

NOUVELLES RECHERCHES SUR LES SÉRIES EMPLOYÉES
DANS LES THÉORIES DES PLANÈTES

PAR

HUGO GYLDÉN
à STOCKHOLM.

CHAPITRE II.

Transformations de quelques équations différentielles.

Le moyen le plus efficace de parvenir aux solutions d'une équation différentielle qu'on ne saurait intégrer d'une manière directe, paraît être de la remplacer par une suite d'autres équations dont chacune s'intègre par des procédés connus. Evidemment, la série que forment les diverses solutions obtenues ainsi doit être convergente.

Les transformations qu'on va donner dans les pages suivantes se rapportent aux équations de deux différentes espèces.

D'abord nous nous occuperons de transformer certaines équations du deuxième ordre dont les divers termes dépendent de puissances entières de la fonction cherchée ainsi que de sa première dérivée.

Le second genre d'équations que nous envisagerons contiendra des fonctions trigonométriques, dans les arguments desquelles figure la fonction demandée.

Mais encore, puisque dans plusieurs occasions il sera favorable ou même nécessaire de ramener une équation proposée, en omettant certains

termes surpassant le premier degré, à la forme linéaire, on a ajouté un paragraphe contenant quelques remarques relativement à l'intégration des équations linéaires. Il s'entend que ces remarques portent uniquement sur la forme des équations qu'on rencontre dans la mécanique céleste.

§ 5. *Equations du deuxième ordre contenant des puissances et des produits de la fonction inconnue et de sa première dérivée.*

1. Avant d'entrer dans les opérations analytiques voici une explication.

Supposons qu'on ait l'équation du deuxième ordre:

$$\frac{d^2y}{dv^2} + f\left(\frac{dy}{dv}, y, v\right) = \Omega,$$

Ω étant une fonction connue de v , et admettons qu'on connaisse une valeur approchée de la solution. En introduisant cette valeur, que nous désignerons par y_0 , dans l'équation proposée, on obtient un résultat de la forme:

$$\frac{d^2y_0}{dv^2} + f\left(\frac{dy_0}{dv}, y_0, v\right) - \Omega = R,$$

où la quantité R sera appelée le reste de la solution approchée.

Le plus souvent, il y a lieu d'opérer la détermination de la fonction y_0 de manière que le reste de la solution soit très petit par rapport à la fonction Ω ; dans certains cas, cependant, il peut être avantageux d'établir une expression de y_0 telle que le reste soit exempt de termes d'une certaine forme.

2. L'équation que nous allons d'abord considérer est celle-ci:

$$(1) \quad \begin{aligned} & \frac{d^2y}{dv^2} + Y_{0.1}y + Y_{0.2}y^2 + Y_{0.3}y^3 \\ & + \{Y_{1.0} + Y_{1.1}y + Y_{1.2}y^2\} \frac{dy}{dv} \\ & + \{Y_{2.0} + Y_{2.1}y\} \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = \Omega \end{aligned}$$

où l'on a supposé les $Y_{0.1}, Y_{0.2}, \dots$ des fonctions connues de v ne renfermant que des constantes et des termes purement trigonométriques.

En adoptant l'hypothèse que la fonction y soit une petite quantité de l'ordre des excentricités ou des inclinaisons, nous avons omis les termes d'un degré plus élevé que le troisième, bien que l'équation que présente la mécanique céleste en puisse contenir un nombre infini. Cependant, nous avons négligé les puissances supérieures non seulement puisqu'on les peut considérer comme très petites, mais encore pour une raison moins arbitraire. La voici.

On a eu l'occasion de voir, dans ce qui précède, qu'on n'arrivera pas toujours à des résultats satisfaisants en abordant les approximations successives par l'intégration d'une équation linéaire ou bien, ce qui revient au même, d'un système d'équations linéaires; mais d'autre part, on a aussi pu constater que la solution peut s'obtenir, même dans certains cas impossibles à traiter au moyen d'équations linéaires, en partant d'une équation du troisième degré. Ayant ainsi obtenu une approximation effective, on en déduit la correction due aux termes négligés toutes les fois que le coefficient de la troisième puissance de l'inconnue n'est pas trop petit. Cette condition étant satisfaite le plus souvent, si non toujours, dans les théories des planètes, il n'y a pas lieu de recourir aux équations d'un degré plus élevé.

Cela étant, admettons qu'on puisse représenter la fonction demandée au moyen du développement que voici:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= (1 - \varphi_{0.1})z + \varphi_{0.2}z^2 + \varphi_{0.3}z^3 + \dots \\
 &+ (\varphi_{1.0} + \varphi_{1.1}z + \varphi_{1.2}z^2 + \dots) \frac{dz}{dv} \\
 &+ (\varphi_{2.0} + \varphi_{2.1}z + \varphi_{2.2}z^2 + \dots) \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \\
 &+ \dots\dots\dots,
 \end{aligned}$$

où l'on a désigné par $\varphi_{0.1}, \varphi_{1.0}, \dots$ des fonctions de v qui sont encore à notre disposition, et par z l'intégrale de l'équation qu'on trouve si l'on remplace, dans l'équation (1), y par l'expression (2).

Ecrivons l'équation en z de la manière suivante:

$$(3) \quad \frac{d^2 z}{dv^2} + Z = \Omega,$$

Z sera évidemment une fonction de z , $\frac{dz}{dv}$, $\frac{d^2 z}{dv^2}$, $\frac{d^3 z}{dv^3}$ et de v , mais elle dépend encore des fonctions arbitraires $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{1,0}$, \dots , de sorte qu'on peut, en déterminant ces fonctions d'une manière convenable, faire disparaître les coefficients de certains termes dans Z . On peut même, dans quelques cas, choisir les fonctions arbitraires de manière que toute la fonction Z devienne très petite ou qu'elle se réduise, au moins pour sa partie essentielle, à un petit nombre de termes, par exemple à

$$Z = Z_1 z + \beta' z \frac{dz}{dv} + \beta z^3,$$

Z_1 étant une fonction connue de v , et β' et β , des constantes.

En différentiant l'expression (2), il viendra:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dv} = & -\frac{d\varphi_{0,1}}{dv} z + \frac{d\varphi_{0,2}}{dv} z^2 + \frac{d\varphi_{0,3}}{dv} z^3 + \dots \\ & + \left\{ 1 - \varphi_{0,1} + \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} + \left[2\varphi_{0,2} + \frac{d\varphi_{1,1}}{dv} \right] z + \left[3\varphi_{0,3} + \frac{d\varphi_{1,2}}{dv} \right] z^2 + \dots \right\} \frac{dz}{dv} \\ & + \left\{ \varphi_{1,1} + \frac{d\varphi_{2,0}}{dv} + \left[2\varphi_{1,2} + \frac{d\varphi_{2,1}}{dv} \right] z + \dots \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \\ & + \left\{ \varphi_{2,1} + \frac{d\varphi_{3,0}}{dv} + \dots \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 + \dots \\ & + \left\{ \varphi_{1,0} + \varphi_{1,1} z + \varphi_{1,2} z^2 + \dots \right\} \frac{d^2 z}{dv^2} \\ & + \left\{ 2\varphi_{2,0} + 2\varphi_{2,1} z + \dots \right\} \frac{dz}{dv} \frac{d^2 z}{dv^2} \\ & + 3\varphi_{3,0} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \frac{d^2 z}{dv^2} + \dots, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par une seconde différentiation:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{d^2 y}{dv^2} = & -\frac{d^2 \varphi_{0.1}}{dv^2} z + \frac{d^2 \varphi_{0.2}}{dv^2} z^2 + \frac{d^2 \varphi_{0.3}}{dv^2} z^3 + \dots \\
 & + \left\{ -2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} - \frac{d^2 \varphi_{1.0}}{dv^2} + \left[4 \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} + \frac{d^2 \varphi_{1.1}}{dv^2} \right] z \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \left[6 \frac{d\varphi_{0.3}}{dv} + \frac{d^2 \varphi_{1.2}}{dv^2} \right] z^2 + \dots \right\} \frac{dz}{dv} \\
 & + \left\{ 2\varphi_{0.2} + 2 \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} + \frac{d^2 \varphi_{2.0}}{dv^2} + \left[6\varphi_{0.3} + 4 \frac{d\varphi_{1.2}}{dv} + \frac{d^2 \varphi_{2.1}}{dv^2} \right] z + \dots \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \\
 & + \left\{ 2\varphi_{1.2} + 2 \frac{d\varphi_{2.1}}{dv} + \frac{d^2 \varphi_{3.0}}{dv^3} + \dots \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 + \dots \\
 & + \left\{ 1 - \varphi_{0.1} + 2 \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + \left[2\varphi_{0.2} + 2 \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right] z \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \left[3\varphi_{0.3} + 2 \frac{d\varphi_{1.2}}{dv} \right] z^2 + \dots \right\} \frac{d^2 z}{dv^2} \\
 & + \left\{ 3\varphi_{1.1} + 4 \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} + \left[6\varphi_{1.2} + 4 \frac{d\varphi_{2.1}}{dv} \right] z + \dots \right\} \frac{dz}{dv} \frac{d^2 z}{dv^2} \\
 & + \left\{ 5\varphi_{2.1} + 6 \frac{d\varphi_{3.0}}{dv} + \dots \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \frac{d^2 z}{dv^2} \\
 & + \left\{ 2\varphi_{2.0} + 2\varphi_{2.1} z + \dots \right\} \left(\frac{d^2 z}{dv^2} \right)^2 \\
 & + \left\{ 6\varphi_{3.0} + \dots \right\} \frac{dz}{dv} \left(\frac{d^2 z}{dv^2} \right)^2 \\
 & + \left\{ \varphi_{1.0} + \varphi_{1.1} z + \varphi_{1.2} z^2 + \dots \right\} \frac{d^3 z}{dv^3} \\
 & + \left\{ 2\varphi_{2.0} + 2\varphi_{2.1} z + \dots \right\} \frac{dz}{dv} \frac{d^3 z}{dv^3} \\
 & + \left\{ 3\varphi_{3.0} + \dots \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \frac{d^3 z}{dv^3} \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Pour arriver à l'équation (3), ainsi que pour établir les équations de condition d'où se dérivent les fonctions $\varphi_{0.1}, \varphi_{1.0}, \dots$ il nous faut encore les expressions suivantes où l'on n'a retenu que les termes jusqu'au troisième degré inclusivement:

$$\begin{aligned}
y^2 &= (1 - \varphi_{0.1})^2 z^2 + 2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{0.2} z^3 \\
&\quad + \left\{ 2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0} z + 2[\varphi_{1.0}\varphi_{0.2} + (1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.1}] z^2 \right\} \frac{dz}{dv} \\
&\quad + \left\{ \varphi_{1.0}^2 + [2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + 2\varphi_{1.0}\varphi_{1.1}] z \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 + 2\varphi_{1.0}\varphi_{2.0} \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 \\
y^3 &= (1 - \varphi_{0.1})^3 z^3 + 3(1 - \varphi_{0.1})^2 \varphi_{1.0} z^2 \frac{dz}{dv} \\
&\quad + 3(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2 z \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 + \varphi_{1.0}^3 \left(\frac{dz}{dv} \right)^3, \\
\left(\frac{dy}{dv} \right)^2 &= \left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right)^2 z^2 - 2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} z^3 \\
&\quad + \left\{ -2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) z \right. \\
&\quad \quad \left. + 2 \left[\frac{d\varphi_{0.2}}{dv} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) - \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) \right] z^2 \right\} \frac{dz}{dv} \\
&\quad + \left\{ \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right)^2 + \left[2 \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - 2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} \right) \right] z \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \\
&\quad + 2 \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} \right) \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 \\
&\quad + \left\{ -2\varphi_{1.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} z + 2 \left[\varphi_{1.0} \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{1.1} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right] z^2 \right\} \frac{d^2 z}{dv^2} \\
&\quad + \left\{ 2\varphi_{1.0} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) + \left[-4\varphi_{2.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + 2\varphi_{1.1} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + 2\varphi_{1.0} \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) \right] z \right\} \frac{dz}{dv} \frac{d^2 z}{dv^2} \\
&\quad + \left[2\varphi_{1.0} \left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} \right) + 4\varphi_{2.0} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \right] \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \frac{d^2 z}{dv^2} \\
&\quad + \left\{ \varphi_{1.0}^2 + 2\varphi_{1.0}\varphi_{1.1} z \right\} \left(\frac{d^2 z}{dv^2} \right)^2 + 4\varphi_{1.0}\varphi_{2.0} \frac{dz}{dv} \left(\frac{d^2 z}{dv^2} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y \frac{dy}{dv} = & - (1 - \varphi_{0.1}) \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} z^2 + \left[(1 - \varphi_{0.1}) \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{0.2} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right] z^3 \\
 & + \left\{ \left[(1 - \varphi_{0.1}) \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) - \varphi_{1.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right] z \right. \\
 & \quad + \left[\varphi_{1.0} \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{1.1} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1 - \varphi_{0.1}) \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. + \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \varphi_{0.2} \right] z^2 \right\} \frac{dz}{dv} \\
 & + \left\{ \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \varphi_{1.0} + \left[\left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) \varphi_{1.0} - \varphi_{2.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \varphi_{1.1} \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. + (1 - \varphi_{0.1}) \left(2\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} \right) \right] z \right\} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \\
 & + \left[\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \varphi_{2.0} + \varphi_{1.0} \left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} \right) \right] \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 \\
 & + \left\{ (1 - \varphi_{0.1}) \varphi_{1.0} z + [(1 - \varphi_{0.1}) \varphi_{1.1} + \varphi_{1.0} \varphi_{0.2}] z^2 \right\} \frac{d^2 z}{dv^2} \\
 & + \left\{ \varphi_{1.0}^2 + [2(1 - \varphi_{0.1}) \varphi_{2.0} + 2\varphi_{1.0} \varphi_{1.1}] z \right\} \frac{dz}{dv} \frac{d^2 z}{dv^2} \\
 & + 3\varphi_{1.0} \varphi_{2.0} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \frac{d^2 z}{dv^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^2 \frac{dy}{dv} = & - (1 - \varphi_{0.1})^2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} z^3 \\
 & + \left[-2(1 - \varphi_{0.1}) \varphi_{1.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1 - \varphi_{0.1})^2 \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \right] z^2 \frac{dz}{dv} \\
 & + \left[-\varphi_{1.0}^2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + 2(1 - \varphi_{0.1}) \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \varphi_{1.0} \right] z \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \\
 & + \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \varphi_{1.0}^2 \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 \\
 & + (1 - \varphi_{0.1})^2 \varphi_{1.0} z^2 \frac{d^2 z}{dv^2} \\
 & + 2(1 - \varphi_{0.1}) \varphi_{1.0}^2 z \frac{dz}{dv} \frac{d^2 z}{dv^2} \\
 & + \varphi_{1.0}^3 \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 \frac{d^2 z}{dv^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 &= (1 - \varphi_{0.1})\left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2 z^3 \\
&+ \left[-2(1 - \varphi_{0.1})\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \varphi_{1.0}\left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2\right]z^2\frac{dz}{dv} \\
&+ \left[(1 - \varphi_{0.1})\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2 - 2\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right]z\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \\
&+ \varphi_{1.0}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2\left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \\
&- 2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}z^2\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ \left[2(1 - \varphi_{0.1})\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0} - 2\varphi_{1.0}^2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right]z\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ 2\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}^2\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ (1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2 \\
&+ \varphi_{1.0}^3\frac{dz}{dv}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

