une à l'autre.

Cette dernière recherche se rattache à mes travaux sur l'Analysis Situs.

D'un autre côté, étant donnée plusieurs intégrales multiples dépendant du radical $\sqrt{F(x, y)}$, on peut se proposer de faire une théorie de la réduction de ces intégrales, analogue à la théorie classique de la réduction des intégrales elliptiques (ou hyperelliptiques) à un petit nombre d'intégrales types (dites de 1ère, 2de et 3e espèces). J'ai résolu ce problème qui m'était utile au point de vue du développement de la fonction perturbatrice (168, 196, 206).

La réduction des intégrales doubles et celle des intégrales de différentielles totales se présentent d'ailleurs ici comme deux questions intimement liées.

Après cette revue des travaux que j'ai consacrés à la théorie générale des fonctions, je suis naturellement amené à passer l'étude de diverses fonctions particulières. J'ai déjà parlé plus haut des fonctions fuchsiennes. Il me reste à résumer mes recherches sur les fonctions elliptiques, sur les fonctions abéliennes et sur les fonctions hyperfuchsiennes.

IX. Fonctions elliptiques.

J'ai fait fort peu de chose sur les fonctions elliptiques. Cependant j'ai donné, dans un Mémoire d'Arithmétique (2, 98), une façon d'exprimer ces fonctions à l'aide d'une intégrale définie. On sait que les fonctions doublement périodiques peuvent se décomposer en éléments simples de la forme $\frac{\sigma'(u-\alpha)}{\sigma(u-\alpha)}$ ou de la forme

$$\frac{d^n}{du^n}\frac{\sigma'(u-\alpha)}{\sigma(u-\alpha)}.$$

Il suffit donc d'exprimer par une intégrale définie la fonction

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\sum\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right),$$

où $w=2\mu\omega+2\mu'\omega'$ et où μ et μ' peuvent prendre tous les systèmes de valeurs entières positives et négatives, excepté $\mu=\mu'=0$. On pourra évidemment décomposer la série du second membre en quatre autres: la première comprenant les termes où μ et μ' sont positifs, la seconde les termes où μ est positif et μ' négatif ou nul, la troisième ceux où μ est négatif ou nul et μ' positif, la quatrième enfin ceux où μ et μ' sont négatifs ou nuls. Cette décomposition est analogue à la décomposition de $\pi \cot x\pi$ en une somme de deux termes dépendant des fonctions eulériennes

$$\pi \cot x\pi=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}.$$

Cette généralisation des fonctions eulériennes est analogue, mais non identique à celle qu'a donnée M. Appell.

Il suffit alors d'exprimer, par une intégrale définie, la première de nos séries partielles, car les autres s'y ramènent aisément. On trouve que cette série partielle s'exprime par une intégrale prise par rapport à z entre les limites 0 et ∞, la fonction sous le signe $\int$ étant rationnelle par rapport à z et à diverses exponentielles de la forme $e^{\lambda z}$. Il est donc possible d'exprimer de la même manière toutes les fonctions doublement périodiques.

J'ai été conduit aussi d'une façon incidente à m'occuper des fonctions elliptiques en les considérant comme des cas particuliers des fonctions fuchsiennes.[1] J'ai retrouvé ainsi la plupart des formules connues et, en particulier, l'expression des fonctions à deux périodes par des séries trigonométriques. J'ai été conduit par la même voie à une formule que je crois nouvelle et qui permet d'exprimer les fonctions elliptiques par une série infinie d'une forme particulière. (Acta Mathematica, Tome 1, page 287.)

---

[1] *Sur les fonctions fuchsiennes (passim).*

X. Fonctions abéliennes. (12, 41, 50, 55, 59, 62, 84, 86, 88, 138, 150, 169, 190, 194).

La théorie des fonctions abéliennes est loin d'être aussi avancée que celle des fonctions elliptiques. Un grand nombre des propriétés de ces dernières transcendantes ne s'étendent pas ou ne s'étendent que difficilement au cas général. On ne doit pas s'en étonner si l'on se rappelle que beaucoup de propriétés des fonctions d'une variable ne sont plus applicables aux fonctions de plusieurs variables. C'est la même difficulté qui nous a occupés au paragraphe VII.

On a été conduit aux fonctions abéliennes par l'étude des courbes algébriques et des intégrales abéliennes. Je me suis occupé incidemment (138) des transformations birationnelles des courbes algébriques afin de démontrer qu'on peut toujours ramener ces courbes à des courbes gauches dépourvues de toute irrégularité. Un des premiers faits que l'on a remarqués est la possibilité de la réduction de ces intégrales abéliennes. JACOBI en a déjà rencontré quelques exemples; dans des cas assez nombreux, on voit des intégrales appartenant à une courbe de genre ϱ se réduire à des intégrales de genre inférieur à ϱ ou même à des intégrales elliptiques. Mais on est bientôt amené à se placer à un point de vue plus élevé; les fonctions Θ, qui doivent leur origine aux intégrales abéliennes de premère espèce, ne sont qu'un cas particulier des séries Θ les plus générales. Mais il est aisé de voir qu'à ces transcendantes plus générales appartiennent des intégrales, qui sont, il est vrai, des intégrales de différentielles totales, mais qui peuvent néanmoins être regardées comme la généralisation des intégrales de première espèce. Il est alors naturel d'appliquer à ces intégrales le procédé de la réduction; le problème primitif reçoit une importante extension; mais, par la suppression d'une restriction gênante, *il est simplifié et non compliqué*; car on peut désormais introduire dans ses raisonnements des fonctions Θ quelconques, sans avoir à s'inquiéter de leur origine.

Les géomètres se sont de longue date préoccupés de ce problème, qui doit nous fournir d'importantes données sur les fonctions algébriques, et qui est un des meilleurs chemins pour pénétrer dans le domaine mystérieux des fonctions abéliennes. Dans ces derniers temps, M. PICARD, par une série de brillants travaux, lui a fait faire plusieurs pas importants.

Mes premiers essais dans cet ordre d'idées ne portent que sur un cas particulier. Ainsi que je l'ai expliqué plus haut, dans le paragraphe intitulé: *Intégration des équations linéaires par les fonctions algébriques*, si l'intégrale générale d'une équation linéaire est algébrique et si, à l'aide de cette intégrale générale, on forme un système d'intégrales abéliennes de première espèce, il y a entre les périodes de ce système un grand nombre de relations intéressantes. J'avais là un moyen (40) de pénétrer plus profondément dans l'étude des fonctions abéliennes, et je résolus d'en profiter. Je choisis comme exemple particulier le système d'intégrales abéliennes que l'on peut former à l'aide de la résolvante de GALOIS de l'équation modulaire relative à la transformation du septième ordre. Je trouvai que les relations qui existent entre les périodes suffisent pour les déterminer complètement. Étant parvenu ainsi à calculer ces périodes, je m'aperçus que, parmi les intégrales abéliennes de ce système (qui est du genre 3), il y en a une infinité qui sont susceptibles d'être réduites aux intégrales elliptiques. C'était là un troisième exemple d'une circonstance remarquable, déjà signalée deux fois par M. PICARD.

Mon attention fut de nouveau attirée sur cette question par un Mémoire de M^me^ KOWALEVSKI, où se trouvaient cités deux théorèmes de M. WEIERSTRASS, sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Ces deux théorèmes avaient été communiqués à divers savants par des lettres du professeur de Berlin, mais la démonstration n'en avait pas été publiée. J'ai donné (88) deux démonstrations différentes de ces deux propositions; j'ignore encore si mes méthodes sont identiques à celles de M. WEIERSTRASS. Toutes deux sont empruntées à l'Arithmétique, et l'on ne doit pas s'en étonner, car le problème est en réalité purement arithmétique. La première démonstration se fonde sur la considération des formes bilinéaires. Dans la seconde, j'emploie un procédé particulier de réduction. Je suppose que dans un système d'intégrales de genre ϱ, il y en ait μ qui soient réductibles au genre μ. Leurs 2ϱ périodes, ou périodes anciennes, s'exprimeront alors à l'aide de 2μ quantités, qui seront les périodes nouvelles, par des polynômes linéaires à coefficients entiers. On peut donc dresser un Tableau de $4\varrho\mu$ nombres entiers qui caractérise la réduction. Mais ce Tableau peut être d'une infinité de manières; car on peut remplacer, soit le système des périodes anciennes, soit le système des périodes nouvelles par un système équivalent. Le problème est précisément de profiter de cette circonstance pour réduire le Tableau à sa plus simple expression. Dans ma seconde méthode, la réduction se fait par une série d'opérations toutes pareilles entre elles.

Je profitai des avantages de ces deux méthodes pour généraliser les deux théorèmes de M. WEIERSTRASS et les étendre au cas de la réduction des intégrales abéliennes à d'autres intégrales abéliennes.

Le théorème de M. WEIERSTRASS était plus général en un sens que le théorème de M. PICARD sur le même sujet; ce dernier ne s'appliquait en effet qu'à la réduction du genre 2 au genre 1; le géomètre allemand avait étudié la réduction d'un genre ϱ quelconque au genre 1. D'autre part, le théorème de M.

Picard contenait plus que celui de M. Weierstrass, car la réduction y était poussée plus loin. Était-il possible de trouver une proposition qui contînt à la fois celle de M. Weierstrass et celle de M. Picard, c'est-à-dire de pousser dans le cas général la réduction aussi loin que ce dernier analyste? L'application de ma seconde méthode m'a fait reconnaître (62, 84) que cela peut se faire sans difficulté.

Le même procédé me permit en même temps d'étudier le cas général (réduction d'un genre ϱ quelconque, non plus au genre 1, mais à un genre μ également quelconque) et de pousser la réduction beaucoup plus loin que je ne l'avais fait dans mon premier travail. Le théorème auquel je fus ainsi conduit contient, comme cas particulier, toutes les propositions antérieurement découvertes et résume ainsi toute la théorie.

Un cas particulier bien digne d'intérêt est celui où une infinité d'intégrales d'un même système se réduisent aux intégrales elliptiques. M. Picard en avait déjà rencontré deux exemples, et il semblait probable que, dans un système d'intégrales de genre ϱ, *il ne pouvait y avoir plus de ϱ intégrales réductibles* sans qu'il y en eût une infinité. J'ai démontré (50, 84) qu'il en était effectivement ainsi et j'ai trouvé en même temps les relations fort simples qui unissent entre elles les intégrales réductibles.

Les méthodes que je viens d'exposer permettent une classification rationnelle des cas de réduction. Mais cette classification, à côté d'incontestables avantages, présente un inconvénient grave: elle ne distingue pas du cas général les cas particuliers où les intégrales abéliennes à réduire appartiennent à une courbe algébrique. Ces derniers ne présentent pas d'intérêt spécial au point de vue de la théorie des fonctions abéliennes; mais ils en ont un fort grand, au contraire, si l'on se propose pour but l'étude des fonctions algébriques. Il importait donc de trouver une classification nouvelle, ne portant que sur ces cas particuliers et laissant de côté tous les autres. J'ai indiqué (59) un moyen d'arriver à ce résultat par l'étude de la transformation des fonctions fuchsiennes; mais je n'ai pas eu le temps d'approfondir cette théorie.

L'étude systématique des fonctions abéliennes devait naturellement commencer par l'examen des cas de réduction, la suite de cet exposé le fera suffisamment comprendre; mais ce n'était qu'un premier pas, et bien d'autres problèmes restaient à résoudre.

On vient de voir que les fonctions Θ, définies à l'aide des intégrales abéliennes de première espèce, ne sont que des cas très particuliers des séries Θ les plus générales.

Qu'est ce qui caractérise les fonctions Θ spéciales; c'est à dire celles qui doivent leur origine aux intégrales abéliennes? Qu'est ce qui permet de les distinguer parmi les fonctions Θ les plus générales? C'est la circonstance suivante; la variété

$$\Theta = 0$$

est pour employer le langage de LIE, une variété doublement de translation. C'est ce qu'on aurait pu déduire aisément des recherches antérieurs de LIE. Mais je suis parvenu au même résultat (150, 194) par une voie entièrement différente. Cette condition peut évidemment s'exprimer par une relation entre les périodes, mais cette relation est transcendante et ne peut s'exprimer que sous forme de série. Je me suis borné à indiquer les premiers termes de cette série, je veux dire ceux qui sont le plus sensibles quand la fonction Θ diffère peu d'un produit de fonctions Θ elliptiques. La forme en est curieuse, car il y entre des radicaux. On peut concevoir une infinité de fonctions de n variables, admettant $2n$ systèmes de périodes et ne rentrant pas dans la catégorie spécialement étudiée par RIEMANN. Ces fonctions peuvent-elles être toujours regardées comme le quotient de deux fonctions Θ? RIEMANN était parvenu à le démontrer; mais il n'a jamais publié sa démonstration. M. WEIERSTRASS a retrouvé le même résultat, mais il n'a pas publié non plus de son vivant la méthode dont il s'est servi.

Abordant l'étude de ces fonctions, que je n'assujettissais qu'à la condition d'être périodiques (12), je reconnus qu'on pouvait toujours les tirer des fonctions abéliennes ordinaires, obtenues par la méthode d'inversion de JACOBI, en appliquant le procédé de la réduction des intégrales abéliennes.

Dans ces conditions, nous devions naturellement songer, M. PICARD et moi, à unir nos efforts pour retrouver le résultat de RIEMANN. Nous reconnûmes (41) qu'il devait y avoir entre les périodes les mêmes relations que dans le cas particulier des fonctions nées de l'inversion des intégrales abéliennes. Il était aisé d'en conclure que toutes les fonctions à n variables et à $2n$ périodes s'expriment par le moyen des séries Θ.

La méthode que je viens d'exposer est celle même dont s'était servi M. WEIERSTRASS et qu'il n'avait pas publiée; c'est ce que nous reconnûmes quand après la mort du savant géomètre, nous reçûmes les bonnes feuilles du troisième volume de ses oeuvres complètes.

Il n'y avait que quelques différences de détail; c'est ainsi que j'ai employé un moyen un peu différent pour démontrer un Lemme indispensable, d'après lequel il y a toujours une relation algébrique entre p fonctions à p variables et à $2p$ périodes. J'y suis revenu plus tard (169).

Revenons au théorème dont j'avais donné une démonstration, après M. WEIERSTRASS et en commun avec M. PICARD. Depuis M. APPELL en a donné une nouvelle fondée sur de tout autres principes et j'en ai moi-même donné une troisième, entièrement différente des deux premières (169, 190). Je rappelle par quel artifice j'ai démontré qu'une fonction méromorphe de plusieurs variables est toujours le quotient de deux fonctions entières (vide supra § VII). Quelle est la nature de ces fonctions entières? Les perfectionnements apportés (190) à ma démonstration primitive m'ont permis de résoudre cette question, et de faire voir directement que si la fonction méromorphe est périodique, ces deux fonctions entières sont «des fonctions périodiques». Je me bornerai à dire que la démonstration présente quelques analogies avec celle par laquelle WEIERSTRASS établit qu'il existe une fonction entière de genre 2 qui admet tous les zéros d'une fonction elliptique.

L'existence de ces fonctions périodiques, en face desquelles le procédé de l'inversion est impuissant, fait mieux ressortir la nécessité où nous nous trouvons d'établir la théorie des fonctions abéliennes en partant des séries Θ elles-mêmes. On sait qu'il est possible de fonder sur l'étude directe des fonctions Θ à une seule variable toute la théorie des fonctions elliptiques; le point de départ est ce fait que l'équation

$$\Theta(x) = 0$$

n'a qu'une seule racine à l'intérieur du parallélogramme des périodes. De là l'importance du problème suivant, dont la solution (86, 12) doit évidemment précéder toute étude directe des séries Θ à plusieurs variables: Combien les équations simultanées

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\Theta(x_1-a_1,\, x_2-a_2,\, \ldots,\, x_n-a_n)\\ &\quad=\Theta(x_1-b_1,\, x_2-b_2,\, \ldots,\, x_n-b_n)=\cdots=\Theta(x_1-l_1,\, x_2-l_2,\, \ldots,\, x_n-l_n)=0,\end{aligned}\right.$$

où les a, les $b, \ldots$, les l sont des constantes données, ont-elles de solutions distinctes? A l'aide d'une formule de M. KRONECKER, j'ai pu démontrer que ce nombre est constant et indépendant des périodes, ainsi que des constantes a, $b, \ldots, l$. Il me fut facile ensuite, en envisageant le cas particulier où la fonction Θ se réduit à un produit de n fonctions Θ elliptiques, de démontrer que ce nombre est précisément $1.2.3\ldots n$.

J'appliquai aussi la même méthode à des équations analogues aux équations (1), mais plus compliquées, et je trouvai le nombre des solutions distinctes qu'elles doivent avoir.

Mais il y a plus; dans le cas des fonctions elliptiques, on trouve aisément la valeur de la racine de l'équation

$$\Theta(x) = 0.$$

Si l'on a affaire à des équations analogues, mais plus compliquées, on peut encore trouver la somme des racines.

Revenant aux fonctions abéliennes et aux équations (1), on peut alors se demander (55, 84) s'il est possible de trouver la somme des valeurs de x_1, celle des valeurs de x_2, etc., qui satisfont à ces équations. Ce problème est plus compliqué que le précédent, dans lequel le nombre cherché était une constante; cette circonstance permettait de se restreindre à un cas particulier, et l'on était ainsi immédiatement ramené aux fonctions elliptiques. Il n'en est plus de même ici; les nombres cherchés ne sont plus des constantes, mais des fonctions des périodes.

Toutefois le problème est immédiatement résolu quand on est ramené aux fonctions elliptiques, c'est-à-dire quand on se trouve dans un des cas de réduction étudiés plus haut. Quand, dans le système d'intégrales abéliennes de genre n qui correspondent aux fonctions Θ envisagées, il y a n intégrales distinctes réductibles aux intégrales elliptiques, il est aisé de voir que les fonctions Θ abéliennes s'expriment très simplement à l'aide de fonctions Θ elliptiques. On peut alors, par l'application du théorème d'ABEL généralisé (cf. § VIII) résoudre complètement le problème qui nous occupe.

Le système des périodes d'une fonction Θ quelconque diffère toujours infiniment peu d'un système de périodes correspondant à une cas de réduction. C'est là une circonstance qui donnera, je n'en doute pas, la clef de bien des problèmes. Elle nous donne en particulier la solution que nous cherchons.

Nous connaissons la somme cherché des valeurs de x toutes les fois que nous nous trouvons dans un cas de réduction. Or cette somme doit être une fonction continue des périodes; *nous la connaîtrons donc dans tous les cas possibles.* C'est ainsi que, si l'on connaît une fonction *continue* de x pour toutes les valeurs commensurables de la variable, on la connaîtra également pour toutes les valeurs incommensurables.

On peut encore se placer à un autre point de vue pour étudier les zéros des fonctions Θ. Considérons une fonction Θ de deux variables $\Theta(x, y)$. Soient (α, β), (γ, δ) deux périodes de cette fonction. Écrivons l'équation

$$\Theta(\alpha t + \gamma u, \ \beta t + \delta u) = 0,$$

où t et u sont des nombres assujettis à rester réels et compris ente 0 et 1.

Cette équation ainsi interprétée admettra un certain nombre de solutions. Je serai conduit, par des considérations qui ne sauraient trouver place ici, à les distinguer en deux espèces. Soient alors N_1 le nombre des solutions de la première espèce, T_1 la somme des valeurs correspondantes de t, U_1 celle des valeurs de u. Soient N_2, T_2 et U_2 les quantités analogues en ce qui concerne les solutions de la seconde espèce. On peut se proposer de déterminer les nombres $N_1 - N_2$, $T_1 - T_2$, $U_1 - U_2$.

Je suis parvenu par une méthode assez simple (55) à déterminer $N_1 - N_2$. On obtient ainsi divers renseignements importants au sujet du nombre total des solutions $N_1 + N_2$. Ce nombre est en effet toujours supérieur à $N_1 - N_2$ et il est de même parité.

On peut arriver au même résultat par l'emploi des intégrales doubles prises entre des limites imaginaires. J'ai lieu d'espérer de plus que la même considération pourra conduire à la valeur de $T_1 - T_2$ et de $U_1 - U_2$.

Enfin on peut se poser encore la question d'une autre manière. Soit une fonction Θ spéciale de p variables engendrée par une courbe algébrique de genre p

$$F(x, y) = 0.$$

Soient $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, ..., $u_p(x, y)$ les p intégrales abéliennes de 1ère espèce. J'écrirai pour abréger $\Theta(v_i)$ pour:

$$\Theta(v_1, v_2, \ldots, v_p) \quad [\text{et } u_i(x) \text{ pour } u_i(x, y)]$$

et je considérerai pq constantes e_{ik} où l'indice i varie de 1 à p et l'indice k de 1 à q. J'envisage alors les q équations:

$$\Theta[u_i(x_1) + u_i(x_2) + \cdots + u_i(x_q) - e_{i1}] = 0$$
$$\Theta[u_i(x_1) + u_i(x_2) + \cdots + u_i(x_q) - e_{i2}] = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Theta[u_i(x_1) + u_i(x_2) + \cdots + u_i(x_q) - e_{iq}] = 0$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les inconnues. Combien ces équations ont elles de solutions? C'est le problème que j'ai résolu par une formule simple (194), le cas de $q = p$ se réduisant à celui que j'ai traité plus haut, tandis que le cas de $q = 1$ n'est autre que celui de Riemann.

XI. Fonctions diverses. (46, 106, 192).

Les fonctions fuchsiennes sont des fonctions uniformes d'une variable, inaltérées par certaines substitutions linéaires. On est naturellement conduit à se poser le problème suivant: Former des fonctions uniformes de deux variables, qui demeurent inaltérées par certaines substitutions linéaires. C'est, comme on sait, ce que M. Picard a fait avec un plein succès par l'invention des fonctions hyperfuchsiennes.

Le premier problème à résoudre était évidemment de trouver les groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à deux variables. M. Picard est parvenu à en former un grand nombre par des considérations arithmétiques. J'ai moi-même (25) démontré l'existence de deux classes de ces groupes. La première classe comprend les substitutions semblables des formes quadratiques ternaires indéfinies quand les coefficients de ces formes et de ces substitutions sont des entiers complexes. La seconde classe ne diffère pas essentiellement des groupes fuchsiens.

Si z désigne en effet une variable imaginaire

$$z = \xi + i\eta$$

et si l'on pose

$$x = \frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \qquad y = \frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2},$$

à tout groupe fuchsien appliqué à z et admettant pour cercle fondamental

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,$$

correspondra un groupe discontinu appliqué aux deux variables x et y. Ce groupe est discontinu lorsque x et y sont imaginaires, ou bien réels, mais de telle façon que

$$x^2 + y^2 < 1;$$

il n'est plus proprement discontinu si x et y sont réels et si

$$x^2 + y^2 > 1.$$

C'est cette circonstance qui explique ce fait remarquable: qu'il est impossible d'imposer à une forme quadratique binaire indéfinie des conditions de réduction, telles que chaque classe contienne une réduite unique.

Mais les groupes de cette nature sont beaucoup moins importants que les groupes hyperfuchsiens proprement dits. J'appelle ainsi ceux qui n'altèrent pas l'hypersphère

$$xx_0 + yy_0 = 1.$$

(Je désigne ici par x_0 et y_0 les quantités imaginaires conjuguées de x et de y.)

Cette hypersphère joue dans cette théorie tout à fait le même rôle que le cercle fondamental dans la théorie des fonctions fuchsiennes.

J'ai voulu contribuer à l'étude de ces groupes et j'ai commencé par m'occuper des substitutions elles-mêmes. J'ai reconnu (45) que la classification en substitutions elliptiques, paraboliques et hyperboliques s'étendait aux substitutions hyperfuchsiennes.

La classification des groupes fuchsiens en familles est également applicable aux groupes hyperfuchsiens. Si nous laissons de côté les familles mixtes, nous distinguerons les groupes de la première famille qui contiennent des substitutions elliptiques, ceux de la deuxième famille qui n'en contiennent pas d'elliptiques, mais en contiennent de paraboliques, ceux de la troisième famille qui n'en admettent que d'hyperboliques.

Tous les groupes antérieurement découverts par M. Picard appartenant à la seconde famille, je signalai alors l'existence de toute une catégorie de groupes de la troisième famille et des fonctions hyperfuchsiennes correspondantes que plusieurs propriétés importantes distinguaient des fonctions déjà connues.

On se trouve ici en présence des mêmes difficultés que dans le problème de la formation des groupes fuchsiens. Il faut d'abord former un groupe tel que la fonction correspondante soit uniforme dans le voisinage de chaque point. Il faut ensuite reconnaître si ce groupe est effectivement discontinu. La première difficulté, bien que très grande, est d'ordre purement algébrique. La seconde exige, pour être résolue, l'emploi de considérations étrangères à l'Algèbre. On peut l'éviter tant que l'on se borne aux groupes de la deuxième et de la troisième famille; il est nécessaire de l'aborder au contraire si l'on veut étudier les groupes de la première famille.

Je l'avais résolue, dans le cas des groupes fuchsiens, par l'emploi de la pseudogéométrie de Lowatschevski; j'avais reconnu en effet que certaines quantités (analogues à ce que Lowatschevski aurait appelé *longueur* ou *surface*) étaient des invariants par rapport aux substitutions d'un groupe fuchsien quelconque. Je me suis donc demandé si les substitutions hyperfuchsiennes admettaient de semblables invariants (46). J'ai reconnu qu'il en était ainsi: par conséquent *tout groupe, tel que la fonction correspondante soit uniforme dans le voisinage de chaque point, sera discontinu.*

La recherche des groupes hyperfuchsiens est donc ramenée à un pur problème d'Algèbre; mais ce problème reste extrêmement difficile et il n'a été résolu par M. PICARD que dans un cas particulier. J'ai cherché à généraliser d'une autre manière les transcendantes uniformes qui se reproduisent par des substitutions simples. J'ai cherché s'il n'existait pas des fonctions uniformes possédant un «théorème de multiplication«, c'est à dire subissant une transformation algébrique, quand la variable est multipliée par un facteur constant. J'ai trouvé (106, 192) qu'il existe une classe étendue de pareilles transcendantes. Ce qui est intéressant, c'est le mode de raisonnement dont je me suis servi et qui peut être appliqué avec avantage à quelques questions relatives aux fonctions abéliennes.

TROISIÈME PARTIE.

QUESTIONS DIVERSES DE MATHÉMATIQUES PURES.

XII. **Algèbre.** (39, 42, 45, 49, 80.)

C'est par un problème d'Arithmétique que j'ai été conduit à m'occuper d'Algèbre. La théorie des formes arithmétiques et des substitutions linéaires à coefficients entiers appliqués à ces formes est en effet intimement liée à l'étude algébrique de ces mêmes formes et des substitutions linéaires à coefficients quelconques qu'elles peuvent subir.

C'est ainsi que j'ai été amené, à deux reprises différentes, à rechercher quelles sont les formes algébriques qui ne sont pas altérées par une substitution linéaire donnée et quels sont les groupes continus formés par ces substitutions. Après avoir classé (4, 80) les substitutions linéaires en quatre catégories jouissant de propriétés différentes, j'ai cherché quelles étaient les formes cubiques ternaires et quaternaires qui sont reproduites par une substitution linéaire donnée et par un *faisceau* de substitutions, c'est-à-dire par un groupe de substitutions permutables deux à deux. J'ai résolu également le problème inverse, c'est-à-dire que j'ai déterminé les substitutions que reproduisent une forme cubique ternaire donnée, ce qui m'était nécessaire pour le but arithmétique que j'avais en vue.

Il restait à trouver les formes cubiques quaternaires qui ne sont pas altérées par diverses substitutions linéaires *non permutables entre elles*. J'y suis arrivé par une méthode qui est fondée sur l'emploi des «crochets de Jacobi» et dont M. Sophus Lie a fait usage dans des problèmes analogues. La méthode n'était d'ailleurs pas restreinte aux formes cubiques quaternaires et permettait de trouver quelles sont les surfaces qui ne sont pas altérées par deux transformations homologiques non permutables.

Depuis, j'ai étendu ces résultats (39) au cas général de la façon suivante. Ayant indiqué la manière de former les groupes continus contenus dans le groupe linéaire à n variables, j'ai étudié les formes homogènes par rapport à ces variables qui ne sont pas altérées par les substitutions d'un de ces groupes et j'ai reconnu que ces formes satisfont à un certain nombre d'équations aux dérivées partielles formant un «système complet». Les plus simples des groupes continus en question jouissent de quelques propriétés que je vais énoncer succinctement. Si l'on forme le déterminant des coefficients d'une substitution linéaire à n variables, qu'on ajoute $+ S$ à chacun des termes de la diagonale principale, et qu'on égale à o le déterminant ainsi obtenu, on a une certaine *équation en* S de degré n.

Un groupe continu contient toujours une infinité de faisceaux; on démontre que, s'il y a dans le groupe une substitution admettant une certaine équation en S, il y aura *dans tous les faisceaux du groupe* une substitution admettant cette même équation en S.

Parmi les groupes continus dont je viens de parler, les plus intéressants sont ceux qui donnent naissance à un système de nombres complexes à multiplication non commutative (comme sont, par exemple, les quaternions). J'ai démontré que toutes les équations en S des substitutions de ces groupes ont des racines multiples.

Je suis revenu depuis sur ces groupes particuliers (49). Les recherches de M. SYLVESTER sur les matrices avaient de nouveau attiré l'attention des savants sur les nombres complexes. On pouvait se demander s'il en existait d'autres que ces matrices et leurs combinaisons. J'ai montré qu'il y en avait encore d'autres classes parmi lesquelles j'ai signalé une classe de «ternions».

Je rattacherai à ces études algébriques une Note (42) où j'énonce un résultat analogue à un important théorème de M. LAGUERRE. Soit une équation algébrique ayant p racines positives; j'ai démontré qu'on pouvait toujours en multiplier le premier membre par un polynôme choisi de telle sorte que le produit n'ait que p variations. Parmi tous les polynômes qui satisfont à cette condition, il y en a évidemment un dont le degré est minimum; mais je n'ai pu le trouver que dans des cas particuliers.

XIII. Groupes Continus. (178, 274.)

On vient de voir comment mes recherches sur l'algèbre m'avaient amené à m'occuper des groupes continus. C'est ainsi que j'avais montré (49) le lien qui unit ces groupes aux nombres complexes: j'avais énoncé à ce sujet un théorème dont, détourné par d'autres travaux, je n'ai jamais publié la démonstration, mais qui a été depuis démontré par M. STUDY.

Je me suis servi également des groupes continus dans un travail relatif aux géométries non euclidiennes (226).

Mais ce n'est que beaucoup plus récemment que j'ai abordé la théorie générale de ces groupes.

Lie avait démontré au sujet de ces groupes trois théorèmes fondamentaux. D'après le troisième de ces théorèmes, il existe toujours un groupe qui admet des équations de structure données pourvu que ces équations satisfassent aux conditions jacobiennes.

Lie a donné de ce théorème deux démonstrations. La première s'applique seulement aux groupes qui ne contiennent pas de substitutions permutables à toutes les autres substitutions. Elle ne laisse rien à désirer au point de vue de la simplicité. La seconde s'applique à tous les groupes; elle est beaucoup plus indirecte et plus compliquée.

Je me suis proposé de donner de ce troisième théorème une démonstration directe et simple, applicable à tous les cas. J'y suis parvenu (178, 274) grâce à l'emploi d'une notation symbolique très abrégée.

Je dois dire quelques mots sur le caractère de cette démonstration. Etant données les équations de structure, c'est à dire les régles de la composition des substitutions infinitésimales, j'ai cherché à en déduire les règles de la composition des substitutions finies. Or ces règles s'expriment par des séries infinies; j'ai reconnu que ces séries pouvaient se sommer par des formules où n'entrent pas d'autre transcendantes que des exponentielles.

Je me plaçais ainsi au point de vue formel, en introduisant des formules qui, faisant complètement abstraction de la «matière» du groupe, sont également applicables à tous les groupes isomorphes. Mais ces formules elles-mêmes nous font connaître les transformations que subissent les paramètres qui définissent une substitution du groupe lorsque l'on compare cette substitution avec une autre substitution du groupe. Ces transformations forment un groupe isomorphe à celui que l'on se proposait de former; ce groupe porte le nom de groupe paramétrique.

Nos formules nous permettent donc de former effectivement ce groupe paramétrique. Ainsi non seulement elles démontrent l'existence d'un groupe de structure donnée, mais elles donnent le moyen de le former effectivement. Lie avait démontré que la formation d'un pareil groupe pouvait se ramener à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinares. J'ai fait voir que non seulement on pouvait sans intégration former les substitutions infinitésimales du groupe, mais que dans le cas le plus défavorable, la formation des substitutions finies pouvait se ramener à une simple quadrature.

Dans le cas particulier auquel s'appliquait la première démonstration de LIE, les formules auxquelles on parvient sont assez simples, moins simples toutefois que celles de LIE. En tout cas, elles sont différentes et on ne voit pas immédiatement comment on peut passer des unes aux autres. La comparaison des deux sortes de formules n'en est que plus instructive. Elle nous fait retrouver un certain nombre de théorèmes de KILLING. L'étude des formules obtenues nous fait d'ailleurs, même dans le cas général, retomber sur ces mêmes théorèmes.