3. En introduisant les expressions que nous venons d'établir dans l'équation (1) nous aurons un résultat de la forme que voici:

$$\begin{aligned}
(6) \quad &\frac{d^2z}{dv^2} + A_{0.1}z + A_{0.2}z^2 + A_{0.3}z^3 \\
&+ \{A_{1.0} + A_{1.1}z + A_{1.2}z^2\}\frac{dz}{dv} \\
&+ \{A_{2.0} + A_{2.1}z\}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + A_{3.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \\
&+ \{B_{0.0} + B_{0.1}z + B_{0.2}z^2\}\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ \{B_{1.0} + B_{1.1}z\}\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{dv^2} + B_{2.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^2z}{dv^2} \\
&+ \{B'_{0.0} + B'_{0.1}z\}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2 + B'_{1.0}\frac{dz}{dv}\left(\frac{d^2z}{dv^2}\right)^2 \\
&+ \{C_{0.0} + C_{0.1}z + C_{0.2}z^2\}\frac{d^3z}{dv^3} \\
&+ \{C_{1.0} + C_{1.1}z\}\frac{dz}{dv}\frac{d^3z}{dv^3} + C_{2.0}\left(\frac{dz}{dv}\right)^2\frac{d^3z}{dv^3} = \Omega.
\end{aligned}$$

Evidemment, par la transformation exécutée, des termes se sont produits dont le degré est plus élevé que le troisième; on les comprendra dans la fonction Ω .

Les divers coefficients entrant dans l'équation précédente sont donnés au moyen des formules suivantes:

$$(7, a) \quad A_{0.1} = -\frac{d^2 \varphi_{0.1}}{dv^2} + Y_{0.1}(1 - \varphi_{0.1}) - Y_{1.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv},$$

$$(7, b) \quad A_{1.0} = \frac{d^2 \varphi_{1.0}}{dv^2} + Y_{0.1} \varphi_{1.0} + Y_{1.0} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) - 2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv},$$

$$(7, c) \quad A_{0.2} = \frac{d^2 \varphi_{0.2}}{dv^2} + Y_{0.1} \varphi_{0.2} + Y_{1.0} \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} + Y_{0.2}(1 - \varphi_{0.1})^2 \\ - Y_{1.1}(1 - \varphi_{0.1}) \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + Y_{2.0} \left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2,$$

$$(7, d) \quad A_{1.1} = \frac{d^2 \varphi_{1.1}}{dv^2} + Y_{0.1} \varphi_{1.1} + Y_{1.0} \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right) + 2Y_{0.2}(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0} \\ + Y_{1.1} \left\{ (1 - \varphi_{0.1}) \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) - \varphi_{1.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right\} \\ - 2Y_{2.0} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + 4 \frac{d\varphi_{0.2}}{dv},$$

$$(7, e) \quad A_{2.0} = \frac{d^2 \varphi_{2.0}}{dv^2} + Y_{0.1} \varphi_{2.0} + Y_{1.0} \left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right) + Y_{0.2} \varphi_{1.0}^2 \\ + Y_{1.1} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right) \varphi_{1.0} + Y_{2.0} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)^2 \\ + 2\varphi_{0.2} + 2 \frac{d\varphi_{1.1}}{dv},$$

$$(7, f) \quad A_{0.3} = \frac{d^2 \varphi_{0.3}}{dv^2} + Y_{0.1} \varphi_{0.3} + Y_{1.0} \frac{d\varphi_{0.3}}{dv} + 2Y_{0.2}(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{0.2} \\ + Y_{1.1} \left[(1 - \varphi_{0.1}) \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{0.2} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right] - 2Y_{2.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} \\ + Y_{0.3}(1 - \varphi_{0.1})^3 - Y_{1.2}(1 - \varphi_{0.1})^2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \\ + Y_{2.1}(1 - \varphi_{0.1}) \left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}
(7, g) \quad A_{1.2} &= \frac{d^2 \varphi_{1.2}}{dv^2} + Y_{0.1} \varphi_{1.2} + Y_{1.0} \left(3\varphi_{0.3} + \frac{d\varphi_{1.2}}{dv} \right) \\
&+ 2Y_{0.2} [(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.1} + \varphi_{1.0}\varphi_{0.2}] \\
&+ Y_{1.1} \left[(1 - \varphi_{0.1}) \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) + \varphi_{0.2} \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{1.0} \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \varphi_{1.1} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right] \\
&+ 2Y_{2.0} \left[\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} - \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right] \\
&+ 3Y_{0.3} (1 - \varphi_{0.1})^2 \varphi_{1.0} \\
&+ Y_{1.2} \left[(1 - \varphi_{0.1})^2 \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) - 2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right] \\
&+ Y_{2.1} \left[-2(1 - \varphi_{0.1}) \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \varphi_{1.0} \left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right)^2 \right] \\
&+ 6 \frac{d\varphi_{0.3}}{dv},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7, h) \quad A_{2.1} &= \frac{d^2 \varphi_{2.1}}{dv^2} + Y_{0.1} \varphi_{2.1} + Y_{1.0} \left(2\varphi_{1.2} + \frac{d\varphi_{2.1}}{dv} \right) \\
&+ 2Y_{0.2} [(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + \varphi_{1.0}\varphi_{1.1}] \\
&+ Y_{1.1} \left[\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \varphi_{1.1} + \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) \varphi_{1.0} \right. \\
&\quad \left. - \varphi_{2.0} \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1 - \varphi_{0.1}) \left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} \right) \right] \\
&+ 2Y_{2.0} \left[\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} \right) \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv} \right) \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} \right] \\
&+ 3Y_{0.3} (1 - \varphi_{0.1}) \varphi_{1.0}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + Y_{1,2} \left[-\varphi_{1,0}^2 \frac{d\varphi_{0,1}}{dv} + 2(1 - \varphi_{0,1}) \left(1 - \varphi_{0,1} + \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} \right) \varphi_{1,0} \right] \\
 & + Y_{2,1} \left[(1 - \varphi_{0,1}) \left(1 - \varphi_{0,1} + \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} \right)^2 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - 2 \left(1 - \varphi_{0,1} + \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} \right) \varphi_{1,0} \frac{d\varphi_{0,1}}{dv} \right] \\
 & + 6\varphi_{0,3} + 4 \frac{d\varphi_{1,2}}{dv},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7, i) \quad A_{3,0} &= \frac{d^2 \varphi_{3,0}}{dv^2} + Y_{0,1} \varphi_{3,0} + Y_{1,0} \left(\varphi_{2,1} + \frac{d\varphi_{2,0}}{dv} \right) + 2 Y_{0,2} \varphi_{1,0} \varphi_{2,0} \\
 & + Y_{1,1} \left[\left(1 - \varphi_{0,1} + \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} \right) \varphi_{2,0} + \left(\varphi_{1,1} + \frac{d\varphi_{2,0}}{dv} \right) \varphi_{1,0} \right] \\
 & + 2 Y_{2,0} \left(1 - \varphi_{0,1} + \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} \right) \left(\varphi_{1,1} + \frac{d\varphi_{2,0}}{dv} \right) \\
 & + Y_{0,3} \varphi_{1,0}^3 \\
 & + Y_{1,2} \left(1 - \varphi_{0,1} + \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} \right) \varphi_{1,0}^2 \\
 & + Y_{2,1} \left(1 - \varphi_{0,1} + \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} \right)^2 \varphi_{1,0} \\
 & + 2\varphi_{1,2} + 2 \frac{d\varphi_{3,1}}{dv},
 \end{aligned}$$

$$(8, a) \quad B_{0,0} = -\varphi_{0,1} + 2 \frac{d\varphi_{1,0}}{dv} + Y_{1,0} \varphi_{1,0},$$

$$(8, b) \quad B_{0,1} = 2\varphi_{0,2} + 2 \frac{d\varphi_{1,1}}{dv} + Y_{1,0} \varphi_{1,1} + Y_{1,1} (1 - \varphi_{0,1}) \varphi_{1,0} - 2 Y_{2,0} \varphi_{1,0} \frac{d\varphi_{0,1}}{dv},$$

$$\begin{aligned}
 (8, c) \quad B_{0,2} &= 3\varphi_{0,3} + 2 \frac{d\varphi_{1,2}}{dv} + Y_{1,0} \varphi_{1,2} \\
 & + Y_{1,1} [(1 - \varphi_{0,1}) \varphi_{1,1} + \varphi_{1,0} \varphi_{0,2}] \\
 & + 2 Y_{2,0} \left[\varphi_{1,0} \frac{d\varphi_{0,2}}{dv} - \varphi_{1,1} \frac{d\varphi_{0,1}}{dv} \right] \\
 & + Y_{1,2} (1 - \varphi_{0,1})^2 \varphi_{1,0} \\
 & - 2 Y_{2,1} (1 - \varphi_{0,1}) \varphi_{1,0} \frac{d\varphi_{0,1}}{dv},
 \end{aligned}$$

$$(8, d) \quad B_{1.0} = 3\varphi_{1.1} + 4\frac{d\varphi_{2.0}}{dv} + 2Y_{1.0}\varphi_{2.0} + Y_{1.1}\varphi_{1.0}^2 \\ + 2Y_{2.0}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0},$$

$$(8, e) \quad B_{1.1} = 6\varphi_{1.2} + 4\frac{d\varphi_{2.1}}{dv} + 2Y_{1.0}\varphi_{2.1} \\ + 2Y_{1.1}[(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + \varphi_{1.0}\varphi_{1.1}] + 2Y_{1.2}(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2 \\ + 2Y_{2.0}\left[-2\varphi_{2.0}\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.1} \right. \\ \left. + \left(2\varphi_{0.2} + \frac{d\varphi_{1.1}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\right] \\ + 2Y_{2.1}\left[-\varphi_{1.0}^2\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1 - \varphi_{0.1})\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}\right],$$

$$(8, f) \quad B_{2.0} = 5\varphi_{2.1} + 6\frac{d\varphi_{3.0}}{dv} + 3Y_{1.0}\varphi_{3.0} + 3Y_{1.1}\varphi_{1.0}\varphi_{2.0} \\ + 2Y_{2.0}\left[\left(\varphi_{1.1} + \frac{d\varphi_{2.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0} + 2\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{2.0}\right] \\ + 2Y_{2.1}\left(1 - \varphi_{0.1} + \frac{d\varphi_{1.0}}{dv}\right)\varphi_{1.0}^2 + Y_{1.2}\varphi_{1.0}^3,$$

$$(8, g) \quad B'_{0.0} = 2\varphi_{2.0} + Y_{2.0}\varphi_{1.0}^2,$$

$$(8, h) \quad B'_{0.1} = 2\varphi_{2.1} + 2Y_{2.0}\varphi_{1.0}\varphi_{1.1} + Y_{2.1}(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2,$$

$$(8, i) \quad B'_{1.0} = 6\varphi_{3.0} + 4Y_{2.0}\varphi_{1.0}\varphi_{2.0} + Y_{2.1}\varphi_{1.0}^3,$$

$$(9, a) \quad C_{0.0} = \varphi_{1.0},$$

$$(9, b) \quad C_{0.1} = \varphi_{1.1},$$

$$(9, c) \quad C_{0.2} = \varphi_{1.2},$$

$$(9, d) \quad C_{1.0} = 2\varphi_{2.0},$$

$$(9, e) \quad C_{1.1} = 2\varphi_{2.1},$$

$$(9, f) \quad C_{2.0} = 3\varphi_{3.0},$$

A l'aide des équations que nous venons d'établir, on parvient à déterminer les fonctions $\varphi_{0.1}, \varphi_{1.0}, \dots$. Ces fonctions étant au nombre de neuf, on peut les choisir de manière à remplir neuf conditions en quelque sorte arbitraires: on pourrait, ce qui semble au premier coup d'oeil le plus naturel, égaliser tous les neuf coefficients A à zéro, ou l'on en pourrait faire disparaître un certain nombre, se réservant les fonctions encore à déterminer pour réduire à zéro quelques-uns des coefficients B et C , ou du moins pour les rendre très petits. En un mot, on peut disposer des conditions arbitraires de diverses manières afin de rendre l'équation résultante (3) ou (6) aussi propre à l'intégration que possible.

Mais, en déterminant les fonctions dont il s'agit, il faut avoir soin, premièrement, que les valeurs de ces fonctions restent très petites du premier ordre, vu qu'autrement on ne serait pas assuré de la convergence des approximations qu'on a entamées en négligeant, dans l'équation (6), les termes dépassant le troisième degré; et puis que ces fonctions ne contiendront aucun terme ayant la variable hors des signes trigonométriques.

Il y a lieu ici de faire encore une autre remarque. Le plus souvent, on peut prévoir la nature de l'équation (6), à savoir la nature de la fonction Z dans l'équation (3), de sorte qu'on sera à même d'éliminer, au moyen de cette équation, les termes dépendant de $\frac{d^2z}{dv^2}$ et de $\frac{d^3z}{dv^3}$ dans l'équation (6), cette élimination ne devant, toutefois, s'étendre au terme contenant $\frac{d^2z}{dv^2}$ seul.

Faisons maintenant l'application des formules précédentes à quelques cas particuliers que nous retrouverons dans le courant de nos recherches.

Dans la première application des formules précédentes, nous admettons que parmi les fonctions constituant les coefficients de l'équation (1), seulement les trois premières soient différentes de zéro, de sorte que nous ayons:

$$(10) \quad \frac{d^3y}{dv^3} + Y_1y + Y_2y^2 + Y_3y^3 = \Omega.$$

En supposant les coefficients Y_1, Y_2, Y_3 ainsi que la fonction Ω très petits du premier ordre par rapport aux masses troublantes, nous dé-

terminerons les fonctions $\varphi_{0.1}, \varphi_{1.0}, \dots$ de façon à satisfaire aux conditions suivantes, qui découlent immédiatement des équations (7).

$$\begin{aligned}
(II, a) \quad & \frac{d^2 \varphi_{0.1}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{0.1} = Y_1 - \beta_{0.1}, \\
(II, b) \quad & \frac{d^2 \varphi_{1.0}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{1.0} = 2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + \beta_{1.0}, \\
(II, c) \quad & \frac{d^2 \varphi_{0.2}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{0.2} = -Y_2(1 - \varphi_{0.1})^2 + \beta_{0.2}, \\
(II, d) \quad & \frac{d^2 \varphi_{1.1}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{1.1} = -2Y_2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0} - 4 \frac{d\varphi_{0.2}}{dv} + \beta_{1.1}, \\
(II, e) \quad & \frac{d^2 \varphi_{2.0}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{2.0} = -Y_2 \varphi_{1.0}^2 - 2\varphi_{0.2} - 2 \frac{d\varphi_{1.1}}{dv} + \beta_{2.0}, \\
(II, f) \quad & \frac{d^2 \varphi_{0.3}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{0.3} = -2Y_2(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{0.2} - Y_3(1 - \varphi_{0.1})^3 + \beta_{0.3}, \\
(II, g) \quad & \frac{d^2 \varphi_{1.2}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{1.2} = -2Y_2[(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.1} + \varphi_{1.0}\varphi_{0.2}] \\
& \quad \quad \quad - 3Y_3(1 - \varphi_{0.1})^2 \varphi_{1.0} - 6 \frac{d\varphi_{0.3}}{dv} + \beta_{1.2}, \\
(II, h) \quad & \frac{d^2 \varphi_{2.1}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{2.1} = -2Y_2[(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{2.0} + \varphi_{1.0}\varphi_{1.1}] \\
& \quad \quad \quad - 3Y_3(1 - \varphi_{0.1})\varphi_{1.0}^2 - 6\varphi_{0.3} - 4 \frac{d\varphi_{1.2}}{dv} + \beta_{2.1}, \\
(II, i) \quad & \frac{d^2 \varphi_{3.0}}{dv^2} + Y_1 \varphi_{3.0} = -2Y_3\varphi_{1.0}\varphi_{2.0} - Y_3\varphi_{1.0}^3 \\
& \quad \quad \quad - 2\varphi_{1.2} - 2 \frac{d\varphi_{2.1}}{dv} + \beta_{3.0}.
\end{aligned}$$

Comme il est visible, nous n'avons pas égalé les quantités $A_{0.1}, A_{1.0}, \dots$ à zéro, mais bien à d'autres quantités $\beta_{0.1}, \beta_{1.0}, \dots$ que nous supposons constantes. En voici la raison.

En examinant les équations (II), on aperçoit tout de suite qu'elles ont la forme commune:

$$\frac{d^2 \varphi}{dv^2} + Y_1 \varphi = W,$$

W étant une fonction connue dépendant des Y_n et des φ déjà déterminés. Les différents φ s'obtiennent donc de proche en proche. Mais en effectuant les diverses intégrations il peut arriver qu'on se heurte contre des termes séculaires provenant de la multiplication de deux fonctions trigonométriques ayant le même argument. En disposant convenablement des constantes disponibles, on fera facilement disparaître ces termes. Rien n'empêche cependant que plusieurs des constantes dont il s'agit n'acquiescent, dans le courant du calcul, la valeur zéro.

Ayant ainsi déterminé les fonctions φ , on aura au lieu de l'équation (6) celle-ci:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \frac{d^2 z}{dv^2} + \beta_{0.1} z + \beta_{0.2} z^2 + \beta_{0.3} z^3 \\
 & + \{\beta_{1.0} + \beta_{1.1} z + \beta_{1.2} z^2\} \frac{dz}{dv} + \{\beta_{2.0} + \beta_{2.1} z\} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 + \beta_{3.0} \left(\frac{dz}{dv}\right)^3 \\
 & + \{B_{0.0} + B_{0.1} z + B_{0.2} z^2\} \frac{d^2 z}{dv^2} + \{B_{1.0} + B_{1.1} z\} \frac{dz}{dv} \frac{d^2 z}{dv^2} + B_{2.0} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \frac{d^2 z}{dv^2} \\
 & + \{B'_{0.0} + B'_{0.1} z\} \left(\frac{d^2 z}{dv^2}\right)^2 + B'_{1.0} \frac{dz}{dv} \left(\frac{d^2 z}{dv^2}\right)^2 \\
 & + \{C_{0.0} + C_{0.1} z + C_{0.2} z^2\} \frac{d^3 z}{dv^3} + \{C_{1.0} + C_{1.1} z\} \frac{dz}{dv} \frac{d^3 z}{dv^3} + C_{2.0} \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \frac{d^3 z}{dv^3} \\
 & = \Omega,
 \end{aligned}$$

où l'on a négligé les termes du quatrième degré et d'un degré plus élevé.

Maintenant, puisque les fonctions φ sont déterminées, les B , les B' et les C le sont aussi, et on peut même, certaines conditions étant satisfaites, considérer les termes dépendant de ces fonctions comme connus. En effet, si les β étaient suffisamment petits et que les φ fussent des quantités du premier ordre, on pourrait écrire approximativement:

$$\frac{d^2 z}{dv^2} = \Omega,$$

supposé toutefois que la valeur de z ne devient pas très grande par l'intégration.

En introduisant cette expression de $\frac{d^2 z}{dv^2}$ ainsi que celle-ci:

$$\frac{d^3 z}{dv^3} = \frac{d\Omega}{dv}$$

dans l'équation précédente, nous aurons une nouvelle équation dont la forme est celle de l'équation (1), et on en peut déduire, au moyen des transformations que nous venons d'indiquer, une nouvelle équation dont la forme serait celle de l'équation (12). Mais puisque, dans la nouvelle équation (1), les Y_n seront du deuxième ordre par rapport aux masses troublantes, abstraction faite des constantes β , les nouvelles fonctions φ , et par conséquent les nouvelles B et C seront aussi du deuxième ordre. On parvient donc, en continuant les opérations indiquées, à l'équation finale:

$$(13) \quad \begin{aligned} & \frac{d^2 z}{dv^2} + \beta_{0.1} z + \beta_{0.2} z^2 + \beta_{0.3} z^3 \\ & + \{ \beta_{1.0} + \beta_{1.1} z + \beta_{1.2} z^2 \} \frac{dz}{dv} \\ & + \{ \beta_{2.0} + \beta_{2.1} z \} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 + \beta_{3.0} \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 \\ & = \Omega, \end{aligned}$$

bien entendu sous la condition nécessaire que la valeur de z trouvée par les diverses approximations soit si non une quantité du premier ordre, du moins sensiblement inférieure à l'unité.

4. Il peut, cependant, arriver qu'il soit avantageux d'attribuer à la fonction $A_{0.1}$ une autre valeur que celle d'une constante. Si, par exemple, il était nuisible à la convergence des approximations successives de garder la fonction $\varphi_{0.1}$ différente de zéro, on peut la mettre, dès l'abord, égale à zéro, ce qui entraînerait immédiatement:

$$\varphi_{1.0} = 0,$$

et ensuite:

$$B_{0.0} = B'_{0.0} = C_{0.0} = 0.$$

Par cette détermination, l'expression (2) deviendrait évidemment plus simple qu'elle ne l'aurait été, si l'on avait cherché la fonction $\varphi_{0,1}$ en intégrant l'équation (11, a), mais en revanche on renoncerait à réduire le coefficient de z à une constante. En faisant $\varphi_{0,1} = 0$ nous aurons:

$$A_{0,1} = Y_1,$$

de sorte que, au lieu de l'équation (12), nous obtiendrons la suivante:

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 z}{dv^2} + Y_1 z + \beta_{0,2} z^2 + \beta_{0,3} z^3 \\ + \{ \beta_{1,0} + \beta_{1,1} z + \beta_{1,2} z^2 \} \frac{dz}{dv} \\ + \{ \beta_{2,0} + \beta_{2,1} \} \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 + \beta_{2,2} \left(\frac{dz}{dv} \right)^3 \\ + \{ B_{0,1} z + B_{0,2} z^2 \} \frac{d^2 z}{dv^2} + \dots = \Omega. \end{aligned}$$

Si maintenant, en cherchant l'expression préalable de z — par l'intégration de l'équation précédente, après y avoir omis les termes dépendant des fonctions B, \dots — on trouvait une valeur de z_0 suffisamment petite, on aurait d'une manière facile la correction z_1 à ajouter à z_0 , de sorte qu'on eût:

$$z = z_0 + z_1.$$

Mais on peut aussi opérer comme dans le numéro précédent.

En effet, si nous admettons:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dv^2} = \Omega - Y_1 z - \dots, \\ \frac{d^3 z}{dv^3} = \frac{d\Omega}{dv} - \frac{dY_1}{dv} z - Y_1 \frac{dz}{dv} - \dots, \end{aligned}$$

nous aurons, au lieu de l'équation (14), une autre, dont le type est celui de l'équation (1): les nouvelles valeurs des coefficients Y y entrant ne diffèrent de la fonction Y_1 ou des constantes β que de quantités du deuxième ordre. A cette nouvelle équation, on peut appliquer les procédés que nous venons de mettre en usage, et on parviendra de cette manière, du moins dans les calculs des perturbations des planètes, à des expressions des intégrales extrêmement approchées des expressions vraies.

Il ne faut pas, cependant, se figurer qu'on puisse pousser les approximations dont nous avons parlé à l'infini; on peut, au contraire, prévoir qu'en dehors d'une certaine limite, les approximations ultérieures ne contribueront plus à l'exactitude du résultat, mais qu'elles le font au contraire écarter de plus en plus de l'expression exacte.

Cependant, ayant trouvé, par la méthode signalée, une valeur très approchée de la fonction z , ce qui nous donne aussi une valeur très approchée de y , que nous désignons par y_0 , il sera facile d'en évaluer la correction.

Dans ce but, posons:

$$y = y_0 + y_1$$

et

$$(15) \quad \Omega_0 = \Omega - Y_1 y_0 - Y_2 y_0^2 - Y_3 y_0^3 - \frac{d^2 y_0}{dv^2},$$

Ω_0 étant une quantité extrêmement petite dont les divers termes ne seront pas agrandis par la double intégration. En introduisant les valeurs indiquées dans l'équation (10), nous aurons:

$$(16) \quad \frac{d^2 y_1}{dv^2} + \{Y_1 + 2Y_2 y_0 + 3Y_3 y_0^2\} y_1 + \{Y_2 + 3Y_3 y_0\} y_1^2 + Y_3 y_1^3 = \Omega_0,$$

équation dont il sera facile de trouver l'intégrale avec l'exactitude qu'on voudra, bien entendu en retranchant, s'il est nécessaire, les termes à longues périodes qui se produisent par les diverses approximations. Ces termes-là se réunissent facilement aux termes de la fonction y_0 .

Ajoutons encore la remarque qu'il ne sera point nécessaire de déterminer les fonctions φ avec la dernière exactitude. Il suffit d'en avoir une connaissance si approchée, que les restes de la solution, respectivement multipliés par les diverses puissances de y_0 , seront de très petites quantités, qu'on pourra comprendre dans la fonction Ω_0 .

L'observation que nous venons de faire tout-à-l'heure nous paraît très utile, vu qu'elle nous dispense de recherches sur la convergence de plusieurs développements intermédiaires.

4. Concevons maintenant le cas où les fonctions $Y_{m,n}$ ont des valeurs très petites à l'exception de $Y_{0,1}$, que nous supposons tout près de l'unité. Donc, en posant:

$$Y_{0.1} = 1 - P_{0.1},$$

la fonction $P_{0.1}$ est une très petite quantité: nous la supposons de l'ordre des forces troublantes.

En reprenant l'équation (1), nous omettons une partie des termes du troisième degré, vu qu'il n'est pas nécessaire d'y appliquer les transformations dont il s'agit maintenant. Quant aux autres termes du troisième degré, nous les rejoindrons au produit $P_{0.1}y$, ce qui sera permis en vertu des considérations suivantes.

Admettons que la partie principale de la solution de l'équation (1) ait la forme

$$y = (H) \cos[(1 - \zeta)v - \pi],$$

$(H) \cos \pi$ et $(H) \sin \pi$ étant des fonctions à longue période, dont les dérivées seront, dans les cas ordinaires, de l'ordre de $\zeta(H)$, mais dans les cas exceptionnels de l'ordre de $\zeta(H)^3$.