XIV. Algèbre de l'infini. (89, 91, 215.)

J'ai été conduit par diverses considérations à une généralisation de la théorie des déterminants et des procédés par lesquels on résout n équations linéaires à n inconnues.

Dans certaines questions d'Analyse on est conduit à envisager un système de relations que l'on peut regarder comme une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Soit un système de nombres donnés formant un tableau infini à double entrée. Je désignerai le terme général de ce tableau par la notation

$$a_{np} \quad (n, p = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Le problème à résoudre consiste à déterminer une infinité de nombres

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

de telle façon que les séries

$$S_p = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{np} x_n \quad (p = 1, 2, \ldots, \infty)$$

soient absolument convergentes et aient pour somme 0.

Ces équations linéaires, que l'on peut écrire

$$\Sigma_n a_{np} x_n = 0,$$

se rencontrent en particulier dans les circonstances suivantes:

1° Quand on cherche le quotient de deux séries trigonométriques;

2° Quand, ayant à intégrer une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des séries trigonométriques, on cherche à y satisfaire par une autre série trigonométrique.

Ce dernier problème se rencontre souvent en Mécanique céleste.

Jusqu'à ces derniers temps, on ne s'était pas préoccupé de savoir à quelles conditions les règles ordinaires du calcul pouvaient être appliquées à de semblables équations. Cependant deux savants, ayant rencontré ce même problème dans deux ordres de recherches très différents, n'ont pas hésité à employer les règles de l'Algèbre ordinaire.

L'un d'eux est M. APPELL, qui est arrivé à des équations de la forme que nous étudions en cherchant à développer les fonctions elliptiques en séries trigonométriques. Les traitant d'après les règles du fini, il est parvenu à des formules qui concordent avec les résultats bien connus où conduisent les autres méthodes.

D'un autre côté, M. HILL, en voulant déterminer le mouvement du périgée de la Lune, a appliqué aussi au problème qui nous occupe les procédés ordinaires de l'Algèbre. Cependant, le nombre auquel il arrive diffère très peu du nombre observé, et la faible divergence qui subsiste provient simplement de l'inclinaison de l'orbite que M. HILL avait négligée.

La hardiesse de M. APPELL et celle de M. HILL avaient donc été également heureuses; mais elles n'étaient justifiées que par le succès. Néanmoins ce succès lui-même devait faire désirer une étude rationnelle de la question.

C'est cette étude que j'ai entreprise dans deux courtes Notes insérées au *Bulletin de la Société mathématique de France* (89, 91). Je suis parvenu à démontrer rigoureusement que les équations considérées par MM. APPEL et HILL admettent effectivement les solutions trouvées par ces auteurs. Mais elles en admettent en même temps une infinité d'autres; elles ne suffisent donc pas pour déterminer les inconnues. M. APPELL, de même que M. HILL, cherchait à calculer les coefficients d'une série. Or ces coefficients ne devaient pas seulement satisfaire aux équations envisagées, ils devaient encore être tels que la série fût convergente. Or, parmi les solutions en nombre infini qui admettent ces équations, il se trouve qu'une seule remplit cette seconde condition, et c'est précisément celle des auteurs que je viens de citer.

C'est cette circonstance qui explique le succès obtenu par ces deux savants géomètres; leur méthode est maintenant à l'abri de toute objection; mais il est aisé de voir que les considérations qu'ils ont invoquées ne suffisaient pas pour la justifier.

Je vais maintenant parler des procédés qui m'ont fait parvenir à ces résultats. J'ai commencé par m'occuper du cas particulier où

$$a_{np} = a_n^p,$$

et j'ai reconnu que la solution du problème dépendait de la décomposition de la fonction méromorphe

$$\frac{1}{f(z)}$$

en fractions simples, en appelant $f(z)$ la fonction entière transcendante qui admet pour zéros les nombres a_n.

J'ai reconnu également qu'on peut faire usage de considérations analogues dans le cas général.

Enfin, j'ai rencontré un fait réellement inattendu et tout à fait particulier à cette théorie. Les égalités à traiter

$$\Sigma a_{np} x_n = 0,$$

qui sont en nombre infini, peuvent être remplacées par une infinité d'inégalités. Il suffit, en effet, pour que les nombres x_n satisfassent à ces équations, que certaines séries qui en dépendent soient absolument convergentes.

Dans l'étude de cette question, on est naturellement conduit à considérer des déterminants d'ordre infini. A cet effet, on écrira le tableau à double entrée des quantités a_{np}, on formera un déterminant avec les n premières lignes et les n premières colonnes de ce tableau, et l'on fera croître ainsi n indéfiniment. Il convient de supposer

$$a_{nn} = 1.$$

On doit alors se demander à quelle condition un pareil déterminant converge. J'ai trouvé pour ces déterminants une règle de convergence qui présente la plus grande analogie avec la règle relative aux produits infinis.

Mais en ce qui concerne l'application de la méthode de M. Hill à la Mécanique céleste toutes les difficultés n'étaient pas encore surmontées. Le déterminant de Hill dépend d'un certain paramètre. Il fallait démontrer d'abord que c'est une fonction entière de ce paramètre, puis que cette fonction entière se réduit à un cosinus.

J'y suis parvenu (279, Ch. XVII) par une application des mêmes principes; mais dans la première marche que j'ai suivie pour cela, il a été nécessaire de déterminer le genre de cette fonction entière et j'ai du pour cela me servir des théorèmes de M. Hadamard cités plus haut (Ch. VI). Pour éviter ce détour, j'ai cru devoir revenir (215) sur la même question et j'ai simplifié considérablement ma première démonstration.

XV. Arithmétique. (2, 4, 5, 8, 21, 51, 61, 79, 81, 82, 90, 98, 99, 191, 127, 193.)

Mes recherches arithmétiques ont presque exclusivement porté sur la théorie des formes. Je vais commencer par exposer les résultats que j'ai obtenus au sujet des formes quadratiques.

On sait (79) qu'on représente la forme quadratique définie

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, D = b^2 - ac < 0$$

par un réseau de parallélogrammes dont les sommets ont pour coordonnées

$$x\sqrt{a} + y\frac{b}{\sqrt{a}}, \ y\sqrt{\frac{-D}{a}}$$

ou bien encore

$$ax + by, y\sqrt{-D}.$$

Ce mode de représentation ne peut pas s'étendre aux formes indéfinies. Je représente alors la forme quadratique par le réseau dont les sommets ont pour coordonnées

$$ax + by, y,$$

mode de représentation qui s'applique à la fois aux formes définies et indéfinies. Je reconnus d'abord que les réseaux de parallélogrammes jouissent de propriétés analogues à celles des nombres, et j'ai esquissé une *arithmétique des réseaux* où l'on trouve des théories analogues à celles de la divisibilité, des plus grands communs diviseurs et des plus petits communs multiples et même des nombres premiers.

Ma manière de représenter les formes indéfinies me conduit à une définition nouvelle de la réduction de ces formes. L'unique condition de réduction, c'est que les coefficients extrêmes doivent être de signe contraire. Avec cette définition, la réduction continuelle d'une forme indéfinie est susceptible d'une interprétation géométrique très simple. Je représente une forme par un certain triangle T qui n'est autre, d'ailleurs, que le triangle fondamental de notre réseau de parallélogrammes. Si la forme est réduite, des deux droites $y = \pm x\sqrt{D}$, l'une traverse le triangle T, l'autre lui reste extérieure. Achevons le parallélogramme dont notre triangle est la moitié et partageons-le de nouveau en deux triangles en menant la seconde diagonale; de ces deux nouveaux triangles, un, et un seulement, sera traversé par l'une des droites $y = \pm x\sqrt{D}$. Ce triangle représentera la réduite contiguë à celle que représentait le triangle T. En poursuivant indéfiniment de la sorte, on trouve une série de triangles qui représentent la réduction continuelle de la forme envisagée.

On peut, au lieu des droites $y = \pm x\sqrt{D}$, considérer deux droites quelconques passant par l'origine. On trouve ainsi, appliquant les mêmes procédés à ces deux droites, une représentation géométrique des réduites successives d'une fraction continue. On est naturellement conduit à une généralisation immédiate. Passons, en effet, du plan à l'espace, remplaçons le réseau par un assemblage à la Bravais et, au lieu de deux droites, faisons-en passer trois par l'origine. Les mêmes considérations seront applicables, et l'on sera ainsi amené à une généralisation des fractions continues, à laquelle j'ai consacré une Note (51), mais qui, malheureusement, ne donne pas une approximation très rapide.

Il me reste, pour terminer l'analyse de mon Mémoire sur les formes quadratiques (79), à signaler deux résultats:

Je retrouve, en poursuivant l'étude de cette représentation géométrique, les lois de la composition des formes démontrées par Gauss.

Enfin, je termine ce Mémoire par l'étude des nombres idéaux, qui ont pour origine les formes quadratiques binaires.

On sait que, lorsqu'on fait subir à une forme algébrique des substitutions linéaires *quelconques*, certaines fonctions des coefficients demeurent inaltérées: ce sont les *invariants*. En dehors de ces invariants *algébriques*, dont l'étude a été poussée très loin, il y a, ainsi que je l'ai démontré (2, 98), d'autres fonctions des coefficients qui sont altérées quand on applique à la forme une substitution à coefficients fractionnaires ou incommensurables, mais qui se reproduisent au contraire quand on lui fait subir une substitution à coefficients entiers. Ce sont les invariants *arithmétiques*. Les formes linéaires binaires qui n'ont pas d'invariants algébriques ont, au contraire, des invariants arithmétiques dont l'étude se rattache à la théorie des fonctions elliptiques et à celle des fonctions modulaires et des fonctions fuchsiennes. Ces invariants peuvent être utilisés pour la solution des deux problèmes suivants:

1°. Trouver le plus petit nombre représenté par une forme quadratique binaire indéfinie;

2°. Reconnaître si deux formes quadratiques binaires indéfinies sont équivalentes.

A cet effet, on décompose chacune de ces formes en deux facteurs linéaires et l'on exprime en fonction des invariants de ces facteurs les coefficients de la substitution qui permet de passer d'une forme à l'autre, *à supposer qu'elles soient équivalentes*. Il est aisé ensuite de voir si les coefficients ainsi obtenus sont entiers et s'ils permettent effectivement de passer d'une forme à l'autre. Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, on serait certain qu'il n'y aurait pas équivalence.

Les formes quadratiques binaires définies ou indéfinies possèdent également des invariants arithmétiques dont j'ai étudié les propriétés. Pour que deux formes soient équivalentes, il faut et il suffit que tous leurs invariants soient égaux. Toutefois, pour reconnaître rapidement l'équivalence, il est préférable de décomposer chaque forme en deux facteurs linéaires et d'envisager les invariants de ce système de formes linéaires.

Tous ces invariants sont susceptibles d'être exprimés: 1° par des intégrales définies; 2° par des séries.

L'un des problèmes les plus importants qui se posent au sujet des formes quadratiques ternaires indéfinies est l'étude des propriétés des groupes discontinus formés par les «substitutions semblables», c'est-à-dire par les substitutions linéaires qui n'altèrent pas ces formes (99, 61). Soit $F(x, y, z)$ une forme quadratique indéfinie. On peut choisir la constante K de telle façon que $F(x,y,z)=K$ représente un hyperboloïde à deux nappes. Les substitutions semblables changeront alors un point de cet hyperboloïde en un autre point de cette même nappe, de sorte que, le groupe étant discontinu, l'hyperboloïde se trouvera partagé en une infinité de polygones curvilignes, dont les côtés seront des sections diamétrales de la surface. Les substitutions semblables changeront ces polygones les uns dans les autres. Faisons maintenant une perspective en plaçant l'œil en un ombilic de la surface et prenant pour plan du tableau une section circulaire. Une nappe de l'hyperboloïde se projettera suivant un cercle, et les polygones que nous avons tracés sur cette nappe se projetteront suivant des polygones curvilignes, limités par des arcs de cercle reproduisant identiquement la figure dont nous avons parlé (p. 44 et suivantes), à propos de la théorie des groupes fuchsiens. Ainsi, l'étude des groupes de substitutions semblables des formes quadratiques est ramenée à celle des groupes fuchsiens, ce qui est un rapprochement inattendu entre deux théories très différentes et une application nouvelle de la Géométrie non euclidienne.

Après avoir signalé un certain nombre de propriétés de ces groupes fuchsiens particuliers, j'ai abordé une question un peu différente.

Les substitutions semblables sont celles qui reproduisent une forme quadratique et qui en même temps appartiennent au groupe G des substitutions à coefficients entiers. On peut rechercher alors les substitutions qui reproduisent la forme quadratique et qui en même temps appartiennent à un autre groupe, par exemple à un sous-groupe du groupe G. Cela nous permet en même temps de généraliser la théorie de l'équivalence des formes et de leur réduction.

On obtient aisément des groupes de ces substitutions semblables généralisées et l'on reconnaît que ce sont encore des groupes fuchsiens. En réfléchissant ensuite aux relations de ces divers groupes fuchsiens, j'ai démontré que les fonctions fuchsiennes correspondantes jouissent d'une propriété analogue au théorème d'addition des fonctions elliptiques, ce qui n'est pas vrai des fonctions fuchsiennes les plus générales.

Passons maintenant aux formes d'ordre supérieur au second (81). Le premier problème à résoudre est la réduction de ces formes et l'étude des conditions de leur équivalence. La solution a été trouvée par M. HERMITE; bien que le savant géomètre n'ait parlé que des formes binaires et des formes quadratiques, sa méthode s'applique, sans qu'on ait rien à y changer, à une forme tout à fait quelconque. C'est ainsi que M. JORDAN, étendant à un cas très général un théorème de M. HERMITE, a démontré que, toutes les fois que le discriminant n'est pas nul, toutes les formes qui ont mêmes invariants algébriques se répartissent en un nombre fini de classes. J'ai moi-même généralisé le théorème de M. JORDAN, en montrant qu'il subsiste, pourvu que certains invariants ne soient pas tous nuls à la fois.

J'ai cherché ensuite à appliquer la méthode générale aux formes cubiques ternaires que j'avais déjà étudiées au point de vue algébrique dans un Mémoire précédent. Je suis arrivé à trouver les limites supérieures des coefficients d'une réduite dont les invariants sont donnés, pourvu que le discriminant ne soit pas nul. Le nombre des classes est alors limité et, dans chaque classe, il n'y a qu'une réduite.

Lorsque la forme égalée à zéro représente une courbe de quatrième classe, le discriminant est nul et le nombre des classes est infini, mais chacune d'elles ne contient qu'une réduite. Si la courbe est de troisième classe, le nombre des classes est infini et chacune d'elles contient un nombre fini de réduites formant *une chaîne limitée à ses deux extrémités*. Si la courbe se décompose en une conique et une droite qui la coupe, le nombre des classes est tantôt fini et tantôt infini; de plus, la chaîne formée par les réduites d'une même classe est, tantôt limitée comme dans le cas précédent, tantôt illimitée de telle façon que les mêmes réduites s'y reproduisent périodiquement. Si enfin la droite est tangente à la conique, les réduites ne forment plus une chaîne, mais un réseau.

J'ai ensuite appliqué la même méthode, non plus à une forme unique, mais à un système de formes, et j'ai choisi comme exemple le système d'une forme quadratique ternaire et d'une forme (5, 82) linéaire dont j'ai étudié la *réduction simultanée*. La réduction continuelle d'un pareil système de formes est tout à fait analogue à celle d'une forme unique. Elle peut servir également à déterminer les substitutions semblables du système. Ces substitutions semblables existent toujours; mais, ayant voulu, dans un exemple particulier, calculer les coefficients de la plus simple d'entre elles, j'ai trouvé des nombres entiers de plus de huit chiffres.

Les lois de la réduction d'une forme quelconque étant connues, il est facile de reconnaître si deux formes sont équivalentes; mais ce n'est là qu'un premier pas. Le principal problème à résoudre, c'est de rechercher si un nombre donné peut être représenté par une forme donnée. Je me suis occupé spécialement de la représentation par une forme binaire (8, 90). Égalant la forme binaire à 0, on en tire pour le rapport $\frac{x}{y}$ une certaine valeur. Avec cette valeur, je forme un système de nombres complexes et d'idéaux. Le problème de la représentation des nombres par les formes se ramène à la recherche des idéaux de norme donnée. J'ai donné, en me fondant sur les mêmes principes que dans mon Mémoire intitulé *Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques*, la manière de former tous les idéaux de norme N, de former tous les idéaux premiers et leurs puissances, de multiplier deux idéaux, de décomposer un idéal en facteurs premiers, etc. Pour cela j'envisage une certaine congruence, que je décompose en facteurs irréductibles. A chacun de ces facteurs irréductibles correspond un idéal.

On trouve toutes les représentations d'un nombre donné quand on connaît tous les idéaux dont la norme est le nombre donné, mais tous ces idéaux ne donnent pas naissance à une représentation du nombre. Il importerait donc de savoir distinguer *a priori* quels sont les idéaux qui conduiront à une pareille représentation. Tout ce que j'ai pu faire dans ce sens a été de montrer qu'ils devaient tous se trouver parmi les idéaux auxquels correspond un facteur irréductible *linéaire* de la congruence dont j'ai parlé plus haut (et par conséquent une racine *réelle* de cette congruence).

Dans deux Notes que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie les 9 et 16 janvier 1882, j'ai cherché quelle était la véritable signification de la notion de genre définie par Gauss pour les formes quadratiques binaires et étendue par Eisenstein aux formes quadratiques ternaires, et je suis arrivé à en donner les définitions suivantes:

1°. Deux formes sont équivalentes suivant le module n, si l'on peut appliquer à la première de ces formes une substitution à coefficients entiers, telle que les coefficients de la transformée ainsi obtenue ne diffèrent de ceux de la seconde forme que par des multiples de n;

2°. Deux formes sont de même genre lorsqu'elles sont équivalentes suivant un module quelconque.

Il est clair que cette définition peut s'appliquer à des formes tout à fait quelconques auxquelles j'ai étendu également la définition de l'*ordre*. J'ai appliqué ces principes aux formes quadratiques quaternaires et cubiques binaires.

Dans un autre ordre d'idées, j'ai cherché à généraliser l'élégante méthode de TCHEBICHEFF pour l'étude de la distribution des nombres premiers. J'ai reconnu qu'elle pouvait s'appliquer presque sans changement aux nombres complexes de la forme $a + b\sqrt{-1}$ (127, 193). Au point de vue des nombres réels, cela permet de comparer la distribution des nombres premiers de la forme $4n + 1$ à celle des nombres premiers de la forme $4n + 3$.

XVI. Analysis Sitûs. (134, 139, 177, 199, 222, 243.)

L'Analysis Sitûs est la science qui nous fait connaître les propriétés *qualitatives* des figures géométriques non seulement dans l'espace ordinaire, mais dans l'espace à plus de trois dimensions.

L'Analysis Sitûs à 3 dimensions est pour nous une connaissance presque intuitive, L'Analysis Sitûs à plus de 3 dimensions présente au contraire des difficultés énormes; il faut pour tenter de les surmonter être bien persuadé de l'extrême importance de cette science.

Si cette importance n'est pas comprise de tout le monde, c'est que tout le monde n'y a pas suffisamment réfléchi. Mais que l'on pense aux avantages qu'ont tirés les analystes des représentations géométriques, même dans des questions d'Analyse Pure et d'Arithmétique; que l'on estime le soulagement que ces méthodes ont procuré à l'esprit des chercheurs. Combien il est regrettable que cet instrument merveilleux se trouve hors d'usage dès que le nombre des dimensions surpasse trois.

RIEMANN, qui avait fait de cet instrument l'usage que l'on sait, avait bien compris combien il serait important d'y suppléer et on a retrouvé dans ses papiers quelques notes, malheureusement un peu informes mais qui servent encore aujourd'hui de base à toutes nos connaissances sur l'Analysis Sitûs à plus de trois dimensions.

On a dit, écrivais-je (ou à peu près) dans une préface (199), que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites. Oui, sans doute, mais à une condition. Les proportions de ces figures peuvent être grossièrement altérées, mais leurs éléments ne doivent pas être transposées et ils doivent conserver leur situation relative. En d'autres termes, on n'a pas à s'inquiéter des propriétés quantitatives, mais on doit respecter les propriétés qualitatives, c'est à dire précisément celles dont s'occupe l'Analysis Sitûs.

Cela doit nous faire comprendre qu'une méthode qui nous ferait connaître les relations qualitatives dans l'espace à plus de trois dimensions, pourrait, dans une certaine mesure, rendre des services analogues à ceux que rendent les figures. Cette méthode ne peut être que l'Analysis Sitûs à plus de trois dimensions.

Malgré tout, cette branche de la science a été jusqu'ici peu cultivée. Après Riemann est venu Betti qui a introduit quelques notions fondamentales; mais Betti n'a été suivi par personne.

Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis Sitûs. J'avais besoin des données de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles (vide supra § V) et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et en particulier à celles du problème des trois corps. J'en avais besoin pour l'étude des fonctions non uniformes de 2 variables. J'en avais besoin pour l'étude des périodes des intégrales multiples et pour l'application de cette étude au développement de la fonction perturbatrice.

Enfin j'entrevoyais dans l'Analysis Sitûs un moyen d'aborder un problème important de la théorie des groupes, la recherche des groupes discrets ou des groupes finis contenus dans un groupe continu donné.

C'est pour toutes ces raisons que je consacrai à cette science un assez long travail (134, 139, 199). Je commence par donner plusieurs définitions des variétés de l'espace à plus de trois dimensions et par introduire la notion fondamentale de l'homéomorphisme qui est la relation de deux variétés qui ne sont pas distinctes au point de vue de leurs propriétés qualitatives.

Je suis amené ensuite à distinguer les variétés bilatères analogues aux surfaces ordinaires et les variétés unilatères analogues aux surfaces à un seul côté.

Betti avait découvert certains nombres entiers relatifs aux variétés; analogues à ce qu'est pour une surface ordinaire ce qu'on appelle l'ordre de connexion. On sait que l'ordre de connexion d'une surface fermée dépend du nombre de trous qui y sont percés, de sorte que cet ordre est toujours impair, 1 pour une sphère, 3 pour un tore etc. On sait également quelle relation il y a entre le genre d'une courbe algébrique et l'ordre de connexion de la surface de Riemann correspondante.

J'ai fait voir que si l'on écrit la série des nombres de Betti pour une surface fermée, les nombres également distants des extrêmes sont égaux.

M. Heegaard ayant attiré mon attention sur certains exemples où ce théorème paraissait en défaut, je revins sur la même question dans un autre travail

(222). La définition que j'avais donnée des nombres de BETTI ne concordait pas toujours avec celle qu'avait donnée BETTI lui-même. Le théorème, vrai pour les nombres de BETTI tels que je les avais définis, ne l'est pas toujours pour les nombres tels que BETTI les définissait lui-même.

On sait que l'ordre de connexion suffit pour déterminer une surface ordinaire au point de vue de l'Analysis Sitûs, c'est à dire que deux surfaces qui ont même ordre de connexion sont homéomorphes. On pouvait supposer que les nombres de BETTI suffisaient de même pour déterminer une variété. J'ai montré (199) qu'il n'en est rien, qu'à chaque variété correspond un groupe, nécessaire à sa détermination, et qu'à une même suite de nombres de BETTI ne correspond pas toujours un même groupe.

J'ai cru devoir multiplier les exemples, pensant que c'était le meilleur moyen de familiariser les esprits avec des idées aussi nouvelles.

On sait qu'EULER a démontré une relation entre le nombre des faces, des arêtes et des sommets d'un polyèdre convexe. Pour les polyèdres non convexes, il y a une relation analogue entre ces trois nombres et l'ordre de connexion. Existe-t-il des relations du même genre entre des éléments des polyèdres de l'espace à plus de trois dimensions? C'est la question que je me suis posée (199) et que j'ai résolue affirmativement, en faisant usage de plusieurs démonstrations distinctes. Il est à remarquer que si le nombre des dimensions de l'espace est pair, cette relation ne dépend pas des nombres de BETTI et qu'elle en dépend au contraire si le nombre des dimensions est impair.

Ces théorèmes sur les polyèdres ont une portée assez générale, car une variété fermée quelconque peut toujours être découpée en polyèdres; rectilignes ou curvilignes, cela n'importe pas au point de vue de l'Analysis Sitûs. Dans mes travaux ultérieurs (222, 243) j'ai généralement trouvé plus commode de supposer effectuée cette décomposition en polyèdres.

Il peut y avoir entre les figures tracées sur une variété, et en particulier entre les éléments d'un polyèdre, plusieurs sortes de relations qui sont susceptibles d'être représentées algébriquement par des équations symboliques et d'être combinées ensuite d'après les règles de l'algèbre ou d'après des règles analogues. J'ai appelé ces relations congruences, homologies, équivalences. Les congruences expriment tantôt que l'ensemble de tels éléments constitue une variété fermée, tantôt au contraire que cet ensemble constitue une variété ouverte dont la frontière complète est formé par l'ensemble de tels autres éléments.

Les homologies fondamentales expriment que l'ensemble de tels éléments constitue une variété fermée qui est la frontière complète d'une autre variété qui doit avoir une dimension de plus, mais qui reste indéterminée. Les homologies dérivées se déduisent des homologies fondamentales, mais il importe de distinguer celles qui s'en déduisent par addition et multiplication et celles qui s'en déduisent par division.

Les équivalences diffèrent des homologies parce qu'on ne se donne pas le droit d'y intervertir l'ordre des termes. C'est la considération de ces équivalences qui conduit au groupe dont j'ai parlé plus haut.

Toutes ces relations se présentent sous la forme d'équations linéaires à coefficients entiers. L'étude d'une variété se trouve ainsi ramenée à celle d'un certain nombre de tableaux formés de nombres entiers. Ces tableaux varient évidemment selon la manière dont la variété a été découpée en polyèdre; mais cependant tous les tableaux différents que l'on peut obtenir ainsi conservent certains caractères communs que l'on peut appeler invariants et qui restent les mêmes quelle que soit la manière dont la variété est découpée. Ces invariants sont les plus grands communs diviseurs de certains déterminants formés avec les éléments des tableaux.

Grâce à cette représentation arithmétique, les démonstrations deviennent plus faciles à suivre et j'ai pu ajouter divers résultats à ceux que j'avais déjà obtenus. Par exemple pour que les deux définitions des nombres de Betti coïncident, il faut et il suffit que tous les invariants soient égaux à o ou à 1; ou encore que le système des homologies obtenues par division n'en contienne pas que l'on ne puisse obtenir sans division; ou enfin que le polyèdre ne soit pas tordu, c'est à dire que toutes les variétés que l'on peut former avec ses éléments soient bilatères.

QUATRIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE CÉLESTE.

XVII. Généralités sur les Equations de la Dynamique et de la Mécanique Céleste. (164, 166, 183, 187, 278, 280.)

Les équations de la Dynamique présentent des propriétés remarquables qui ont été mises en évidence par JACOBI dans ses Vorlesungen.

Quelles sont les conséquences plus ou moins immédiates de ces propriétés? Quel partie peut-on en tirer pour la mise en équation des problèmes de Dynamique et en particulier des problèmes de Mécanique Céleste? Telle est la première question dont je veux parler ici.

J'ai été amené à passer en revue les principales propriétés des équations canoniques (183, 278). Les propriétés sont classiques; et je n'ai eu qu'a perfectionner certains détails; en me servant surtout du caractère bien connu qui permet de reconnaître si un changement de variables conserve la forme canonique des équations.

Ce genre de transformations facilite la mise en équation du problème des trois corps; c'est ce que j'ai montré (164, 187). On sait que dans le procédé classique on rapporte toutes les planètes à des axes mobiles passant par le Soleil. L'inconvénient est que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour toutes les planètes. Un autre procédé consiste à rapporter chaque planète au centre de gravité du système formé par le Soleil et toutes les planètes inférieures à celle que l'on considère. L'inconvénient est évité, mais la fonction perturbatrice est un peu plus compliquée. J'ai proposé un troisième procédé, dans lequel les coordonnées de chaque planète sont rapportées au Soleil, et sa vitesse à des axes fixes.

Malgré les travaux dont les équations canoniques ont été l'objet depuis JACOBI, toutes leurs propriétés ne sont pas connues, ou plutôt on n'a pas insisté sur toutes les formes que peuvent revêtir ces propriétés et qu'il peut être utile de connaître. Si par exemple on étudie les équations aux variations des équations de la Dynamique, c'est à dire les équations qui définissent une solution infiniment peu différente d'une solution donnée, on rencontre des propositions importantes sur lesquelles j'ai attiré l'attention (183, 278).

D'un autre côté, j'ai été amené à introduire une notion nouvelle, celle des invariants intégraux (183, 280). Ce sont certaines intégrales définies simples ou multiples qui demeurent constantes, quand le champ d'intégration varie conformément à une certaine loi définie par une équation différentielle. Si par exemple on envisage les équations différentielles au mouvement d'un fluide incompressible, le volume est un invariant intégral.

Les équations canoniques de la Dynamique possèdent des invariants intégraux remarquables et l'existence de ces invariants jette une grande lumière sur leurs propriétés.

Pour en finir avec ces généralités sur les équations de la Dynamique et le problème des 3 corps, je signalerai un dernier travail (166). On sait que Bruns a démontré que le problème des 3 corps ne saurait admettre d'autre intégrale algébrique que les intégrales classiques. Malheureusement dans sa démonstration subsistait une lacune grave et particulièrement délicate à combler. J'ai été assez heureux pour mettre la belle et ingénieuse démonstration de M. Bruns à l'abri de toute objection.

XVIII. Problème des Trois Corps; Propriétés qualitatives.

(38, 92, 163, 167, 183, 204, 278, 280.)

Ce qui va suivre est le développement naturel des méthodes dont il a été question plus haut au § V et leur application à la Mécanique Céleste.

J'ai montré de diverses manières (183, 278) qu'en dehors des intégrales classiques le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale analytique et uniforme, et il en résultait que la plupart des séries proposées jusqu'ici pour l'intégration de ce problème, de même que celles dont il sera question dans le § suivant ne sont pas convergentes et ne peuvent être utitisées que dans un calcul approché.

D'après ce qui précède, il semble qu'il soit impossible en général d'exprimer les distances mutuelles des astres par des séries purement trigonométriques convergentes. Mais il est des cas particuliers où les séries auxquelles on est conduit ne contiennent qu'un seul argument et où leur convergence est évidente. En effet, j'ai démontré (38, 92) que, dans le problème des trois corps, on peut choisir les éléments initiaux du mouvement, de telle façon que les distances mutuelles des trois masses soient des fonctions périodiques du temps. On est ainsi amené à une solution particulière du problème, que l'on peut appeler *périodique*.

Ces solutions périodiques sont de trois sortes: dans les unes, les inclinaisons sont nulles et les excentricités très petites; dans d'autres, les inclinaisons sont nulles et les excentricités finies; dans d'autres, enfin, les inclinaisons sont finies et les excentricités très petites.

Je suis revenu (183, 278) sur ces solutions périodiques et je les ai étudiées en détail. Les procédés dont je me suis servi pour démontrer leur existence sont très simples et se ramènent au calcul des Limites.

Mais on peut arriver à cette démonstration par une voie toute différente, qu'il pourra être souvent utile d'adopter, mais dont je n'ai pas encore tiré tout le parti possible. Supposons par exemple que l'on recherche les géodésiques d'une surface indéfinie présentant la même forme générale qu'un hyperboloïde à une nappe. On sera certain alors qu'il doit y avoir une géodésique fermée (correspondant à une solution périodique) parce que parmi toutes les courbes fermées que l'on peut tracer sur la surface, et qui en font le tour il doit y en avoir une qui est plus courte que toutes les autres.

Les mêmes principes sont susceptibles d'être appliqués à divers problèmes de Mécanique, grâce au principe de moindre action que l'on peut employer soit sous la forme que lui a donnée Hamilton, soit sous celle que lui a donnée Maupertuis. Je n'ai fait qu'esquisser cette méthode dont il y a sans doute encore beaucoup à tirer.

Outre les solutions périodiques, les équations du problème des 3 corps admettent aussi d'autres solutions remarquables que j'appelle asymptotiques (183, 278). Ce qui caractérise ces solutions c'est qu'elles se rapprochent indéfiniment d'une solution périodique, ou bien qu'elles s'éloignent sans cesse d'une solution périodique dont elles sont infiniment rapprochées pour $t = -\infty$.

D'autres solutions remarquables sont plus difficiles encore à apercevoir (280). Je citerai d'abord les solutions périodiques de 2e espèce, caractérisées par ce fait que deux des corps se rapprochent périodiquement de façon à presque se choquer.

Nous avons encore les solutions périodiques de 2e genre; si l'on fait varier d'une manière continue un des paramètres dont dépend le problème, par exemple l'une des masses, on voit une solution périodique du 1er genre se déformer l'une façon continue, sa période restant égale à T. A un certain moment, cette solution se dédouble pour ainsi dire, ou plutôt se détriple, je veux dire qu'à un certain moment on a trois solutions périodiques très peu différentes; l'une d'elles a encore pour période T, les deux autres ont pour période un multiple de T. Ce sont les solutions périodiques du 2e genre.

Je parlerai enfin des solutions doublement asymptotiques. Pour $t = -\infty$, elles sont infiniment voisines d'une solution périodique, puis elles s'en éloignent beaucoup, ensuite elles s'en rapprochent de nouveau de telle sorte que pour $t = +\infty$, elles en sont encore infiniment voisines.