En différentiant l'expression que nous venons d'admettre, il viendra:

$$\frac{dy}{dv} = -(1 - \zeta)(H) \sin[(1 - \zeta)v - \pi] + (\lambda),$$

où l'on a employé la notation

$$(\lambda) = \frac{d[(H) \cos \pi]}{dv} \cos(1 - \zeta)v + \frac{d[(H) \sin \pi]}{dv} \sin(1 - \zeta)v.$$

La fonction (λ) , étant très petite par rapport à y , on peut la négliger dans les formules que nous allons communiquer.

Remarquons d'abord la formule

$$(1 - \zeta)^2 y^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = (1 - \zeta)^2 (H)^2$$

et puis, en ne retenant que les termes dépendant de l'argument simple,

$$y^2 = \frac{3}{4}(H)^2 y,$$

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 y = \frac{1}{4}(1 - \zeta)^2 (H)^2 y.$$

Cela étant, il est facile de voir comment, si l'équation proposée contient les termes

$$\beta_{0.3}y^3 + \beta_{1.2}\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 y,$$

on peut en joindre la partie essentielle à la fonction $P_{0.1}$ multipliée par y .

Dans l'équation (1) qu'on peut maintenant écrire ainsi:

$$(17) \quad \frac{d^2y}{dv^2} + (1 - P_{0.1})y + P_{1.0}\frac{dy}{dv} \\ + P_{0.2}\left\{(1 - \beta)y^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2\right\} + 2P_{1.1}y\frac{dy}{dv} + P_{2.0}\left\{(1 - \beta)y^2 - \left(\frac{dy}{dv}\right)^2\right\} = \Omega,$$

nous supposons d'abord, pour mieux juger de la portée de nos transformations, les valeurs des divers P telles qu'on peut les apprécier en vertu des comparaisons que voici:

$$P_{1.0} \underline{\sigma} \beta(H)^2,$$

$$P_{0.2} \underline{\sigma} P_{1.1} \underline{\sigma} P_{2.0} \underline{\sigma} \beta(H),$$

la constante β étant liée à ζ au moyen de la relation

$$1 - \beta = (1 - \zeta)^2.$$

La fonction $P_{0.1}$ seule n'obéit pas à ces conditions: en effet, si nous posons

$$P_{0.1} = \beta_1 + P,$$

l'ordre de β_1 et celui de P seront donnés par les comparaisons

$$\beta_1 \underline{\sigma} \beta$$

$$P \underline{\sigma} P_{1.0}.$$

Nous admettons encore que les fonctions $P_{1.0}$ et P ne contiennent que des termes périodiques à longues périodes, que la seconde d'elles contient en outre un terme constant, et que les trois fonctions $P_{0.2}$, $P_{1.1}$ et $P_{2.0}$ dépendent d'arguments de la forme

$$(1 - \sigma)v - B; \quad \sigma \underline{\sigma} \zeta.$$

Maintenant, si nous faisons

$$(18) \quad y = (1 - \varphi_{0.1})E + \varphi_{1.0} \frac{dE}{dv} + \chi_0 \left[(1 - \beta)E^2 + \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right] \\ + 2\chi_1 E \frac{dE}{dv} + \chi_2 \left[(1 - \beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right]$$

et que nous admettions encore la notation

$$(19) \quad \frac{d^2 E}{dv^2} + (1 - \beta)E = L,$$

il sera possible d'éviter, dans les expressions de $\frac{dy}{dv}$ et de $\frac{d^2 y}{dv^2}$, la deuxième dérivée de E , tant qu'elle se trouve multipliée par quelque'une des fonctions φ et χ .

Pour former, d'une manière aisée, la dérivée de l'équation (18), remarquons les relations suivantes qui découlent immédiatement de l'équation (19), à savoir:

$$\frac{d \left\{ (1 - \beta)E^2 + \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right\}}{dv} = 2L \frac{dE}{dv} \\ \frac{d \left(E \frac{dE}{dv} \right)}{dv} = - \left\{ (1 - \beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right\} + LE \\ \frac{d \left\{ (1 - \beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right\}}{dv} = 4(1 - \beta)E \frac{dE}{dv} - 2L \frac{dE}{dv}.$$

Or, en différentiant l'équation (18), il viendra:

$$(20) \quad \frac{dy}{dv} = \frac{dE}{dv} - \left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1 - \beta)\varphi_{1.0} \right) E + \left(\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} - \varphi_{0.1} \right) \frac{dE}{dv} \\ + \frac{d\chi_0}{dv} \left\{ (1 - \beta)E^2 + \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right\} + 2 \left\{ \frac{d\chi_1}{dv} + 2(1 - \beta)\chi_2 \right\} E \frac{dE}{dv} \\ + \left\{ \frac{d\chi_2}{dv} - 2\chi_1 \right\} \left\{ (1 - \beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right\} \\ + \varphi_{1.0} L + \left\{ 2\chi_1 E + 2(\chi_0 - \chi_2) \frac{dE}{dv} \right\} L,$$

et par une nouvelle différentiation nous aurons, toujours faisant usage de l'équation (19) et des formules qui en résultent,

$$\begin{aligned}
(21) \quad \frac{d^2 y}{dv^2} = \frac{d^2 E}{dv^2} + & \left\{ -\frac{d^2 \varphi_{0.1}}{dv^2} - 2(1-\beta) \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + (1-\beta) \varphi_{0.1} \right\} E \\
& + \left\{ \frac{d^2 \varphi_{1.0}}{dv^2} - 2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} - (1-\beta) \varphi_{1.0} \right\} \frac{dE}{dv} \\
& + \frac{d^2 \chi_0}{dv^2} \left\{ (1-\beta) E^2 + \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right\} \\
& + \left\{ \frac{d^2 \chi_1}{dv^2} + 4(1-\beta) \frac{d\chi_2}{dv} - 4(1-\beta) \chi_1 \right\} 2E \frac{dE}{dv} \\
& + \left\{ \frac{d^2 \chi_2}{dv^2} - 4 \frac{d\chi_1}{dv} - 4(1-\beta) \chi_2 \right\} \left\{ (1-\beta) E^2 - \left(\frac{dE}{dv} \right)^2 \right\} \\
& + \varphi_{1.0} \frac{dL}{dv} + \left(2 \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} - \varphi_{0.1} \right) L + 2(\chi_0 - \chi_2) L^2 \\
& + \left\{ 2 \left[2 \frac{d\chi_1}{dv} - (1-\beta)(\chi_0 - \chi_2) + (1-\beta) \chi_2 \right] E \right. \\
& \quad \left. + 2 \left[3\chi_1 + 2 \frac{d(\chi_0 - \chi_2)}{dv} \right] \frac{dE}{dv} \right\} L \\
& + \left\{ 2\chi_1 E + 2(\chi_0 - \chi_2) \frac{dE}{dv} \right\} \frac{dL}{dv}.
\end{aligned}$$

Maintenant, si l'on introduit dans l'équation (17) les expressions que nous venons d'établir de y , de $\frac{dy}{dv}$ et de $\frac{d^2 y}{dv^2}$, et que nous admettions les notations que voici:

$$\begin{aligned}
(22, a) \quad 1 - A_{0.1} = & -\frac{d^2 \varphi_{0.1}}{dv^2} - 2(1-\beta) \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + (1-\beta) \varphi_{0.1} + (1-P_{0.1})(1-\varphi_{0.1}) \\
& - P_{1.0} \left(\frac{d\varphi_{0.1}}{dv} + (1-\beta) \varphi_{1.0} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(22, b) \quad A_{1.0} = & \frac{d^2 \varphi_{1.0}}{dv^2} - 2 \frac{d\varphi_{0.1}}{dv} - (1-\beta) \varphi_{1.0} + (1-P_{0.1}) \varphi_{1.0} \\
& + P_{1.0} \left(\frac{d\varphi_{1.0}}{dv} - \varphi_{0.1} \right) + P_{1.0},
\end{aligned}$$

$$(22, c) \quad A_{0,2} = \frac{d^2\chi_0}{dv^2} + (1 - P_{0,1})\chi_0 + P_{1,0}\frac{d\chi_0}{dv} + P_{0,2},$$

$$(22, d) \quad A_{1,1} = \frac{d^2\chi_1}{dv^2} + 4(1 - \beta)\frac{d\chi_2}{dv} - 4(1 - \beta)\chi_1 + (1 - P_{0,1})\chi_1 \\ + P_{1,0}\left\{\frac{d\chi_1}{dv} + 2(1 - \beta)\chi_2\right\} + P_{1,1},$$

$$(22, e) \quad A_{2,0} = \frac{d^2\chi_2}{dv^2} - 4\frac{d\chi_1}{dv} - 4(1 - \beta)\chi_2 + (1 - P_{0,1})\chi_2 \\ + P_{1,0}\left\{\frac{d\chi_2}{dv} - 2\chi_1\right\} + P_{2,0},$$

il viendra :

$$(23) \quad \frac{d^2E}{dv^2} + (1 - A_{0,1})E + A_{1,0}\frac{dE}{dv} \\ + A_{0,2}\left\{(1 - \beta)E^2 + \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\} + 2A_{1,1}E\frac{dE}{dv} \\ + A_{2,0}\left\{(1 - \beta)E^2 - \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\} \\ + \varphi_{1,0}\frac{dL}{dv} + \left(2\frac{d\varphi_{1,0}}{dv} - \varphi_{0,1} + P_{1,0}\varphi_{1,0}\right)L + 2(\chi_0 - \chi_2)L^2 \\ + \left\{2\left[2\frac{d\chi_1}{dv} - (1 - \beta)(\chi_0 - \chi_2) + 2(1 - \beta)\chi_2 + P_{1,0}\chi_1\right]E \right. \\ \left. + 2\left[3\chi_1 + 2\frac{d(\chi_0 - \chi_2)}{dv} + P_{1,0}(\chi_0 - \chi_2)\right]\frac{dE}{dv}\right\}L \\ + \left\{2\chi_1E + 2(\chi_0 - \chi_2)\frac{dE}{dv}\right\}\frac{dL}{dv} = \Omega \\ - P_{0,2}\left\{(1 - \beta)(y^2 - E^2) + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 - \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\} \\ - \dots$$

Le plus souvent, c'est-à-dire dans les cas que présentent, à quelques exceptions près, les mouvements des planètes, on pourrait égaler la fonction $A_{0,1}$ à une constante et les quatre A restants, à zéro. On obtient ainsi, les deux fonctions φ et les trois fonctions χ , les premières du

second degré et les dernières du premier degré. Cela étant, il est évidemment permis de négliger, dans l'équation précédente et dans la première approximation, les termes multipliés par $P_{0.2}$, $P_{1.1}$ ou $P_{2.0}$, tandis qu'il faut garder les termes multipliés par L et $\frac{dL}{dv}$, vu qu'ils sont, à l'exception de

$$2 \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} L + 2(\chi_0 - \chi_2)L^2,$$

du troisième degré.

Mais nous verrons tout de suite qu'on aura facilement une détermination approchée de la fonction L , ce qui nous permettra de tenir compte, déjà dans la première approximation, des termes dont il s'agit.

Désignant par $\beta_3 H$ la partie constante de la fonction P , nous écrivons:

$$P = \beta_3 H + P'$$

ce qui donne:

$$P_{0.1} = \beta_1 + \beta_3 H + P'.$$

Maintenant, si nous faisons:

$$A_{0.1} = \beta_1 + \beta_3 H, \quad A_{1.0} = A_{0.2} = A_{1.1} = A_{2.0} = 0,$$

nous aurons de l'équation (23) la suivante:

$$(24) \quad \frac{d^2 E}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H)E + \varphi_{1.0} \frac{dL}{dv} - \varphi_{0.1} L + M = \Omega,$$

où l'on a désigné par M une fonction du premier ordre et tout au moins du troisième degré, dont la plus grande partie peut être regardée comme connue.

En retranchant l'équation (19) de l'équation (24), on obtiendra l'équation restante que voici:

$$(25) \quad L = \Omega + (\beta_1 + \beta_3 H - \beta)E - \varphi_{1.0} \frac{dL}{dv} + \varphi_{0.1} L - M.$$

Nous n'avons pas ici motif de considérer d'autres cas que ceux où la différence

$$\beta_1 + \beta_3 H - \beta$$

est très petite, tout au moins du premier ordre et du second degré. D'un

autre côté, nous nous dispensons d'examiner les cas où la fonction E est plus grande qu'une quantité du premier degré, vu qu'autrement l'orbite ne serait plus une orbite planétaire, mais bien pareille à celle d'une comète. Mais cette présomption-là exige, dans les cas exceptionnels, que les termes critiques dans Ω soient tout au moins du troisième degré. Par ces considérations, on conclut que

$$L = \Omega$$

constitue une valeur approchée de L . En effet, la fonction M étant donnée au moyen de la formule

$$(26) \quad M = \left(2 \frac{d\varphi_{1.0}}{dv} + P_{1.0}\varphi_{1.0} \right) L + 2(\chi_0 - \chi_2)L^2 \\ + \left\{ 2 \left(2 \frac{d\chi_1}{dv} - (1 - \beta)(\chi_0 - \chi_2) + 2(1 - \beta)\chi_2 + P_{1.0}\chi_1 \right) E \right. \\ \left. + 2 \left(3\chi_1 + 2 \frac{d(\chi_0 - \chi_2)}{dv} + P_{1.0}(\chi_0 - \chi_2) \right) \frac{dE}{dv} \right\} L \\ + \left\{ 2\chi_1 E + 2(\chi_0 - \chi_2) \frac{dE}{dv} \right\} \frac{dL}{dv} + \dots,$$

elle est dans les cas ordinaires une quantité du troisième degré, mais dans les cas critiques où L est du troisième degré, du cinquième degré. Il s'ensuit que le premier terme du membre droit de l'équation (25) l'emporte sur les autres, bien entendu sous la condition, que $\varphi_{0.1}$ et $\varphi_{1.0}$ soient des quantités du second degré, ainsi que χ_0 , χ_1 et χ_2 du premier degré, ce que nous avons supposé, vu qu'autrement la transformation indiquée aurait été sans succès. Mais encore, puisqu'on peut joindre, ce qui est bien évident, les facteurs qui multiplient E et $\frac{dE}{dv}$ aux équations (22, a) et (22, b), et les y considérer comme des quantités connues, la partie restante de M sera, non seulement du troisième ou du cinquième degré, mais même du deuxième ordre. On peut donc commencer les approximations par intégrer l'équation

$$(27) \quad \frac{d^2 E}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H) E = \Omega - \varphi_{1.0} \frac{d\Omega}{dv} + \varphi_{0.1} \Omega.$$

En portant, dans l'équation (25), l'expression de M que nous venons de signaler, nous aurons sans peine un résultat de la forme:

$$(28) \quad L = N - \varphi \frac{dL}{dv}.$$

Dans cette relation, où l'on a négligé le terme dépendant de L^2 , on peut considérer N et φ comme des fonctions toutes connues, de la même nature que Ω et $\varphi_{0.1}$. Nous reviendrons plus loin sur la résolution d'une équation du type (28).