Pour étudier les propriétés et les rapports de ces différentes solutions, je me suis servi des invariants intégraux. Ces rapports sont très compliqués de sorte que cette étude est éminemment propre à mettre en évidence la difficulté du problème des Trois Corps.

Je n'ai pu résoudre rigoureusement et complètement le problème de la stabilité du système Solaire, en entendant ce mot dans un sens strictement mathématique. L'emploi des invariants intégraux m'a cependant permis (183, 280) d'atteindre certains résultats partiels, s'appliquant surtout au problème dit restreint, où les deux corps principaux circulent dans des orbites sans excentricité, pendant que le corps troublé a une masse négligeable. Dans ce cas, si on laisse de côté certaines trajectoires exceptionnelles, dont la réalisation est infiniment peu probable, on peut démontrer que le système repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa situation initiale. C'est ce que j'ai appelé la stabilité à la POISSON.

XIX. Problème des Trois Corps; Développements approchés et applications.
(47, 97, 115, 133, 149, 158, 159, 183, 208, 210, 214, 215, 216, 279.)

Tous les théorèmes dont il a été question dans le § précédent ont un caractère commun, ils sont rigoureux. Ceux dont je vais parler maintenant ne seront en général qu'approchés et auront par conséquent avant tout un intérêt pratique. Ce sont cependant les seuls dont les astronomes fassent et puissent faire effectivement usage.

Dans quelles conditions ces séries divergentes peuvent-elles être utilisées avec succès? C'est ce que j'ai cherché à éclaircir (279, Chapitre intitulé calcul formel). J'ai montré dans quelles limites, cet emploi est légitime, comme l'est, pour citer un exemple célèbre, celui de la série de STIRLING et j'ai fait voir que les règles du calcul de ces séries sont les mêmes que celles de séries ordinaires.

J'ai justifié ainsi l'emploi que font les astronomes de ce genre de développements; et en particulier des développements trigonométriques. J'ai cherché en outre à perfectionner les méthodes qui permettent de les former.

Rappelons en quelques mots comment le problème se pose.

On ne peut résoudre le problème des n corps que par approximations successives, et la première idée qui s'est présentée a consisté à développer les coordonnées des astres en séries ordonnées suivant les puissances des masses. C'est sur cette idée qu'est fondée toute la Mécanique céleste ancienne. Mails quels que soient les services qu'aient rendus autrefois ces anciens procédés et qu'ils soient capables de rendre encore, on n'a pas tardé à s'apercevoir de leur insuffisance et de leur impuissance à donner une approximation indéfinie. Dans les développements auxquels ils conduisent, on voit en effet le temps entrer non seulement sous les signes sinus et cosinus, mais en dehors de tout signe trigonométrique. Ce fait suffit pour démontrer que le champ, où les anciennes méthodes conservent leur efficacité, quelque étendu qu'il puisse être, est certainement limité.

C'est ce qui explique les efforts qu'ont faits les géomètres pour remplacer les séries anciennes par des développements purement trigonométriques. Dans ces derniers temps, on a proposé deux méthodes remarquables qui paraissent atteindre complètement ce but. La première est celle de M. GYLDÉN, qui est fondée sur l'emploi des fonctions elliptiques; la seconde est celle de M. LINDSTEDT, dont je me suis surtout occupé.

Dans cette dernière méthode, un artifice ingénieux permet à chaque approximation de faire disparaître les termes séculaires qui peuvent s'être introduits. Il est aisé de voir que cet artifice réussira toujours s'il n'y a qu'un terme à faire disparaître; mails il n'en serait plus de même s'il s'était introduit à la fois deux termes séculaires. Il est facile de vérifier d'ailleurs que, dans les premières approximations, on n'a à se débarrasser que d'un seul terme; mais on peut se demander s'il doit en être toujours ainsi. Un examen superficiel pourrait faire croire le contraire, et même M. LINDSTEDT était disposé à penser que sa méthode ne réussirait que s'il n'y avait entre les arguments aucune relation linéaire.

Je suis parvenu à démontrer que le terme séculaire qui peut apparaître à chaque approximation est toujours unique et que, par conséquent, la méthode de M. LINDSTEDT est toujours applicable (97). Pour cela, j'ai eu recours à un théorème qui semblait ne se rapporter en aucune façon à la question, c'est-à-dire au théorème de GREEN.

J'aurais pu également, comme je l'ai fait ensuite, (115, 133) employer les invariants intégraux ou bien me servir des théorèmes de JACOBI sur les équations de la Dynamique.

La méthode de M. NEWCOMB est fondée sur les mêmes principes; mais elle s'applique plus naturellement aux cas les plus généraux du problème des Trois Corps. J'y ai apporté de notables perfectionnements (183, 279, 208). La même question se posait que pour la méthode de M. LINDSTEDT. On pouvait disposer de certaines arbitraires pour faire disparaître les termes séculaires; mais il y avait deux fois plus de termes à faire disparaître que d'arbitraires. Heureusement chaque fois que l'on fait disparaître l'un de ces termes, un autre disparaît spontanément. Je me suis servi de la méthode de JACOBI (279), pour démontrer cette disparition spontanée et la possibilité du développement. Une fois cette possibilité établie, j'ai donné (279, Chapitre XIV) le moyen de former effectivement et directement les séries.

Il y avait là toutefois un grave inconvénient, puisqu'il fallait dans deux analyses entièrement séparées, démontrer la possibilité du développement et en calculer les coëfficients. Ayant remarqué qu'une certaine expression devait être différentielle exacte, j'en ai profité pour modifier la méthode (279, Chapitre XV). Certaines intégrations peuvent être évitées et remplacées par des différentiations ou des opérations algébriques; il en résulte d'abord que la possibilité du développement devient presque évidente. De plus les calculs sont simplifiés. La partie la plus pénible du calcul, bien qu'elle ne présente aucune difficulté théorique, c'est en effet la substitution des valeurs approchées des variables dans les deux membres des équations différentielles. La méthode nouvelle permet de diminuer de près de moitié le nombre de ces substitutions.

Mais on peut aller plus loin encore dans cette voie. C'est ce que j'ai montré plus tard (208). Je me suis servi d'une expression différentielle exacte analogue à celle dont je viens de parler et j'ai pu diminuer encore le nombre des substitutions et des intégrations. On remarquera que le théorème de POISSON (invariabilité des grands axes en tenant compte du carré des masses) devient presque intuitif.

Tous ces procédés se trouvent en défaut quand les moyens mouvements sont près d'être commensurables. Il faut alors employer une méthode dérivée de celle de DELAUNAY. Dans l'invention première de cette méthode, j'ai été devancé de quelques jours par M. BOHLIN, mais j'y ai apporté divers perfectionnements en me servant toujours des mêmes principes. Je me bornerai à dire que cette méthode permet de discuter les cas singuliers dits «de libration» où il y a commensurabilité exacte entre certains mouvements moyens.

Quelle relation y a-t-il entre toutes ces méthodes et avec les anciens procédés? Telle est la question que je me suis posée (210) et j'ai montré qu'on pouvait envisager certaines séries qui embrassent pour ainsi dire toutes ces méthodes. En groupant les termes d'une certaine manière, on retombera sur les anciennes méthodes. Avec d'autres modes de groupement, on tombera sur la méthode de NEWCOMB, ou bien encore sur celle de BOHLIN.

Tous ces procédés s'appliquent naturellement à la Lune. Dans la théorie de cet astre, ils sont même plus nécessaires que partout ailleurs. C'est dans les théories lunaires les plus récentes, comme celles de HILL et de BROWN, que l'on voit le mieux l'importance des solutions périodiques dont j'ai parlé plus haut. J'ai donné (214) une méthode pour déterminer le mouvement du perigée de la Lune qui diffère de celle de HILL. Mais j'attirerai plutôt l'attention sur un autre mémoire (216) où j'applique à notre satellite les procédés du mémoire 208. Ces procédés seraient surtout utiles pour obtenir un développement *purement littéral* des coordonnées de la Lune. J'ai signalé en passant diverses circonstantes curieuses et presque paradoxales.

Toutes les séries dont je viens parler ne peuvent être employées qu'au point de vue du calcul formel et par conséquent du calcul approché. J'ai insisté à diverses reprises sur ce point important (183, 278, 279, 158, 159).

Toutes ces méthodes si diverses peuvent être employées pour se servir mutuellement de vérification, sans trop de calculs supplémentaires. Je citerai surtout un procédé de vérification fondé sur l'emploi des invariants intégraux (149).

XX. Développement de la Fonction Perturbatrice.

(120, 168, 173, 196, 206, 207, 209, 278.)

Je me suis occupé de la fonction perturbatrice à plusieurs points de vue différents.

J'ai d'abord cherché la valeur approchée des coëfficients des termes de rang très élevé. M. FLAMME avait déjà employé pour cet objet la méthode de M. DARBOUX sur les fonctions de très grands nombres. Mais comme cette méthode sous sa forme primitive ne s'appliquait qu'aux fonctions d'une seule variable, M. FLAMME devait donc décomposer chaque terme en une somme de produits, où chacun des facteurs ne dépendait que d'une seule anomalie moyenne. J'ai préféré considérer directement la fonction comme dépendant des deux anomalies moyennes. Des procédés analogues, sont encore, comme je l'ai montré, applicables dans ce cas. Seulement ils exigent une discussion; j'ai donné les principes qui doivent diriger cette discussion et j'en ai fait l'application dans un cas simple (278).

On peut aussi considérer chaque coëfficient comme fonction des excentricités et des inclinaisons, étudier les divers modes de développement de ces fonctions et chercher les conditions de leur convergence. Les conditions auxquelles j'arrive (209) sont relativement simples.

On peut enfin chercher s'il y a des relations entre les divers coëfficients. J'en ai trouvé un certain nombre (196, 206, 207).

Dans toutes ces recherches je me suis servi des relations de ces coëfficients avec les périodes de certaines intégrales doubles.

XXI. Equilibre d'un fluide en rotation et figure des planètes.

(54, 56, 63, 72, 94, 95, 96, 108, 111, 203, 212.)

Je me suis occupé également d'une autre question de Mécanique céleste que l'on peut énoncer ainsi:

Une masse fluide homogène ou hétérogène est animée d'un mouvement de rotation autour d'un certain axe. De plus, ses molécules s'attirent d'après la loi de NEWTON. Quelles sont les formes d'équilibre qu'elle peut affecter?

C'est là un problème qui a beaucoup occupé les géomètres depuis plus d'un siècle et demi, et dont l'importance se comprend sans peine.

Dans le cas de l'homogénéité, auquel nous nous restreindrons, deux solutions étaient depuis longtemps connues: l'ellipsoïde de révolution et l'ellipsoïde à trois axes inégaux de JACOBI. Mais les conditions de stabilité de l'équilibre n'avaient pas été étudiées.

On ignorait s'il y avait d'autres formes possibles quand M. MATHIESSEN et, après lui, Sir W. THOMSON, annoncèrent l'existence de figures annulaires d'équilibre. Mais la démonstration donnée par ces deux savants n'était pas parfaitement rigoureuse; d'ailleurs, M. MATHIESSEN supposait *a priori* que la section différait très peu d'une ellipse. J'ai montré (63) que cette hypothèse, légitime quand la section de l'anneau est très petite, est erronée dans le cas général, ce qui rend très douteuse l'existence de certains anneaux très aplatis que le savant de Rostock avait appelés *anneaux* β.

J'ai donc cru nécessaire de faire une étude plus approfondie de ces figures (54, 94, 95). J'ai mis à l'abri de toute objection la démonstration de leur existence et montré comment on peut en déterminer les principaux éléments avec une approximation indéfinie.

Pour la détermination de ces éléments, j'ai fait usage d'une méthode que M[me] KOWALEVSKI avait déjà employée dans son Mémoire sur l'anneau de Saturne et qui est fondée sur le développement des périodes d'une fonction elliptique en séries ordonnées suivant les puissances croissantes du module.

Il convient d'observer que ces anneaux sont des figures d'équilibre instable.

Dans un Mémoire plus étendu (72), j'ai repris la même question, en développant les résultats obtenus dans deux Notes antérieures (56). Une première difficulté se présentait sur ma route. Quand il s'agit d'intégrer de simples équations différentielles, la méthode des approximations successives est parfaitement justifiée, parce que l'existence de l'intégrale a été tout d'abord rigoureusement démontrée. Il n'en est plus de même dans le problème actuel qui est beaucoup plus compliqué; il peut rester au sujet de la légitimité de cette méthode quelques doutes qu'il s'agissait d'abord de dissiper. Pour démontrer rigoureusement l'existence des diverses solutions du problème, j'ai employé un procédé tout à fait analogue à celui dont j'avais fait usage dans mes recherches sur les solutions périodiques du problème des trois corps et où je prends pour point de départ un théorème de M. KRONECKER.

On reconnaît d'abord que les diverses figures d'équilibre d'une masse fluide forment des séries linéaires; dans une même série, ces figures dépendent d'un paramètre variable. Telles sont la série des ellipsoïdes de révolution et celle des ellipsoïdes de JACOBI. Mais il peut arriver qu'une même figure appartienne à la fois à deux séries différentes. C'est alors une figure d'*équilibre de bifurcation*.

A chaque figure est attachée une suite infinie de coefficients, que j'appelle *coefficients de stabilité*, parce que la condition de la stabilité, c'est qu'ils soient tous positifs. Quand un de ces coefficients s'annule, c'est que la figure correspondante est de bifurcation.

Ainsi, si en suivant une série de figures d'équilibre on voit s'annuler un des coefficients de stabilité, on saura qu'il existe une autre série de formes d'équilibre à laquelle appartient la figure de bifurcation.

Un autre résultat, c'est que les deux séries linéaires dont cette figure fait partie échangent leur stabilité. Si, en suivant l'une des séries, on ne rencontre que des équilibres stables jusqu'à la figure de bifurcation, on n'y trouvera plus ensuite que des figures instables. Les figures stables appartiendront à l'autre série.

Ces principes, appliqués à divers problèmes déjà traités par LAPLACE, m'ont permis d'en compléter la solution.

Pour trouver les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation qui diffèrent peu d'un ellipsoïde, il faut rechercher si, parmi les ellipsoïdes de révolution et ceux de JACOBI, il y a des figures de bifurcation. Pour cela il faut calculer les coefficients de stabilité de ces ellipsoïdes. On trouve que ces coefficients dépendent des fonctions de LAMÉ.

J'ai donc dû faire de ces fonctions une étude approfondie. J'ai démontré d'une manière nouvelle que ces polynômes ont toutes leurs racines réelles et j'ai étudié la manière dont ces racines se répartissent.

En égalant à o les divers coefficients de stabilité, on obtient des équations qui sont transcendantes, mais qui peuvent néanmoins se discuter d'une manière complète. Cette discussion montre que, parmi les ellipsoïdes de révolution, comme parmi les ellipsoïdes de JACOBI, il y a une infinité de figures de bifurcation.

Il résulte de là qu'il y a d'autres formes d'équilibre que les ellipsoïdes et les anneaux. Ces figures nouvelles sont en nombre infini; elles sont convexes et ont toutes un plan de symétrie. Quelques-unes n'en ont qu'un; d'autres sont de révolution; d'autres enfin ont plusieurs plans de symétrie passant par l'axe.

Il restait à étudier les conditions de stabilité de l'équilibre. J'ai distingué, à l'exemple de Sir W. THOMSON, la stabilité séculaire, qui subsiste lorsqu'on tient compte de la viscosité, et la stabilité ordinaire, qui n'a lieu que lorsqu'on néglige cette résistance. En ce qui concerne la première de ces stabilités, j'ai montré qu'elle appartient aux ellipsoïdes de révolution, moins aplatis que celui qui est en même temps un ellipsoïde de JACOBI, et que les ellipsoïdes de JACOBI, qui satisfont à une certaine condition, en jouissent également. Les autres ellipsoïdes sont instables et il en est de même des figures annulaires. Quant aux autres figures nouvelles que j'ai découvertes, elles sont toutes instables, à l'exception d'une d'entre elles qui est pour ainsi dire piriforme.

J'ai donné aussi une méthode pour déterminer les conditions de la stabilité ordinaire, mais je n'en ai fait qu'une application partielle qui permet, toutefois, de reconnaître que cette stabilité peut subsister quand la stabilité séculaire a cessé.

Je ne puis d'ailleurs mieux résumer tous ces résultats qu'en faisant l'hypothèse suivante:

Imaginons une masse fluide se contractant par refroidissement, mais assez lentement pour rester homogène et pour que la rotation soit la même dans toutes ses parties. D'abord très voisine d'une sphère, la figure de cette masse deviendra un ellipsoïde de révolution qui s'aplatira de plus en plus; puis, à un certain moment, se transformera en un ellipsoïde à trois axes inégaux. Plus tard, la figure cessera d'être ellipsoïdale et deviendra piriforme, jusqu'à ce qu'enfin la masse, se creusant de plus en plus dans sa partie médiane, se scinde en deux corps distincts et inégaux.