5. Revenons aux équations (22). En remplaçant les cinq A par des valeurs déterminées, nous aurons cinq équations linéaires du deuxième ordre, dont la troisième s'intègre indépendamment des autres, et les quatre restantes se divisent en deux groupes formant chacun un système de deux équations simultanées.

Admettant d'abord:

$$A_{0.2} = 0,$$

l'équation (22, c) s'écrit ainsi:

$$(29) \quad \frac{d^2\chi_0}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H - P')\chi_0 + P_{1.0} \frac{d\chi_0}{dv} = -P_{0.2}.$$

Pour nous faire une idée de la nature de l'intégrale, supprimons les termes dépendant de P' et de $P_{1.0}$, vu qu'ils n'exercent aucune influence décisive sur le résultat.

Cela posé, nous allons considérer un terme critique isolé de la fonction $P_{0.2}$, à savoir:

$$P_{0.2} = \gamma \sin[(1 - \sigma)v - B],$$

où la nature critique du terme s'est manifestée en ce que nous avons admis la différence

$$\beta_1 - 2\sigma$$

très petite.

En introduisant, dans l'équation (29), l'expression adoptée de $P_{0.2}$, il en résulte:

$$\chi_0 = \frac{\gamma \sin[(1 - \sigma)v - B]}{\beta_1 + \beta_3 H - 2\sigma + \sigma^2}.$$

Certes, le coefficient du sinus ne peut devenir infini, vu que la constante H contient, parmi d'autres termes, le carré de ce coefficient, mais il peut devenir trop grand pour être considéré comme une quantité du premier degré. Dans ce cas, pour avoir une valeur du premier degré de χ_0 , il faudrait égaler $A_{0.2}$ non plus à zéro, mais bien à la fonction χ_0 , multipliée par un facteur du premier ordre. Donc, en désignant ce facteur par β_0 , nous aurons, au lieu de l'équation (29), celle-ci :

$$(30) \quad \frac{d^2\chi_0}{dv^2} + (1 - \beta_0 - \beta_1 H - P')\chi_0 + P_{0.1} \frac{d\chi_0}{dv} = -P_{0.2}.$$

En maintenant les suppositions de l'exemple précédent, il viendra :

$$\chi_0 = \frac{\gamma \sin [(1 - \sigma)v - B]}{\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 H - 2\sigma + \sigma^2},$$

d'où l'on voit facilement, en considérant γ comme une quantité du premier ordre et du premier degré, que la fonction χ_0 reste du premier degré si la différence $\beta_1 - 2\sigma + \sigma^2$ est très petite.

Pour rendre plus facile l'étude des deux systèmes dans lesquels se divisent les quatre équations restantes du système (22), à savoir: (22, a), (22, b), (22, d) et (22, e), nous allons y opérer une transformation, afin que les deux équations de chaque système soient symétriques, propriété que ne possèdent pas encore les équations dont il s'agit. Dans ce but, on peut utiliser la méthode suivante.

La forme commune aux deux systèmes étant d'abord celle-ci :

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dv^2} + A \frac{dx}{dv} + Bx + C \frac{dy}{dv} + Dy + 2p \frac{dy}{dv} + 2qx = M, \\ \frac{d^2y}{dv^2} + A \frac{dy}{dv} + By - C \frac{dx}{dv} - Dx = N, \end{cases}$$

A , B , C et D signifiant des fonctions connues, et p et q des constantes, introduisons- y , au lieu de x et y deux inconnues nouvelles, ξ et η , liées aux premières par les deux relations :

$$x = \xi \cos \omega v + \eta \sin \omega v, \quad y = \eta \cos \omega v - \xi \sin \omega v,$$

dans lesquelles on a désigné par ω une constante indéterminée qu'on

choisira convenablement. Pour rendre les formules qu'on va obtenir plus simples, on se servira de la notation

$$u = \omega v.$$

Cela posé, on obtient, au lieu des équations (31), les suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dv^2} + \frac{d\xi}{dv}[A - 2p \sin u \cos u] + \frac{d\eta}{dv}[2\omega + C + 2p \cos u^2] \\ + \xi[-\omega^2 + B - \omega C - 2\omega p \cos u^2 + 2q \cos u^2] \\ + \eta[\omega A + D - 2\omega p \sin u \cos u + 2q \sin u \cos u] = M \cos u - N \sin u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dv^2} + \frac{d\eta}{dv}[A + 2p \sin u \cos u] - \frac{d\xi}{dv}[2\omega + C + 2p \sin u^2] \\ + \eta[-\omega^2 + B - \omega C - 2\omega p \sin u^2 + 2q \sin u^2] \\ + \xi[\omega A + D + 2\omega p \sin u \cos u - 2q \sin u \cos u] = M \sin u + N \cos u, \end{aligned}$$

et si l'on pose:

$$\theta = \xi + i\eta,$$

il viendra:

$$\begin{aligned} (32) \quad \frac{d^2\theta}{dv^2} + \{A - i[2\omega + C + p]\} \frac{d\theta}{dv} + \{-\omega^2 + B - \omega C - \omega p + q - i[\omega A + D]\} \theta \\ + pe^{2iu} \left\{ i \frac{d\xi}{dv} + \frac{d\eta}{dv} \right\} + (-p\omega + q)e^{2iu}(\xi - i\eta) = Me^{iu} + iNe^{iu}. \end{aligned}$$

De même, en adoptant la notation

$$\Sigma = \xi - i\eta,$$

on parviendra à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Sigma}{dv^2} + \{A + i(2\omega + C + p)\} \frac{d\Sigma}{dv} + \{-\omega^2 + B - \omega C - \omega p + q + i[\omega A + D]\} \Sigma \\ + pe^{-2iu} \left(-i \frac{d\xi}{dv} + \frac{d\eta}{dv} \right) + (-p\omega + q)e^{-2iu}(\xi + i\eta) = Me^{-iu} - iNe^{-iu}. \end{aligned}$$

Les deux équations que nous venons de trouver s'écrivent aussi de la manière suivante:

$$(33) \begin{cases} \frac{d^2\theta}{dv^2} + \{F - iG\} \frac{d\theta}{dv} + \{F_1 - iG_1\}\theta + ipe^{2iu} \frac{d\Sigma}{dv} - (p\omega - q)e^{2iu}\Sigma \\ \hspace{15em} = (M + iN)e^{iu}, \\ \frac{d^2\Sigma}{dv^2} + \{F + iG\} \frac{d\Sigma}{dv} + \{F_1 + iG_1\}\Sigma - ipe^{-2iu} \frac{d\theta}{dv} - (p\omega - q)e^{-2iu}\theta \\ \hspace{15em} = (M - iN)e^{-iu}; \end{cases}$$

donc, elles forment évidemment un système symétrique.

Dans les équations que nous venons de signaler, on a employé les notations

$$F = A; \quad F_1 = -\omega^2 + B - \omega C - \omega p + q;$$

$$G = 2\omega + C + p; \quad G_1 = \omega A + D.$$

Concevons maintenant le système que forment les équations (22, d) et (22, e). En égalant χ_1 à x et χ_2 à y , nous aurons, en omettant le petit terme du deuxième ordre $2\beta P_{1,0}$:

$$A = P_{1,0}; \quad B = -3 + 4\beta - P_{0,1} = -3 + 4\beta - \beta_1 - \beta_3 H - P',$$

$$C = 4; \quad D = 2P_{1,0}; \quad 2p = -4\beta; \quad q = 0,$$

$$M = -P_{1,1}; \quad N = -P_{2,0};$$

et si nous posons:

$$4\beta - \beta_1 - \beta_3 H = 3\bar{\beta},$$

$\bar{\beta}$ sera évidemment une quantité, à bien peu près égale à β ou à β_1 .

Cela étant, nous allons déterminer la constante ω de manière que le coefficient G disparaisse. De cette condition, il résulte:

$$\omega = -2 \left(1 - \frac{1}{2}\beta \right),$$

ce qui entraîne:

$$F_1 = 1 - \beta + 3(\bar{\beta} - \beta) - P'; \quad G_1 = 2\beta P_{1,0}.$$

En négligeant, comme plus haut, cette dernière quantité, nous aurons les équations

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \theta}{dv^2} + P_{1,0} \frac{d\theta}{dv} + [1 - \beta + 3(\bar{\beta} - \beta) - P'] \theta \\
& - 2i\beta e^{-4i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v} \frac{d\Sigma}{dv} - 4\beta \left(1 - \frac{1}{2}\bar{\beta}\right) e^{-4i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v} \Sigma \\
& = - (P_{1,1} + iP_{2,0}) e^{-2i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v}, \\
& \frac{d^2 \Sigma}{dv^2} + P_{1,0} \frac{d\Sigma}{dv} + [1 - \beta + 3(\bar{\beta} - \beta) - P'] \Sigma \\
& + 2i\beta e^{4i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v} \frac{d\theta}{dv} - 4\beta \left(1 - \frac{1}{2}\bar{\beta}\right) e^{4i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v} \theta \\
& = - (P_{1,1} - iP_{2,0}) e^{2i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v}.
\end{aligned}$$

Examinons ce que deviennent θ et Σ lorsqu'on suppose, dans $P_{1,1}$ et $P_{2,0}$, l'existence de termes dépendant d'arguments critiques. A cet effet, supposons que nous ayons:

$$P_{2,0} = (\gamma + \varepsilon) \cos [(1 - \sigma)v - B],$$

$$P_{1,1} = (\gamma - \varepsilon) \sin [(1 - \sigma)v - B]$$

et que le coefficient σ ait une valeur telle que la différence

$$\beta - 2\sigma$$

soit très petite par rapport à β .

Or, si l'on néglige les termes dépendant des parties périodiques, c'est-à-dire de $P_{1,0}$ et de P' , ainsi que la différence $\bar{\beta} - \beta$, les équations précédentes deviendront:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned}
& \frac{d^2 \theta}{dv^2} + (1 - \beta) \theta - 2i\beta e^{-4i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v} \frac{d\Sigma}{dv} - 4\beta e^{-4i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v} \Sigma \\
& = - i \{ \gamma e^{-i[(1-\sigma)v - B]} + \varepsilon e^{i[(1-\sigma)v - B]} \} e^{-2i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v}, \\
& \frac{d^2 \Sigma}{dv^2} + (1 - \beta) \Sigma + 2i\beta e^{4i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v} \frac{d\theta}{dv} - 4\beta e^{4i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v} \theta \\
& = i \{ \gamma e^{i[(1-\sigma)v - B]} + \varepsilon e^{-i[(1-\sigma)v - B]} \} e^{2i(1-\frac{1}{2}\bar{\beta})v},
\end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire, en mettant:

$$\theta = -i\{\mu e^{-i[(3-\beta-\sigma)v-B]} + \nu e^{-i[(1-\beta+\sigma)v+B]}\},$$

$$\Sigma = i\{\mu e^{i[(3-\beta-\sigma)v-B]} + \nu e^{i[(1-\beta+\sigma)v+B]}\}.$$

les équations de condition:

$$\mu[-(3-\beta-\sigma)^2 + 1-\beta] + 2\beta\nu(1+\beta-\sigma) = \gamma,$$

$$\nu[-(1-\beta+\sigma)^2 + 1-\beta] - 2\beta\mu(1-\beta-\sigma) = \varepsilon.$$

De là il s'ensuit que le coefficient μ est une quantité très petite du même ordre que γ ; quant au coefficient ν , on voit qu'il acquiert le même diviseur qui figure déjà dans χ_0 . On conclut de là que l'élimination des fonctions χ_1 et χ_2 , dans un cas critique, ne sera pas plus facile que ne l'a été celle de la fonction χ_0 . Cependant, il ne se produira aucune complication ultérieure de notre équation résultante, vu que les termes dus aux fonctions χ_1 et χ_2 vont se rejoindre, après quelques opérations faciles, aux termes analogues dans χ_0 , de sorte que toutes les trois fonctions dont il s'agit, s'uniront dans une seule.

Venons finalement aux deux premières des équations (22). En les comparant aux équations (31), on aura, si l'on néglige le terme du deuxième ordre, les valeurs

$$A = P_{1.0}; \quad B = \beta - \beta_1 - \beta_3 H - P; \quad C = 2; \quad D = P_{1.0},$$

$$2p = -2\beta; \quad q = 0,$$

$$M = -P_{0.1}; \quad N = -P_{1.0}.$$

Faisons d'abord $G = 0$, ce qui nous donne:

$$\omega = -\left(1 - \frac{1}{2}\beta\right),$$

et puis:

$$F_1 = 1 - \beta_1 - \beta_3 H - P; \quad G_1 = 0,$$

en négligeant toujours les quantités du deuxième ordre. Nous aurons ainsi, en omettant les coefficients périodiques, les équations

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \theta}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_2 H - P') \theta - i \beta e^{-i(2-\beta)v} \frac{d\Sigma}{dv} - \beta e^{-i(2-\beta)v} \Sigma \\ \qquad \qquad \qquad = (P' + iP_{1,0}) e^{-i(1-\frac{1}{2}\beta)v}, \\ \frac{d^2 \Sigma}{dv^2} + (1 - \beta_1 - \beta_2 H - P') \Sigma + i \beta e^{i(2-\beta)v} \frac{d\theta}{dv} - \beta e^{i(2-\beta)v} \theta \\ \qquad \qquad \qquad = (P' - iP_{1,0}) e^{i(1-\frac{1}{2}\beta)v}. \end{array} \right.$$

Maintenant, si nous supposons:

$$P' + iP_{1,0} = \gamma e^{i(\bar{\sigma}v + \Delta)}; \quad P' - iP_{1,0} = \gamma e^{-i(\bar{\sigma}v + \Delta)},$$

$\bar{\sigma}$ étant une quantité très petite par rapport à β , et γ un coefficient du deuxième ordre et du second degré, nous parviendrons au résultat que voici:

$$\theta = \mu e^{-i[(1-\frac{1}{2}\beta-\bar{\sigma})v-\Delta]} + \nu e^{-i[(1-\frac{1}{2}\beta+\bar{\sigma})v+\Delta]},$$

$$\Sigma = \mu e^{i[(1-\frac{1}{2}\beta-\bar{\sigma})v-\Delta]} + \nu e^{i[(1-\frac{1}{2}\beta+\bar{\sigma})v+\Delta]},$$

les coefficients μ et ν se déduisant en vertu des équations

$$\left[- \left(1 - \frac{1}{2} \beta - \bar{\sigma} \right)^2 + 1 - \beta_1 - \beta_2 H \right] \mu - \left(\frac{1}{2} \beta^2 - \beta \bar{\sigma} \right) \nu = \gamma,$$

$$\left[- \left(1 - \frac{1}{2} \beta + \bar{\sigma} \right)^2 + 1 - \beta_1 - \beta_2 H \right] \nu - \left(\frac{1}{2} \beta^2 + \beta \bar{\sigma} \right) \mu = 0,$$

d'où l'on conclut facilement que les fonctions dont il s'agit peuvent acquérir des valeurs très grandes, la différence $\beta_1 - \beta$ étant très petite. Il s'ensuit de là que les transformations que nous venons d'indiquer dernièrement ne portent pas toujours au but proposé.

Mais si, dans un cas critique, il se trouvait impossible de faire disparaître entièrement les coefficients variables de E et de $\frac{dE}{dv}$, on pourrait du moins utiliser les équations (35) pour détruire une infinité de termes dans les fonctions P' et $P_{1,0}$, de sorte qu'on n'aurait retenu, dans les coefficients dont nous avons parlé, qu'un nombre fini de termes.

6. Dans le cas où l'on ne saurait annuler les quantités $A_{0,1}$ et $A_{1,0}$, ni les trois $A_{0,2}$, $A_{1,1}$, $A_{2,0}$ non plus, l'équation (17) prend la forme

$$(36) \quad \frac{d^2y}{dv^2} + [1 - \beta_1 - \beta_3(H)^2 - \Psi]y + \left(\Phi + p \frac{d(H)^2}{dv} \right) \frac{dy}{dv} + \beta_0 \chi_0(H)^2 = \Omega,$$

où l'on a mis en évidence les termes dépendant de $(H)^2$, fonction qui est donnée par la formule

$$(H)^2 = (1 - \beta)y^2 + \left(\frac{dy}{dv} \right)^2.$$

Dans l'équation que nous venons de signaler, on a désigné par Ψ et Φ deux fonctions connues ne contenant qu'un nombre fini de termes purement périodiques, la première consistant exclusivement des termes en cosinus, la seconde des termes en sinus; les coefficients p et β_0 sont des constantes, le premier de l'ordre zéro, le second du premier ordre, et tous les deux du degré zéro. Nous supposons enfin, qu'on n'ait retenu, dans la fonction χ_0 , qu'un nombre fini de termes.

Maintenant, si nous remplaçons la fonction y par une autre z , et la variable indépendante v , par une autre u , et que nous supposions les relations suivantes:

$$y = \frac{z}{1 + \phi}; \quad dv = \frac{e^{f\phi du}}{(1 + \phi)^2} du,$$

ϕ étant une fonction dont nous pouvons disposer à volonté, nous aurons d'abord:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dv} &= \left\{ \frac{dz}{du} (1 + \phi) - z \frac{d\phi}{du} \right\} e^{-f\phi du}, \\ \frac{d^2y}{dv^2} &= \left\{ \frac{d^2z}{du^2} (1 + \phi) - z \frac{d^2\phi}{du^2} \right\} (1 + \phi)^2 e^{-2f\phi du} \\ &\quad - \Phi \left\{ \frac{dz}{du} (1 + \phi) - z \frac{d\phi}{du} \right\} e^{-f\phi du} \end{aligned}$$

et ensuite, en introduisant les expressions obtenues dans l'équation (36):

$$(37) \quad \frac{d^2z}{du^2} + \left\{ -\frac{1}{1 + \phi} \frac{d^2\phi}{du^2} + [1 - \beta_1 - \beta_3(H)^2 - \Psi] \frac{e^{2f\phi du}}{(1 + \phi)^4} \right\} z + \frac{\beta_0 \chi_0(H)^2}{(1 + \phi)^3} e^{2f\phi du} = \frac{\Omega}{(1 + \phi)^3} e^{2f\phi du}.$$

Dans cette équation, on a omis le terme dépendant de $\frac{d(H)^2}{dv}$, vu qu'il doit être considéré, le cas étant critique, comme une quantité du cinquième degré.

Cela étant, nous allons déterminer la fonction ϕ de manière que la condition

$$(38) \quad -\frac{1}{1+\phi} \frac{d^2\phi}{du^2} + [1 - \beta_1 - \beta_2(H)^2 - \Psi] \frac{e^{2f\phi dv}}{(1+\phi)^4} = 1 - \beta_1 - \beta_2\eta^2$$

soit satisfaite; on a employé la notation

$$\eta^2 = (1 - \beta)z^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2.$$

En supposant de plus que $(H)^2$ ainsi que η^2 soient des quantités du deuxième degré, nous aurons, vu que ϕ est évidemment une fonction à longue période dont la seconde dérivée est une quantité du second ordre et au moins du second degré, la relation approchée:

$$(1 + \phi)^2 = e^{f\phi dv}.$$

Si l'on introduit cette expression dans la formule

$$\begin{aligned} (H)^2 &= (1 - \beta)y^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 \\ &= (1 - \beta) \frac{z^2}{(1 + \phi)^2} + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 (1 + \phi)^2 e^{-2f\phi dv}, \end{aligned}$$

il viendra:

$$(H)^2 = \eta^2 e^{-f\phi dv},$$

et l'on prévoit aisément que l'erreur de cette relation ne surpasse pas une quantité du quatrième degré.

En utilisant la relation trouvée, et en établissant les notations

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 + \phi}; \quad (\Omega) = \frac{\Omega}{(1 + \phi)^2} e^{2f\phi dv},$$

on parvient, eu égard à l'équation (38), au résultat que voici:

$$(39) \quad \frac{d^2z}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_2\eta^2)z + \beta_0\chi\eta^2 = (\Omega).$$

Telle est l'équation qu'il nous reste à intégrer; mais avant que de nous occuper de cette tâche, revenons à l'intégration de l'équation (38).

Si l'on écrit la dite équation de la manière suivante:

$$(40) \quad \frac{d^2\phi}{du^2} - \frac{1 - \beta_1}{(1 + \phi)^3} e^{2f\phi dv} + (1 - \beta_1)(1 + \phi) = \beta_3 \eta^2 (1 + \phi) - [\beta_3(H)^2 + \Psi] \frac{e^{2f\phi dv}}{(1 + \phi)^3},$$

on pourra tout de suite, aux termes du membre de droite, appliquer les relations approchées entre $\int \Phi dv$ et ϕ , et entre $(H)^2$ et η^2 que nous venons d'obtenir tout à l'heure. Mais puisque les fonctions Φ et Ψ sont données au moyen de v , tandis que la variable indépendante de notre équation est u , il faudrait d'abord changer la variable d'où dépendent les arguments. Cependant, la différence $v - u$ ne contenant que des termes périodiques, on peut mettre, tout simplement, u au lieu de v dans les arguments de la forme

$$\bar{\sigma}v + A_1,$$

le coefficient $\bar{\sigma}$ étant une quantité du premier ordre et, dans les cas critiques, du second degré.

En effet, si nous admettons le développement

$$e^{2f\phi dv} = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\sigma_1 v + A_1) + \alpha_2 \cos(\sigma_2 v + A_2) + \dots,$$

qui est nécessairement convergent, même si $\int \Phi dv$ est une quantité de l'ordre zéro, et que nous y posions:

$$v = u + U,$$

nous aurons immédiatement:

$$\begin{aligned} e^{2f\phi dv} &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\bar{\sigma}_1 u + A_1) + \alpha_2 \cos(\bar{\sigma}_2 u + A_2) + \dots \\ &\quad - \{\bar{\sigma}_1 \alpha_1 \sin(\bar{\sigma}_1 u + A_1) + \bar{\sigma}_2 \alpha_2 \sin(\bar{\sigma}_2 u + A_2) + \dots\} U \\ &\quad - \{\bar{\sigma}_1^2 \alpha_1 \cos(\bar{\sigma}_1 u + A_1) + \bar{\sigma}_2^2 \alpha_2 \cos(\bar{\sigma}_2 u + A_2) + \dots\} \frac{U^2}{1.2} \\ &\quad + \dots, \end{aligned}$$

d'où il est visible que les parties dépendant des puissances de U sont peu considérables relativement aux termes de la première ligne, la fonction U étant considérée comme une quantité de l'ordre zéro.

En calculant la fonction U au moyen de la formule

$$U = \int \left| \frac{e^{f\phi dv}}{(1+\phi)^2} - 1 \right| du,$$

on ne saurait éviter la naissance d'un terme séculaire, ce qui ne doit pas, cependant, se produire. Il ne sera pas difficile, toutefois, de se mettre à l'abri d'un tel inconvénient. En effet, il ne faut qu'ajouter au membre de droite de l'équation (38) une constante, ν , qu'on peut choisir de façon à détruire le terme séculaire dont nous avons parlé.

Maintenant, après avoir établi la notation

$$e^{2f\phi dv} = \alpha + W,$$

où la fonction W ne renferme que des termes périodiques, nous mettons l'équation (40) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{du^2} + \left\{ 3\alpha(1-\beta_1) + 1 - \beta_1 + \nu - \beta_2 \left[\eta^2 - (H)^2 \frac{e^{2f\phi dv}}{(1+\phi)^4} \right] \right. \\ \left. + 3(1-\beta_1)W + \Psi \frac{e^{2f\phi dv}}{(1+\phi)^4} \right\} \phi = (\alpha + W - 1)(1-\beta_1) - \nu \\ + \beta_2 \left(\eta^2 - (H)^2 \frac{e^{2f\phi dv}}{(1+\phi)^4} \right) - \Psi \frac{e^{2f\phi dv}}{(1+\phi)^4} \\ + 6(1-\beta_1)(\alpha + W)\phi^2 - \dots \end{aligned}$$

Quant à cette équation, il s'entend facilement, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans les détails, comment on opère son intégration au moyen d'approximations successives. J'ajouterai l'observation que, selon l'hypothèse, les fonctions η^2 , $(H)^2$ et Ψ ne contiennent que des termes à longue période ou bien des termes constants: un tel terme passera évidemment, sans être essentiellement agrandi, dans l'intégrale de l'équation (40).

7. Toutes les fois qu'il s'agit d'un cas critique, l'intégration de l'équation (39) est, comme on le comprend à la première inspection, extrêmement difficile. Nulle espérance d'en trouver la solution sous forme d'un développement, ni suivant les puissances des forces perturbatrices ni suivant celles des excentricités ou des inclinaisons. Mais il paraît même manquer toute possibilité de retrancher directement, de l'équation dont il s'agit, quelque partie de manière que le reste soit convenable à l'intégration, tandis que l'influence de la partie retranchée soit assez petite pour être négligée d'abord. Il faut donc recourir à de nouvelles transformations.

Pour préparer un peu le terrain, posons:

$$z = z_0 + z_1,$$

ce qui changera l'équation (39) en la suivante:

$$\frac{d^2 z_0}{du^2} + \frac{d^2 z_1}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 \eta^2)(z_0 + z_1) + \beta_0 \chi \eta^2 = (\Omega).$$

Puisque l'une des fonctions z_0 et z_1 est entièrement arbitraire, nous pouvons la déterminer par l'équation

$$\beta_3 z_1 = \beta_0 \chi,$$

ce qui entraîne:

$$\frac{d^2 z_0}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 \eta^2) z_0 = (\Omega) - (1 - \beta_1) \frac{\beta_0}{\beta_3} \chi - \frac{\beta_0}{\beta_3} \frac{d^2 \chi}{du^2}.$$

Toute la partie à droite est connue: selon notre supposition, (Ω) est une quantité du troisième degré, si le cas est critique, et on s'aperçoit facilement que les termes critiques dans la somme

$$(1 - \beta_1) \chi + \frac{d^2 \chi}{du^2}$$

sont aussi des quantités du troisième degré.