L'hypothèse qui précède ne peut certainement s'appliquer au système solaire. Quelques astronomes ont pensé qu'elle pourrait être vraie pour certaines étoiles doubles, et que des étoiles doubles du type de β de la Lyre présenteraient des formes de transition analogues à celles dont nous venons de parler.

Dans un de ces Mémoires (94), j'ai montré qu'aucune forme d'équilibre stable n'est possible si la vitesse de rotation dépasse une certaine limite.

On peut faire de ce principe une application aux anneaux de Saturne.

Clerk Maxwell a démontré que ces anneaux ne peuvent être solides et que, s'ils sont fluides, leur densité ne peut dépasser les $\frac{3}{100}$ de celle de la planète. D'autre part (96), je démontre que, si les anneaux sont fluides, ils ne peuvent être stables qui si leur densité est supérieure au seizième de celle de Saturne. L'analyse semble donc confirmer l'hypothèse de M. Trouvelot, qui considère les anneaux comme formés d'une multitude de satellites extrêmement petits et ne croit pas pouvoir expliquer autrement certaines apparences observées.

J'ai donné (108) une démonstration plus simple d'un théorème de M. Liapounoff, en vertu duquel la sphère correspond au maximum de la fonction potentielle, et je suis encore revenu à diverses reprises sur des questions analogues (111, 212) en donnant quelques égalités et inégalités curieuses.

M. Radau avait remarqué qu'aucune hypothèse ne peut rendre compte à la fois de l'aplatissement adopté et la valeur observée de la précession. Dans deux articles consacrés à la Figure de la Terre (203) j'ai confirmé la conclusion de M. Radau.

XXII. Astronomie, Questions Diverses.

(31, 43, 58, 93, 114, 152, 195, 202, 213, 217, 281.)

On a vu plus haut quel rôle jouent en Astronomie les séries trigonométriques.

J'ai donc au point de vue de ces applications été amené pour contribuer à la solution de cette question à étudier les conditions de convergence des séries trigonométriques (43, 93). J'ai reconnu ainsi deux faits principaux:

1°. Si une pareille série est absolument convergente pour certaines valeurs du temps, elle l'est éternellement; il n'en est plus de même quand la convergence n'est plus absolue.

2°. Une même fonction ne peut pas être représentée par deux séries différentes absolument convergentes.

Je n'ai pu résoudre, de façon à me mettre à l'abri de toute objection, la question de la convergence des séries particulières de M. Lindstedt; cependant, j'ai tout lieu de penser que ces séries ne convergent pas absolument, mais que, en ordonnant convenablement les termes, on peut les rendre semi-convergentes. La convergence pourrait alors ne subsister que pendant un intervalle de temps limité.

On croit d'ordinaire qu'une fonction représentée par une série trigonométrique absolument convergente ne peut croître au delà de toute limite. C'est même cette croyance qui sert de fondement aux démonstrations anciennes de la stabilité du système solaire et qui, depuis, a conduit les astronomes à faire tant d'efforts pour faire rentrer le temps sous les signes sinus et cosinus. Cette croyance est erronée; j'ai montré (31, 93) qu'une pareille fonction devient aussi grande que l'on veut si la convergence n'est pas uniforme. Mais il y a deux manières de croître au delà de toute limite: une fonction peut «tendre vers l'infini». Il arrive alors qu'elle finit par dépasser une quantité quelconque, si grande qu'elle soit, pour rester ensuite constamment supérieure à cette quantité. Une fonction peut encore subir une infinité d'oscillations successives, de façon que l'amplitude des oscillations croisse indéfiniment. J'ai montré (58) que les deux cas peuvent se présenter, en ce qui concerne la somme d'une série purement trigonométrique. En résumé, quand même on arriverait à représenter les coordonnées des astres par des séries trigonométriques convergentes, on n'aurait pas démontré la stabilité du système solaire.

J'ai ensuite (202) étudié des procédés destinés à augmenter la convergence de certaines séries trigonométriques dont divers astronomes et en particulier M. GYLDÉN avaient fait usage dans les quadratures mécaniques.

Je reviendrai plus loin sur le travail que j'ai consacré aux marées (195) et qui intéresse également l'astronomie.

Le calcul des perturbations des comètes par les quadratures mécaniques devient particulièrement pénible quand la comète passe très près de l'astre troublant parce qu'à ce moment la distance des deux corps varie très rapidement. J'ai indiqué (213) comment un emploi judicieux des intégrales elliptiques pouvait faciliter ce calcul.

J'ai publié aussi un article (217) sur le rôle des observations du pendule en géodésie et j'ai montré comment les *seules* observations pendulaires, si elles étaient parfaites et complètes, pourraient suffire pour déterminer la forme de la Terre.

Enfin dans la Préface que j'ai écrite pour les leçons de TISSERAND sur la détermination des Orbites, j'ai comparé les diverses méthodes en usage et j'ai montré qu'une orbite parabolique pourrait se déterminer à l'aide de trois observations *quelconques*, par des formules où n'entrent que des fonctions rationnelles.

CINQUIÈME PARTIE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

XXIII. Équations Différentielles de la Physique Mathématique.

(107, 109, 113, 141, 142, 143, 144, 146, 151, 174, 185, 190, 195, 200, 220, 293, 295).

Dans beaucoup de problèmes de Physique Mathématique on rencontre des équations aux dérivées partielles du 2[d] ordre qui appartiennent toutes à peu près au même type et dont la plus simple est la célèbre équation de LAPLACE $\Delta u = 0$.

Ces problèmes qui conduisent ainsi à des équations identiques ou presque identiques appartiennent cependant aux branches de la Physique les plus diverses. On rencontre ces équations en électrostatique, en magnétisme, en électrodynamique, dans la théorie de la propagation de la chaleur, dans celle de l'élasticité, en Optique, en Hydrodynamique. On les rencontre en Mécanique, dans la théorie du potentiel newtonien; et j'ajouterai enfin qu'elles jouent un rôle capital en Analyse Pure et servent de fondement à la théorie des fonctions analytiques.

La plus importante de ces équations est, comme je l'ai dit, l'équation de LAPLACE qui est l'équation fondamentale de la théorie de l'attraction newtonienne, de l'électrostatique, du magnétisme et de l'hydrodynamique. Dans d'autres questions on a à envisager des équations un peu plus compliquées telles que:

$$\Delta u = ku, \ \Delta u = k\frac{du}{dt}, \ \Delta u = k\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Enfin en optique, en élasticité, on trouve des systèmes de trois équations à trois inconnues où figure encore le Laplacien Δ.

Nous parlerons plus loin dans une question d'Analyse pure, d'une équation analogue mais plus compliquée

$$\Delta u = e^u.$$

Mais ce n'est pas seulement par la forme des équations que ces problèmes diffèrent entre eux, c'est surtout par les conditions aux limites. Tantôt la fonction inconnue u est assujettie à prendre des valeurs données sur une surface fermée; tantôt on se donne sur cette surface la dérivée normale $\frac{du}{dn}$, ou bien une relation entre u et $\frac{du}{dn}$.

Ces problèmes ont été envisagés à plusieurs points de vue différents. Tantôt on a cherché seulement à démontrer qu'ils sont possibles et à établir en ce qui les concerne des «*théorèmes d'existence*».

Pour ces théorèmes d'existence eux-mêmes, on s'est quelquefois contenté de démonstrations par à peu près et à demi intuitives, dont le type est ce qu'on appelle le *principe de* DIRICHLET. Ces aperçus, dépourvus de véritable valeur mathématique, sont cependant de nature à satisfaire le physicien parce qu'ils laissent en évidence, pour ainsi dire, le mécanisme physique du phénomène. Ils sont généralement fondés sur la considération d'une intégrale définie simple ou multiple qui ne pouvant s'annuler doivent admettre un minimum.

D'autres fois, on s'est préoccupé de démontrer rigoureusement ces théorèmes d'existence et pour cela on a imaginé des procédés d'approximations successives dont on pouvait établir la convergence. Cette convergence est en général trop lente et les approximations trop compliquées pour que l'on puisse y voir autre chose qu'un moyen de démonstration et pour que le calcul effectif soit possible.

Enfin on a cherché à résoudre ces problèmes au moyen de séries procédant suivant certaines fonctions que l'on peut appeler *harmoniques*, parce que la représentation d'un phénomène quelconque par une pareille série est analogue à la décomposition d'un son complexe en ses harmoniques. Les types de ces séries sont la série de FOURIER, celle de LAPLACE qui procède suivant les fonctions sphériques, et les diverses séries considérées par FOURIER dans l'étude du refroidissement des corps solides.

Dans l'application de cette méthode, on rencontre plusieurs difficultés successives. Il faut d'abord démontrer l'existence des fonctions harmoniques, ce qui se fait comme pour les autres théorèmes d'existence, par les procédés dont je viens de parler. On doit ensuite calculer les coëfficients des séries, ce qui généralement est facile. Il reste enfin à démontrer la convergence de la série et on a alors une difficulté grave à surmonter.

Tels sont les différents points de vue auxquels j'ai dû envisager successivement tous ces problèmes.

Je me suis occupé d'abord de l'équation de LAPLACE. La théorie de cette équation est intimement liée à celle du potentiel. Mais les propriétés du potentiel n'avaient pas toujours été démontrées ni avec assez de généralité, ni avec assez de rigueur. Je m'en suis aperçu quand j'ai voulu les enseigner et aussi quand j'ai voulu les appliquer à des questions d'Analyse. J'ai cherché (295) à perfectionner ces démonstrations et j'ai eu besoin également (190) de les étendre à l'espace à plus de trois dimensions.

En ce qui concerne l'équation de LAPLACE, bien des méthodes avaient déjà été proposées en vue de la démonstration rigoureuse du théorème d'existence. Les principales étaient celles de SCHWARZ et de NEUMANN. J'en ai proposé une troisième, entièrement nouvelle (107, 200) et qui est connue aujourd'hui sous le nom de méthode du *balayage*. Elle présente, comme méthode de démonstration, l'avantage de la généralité et elle permet de supprimer certains intermédiaires. En revanche elle semble, moins que celle de NEUMANN, susceptible de s'approprier au calcul numérique.

L'élégante méthode de NEUMANN ne paraissait applicable qu'aux surfaces convexes. J'ai reconnu (151, 185) qu'elle était beaucoup plus générale, j'ai montré rigoureusement qu'elle s'appliquait à toutes les surfaces simplement connexes et j'ai fait voir qu'elle était probablement applicable à une surface tout à fait quelconque; c'est ce qui a d'ailleurs été confirmé depuis. Je suis malheureusement obligé d'admettre le principe de DIRICHLET qu'il faut établir d'abord par exemple par la méthode du balayage, de sorte que la démonstration doit se faire en deux temps.

Les mêmes principes peuvent s'étendre au problème de l'équilibre d'un corps élastique qui est beaucoup plus compliqué puisqu'il y entre trois équations à 3 inconnues. J'ai montré (156) qu'on pouvait résoudre ce problème par une méthode tout à fait analogue à celle de NEUMANN. Je n'ai pas néanmoins développé cette idée et au lieu de démontrer rigoureusement la convergence du procédé, je me suis borné à un aperçu, analogue au «principe de DIRICHLET», qui, il est vrai, n'est pas suffisamment rigoureux, mais qui ne permet pas de douter sérieusement du résultat.

Je suis revenu à diverses reprises sur le problème de FOURIER relatif aux lois du refroidissement des corps solides. Dans mes premiers mémoires, je me suis placé plutôt au point de vue du physicien et j'ai montré l'existence des fonctions harmoniques par des aperçus analogues au principe de DIRICHLET (109, 113, 200). C'est à ce même point de vue que je me suis placé le plus souvent dans mon enseignement (293).

C'est seulement plus tard (143, 220) que j'ai donné une démonstration rigoureuse de ces théorèmes d'existence. L'équation est la même que celle des vibrations d'une membrane. M. SCHWARZ avait démontré l'existence de la première harmonique, M. PICARD celle de la seconde. J'ai démontré d'une façon plus simple l'existence de toutes les harmoniques. La méthode de démonstration, toujours fondée sur l'a considération de certaines intégrales si heureusement introduites par M. SCHWARZ, repose en outre sur l'étude d'une certaine fonction méromorphe d'un paramètre auxiliaire. En multipliant cette fonction par un polynôme convenable, on fait disparaître quelques-uns de ces pôles; le cercle de convergence s'étend et on peut aborder l'étude d'harmoniques d'ordre de plus en plus élevé.

Cette méthode ne s'applique pas seulement au problème du refroidissement et à celui des membranes. J'ai dit plus haut comment j'avais abordé l'étude de l'équation de LAPLACE par la méthode de NEUMANN et celle de l'équilibre des corps élastiques. Dans cette double étude je me suis encore servi des intégrales de SCHWARZ et de la fonction méromorphe auxiliaire dont je viens de parler.

Mais on peut encore employer les mêmes procédés dans des questions bien différentes. Je m'en suis servi par exemple pour étudier l'équilibre et le mouvement des mers (146, 195). Dans le problème statique, par exemple, qui est sensiblement réalisé dans les marées à longue période, on rencontre, si l'on veut tenir compte de l'influence de la forme des continents, des fonctions harmoniques analogues aux fonctions sphériques et dont l'existence peut encore se démontrer par les mêmes méthodes. Le problème dynamique, tel qu'on doit le traiter pour les marées à courte période, présente évidemment plus de difficultés. Il se simplifierait si l'on pouvait négliger la force de Coriolis. L'équation où on serait ramené serait encore celle des vibrations d'une membrane dont la tension et la densité seraient variables. Si l'on tient compte de la force de Coriolis, tout devient plus complexe. Les intégrales de SCHWARZ doivent être remplacées par d'autres intégrales plus compliquées, quoique analogues; mais la marche générale du calcul reste la même.

Une équation de même forme $\Delta u = e^u$ peut encore être traitée de la même manière. Ce n'est plus cette fois en vue d'applications physiques, mais en vue d'applications analytiques. J'ai dit plus haut quelle était l'importance de cette équation dans la théorie des fonctions fuchsiennes. M. PICARD l'a intégrée le premier. La méthode que j'ai proposée est entièrement différente et repose sur des principes analogues à ceux dont je viens de parler. Une difficulté nouvelle se présentait toutefois, c'est que notre équation n'est pas linéaire comme le sont d'ordinaire celles de la Physique Mathématique. Ce qui caractérise ma méthode et la distingue de celle de M. PICARD, c'est qu'elle embrasse tout de suite la totalité de la surface de RIEMANN envisagée, tandis que M. PICARD considère d'abord un domaine limité, et étend ensuite ses résultats de proche en proche jusqu'à ce qu'ils soient établis pour la surface entière (Vide supra § II).

Une autre équation linéaire aux dérivées partielles a été l'objet de mes recherches (141). C'est l'équation des télégraphistes, qui par sa forme tient le milieu entre l'équation des cordes vibrantes et celle de la chaleur. Les résultats aussi sont intermédiaires à ceux que donnent ces deux équations. Dans le cas des cordes vibrantes l'onde se propage avec une vitesse constante sans se déformer, sans s'étaler, sans envoyer d'avant-garde ni laisser d'arrière-garde. Dans le cas de la chaleur, l'onde s'étale immédiatement sur le fil conducteur tout entier, sans qu'on puisse lui assigner une commencement ou une fin. Dans le cas de l'électricité, la tête de l'onde s'avance régulièrement avec la vitesse de la lumière; mais l'onde laisse derrière elle un résidu, une sorte de queue.

Les conditions à remplir aux limites sont très différentes de celles que nous avons envisagées jusqu'ici. J'ai pu mettre en évidence les faits que je viens de signaler par une méthode où le rôle principal est joué par la théorie de CAUCHY sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. Je suis revenu sur ce sujet à plusieurs reprises (293, 292).

Mais dans l'étude de ces équations aux dérivées partielles, je me suis également placé au point de vue du développement en séries harmoniques. L'existence des fonctions harmoniques était établie par les théorèmes d'existence dont j'ai parlé plus haut, mais la convergence des séries ne pouvait se démontrer sans difficulté. C'est CAUCHY qui a le premier imaginé une méthode générale applicable à un grand nombre de ces séries. J'ai présenté cette méthode de CAUCHY sous une forme particulière (293) qui en montre le véritable esprit et qui fait comprendre quels sont les obstacles qu'il reste à vaincre quand on veut l'appliquer à un problème particulier.

Dans le cas du refroidissement de la sphère ou du cylindre, les fonctions harmoniques sont faciles à former puisque ce sont les fonctions bien connues de BESSEL. J'ai pu dans ces cas particuliers pousser jusqu'au bout l'application de la méthode de CAUCHY (142, 293).