Il paraît à la première inspection que l'équation en z_0 est bien simple; néanmoins son intégration présente de très graves difficultés. Afin de

les aplanir, nous allons remplacer η^2 par deux nouvelles fonctions, η_0 et η_1 , dont la seconde soit connue. Dans ce but, posons:

$$z_0 = \eta_0 \cos[(1 - \sigma_0)u - B_0 - \pi_0]; \quad z_1 = \eta_1 \cos[(1 - \sigma_1)u - B_1 - \pi_1],$$

$\eta_1 \cos \pi_1$ et $\eta_1 \sin \pi_1$ étant deux fonctions connues. Nous admettons ensuite, ce qui est d'accord avec la supposition d'un cas critique, que la différence $\sigma_0 - \sigma_1$ soit extrêmement petite, de sorte que l'on ait:

$$\sigma_0 - \sigma_1 \approx \sigma_0 \eta^2,$$

hypothèse à laquelle nous ajoutons la suivante:

$$\beta - 2\sigma_0 \approx \beta - 2\sigma_1 \approx \sigma_0 \eta^2.$$

Avant d'aller plus loin, voici quelques relations entre les fonctions $z_0, z_1, \frac{dz_0}{du}, \frac{dz_1}{du}$ d'un côté et $\eta_0, \eta_1, \pi_0, \pi_1$ de l'autre.

Après avoir fait, pour abrégér:

$$\begin{aligned} (1 - \sigma_0)u - B_0 &= f_0 & ; & & (1 - \sigma_1)u - B_1 &= f_1, \\ f_0 - \pi_0 &= F_0 & ; & & f_1 - \pi_1 &= F_1, \\ \eta_0 \cos \pi_0 &= g_0 & ; & & \eta_1 \cos \pi_1 &= g_1, \\ \eta_0 \sin \pi_0 &= h_0 & ; & & \eta_1 \sin \pi_1 &= h_1, \\ \cos f_0 \frac{dg_0}{du} + \sin f_0 \frac{dh_0}{du} &= (\lambda)_0 & ; & & \cos f_1 \frac{dg_1}{dv} + \sin f_1 \frac{dh_1}{dv} &= (\lambda)_1, \end{aligned}$$

nous aurons:

$$\frac{dz_0}{du} = - (1 - \sigma_0) \eta_0 \sin F_0 + (\lambda)_0;$$

$$\frac{dz_1}{du} = - (1 - \sigma_1) \eta_1 \sin F_1 + (\lambda)_1.$$

Les fonctions $(\lambda)_0$ et $(\lambda)_1$ étant ordinairement du premier ordre et du premier degré, dans les cas critiques même du troisième degré, on peut, le plus souvent, les négliger à côté de η_0 et η_1 . Il y a cependant des formules où l'on doit, inévitablement, les retenir.

Cela étant, il sera facile d'établir les formules que voici:

$$z_0 = g_0 \cos f_0 + h_0 \sin f_0; \quad \frac{dz_0}{du} = -(1 - \sigma_0)(g_0 \sin f_0 - h_0 \cos f_0) + (\lambda)_0,$$

$$(1 - \sigma_0)g_0 = (1 - \sigma_0)z_0 \cos f_0 - \frac{dz_0}{du} \sin f_0 + (\lambda)_0 \sin f_0,$$

$$(1 - \sigma_0)h_0 = (1 - \sigma_0)z_0 \sin f_0 + \frac{dz_0}{du} \cos f_0 - (\lambda)_0 \cos f_0,$$

$$(1 - \sigma_0)^2 \eta_0^2 = (1 - \sigma_0)^2 z_0^2 + \left(\frac{dz_0}{du}\right)^2 - 2 \frac{dz_0}{du} (\lambda)_0 + (\lambda)_0^2,$$

ainsi que des formules toutes semblables donnant g_1 , h_1 et η_1^2 .

En désignant par w la différence

$$F_0 - F_1 = (\sigma_1 - \sigma_0)u + B_1 - B_0 + \pi_1 - \pi_0,$$

nous aurons ensuite:

$$(1 - \beta)z_0 z_1 + \frac{dz_0}{du} \frac{dz_1}{du} = (1 - \beta)\eta_0 \eta_1 \cos w + (\beta - 2\sigma + \sigma_0 \sigma_1)\eta_0 \eta_1 \sin F_0 \sin F_1 \\ - [(1 - \sigma_0)(\lambda)_1 \eta_0 \sin F_0 + (1 - \sigma_1)(\lambda)_0 \eta_1 \sin F_1] + (\lambda)_0 (\lambda)_1,$$

$$(1 - \sigma) \left\{ z_0 \frac{dz_1}{du} - z_1 \frac{dz_0}{du} \right\} = (1 - \beta)\eta_0 \eta_1 \sin w + (\beta - 2\sigma + \tau + \sigma_0 \sigma)\eta_0 \eta_1 \sin F_0 \cos F_1 \\ - (\beta - 2\sigma - \tau + \sigma_1 \sigma)\eta_0 \eta_1 \cos F_0 \sin F_1 \\ + (1 - \sigma)\{(\lambda)_1 \eta_0 \cos F_0 - (\lambda)_0 \eta_1 \cos F_1\},$$

où l'on a employé les notations

$$\sigma = \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2}; \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2}.$$

Nous ajouterons encore quelques relations qui nous seront utiles prochainement; les voici:

$$\eta_0 \eta_1 \cos w = (g_0 g_1 + h_0 h_1) \cos (f_0 - f_1) + (h_0 g_1 - g_0 h_1) \sin (f_0 - f_1),$$

$$\eta_0 \eta_1 \sin w = (g_0 g_1 + h_0 h_1) \sin (f_0 - f_1) - (h_0 g_1 - g_0 h_1) \cos (f_0 - f_1)$$

ou bien:

$$\eta_0 \eta_1 e^{i\omega} = \{g_0 g_1 + h_0 h_1 - i(h_0 g_1 - g_0 h_1)\} e^{i(f_0 - f_1)}.$$

Nous allons employer, plus loin, la notation

$$f_0 - f_1 = \vartheta;$$

il conviendra alors de se rappeler la relation

$$\frac{d\vartheta}{du} = 2\tau.$$

En vertu des formules que nous venons de signaler, il sera maintenant facile d'établir la suivante, où l'on a négligé les termes du premier ordre, ce qui convient à l'usage que nous allons en faire,

$$\eta^2 = \eta_0^2 + \eta_1^2 + 2\eta_0 \eta_1 \cos \omega.$$

En portant cette valeur de η^2 dans l'équation en z_0 que nous venons de donner dans le commencement du numéro présent, nous aurons, après avoir établi la notation

$$\Omega' = (\Omega) - (1 - \beta_1) \frac{\beta_0}{\beta_2} \chi - \frac{\beta_0}{\beta_2} \frac{d^2 \chi}{du^2},$$

l'équation suivante en z_0 :

$$(41) \quad \frac{d^2 z_0}{du^2} + \{1 - \beta_1 - \beta_2(\eta_0^2 + 2\eta_0 \eta_1 \cos \omega + \eta_1^2)\} z_0 = \Omega'.$$

8. En partant de l'équation (41), il y aura lieu de supposer le développement que voici:

$$z_0 = U_0 + U_1 \cos \omega + U_2 \cos 2\omega + \dots \\ + T_1 \sin \omega + T_2 \sin 2\omega + \dots$$

De cette forme, il découle immédiatement:

$$\frac{dz_0}{du} = \sum \left\{ \frac{dU_n}{du} \cos n\omega + \frac{dT_n}{du} \sin n\omega \right\} \\ + \sum \left\{ -nU_n \sin n\omega + nT_n \cos n\omega \right\} \frac{d\omega}{du},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_0}{du^2} = & \sum \left\{ \frac{d^2 U_n}{du^2} \cos nw + \frac{d^2 T_n}{du^2} \sin nw \right\} \\ & + 2 \sum \left\{ -n \frac{dU_n}{du} \sin nw + n \frac{dT_n}{du} \cos nw \right\} \frac{dw}{du} \\ & - \sum \{ n^2 U_n \cos nw + n^2 T_n \sin nw \} \left(\frac{dw}{du} \right)^2 \\ & + \sum \{ -n U_n \sin nw + n T_n \cos nw \} \frac{d^2 w}{du^2}. \end{aligned}$$

En introduisant, avec le développement admis de z_0 , cette expression de la deuxième dérivée dans l'équation (41), il en résultera :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_0}{du^2} + \{ 1 - \beta_1 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \} U_0 - \beta_3 \eta_0 \eta_1 U_1 &= \Omega', \\ \frac{d^2 U_1}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \left(\frac{dw}{du} \right)^2 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} U_1 + 2 \frac{dT_1}{du} \frac{dw}{du} + T_1 \frac{d^2 w}{du^2} \\ & - \beta_3 \eta_0 \eta_1 (2U_0 + U_2) = 0, \\ \frac{d^2 T_1}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \left(\frac{dw}{du} \right)^2 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} T_1 - 2 \frac{dU_1}{du} \frac{dw}{du} - U_1 \frac{d^2 w}{du^2} \\ & - \beta_3 \eta_0 \eta_1 T_2 = 0, \\ \frac{d^2 U_2}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - 2^2 \left(\frac{dw}{du} \right)^2 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} U_2 + 4 \frac{dT_2}{du} \frac{dw}{du} + 2 T_2 \frac{d^2 w}{du^2} \\ & - \beta_3 \eta_0 \eta_1 (U_1 + U_3) = 0, \\ \frac{d^2 T_2}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - 2^2 \left(\frac{dw}{du} \right)^2 - \beta_3(\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} T_2 - 4 \frac{dU_2}{du} \frac{dw}{du} - 2 U_2 \frac{d^2 w}{du^2} \\ & - \beta_3 \eta_0 \eta_1 (T_1 + T_3) = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Ces équations, deux formant toujours un couple (à l'exception des trois premières), on peut les réunir dans une seule équation du second ordre en posant :

$$Z_n = U_n + iT_n.$$

Le type général des équations qu'on obtient ainsi devient:

$$(42) \quad \frac{d^2 Z_n}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - n^2 \left(\frac{dw}{du} \right)^2 - \beta_3 (\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} Z_n - 2ni \frac{dw}{du} \frac{dZ_n}{du} - ni \frac{d^2 w}{du^2} Z_n \\ - \beta_3 \eta_0 \eta_1 (Z_{n-1} + Z_{n+1}) = 0;$$

et de cette équation, on en peut tirer une autre, que je tiens pour la plus convenable aux recherches sur la convergence du développement proposé pour représenter la fonction z_0 . Afin d'y arriver, posons:

$$Z_n = \zeta_n e^{in(w-\vartheta)}.$$

En introduisant ζ_n au lieu de Z_n , dans l'équation précédente, il viendra:

$$\frac{d^2 \zeta_n}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - n^2 \left(\frac{d\vartheta}{du} \right)^2 - \beta_3 (\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} \zeta_n - 2ni \frac{d\vartheta}{du} \frac{d\zeta_n}{du} \\ - \beta_3 \eta_0 \eta_1 \{ \zeta_{n-1} e^{-i(w-\vartheta)} + \zeta_{n+1} e^{i(w-\vartheta)} \} = 0.$$

Mais puisqu'on a:

$$\eta_0 \eta_1 e^{i(w-\vartheta)} = g_0 g_1 + h_0 h_1 - i(h_0 g_1 - g_0 h_1), \\ \eta_0 \eta_1 e^{-i(w-\vartheta)} = g_0 g_1 + h_0 h_1 + i(h_0 g_1 - g_0 h_1), \\ \frac{d\vartheta}{du} = 2\tau,$$

l'équation demandée prendra la forme que voici:

$$(43) \quad \frac{d^2 \zeta_n}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - 4n^2 \tau^2 - \beta_3 (\eta_0^2 + \eta_1^2) \right\} \zeta_n - 4in\tau \frac{d\zeta_n}{du} \\ = \beta_3 (g_0 g_1 + h_0 h_1) (\zeta_{n-1} + \zeta_{n+1}) - i\beta_3 (h_0 g_1 - g_0 h_1) (\zeta_{n-1} - \zeta_{n+1}).$$

De cette équation, deux choses sont faciles à conclure: d'abord, que les fonctions ζ_n ne peuvent aucunement devenir plus grandes qu'une quantité du premier degré, vu que η_0^2 contient les carrés de tous les coefficients dans ces fonctions; et puis, que les fonctions dont il s'agit, lorsque n devient si grand que le produit $n\tau$ surpasse l'unité, décroissent de manière à former une série convergente.

Pour corroborer cette dernière assertion, négligeons la fonction ζ_{n+1} , et supposons qu'on connaisse ζ_{n-1} , dont la valeur ne saurait surpasser une

quantité du premier degré, ainsi que les expressions approchées de g_0, g_1, h_0 et h_1 .

Concevons maintenant un terme du second membre, désignons-le par:

$$\gamma e^{i\lambda u},$$

et négligeons la partie périodique de $\eta_0^2 + \eta_1^2$. En vertu de l'équation précédente, on obtient facilement l'expression suivante du terme demandé dans ζ_n , la voici:

$$\zeta_n = - \frac{\gamma e^{i\lambda u}}{\lambda^2 + 4n^2\tau^2 - 1 + \beta_1 - 4n\tau\lambda + \beta_3(H_0 + H_1)}.$$

Par $H_0 + H_1$ on a désigné la partie constante de $\eta_0^2 + \eta_1^2$.

Certes, le coefficient γ est une quantité du premier ordre et tout au moins du troisième degré, mais il peut être affecté d'un facteur très grand, dont la valeur n'atteint pas, cependant, celle de n . On a toutefois obtenu un résultat qu'on peut considérer comme très petit, même par rapport à une quantité du premier degré. A partir d'un tel résultat relativement à ζ_n , la convergence des fonctions $\zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots$ sera évidemment très rapide.

9. Pour le calcul effectif de la fonction z_0 , la méthode dont nous venons de faire l'exposition n'est pas suffisamment aisée, vu qu'elle exige des approximations successives et en même temps renouvelées. Nul doute qu'on ne puisse en tirer, en employant certains procédés de tâtonnements, des règles pour calculer les coefficients dans la fonction demandée, mais dans le cas où il ne s'agit que d'une solution approchée, on peut atteindre le but d'une manière plus directe.