L'une des plus importantes de ces séries est celle de LAPLACE qui procède suivant les fonctions sphériques. La convergence a été démontrée par LEJEUNE DIRICHLET. J'ai introduit successivement (144, 293) de telles simplifications dans cette démonstration qu'elle devient presque méconnaissable. Je m'appuie sur la convergence de la série de FOURIER et sur certaines propriétés des fonctions de variables imaginaires. J'espère que la forme donnée au raisonnement en facilitera l'extension à d'autres problèmes analogues.

J'avais également à traiter la convergence des séries harmoniques que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur ou dans celle des vibrations d'une membrane. Je me suis contenté d'abord (109, 113, 200) de simples aperçus. Je montrais seulement par exemple que l'intégrale du carré de l'erreur commise tendait vers zéro quand on prenait dans la série un plus grand nombre de termes. Un pareil résultat, suffisant pour les applications physiques, ne pouvait satisfaire le mathématicien.

Depuis j'ai obtenu des démonstrations rigoureuses (220); mais à la conditions de faire des hypothèses restrictives sur la fonction à développer. Cela n'a pas d'ailleurs d'importance au point de vue des applications, car on peut toujours trouver une fonction qui satisfasse à ces hypothèses restrictives et qui diffère aussi peu que l'on veut de la fonction donnée.

XXIV. Critique des Théories Physiques.

(116, 117, 121, 122, 123, 125, 129, 137, 154, 155, 157, 160, 161, 162, 175, 184, 185, 232, 233, 234, 239, 240, 241, 259, 275, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 293, 294, 298.)

Dans le paragraphe précédent, j'ai envisagé pour ainsi dire les problèmes de Physique mathématique; je vais les considérer maintenant par le côté physique.

J'ai publié dans une série de volumes mes cours de Physique Mathématique. Je reviendrai sur ces volumes au point de vue de l'enseignement (§ XXXI); j'en parlerai encore à propos des idées philosophiques exposées dans les Préfaces (§ XXIX). Pour le moment, je ne m'occuperai que de l'intérêt qu'ils présentent pour la physique proprement dite. J'ai été amené à passer en revue les différentes théories physiques et à les soumettre à la critique.

J'ai consacré d'ailleurs au même objet un certain nombre de notes et d'articles.

La chaire de Physique Mathématique a pour titre officiel: Calcul des Probabilités et Physique Mathématique. Ce rattachement peut se justifier par les applications que peut avoir ce calcul dans toutes les expériences de Physique; ou par celles qu'il a trouvées dans la théorie cinétique des gaz. Quoi qu'il en soit, je me suis occupé des probabilités pendant un semestre et mes leçons ont été publiées (294). La théorie des erreurs était naturellement mon principal but. J'ai dû faire d'expresses réserves sur la généralité de la «loi des erreurs»; mais j'ai cherché à la justifier, dans les cas où elle reste légitime, par des considérations nouvelles. J'ai montré que si l'erreur totale résulte de l'accumulation d'un grand nombre de petites erreurs partielles, si ces dernières suivent des lois quelconques, mais symétriques, l'erreur résultante totale sera soumise à la loi de GAUSS.

Je ne m'étendrai pas sur les leçons que j'ai consacrés aux Tourbillons (290) ou à la Capillarité (288); ce qu'elles peuvent contenir de nouveau intéresse plutôt l'enseignement.

J'ai consacré un volume à la Thermodynamique (291). Je signalerai seulement dans ce volume la discussion de l'inégalité de CLAUSIUS

$$\int \frac{dQ}{T} < 0.$$

La démonstration de cette inégalité avait donné lieu à de longues controverses; j'ai cherché à la mettre à l'abri de toute objection.

Dans la démonstration des théorèmes de GIBBS, on rencontre une difficulté qui avait échappé à plusieurs savants éminents. C'est celle qui se rapporte à l'évaluation de l'entropie d'un mélange gazeux. On en triomphe d'ordinaire aujourd'hui en faisant intervenir les propriétés de l'osmose. J'en suis venu à bout par un moyen tout différent, en faisant intervenir les propriétés de la dissociation du carbonate de chaux.

L'irréversibilité des phénomènes thermodynamiques a préoccupé de nombreux chercheurs. On en a voulu donner plusieurs explications mécaniques. La première est celle de HELMHOLTZ; j'ai montré (116) qu'elle ne suffit pas pour rendre compte des faits (vide infra § XXVIII). La seconde est celle qui se rattache à la théorie cinétique des gaz. J'y ai fait diverses objections qui me semblent la rendre peu vraisemblable, mais qui cependant ne sont pas décisives. J'ai discuté en particulier dans deux notes (137) divers points de cette théorie, ce qui m'a donné l'occasion de rectifier une faute de calcul faite par MAXWELL à propos de la relation entre la conductibilité et la viscosité des gaz. J'ai d'autre part justifié le principe de BOLTZMANN et montré sa légitimité dans des cas où il avait été contesté (259).

J'ai exposé à deux reprises différentes la théorie générale de l'élasticité (284, in initio, 289). J'ai montré quelles relations il doit y avoir entre les 21 coëfficients d'élasticité 1° dans l'hypothèse des forces centrales, 2° dans le cas où la pression est nulle à l'état d'équilibre. Ces résultats supposent qu'il n'y a que des molécules d'une seule sorte, et ne s'appliqueraient pas par conséquent, au moins immédiatement, à deux milieux différents se pénétrant mutuellement. Ils ont donné lieu à des objections que j'ai facilement réfutées (125).

Dans la suite de mon livre (289) j'ai signalé (page 134) une erreur commise par LAMÉ.

Je me suis occupé aussi d'un problème particulier d'élasticité (129) à propos d'une expérience de M. CORNU. J'ai montré que certaines relations, qui partout sont approchées, deviennent rigoureusement exactes sur les arêtes d'un prisme à base rectangulaire.

Les équations de l'élasticité s'appliquent immédiatement à l'Optique. J'ai cherché à réunir dans une exposition commune toutes les théories optiques des ondes. En particulier (284) j'ai montré comment dans le cas de la double réfraction, les théories de FRESNEL, de NEUMANN et de SARRAU se déduisent des équations générales du milieu élastique. De même, grâce à l'emploi des «couches de passage», les diverses théories de la réflexion sont notablement simplifiées et on comprend mieux leurs rapports mutuels.

Que résulte-t-il de ce rapprochement entre la théorie de FRESNEL où la vibration est supposée perpendiculaire au plan de polarisation, et celle de NEUMANN où elle est regardée comme parallèle à ce plan? On sait que ces deux théories ont jusqu'ici également bien rendu compte des faits; mais la comparaison que j'ai faite entre ces deux théories m'a montré la raison de ce fait. Cette raison est générale. Tout fait dont une des théories rendra compte, sera également bien expliqué par l'autre, de sorte qu'aucune expérience optique ne pourra décider entre elles.

On a voulu chercher un critère décisif dans les phénomènes de diffraction, dans la réflexion métallique et surtout dans l'expérience célèbre de WIENER. J'ai montré (121, 122) qu'on s'était fait là une illusion.

Le principe de HUYGHENS et ses applications à la diffraction m'a longtemps occupé. J'ignorais à cette époque les travaux de KIRCHHOFF; l'interprétation que j'ai proposée pour le principe de HUYGHENS présente les plus grandes analogies avec celle de KIRCHHOFF; elle repose également sur la considération d'une intégrale analogue au potentiel newtonien.

J'ai abordé aussi le problème d'une autre manière (284 page 300; 285, page 98) en déduisant directement des équations la propagation rectiligne de la lumière comme première approximation; et la diffraction comme seconde approximation. Je montre ainsi que la direction du rayon lumineux doit être conforme au principe de HUYGHENS; en ce qui concerne la seconde approximation, je cherche à illustrer la théorie générale par un exemple simple, en étudiant les cas de propagation anormale des ondes dans un faisceau très délié (128, 285).

Quoi qu'il en soit, la théorie de la diffraction restait très imparfaite. Non seulement la question de la polarisation était laissée de côté, mais certains phénomènes que M. Gouy appelle «diffraction éloignée» restaient complètement inexpliqués. J'ai cherché à donner une théorie de la diffraction éloignée et de la polarisation par diffraction (184, 186); malheureusement j'étais obligé de faire certaines hypothèses, assez voisines de la réalité pour donner une idée générale de la marche des phénomènes, pas assez toutefois pour en asseoir la théorie complète et définitive.

J'ai passé en revue dans mes leçons publiées les principales théories de l'électrodynamique (286, 287, 298). Mais j'ai consacré aussi plusieurs notes à certaines questions particulières. J'ai discuté (117) la loi électrodynamique de Weber et ses rapports avec le principe de la conservation de l'énergie. J'ai étudié (123) les conditions d'équilibre d'un liquide diélectrique placé dans un champ électrique, je voulais montrer qu'on pouvait faire cette théorie de la façon la plus élémentaire et sans faire intervenir les pressions de Maxwell. J'ai traité (176) des rapports du phénomène de Hall avec la théorie de Lorentz.

J'ai consacré (240) un article à l'induction unipolaire. Les lignes de force magnétiques sont-elles entraînées par les aimants en mouvement? Ma conclusion est que cette question si controversée est dénuée de sens.

Mais je me suis surtout occupé des rapports de l'Electrodynamique et de l'Optique. J'ai traité à plusieurs reprises du phénomène de Zeemann (234, 239, 298). L'un de ces articles a été critiqué par Lorentz. L'expérience décidera. Si l'on confirme définitivement les expériences de Zeemann sur la dissymétrie du triplet dans un champ faible, relatées par Lorentz dans son rapport au Congrès de Physique (Tome III, page 31), ce sera Lorentz qui aura raison.

J'ai passé en revue (286, 287, 298, 232) les principales théories électromagnétiques de la Lumière, celles de Maxwell, de Helmholtz, de Hertz, de Lorentz et de Larmor. La plus satisfaisante m'a paru être celle de Lorentz. J'y ai fait cependant une objection; cette théorie n'est pas conforme au principe de l'égalité de l'action et de la réaction (supposé appliqué à la matière seule) (232, 298). Je suis revenu (275) plus en détail sur les relations de la théorie de Lorentz avec ce principe.

J'ai été amené enfin à m'occuper des rayons cathodiques et des rayons Röntgen. J'ai donné (162) l'explication d'une expérience de M. Birkeland, en déterminant la trajectoire des rayons cathodiques dans un champ variable. J'ai réfuté (154, 155, 233) les idées de M. Jaumann sur ces rayons.

J'ai fait (157, 160, 161) diverses observations à propos de certaines expériences relatives aux rayons Röntgen. C'est dans un article de vulgarisation (260) que j'ai émis au sujet des rayons Röntgen une hypothèse qui a exercé une certaine influence sur le développement de la Science. Je me suis demandé s'il n'y aurait pas quelque relation entre ces rayons et les phénomènes de phosphorescences. Plusieurs savants ont alors dirigé leurs recherches de ce côté. Quelques-uns n'ont obtenu que des succès partiels ou douteux. Mais M. BECQUEREL a réussi complètement et a découvert les rayons qui portent son nom. Les phénomènes qu'il a observés ne sont pas sans analogie avec ceux que j'avais prévus; mais ils sont beaucoup plus extraordinaires encore.

XXV. Oscillations hertziennes. (119, 126, 132, 140, 223, 224, 225, 287, 292.)

Je crois devoir mettre à part, à cause de leur nombre les articles que j'ai consacrés aux oscillations hertziennes. Le premier est une note (119) où j'ai rectifié une erreur de calcul commise par HERTZ dans la détermination de la période. Cette rectification était facile, mais il importait de la faire promptement; car à ce moment, cette erreur, si elle était restée inaperçue, aurait pu arrêter les progrès de la Science.

J'ai donné dans d'autres notes et dans mes leçons, des procédés en vue du calcul plus ou moins approché de la période d'un excitateur, et j'ai discuté les différentes circonstances qui influent ou qui sembleraient devoir influer sur cette période (126, 223, 224, 292).

Le phénomène de la résonance multiple découvert par MM. SARASIN et DE LA RIVE semblait assez paradoxal. J'en ai donné une explication simple (225, 292) fondée sur l'amortissement rapide des oscillations. Cette explication a été confirmée expérimentalement d'abord par M. BJERKNES, puis par d'autres physiciens.

J'ai étudié enfin (132, 140) la propagation d'une onde hertzienne le long d'un fil. J'ai montré que l'affaiblissement de cette onde est due à deux causes; le rayonnement et la chaleur de JOULE. La première de ces causes croît avec le diamètre du fil, tandis que la seconde décroît. L'expérience semble indiquer que la seconde est prépondérante.

SIXIÈME PARTIE.

PHILOSOPHIE DES SCIENCES.

XXVI. Arithmétique et Analyse. (244, 247.)

Voulant approfondir la philosophie des sciences mathématiques, je devais d'abord étudier ces sciences dans les parties où elles sont le plus dégagées d'éléments sensibles et en général d'éléments étrangers. C'est là que j'avais le plus de chance de pénétrer la véritable nature du raisonnement mathématique. Or c'est en arithmétique que la notion fondamentale de nombre règne dans toute sa pureté. C'est donc à l'arithmétique que je devais emprunter mes exemples et non pas à la géométrie comme le font la plupart des philosophes.

J'ai reconnu pourtant (247) que même en arithmétique le raisonnement mathématique n'est pas un simple syllogisme, et que partout le syllogisme est stérile. Le raisonnement mathématique exige l'emploi d'une sorte d'induction qui diffère de l'induction ordinaire parce qu'elle entraîne la certitude absolue. C'est à cette induction que l'on a recours par exemple, quand on affirme qu'un théorème démontré pour le nombre 1, est vrai pour tous les nombres, si l'on établit qu'il est vrai de $n + 1$ s'il l'est de n.

Comment passe-t-on maintenant du nombre pur au continu et de l'Arithmétique à l'Analyse? J'ai étudié (244) les origines de la notion du continu mathématique; j'ai montré qu'elle ne saurait dériver de l'expérience et qu'elle diffère beaucoup de la notion du continu physique, qui nous vient des sens. Celle-ci est régie par la célèbre «loi de FECHNER» qui (si on voulait traduire littéralement les expériences qui lui servent de fondement) devrait s'exprimer par la formule contradictoire:

$$A > B, \ A = C, \ C = B.$$

C'est pour lever cette contradiction que l'esprit a *créé* le continu mathématique. Sa puissance créatrice n'est pas épuisée ainsi, et s'il ne l'exerce pas de nouveau c'est par ce que l'expérience ne lui en fournit pas l'occasion.

XXVII. Géométrie. (226, 248, 249, 251, 252, 254, 256, 257.)

Je me suis à plusieurs reprises, occupé d'éclaircir les origines de la géométrie et celles de la notion d'espace.

Je me suis demandé (226, 256) quel est le véritable caractère des vérités géométriques et en particulier du postulatum d'Euclide. Ce postulat est il un fait d'expérience, une nécessité logique, ou un jugement synthétique a priori? Rien de tout cela, c'est une convention et il n'est pas plus raisonnable de se demander si ce postulat est vrai et la géométrie de LOBATCHEFFSKI fausse que de rechercher si le système métrique est vrai et si le système de la toise et du pied est faux.

Comme LIE je crois que la notion plus ou moins inconsciente du groupe continu est la seule base logique de notre géométrie. Comme HELMHOLTZ je crois que l'observation des mouvements des corps solides en est l'origine psychologique. Mais je ne fais pas pour cela dériver la géométrie de l'expérience; loin de là. Les expériences sur les solides n'ont été que l'occasion qui, parmi tous les groupes continus dont nous aurions pu faire une géométrie, nous a fait choisir le groupe euclidien, non comme le seul vrai, mais comme le plus commode.

J'ai recherché également à analyser l'origine psychologique de la notion d'espace (248, 254). Comment parmi les changements que nos sens nous révèlent dans les objets extérieurs distinguons-nous les changements d'état des changements de position? C'est que ces derniers peuvent toujours être corrigés par des «changements internes» (mouvements du corps) qui eux-mêmes se distinguent des «changements externes» parce qu'ils sont volontaires et parce qu'ils sont accompagnés des sensations que l'on est convenu d'appeler musculaires. Il en résulte d'abord qu'un être immobile serait incapable de créer la géométrie.

La notion de l'espace ne peut donc faire partie intégrante d'aucune de nos sensations prise isolément. C'est seulement quand nous observons l'ordre dans lequel ces sensations se succèdent que cette notion peut prendre naissance. Or s'il est absurde de supposer que nous puissions imaginer des sensations différentes de nos sensations normales, nous pouvons au contraire avec quelque effort imaginer une succession de sensations, pareilles individuellement à nos sensations normales, mais se succédant dans un ordre anormal. Nous pouvons imaginer que ces sensations suivent d'autres lois et par exemple qu'elles s'ordonnent, non conformément à la structure du groupe euclidien, mais conformément à la structure d'un autre groupe. Des êtres qui éprouveraient nos sensations normales dans cet ordre anormal, créeraient une géométrie différente de la nôtre. C'est en ce sens que j'ai pu dire (256) sous une forme légèrement paradoxale: «quelqu'un qui voudrait y consacrer sa vie, arriverait à se figurer l'espace à quatre demensions». Dans un autre article (257), j'ai décrit un monde fictif dont les habitants seraient nécessairement conduits à créer la géométrie de LOBATCHEFFSKI.

Plus paradoxal encore est ce que je dis du point géométrique. Cette notion en apparence immédiate et primitive ne me semble pas résister à l'analyse et j'en cherche l'origine dans la structure du groupe euclidien et l'étude des sous-groupes qui y sont contenus. Je cherche à montrer que de quelque façon qu'on aborde la question, on sera toujours ramené à cette conséquence (248, 249, 254).

J'ai réfuté (251, 252) les idées de M. RUSSELL sur les fondements de la géométrie. Ce philosophe attribue à l'expérience un rôle important dans la genèse de la géométrie. Je lui ai objecté ce que j'avais dit ailleurs (256) qu'il est impossible d'expérimenter sur des droites ou des figures abstraites; que l'expérience ne peut porter que sur des corps matériels, et qu'alors si on opère sur les corps solides, on aura fait une expérience de mécanique, que si on opère sur les rayons lumineux, on aura fait une expérience d'optique, mais qu'on n'aura jamais fait une expérience de géométrie.

Bien que sur certans points je fusse d'accord avec M. RUSSELL et que je rendisse justice à son talent, j'ai été obligé de combattre également quelques autres idées de cet auteur.

XXVIII. Mécanique. (116, 245, 246, 250, 253, 262, 303; 291, préface.)

Mes recherches sur les principes de la Mécanique ont été inspirées par le même esprit.

La notion du temps nécessitait d'abord un examen critique analogue à celui que j'avais fait subir à la notion d'espace. On admet généralement, non seulement que le temps est relatif, mais que l'égalité de deux durées ne peut être perçue directement et ne peut même être définie que par une sorte de convention. J'ai cherché à montrer (250) que la notion même de la simultanéité de deux événements a aussi quelque chose d'un peu arbitraire, j'allais dire d'un peu conventionnel.

J'ai discuté (116, 245, 246) la portée philosophique du second principe de la Thermodynamique. Ce principe est ou semble être en contradiction avec l'hypothèse du mécanisme universel. J'ai parlé plus haut (§ XXIV) des diverses tentatives qui ont été faites pour lever cette contradiction et des discussions auxquelles elles ont donné lieu. J'ai cherché à mettre les philosophes au courant de ces controverses.

Les principes de la Mécanique sont-ils a priori ou bien leur origine est elle empirique? Aucune de ces deux solutions n'est entièrement satisfaisante. Quelle position convient-il d'adopter entre les deux? Je suis revenu sur ces problèmes à plusieurs reprises (253, 262, 302). Ce sont des faits expérimentaux qui nous ont conduits à adopter les principes fondamentaux de la Mécanique, celui de l'inertie, celui de l'égalité de l'action et de la réaction, celui du mouvement relatif. Devons-nous conclure que ces lois ne sont qu'approchées, que des expériences nouvelles nous conduiront à y ajouter de petits termes correctifs? Pour nous en rendre compte, il nous suffit d'essayer d'énoncer correctement ces principes, en les appliquant à la totalité de l'Univers. Nous reconnaissons alors que, quand on veut leur donner une forme absolue, ils deviennent invérifiables parce que nous ne pouvons connaître que les mouvements relatifs. Nous resterons donc toujours libres de les conserver, sans crainte d'être démentis, et nous les conserverons parce que l'expérience nous a appris qu'ils sont commodes. Voilà pourquoi l'expérience qui leur a donné naissance, ne pourra plus les détruire.

Les mêmes considérations s'appliquent à un principe qui touche de plus près encore à la Physique, celui de la conservation de l'énergie. C'est ce que je me suis efforcé de démontrer (291, préface; 253, 302). Quand on veut donner à ce principe une valeur absolue, on le voit pour ainsi dire s'évanouir en une tautologie. Il semble qu'il se soit mis ainsi hors des atteintes de l'expérience. Il n'est pas impossible toutefois que des expériences nouvelles nous empêchent de lui attribuer une portée universelle, en nous montrant qu'il ne pourrait recevoir une nouvelle extension sans perdre sa fécondité. C'est ce que j'ai cherché à expliquer (264).

Quoi qu'il en soit de ces considérations, je me suis efforcé de montrer pourquoi la Mécanique est et doit rester une science expérimentale (302).

XXIX. Physique. (263, 188, 264; préfaces, 294, 284, 286, 291, 298.)

En pénétrant dans le domaine de la Physique on doit renoncer à ce genre particulier de certitude qu'exigent les Mathématiciens. Nous devons nous contenter du probable. Le calcul des probabilités joue un rôle nécessaire et j'ai montré (263) que dans toute induction on faisait un calcul de probabilité inconscient. J'ai cherché (263; 294, préface) à pénétrer les principes de ce calcul, j'ai cru les découvrir dans la croyance à la continuité des phénomènes naturels.

La Physique ne peut se passer des Mathématiques qui lui fournissent la seule langue qu'elle puisse parler (188). De là les services mutuels et incessants que se rendent l'Analyse pure et la Physique. Chose remarquable, les travaux des analystes ont été d'autant plus féconds pour la physique qu'ils ont été plus exclusivement cultivée pour sa beauté propre. En revanche, la Physique, en posant de nouveaux problèmes, a été aussi utile au Mathématicien que le modèle l'est à l'artiste.

Le physicien (264) ne saurait se contenter de l'expérience toute nul. Son objet n'est pas le même que celui de l'historien et un fait isolé est pour lui sans valeur. De là l'utilité de la généralisation qui exige l'emploi des Mathématiques. Cette généralisation suppose une certaine croyance à l'unité et à la simplicité de la nature (264; 291, préface). Cette croyance, justifiée ou non, est nécessaire à la science.

D'ailleurs on ne saurait se passer de l'hypothèse et souvent une hypothèse fausse a rendu plus de services qu'une hypothèse vraie. Pour tirer parti de ces hypothèses, on a cherché à résoudre le phénomène complexe observable en un très grand nombre de phénomènes élémentaires obéissant tous aux mêmes lois. C'est ainsi que la Physique Mathématique est devenue possible.

Dans les théories physiques, il faut distinguer le fond et la forme. Le fond, c'est l'existence de certains rapports entre des objets inaccessibles. Ces rapports sont la seule réalité que nous puissions atteindre et tout ce que nous pouvons demander, c'est qu'il y ait les mêmes rapports entre ces objets réels inconnus et les images que nous mettons à leur place.

La forme n'est qu'une sorte de vêtement dont nous habillons ce squelette; ce vêtement, nous le changeons fréquemment, à l'étonnement des gens du monde, que cette instabilité fait sourire et qui proclament la faillite de la Science. Mais si la forme change souvent, le fond reste.

Les hypothèses relatives à ce que je viens d'appeler la forme ne peuvent pas être vraies ou fausses, elles ne peuvent être que commodes ou incommodes. Par exemple, l'existence de l'éther, celle même des objets extérieurs ne sont que des hypothèses commodes (264; 284, préface).

C'est pour cela que l'on voit renaître de leurs cendres en se transformant certaines théories que l'on croyait définitivement abandonnées. C'est pour cela aussi qu'il y a certaines catégories de faits qui s'expliquent également bien dans deux ou plusieurs théories différentes, sans qu'aucune expérience puisse jamais décider. Cela est vrai en particulier pour les théories mécanistes. On peut en effet démontrer que, si un phénomène comporte une explication mécanique, il en comportera une infinité (264; 286, préface).

Le Mécanisme en tout cas n'est que l'un des vêtements dont la vérité peut s'habiller, et s'il satisfait notre esprit, il ne faut pas y attacher plus d'importance qu'il n'en mérite. Il oblige à introduire l'hypothèse de fluides auxiliaires tels que l'éther; j'expose quelques vues sur le plus ou moins de réalité de ce fluide.

Je termine (264) par l'exposé de l'état actuel de la Science et de ses progrès depuis cinquante ans. Ma conclusion est que l'on a marché vers l'unité; progrès important, car on ne doit pas oublier que le but véritable, ce n'est pas le Mécanisme, c'est l'unité.

XXX. Psychologie scientifique et Pédagogie. (265, 266, 303.)

Dans la formation de la Science Mathématique et dans son enseignement, on distingue deux tendances opposées, la tendance analytique et la tendance intuitive. A mesure que la Scince a progressé, la première a tendu à prendre le pas sur la seconde. Toutes deux ont leur rôle nécessaire cependant. Dans l'enseignement, il est indispensable de faire appel à l'intuition pour développer certaines facultés de l'esprit, utiles au savant et surtout à l'ingénieur (266). Dans la Science même, l'intuition reste, sauf pour quelques esprits privilégiés, l'instrument principal de l'invention, tandis que l'analyse tend de plus en plus à devenir le seul instrument légitime de la démonstration (303).

Je me suis aussi préoccupé de l'influence que peut avoir dans l'enseignement, l'emploi de la notation différentielle (265). J'ai montré quels inconvénients peut entraîner l'usage prématuré de cette notation.

SEPTIÈME PARTIE.

ENSEIGNEMENT, VULGARISATION, DIVERS.

XXXI. Enseignement.

Voici le tableau des cours que j'ai professés à la Sorbonne depuis 1885.

Chaire de Mécanique Physique et Experimentale.

1885, 2. Frottement.
1886, 1. Cinématique et Mécanismes (103, 296).
1886, 2. Potentiel. Hydrostatique, Hydrodynamique (103, 296).

Chaire de Physique Mathématique.

1887, 1. Théorie du Potentiel.
1887, 2. Théorie du Potentiel et Propagation de la Chaleur.
1888, 1. Théorie mathématique de la Lumière (284).
1888, 2. Théorie de MAXWELL (286, 298).
1889, 1. Thermodynamique (291).
1889, 2. Capillarité (288).
1890, 1. Problème des Trois Corps.
1890, 2. Electrodynamique (278, 298).
1891, 1. Elasticité (289).
1891, 2. Electrostatique.
1892, 1. Optique (285).
1892, 2. Tourbillons (290).
1893, 1. Oscillations électriques (292).
1893, 2. Thermodynamique et théorie cinétique des gaz.

1894, 1. Propagation de la chaleur (293).
1894, 2. Calcul des Probabilités (294).
1895, 1. Potentiel newtonien (295).
1895, 2. Electrostatique.
1896, 1. Elasticité.
1896, 2. Optique.

Chaire de Mécanique Céleste.

1897, 1. Sur le Problème des Trois Corps et les Perturbations Planétaires.
1898, 1. Sur le Développement de la Fonction Perturbatrice et les méthodes de Gyldén et de Hansen.
1899, 1. Sur les nouvelles théories électrodynamiques (298).
1899, 2. Figure des Corps Célestes.
1900, 1. Théorie de la Lune.
1901, 1. Mouvement des Corps Célestes autour du leur centre de gravité.

La signification de ce tableau est aisée à comprendre; par exemple 1886, 1 signifie 1^er semestre de l'année scolaire 1885—86. Les chiffres en caractères gros entre parenthèses après l'énoncé d'un cours sont des renvois à la bibliographie et se rapportent aux cours qui ont été publiés.

Ce serait faire double emploi que de revenir sur tous les cours publiées, dont j'ai déjà parlé au § XXIV. Je dirai seulement quelques mots, au point de vue de l'enseignement, des cours 1888, 2 et 1890, 2 (286, 287). A cette époque, on ne s'était pas encore familiarisé sur le continent avec les idées de Maxwell, et il était nécessaise de jeter un pont pour ainsi dire entre les anciennes manières de penser et les nouvelles. Maintenant que tout le monde est passé, ce pont peut paraître inutile et les précautions que j'ai cru devoir prendre étonneront quelques personnes. Néanmoins je crois qu'aujourd'hui encore les deux images artificielles dont je me suis servi pour faire comprendre les idées de Maxwell, celle du fluide inducteur, et celle des diélectriques cellulaires, peuvent faciliter pour certains esprits l'étude des théories électriques. Dans mes leçons sur l'électrodynamique (287) j'ai exposé les idées de Helmholtz, mais je crois les avoir rendues plus accessibles en employant les unités électromagnétiques au lieu des unités électrostatiques qui étaient aussi mal appropriées que possible au but que poursuivait le savant allemand.

On a vu que tous les cours n'avaient pas été publiés. Je parlerai seulement des cours d'électrostatique, des deux cours de 1896, et des leçons sur la théorie cinétique des gaz.

Je me suis efforcé d'exposer l'électrostatique sans prononcer le mot d'électricité et en parlant seulement de conducteurs électrisés. Je définissais d'abord l'égalité de potentiel de deux conducteurs par l'équilibre électrique comme on définit l'égalité de température par l'équilibre thermique, et ce n'est que tout à la fin du cours que j'obtenais l'expression habituelle du potentiel par une intégrale, en la déduisant d'un certain nombre de constatations expérimentales, et en particulier des expériences sur les écrans électriques. Je réduisais ainsi autant que possible le part de l'hypothèse.

Dans mon second cours sur l'élasticité (1896, 1), j'ai traité plusieurs questions nouvelles; j'ai exposé quelques-unes des idées de lord KELVIN et montré par exemple qu'en admettant plusieurs sortes de molécules (et pour ainsi dire plusieurs milieux se pénétrant mutuellement) on pouvait obtenir des équations contenant 21 coëfficients arbitraires et non pas 15 seulement, et cela sans renoncer à l'hypothèse des forces centrales. J'ai exposé ensuite d'une façon complète et systématique la théorie de l'éther gyrostatique, que les publications de lord KELVIN permettent de reconstituer, mais non sans quelque effort.

Dans mon troisième cours sur l'Optique (1896, 2), j'ai fait jouer un grand rôle aux idées de M. GOUY sur la façon dont se comporte une lumière polychromatique en traversant un appareil optique quelconque, à la représentation de cette lumière polychromatique par une intégrale de FOURIER, et aux conséquences qui s'en déduisent.

Dans mon cours sur la Thermodynamique et la Théorie Cinétique des Gaz (1893, 2), j'ai exposé la démonstation des deux principes de la Thermodynamique sous une forme un peu plus générale et plus abstraite que la forme ordinaire. J'ai ensuite expliqué la théorie du viriel, justifié le principe de BOLTZMANN—MAXWELL et analysé l'ouvrage de MAXWELL. J'ai discuté l'influence de la loi des grands nombres sur les équations de la Mécanique, mais sans arriver sur ce point à une conclusion définitive.

A la fin de mon cours sur les tourbillons (290), j'ai exposé les idées de HELMHOLTZ sur la formation des vagues; cette partie du cours n'a pas été publiée, parce que je ne suis pas parvenu à une solution qui m'ait entièrement satisfait.

On peut se faire une idée de ce qu'il y a eu de plus original dans mon enseignement de la Mécanique Céleste, en lisant les articles que je publiais en même temps dans le Bulletin Astronomique. Dans mon cours sur la Théorie de la Lune, j'ai exposé presque exclusivement les méthodes de HILL et de BROWN et n'ai consacré que quelques leçons à celles de DELAUNAY. Dans mon cours sur le mouvement des corps célestes autour de leur centre de gravité, j'ai fait usage des quaternions.

XXXII. Vulgarisation. (227, 229, 230, 255, 258, 259, 260, 297, 299.)

Dans ces articles qui portent sur la Mécanique Céleste, sur la géodésie, sur les oscillations hertziennes, sur les rayons RÖNTGEN, je me suis astreint à éviter complètement l'emploi des signes algébriques. Je rappallerai seulement que c'est dans l'un d'eux (260) que j'ai émis une hypothèse qui, historiquement, n'a pas été sans influence sur la découverte des rayons BECQUEREL.

XXXIII. Bibliographie. (110, 189, 198, 205, 261, 276, 277, 282, 301.)

Dans ces articles j'ai étudié la vie et les travaux de WEIERSTRASS, HERMITE, BERTRAND, LAGUERRE, HALPHEN, TISSERAND.

XXXIV. Rapports Divers. (130, 147, 165, 170, 171, 180, 228, 235, 300.)

Parmi ces rapports je citerai ceux que j'ai été chargé de faire sur le projet d'unification du jour civil et du jour astronomique et sur le projet de décimalisation du temps et de la circonférence. Ces deux projets de réforme n'ont pas réussi par suite de la difficulté d'une entente internationale. Je citerai également mon rapport sur la nouvelle mesure de l'arc de méridien de Quito.