Reprenons l'équation (39), et admettons-y le développement

$$(44) \quad z = V_0 + V_1 + V_2 + \dots$$

Puis, si nous désignons par $l^{(0)}, l^{(1)}, \dots, l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, \dots, l_2^{(1)}, l_3^{(1)}, \dots$ des constantes encore disponibles, du premier ordre et du second degré, liées entre elles par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} l^{(0)} &= l_1^{(0)} + l_2^{(0)} + l_3^{(0)} + \dots, \\ l^{(1)} &= l_2^{(1)} + l_3^{(1)} + l_4^{(1)} + \dots, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

l'équation (39) peut se remplacer immédiatement par le système que voici:

$$(45) \quad \begin{cases} \frac{d^2 V_0}{du^2} + (1 - \beta_1 - l^{(0)}) V_0 = (\Omega), \\ \frac{d^2 V_1}{du^2} + (1 - \beta_1 - l^{(1)}) V_1 = (\beta_3 \eta^2 - l_1^{(0)}) V_0 - \beta_0 \eta^2 \chi, \\ \frac{d^2 V_2}{du^2} + (1 - \beta_1 - l^{(2)}) V_2 = (\beta_3 \eta^2 - l_2^{(1)}) V_1 - l_2^{(0)} V_0, \\ \frac{d^2 V_3}{du^2} + (1 - \beta_1 - l^{(3)}) V_3 = (\beta_3 \eta^2 - l_3^{(2)}) V_2 - l_3^{(1)} V_1 - l_3^{(0)} V_0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Du développement (44), on tire facilement la formule

$$(46) \quad \eta^2 = (1 - \beta) \{ V_0^2 + V_1^2 + \dots + 2 V_0 V_1 + \dots + 2 V_1 V_2 + \dots \} \\ + \left\{ \left(\frac{dV_0}{du} \right)^2 + \left(\frac{dV_1}{du} \right)^2 + \dots + 2 \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} + 2 \frac{dV_0}{du} \frac{dV_2}{du} + \dots \right\},$$

à l'aide de laquelle on peut intégrer le système (45).

Voici la marche à suivre:

La première des équations (45) s'intègre tout-de-suite; seulement, la constante $l^{(0)}$ n'étant pas encore déterminée, les coefficients du résultat contiendront cette quantité comme symbole algébrique. La fonction V_0 étant connue, du moins quant à la forme, on établira la fonction η^2 en mettant:

$$\eta^2 = (1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du} \right)^2.$$

En passant, avec cette valeur préalable de η^2 , à la deuxième des équations (45), on aura d'abord l'occasion de déterminer la partie $l_1^{(0)}$ de $l^{(0)}$. Le but qu'on a poursuivi avec cette arbitraire, est évidemment de rendre la valeur du second membre de cette équation aussi petite que possible. Le plus naturel est sans doute de mettre:

$$l_1^{(0)} = \beta_3 H,$$

H étant la partie constante de η^2 , mais une autre détermination peut

quelquefois se présenter plus favorable. Quoi qu'il en soit, la constante $l^{(0)}$, renferme la partie $\beta_3 H$, mais peut encore contenir d'autres termes.

Cela posé, on détermine la fonction V_1 , ce qui est maintenant très facile; on aura ensuite une nouvelle détermination de γ^2 , avec laquelle on pourra renouveler l'intégration de l'équation en V_1 , et on sera arrivé à la troisième des équations (45).

Il s'agit, avant tout, de la détermination des constantes $l_2^{(1)}$ et $l_2^{(0)}$. Le principe général du choix des constantes l est toujours le même: c'est de les déterminer de manière que la somme des termes du membre à droite soit la plus petite possible, et que la réapparition dans les divers V_n d'un certain argument soit évitée le plus possible.

Au fur et à mesure qu'on avance, dans la détermination des fonctions V_n , le nombre des constantes à choisir devient plus grand. Donc, plus l'indice de la fonction cherchée est grand, plus on aura des constantes à sa disposition pour modeler convenablement le second membre.

Mais ce qui est indispensable, c'est que les constantes $l^{(0)}, l^{(1)}, \dots$ renferment le terme $\beta_3 H$.

De la manière indiquée, on peut déterminer les fonctions V_n de proche en proche en renouvelant, autant qu'il sera nécessaire, le calcul dès le commencement.

Mais contre le mode du calcul indiqué tout à l'heure, on pourrait faire la même objection que nous venons de signaler, lorsque il s'agissait de la méthode du paragraphe précédent. L'inconvénient dont nous avons parlé tient à ce que les équations (45) s'intégrant de proche en proche, ne donnent pas, immédiatement, la valeur complète de la fonction cherchée, mais qu'on est obligé de recommencer le calcul, chaque fois qu'une nouvelle valeur de γ^2 , plus exacte que la précédente, a été atteinte. Après avoir introduit l'expression de γ^2 selon l'équation (46), on évitera cet inconvénient en changeant la répartition des divers termes connus sur les différentes équations.

En faisant:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots,$$

on reconnaîtra facilement l'identité de la somme des équations suivantes avec l'équation (39):

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 (47) \quad & \frac{d^2 V_0}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H) V_0 = (\mathcal{Q}), \\
 & \frac{d^2 V_1}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H) V_1 = \beta_3 \left\{ (1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du} \right)^2 - H_0 \right\} V_0 \\
 & \quad - \beta_0 \left\{ (1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du} \right)^2 \right\} \chi, \\
 & \frac{d^2 V_2}{du^2} + (1 - \beta_1 - \beta_3 H) V_2 = \beta_3 \left\{ (1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du} \right)^2 - H_0 \right\} V_1 \\
 & \quad + \beta_3 \left\{ (1 - \beta) V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du} \right)^2 + 2(1 - \beta) V_0 V_1 \right. \\
 & \quad \quad \left. + 2 \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} - H_1 \right\} (V_0 + V_1) \\
 & \quad - \beta_0 \left\{ (1 - \beta) (V_1^2 + 2V_0 V_1) + \left(\frac{dV_1}{du} \right)^2 \right. \\
 & \quad \quad \left. + 2 \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} \right\} \chi \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned}
 \right\}
 \end{aligned}$$

Pourvu qu'on ait calculé les fonctions précédentes, les seconds membres des équations (47) sont immédiatement connus, abstraction faite des facteurs dépendant de la constante H .

Quelquefois on pourra opérer les approximations encore plus avantageusement en remplaçant le système précédent par celui-ci:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 (48) \quad & \frac{d^2 V_0}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \beta_3 \left[(1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du} \right)^2 + H - H_0 \right] \right\} V_0 = (\mathcal{Q}), \\
 & \frac{d^2 V_1}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \beta_3 \left[(1 - \beta) V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du} \right)^2 + H - H_1 \right] \right\} V_1 = -\beta_0 \left\{ (1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du} \right)^2 \right\} \chi, \\
 & \frac{d^2 V_2}{du^2} + \left\{ 1 - \beta_1 - \beta_3 \left[(1 - \beta) V_2^2 + \left(\frac{dV_2}{du} \right)^2 + H - H_2 \right] \right\} V_2 = \beta_3 \left\{ (1 - \beta) V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du} \right)^2 - H_1 \right\} V_0 \\
 & \quad + \beta_3 \left\{ (1 - \beta) V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du} \right)^2 - H_0 \right\} V_1 + 2\beta_3 \left\{ (1 - \beta) V_0 V_1 + \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} \right\} (V_0 + V_1) \\
 & \quad - \beta_0 \left\{ (1 - \beta) V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du} \right)^2 + 2 \left((1 - \beta) V_0 V_1 + \frac{dV_0}{du} \frac{dV_1}{du} \right) \right\} \chi \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned}
 \right\}
 \end{aligned}$$

C'est surtout lorsque les fonctions (Q) et χ sont restreintes à ne contenir, chacune, qu'un seul terme prépondérant que l'emploi des équations (48) se montre extrêmement favorable. En effet, dans ce cas les fonctions $(1 - \beta)V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2$ et $(1 - \beta)V_1^2 + \left(\frac{dV_1}{du}\right)^2$ se réduisent à des constantes, du moins à des fonctions où les parties variables sont très petites par rapport aux parties constantes, de sorte que les deux premières fonctions s'obtiennent presque immédiatement.

§ 6. Equations avec termes trigonométriques dont les arguments dépendent de la fonction cherchée.

1. L'équation fondamentale que je vais traiter dans le paragraphe présent, est, quant à son type, une généralisation de celle que j'ai examinée dans mon mémoire de 1887, et dont l'intégrale donne l'expression des grandes inégalités des planètes.

L'équation générale dont il s'agit contient des termes de deux genres: les uns dépendent des anomalies des planètes ou des arguments astronomiques qui les remplacent, les autres ne renferment, dans les arguments, que les longitudes des périhélie et des noeuds. Les termes du premier genre contiennent encore, dans les arguments, la somme de toutes les inégalités multipliée par un facteur de l'ordre zéro, tandis que cette somme ne figure, dans les arguments des termes du second espèce, que multipliée par un coefficient de l'ordre des forces troublantes. Les termes du second genre donnent naissance aux termes élémentaires se réduisant à des constantes, lorsque les masses troublantes s'annulent.

Dans mes travaux précédents, j'ai considéré séparément ces deux espèces de termes, et j'ai réussi d'assigner une limite supérieure aux inégalités dépendant des anomalies. De là, on pouvait même conclure, du moins dans le cas de deux arguments, la convergence des dits termes, vu que la suite de leurs limites supérieures se montrait convergente.

Quant aux termes élémentaires, il ne fut pas possible, ni de démontrer leur convergence, ni d'en obtenir la valeur avec une exactitude illimitée. Seulement, dans les cas les plus faciles, on a pu calculer, d'une manière bien simple, les coefficients de ces termes, et on a obtenu

des résultats qui, on peut l'admettre, ne sont pas trop différents des valeurs exactes.

Dans les recherches suivantes, on a considéré les deux genres de termes simultanément, ou bien: on a eu égard aux termes de la première espèce, en formant l'équation différentielle d'où s'obtiennent les termes élémentaires.

En désignant par s_0, s_1, \dots des nombres entiers quelconques, que nous pouvons d'ailleurs supposer positifs, et par $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ des quantités dépendant de ces entiers ainsi que des rapports entre les mouvements moyens des arguments astronomiques, enfin par les symboles $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ des quantités aussi dépendant de nombres entiers et d'arguments astronomiques, mais seulement d'une manière telle que les divers σ ne renferment que les rapports des mouvements des apsides et des noeuds au mouvement de l'argument v , de sorte que les σ sont de l'ordre des forces perturbatrices, nous allons considérer l'équation du deuxième ordre:

$$(1) \quad \frac{d^2T}{dv^2} = -A_0 \sin(G_0 + s_0T) - X_1 - Q_1,$$

les fonctions X_1 et Q_1 étant données au moyen des développements

$$(2) \quad X_1 = A_1 \sin(G_1 + s_1T) + A_2 \sin(G_2 + s_2T) + \dots \\ + \{A'_0 \sin(G_0 + s_0T) + A'_1 \sin(G_1 + s_1T) + \dots\} \frac{dT}{dv},$$

$$(3) \quad Q_1 = a_1 \sin H_1 + a_2 \sin H_2 + \dots$$

Dans ces formules on a encore admis les notations:

$$G_n = 2\lambda_n v + 2B_n,$$

$$H_n = \sigma_n v + b_n,$$

et on a désigné par A_0, A_1, \dots des coefficients du premier ordre et d'un degré quelconque, tandis qu'on a supposé les coefficients a_1, a_2, \dots du second ordre et au moins du second degré. Les B et les b expriment des angles constants.

Il ne sera pas, cependant, nécessaire de considérer simultanément tous les termes de l'équation (1), vu que la plupart d'eux n'exercent

qu'une influence insensible, les uns sur les autres. Tous les termes de nature à ne pas s'agrandir n'offrant aucune difficulté à l'intégration, on peut les calculer séparément. Ce sont seulement les premiers termes du développement X_1 et celui que nous avons mis en tête du second membre de l'équation (1), ainsi que ceux dont les λ sont très petits, et en particulier les termes devenant élémentaires qui demandent à être considérés ensemble.

En ne considérant que les termes dont les λ décroissent, les A correspondants forment une série dont la convergence est extrêmement rapide.

De même, en mettant de côté, dans la fonction \mathcal{Q}_1 , les termes dont les σ n'acquièrent pas de valeurs diminuant de plus en plus, les a restants forment une série très convergente.

Donc, en ne retenant, dans les fonctions X_1 et \mathcal{Q}_1 , que les termes exerçant une influence sensible sur les résultats d'intégration dus aux autres termes, ainsi que ceux qui deviendront, eux mêmes, très grands, les développements (2) et (3) seront très convergents.

Si les fonctions X_1 et \mathcal{Q}_1 étaient égales à zéro, on aurait immédiatement l'intégrale de l'équation (1). En désignant par Z_0 ce que devient T lorsque les dites conditions sont remplies, et en posant encore:

$$\alpha^2 = s_0 A_0,$$

la fonction Z_0 sera donnée au moyen de l'expression

$$G_0 + s_0 Z_0 = 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} (\lambda_0 v + B_0),$$

d'où il résulte:

$$s_0 Z_0 = \frac{4q}{1+q^2} \sin G_0 + \frac{1}{2} \frac{4q^3}{1+q^4} \sin 2G_0 + \dots$$

On a supposé, toutefois, que la valeur de λ_0 soit différente de zéro, ce qui entraîne toujours une valeur du module inférieure à l'unité. En effet, le module étant déterminé par la condition

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)k = \frac{\alpha}{\lambda_0},$$

cette équation admet toujours, si le second membre a une valeur finie et positive, une racine positive inférieure à l'unité.

Cela étant, nous faisons:

$$T = Z_0 + \frac{2}{s_0} V_1.$$

En substituant cette expression dans l'équation (1), et en retranchant:

$$\frac{d^2 Z_0}{dv^2} = -A_0 \sin(G_0 + s_0 Z_0),$$

après avoir développé suivant les puissances de V_1 le terme mis en évidence dans l'équation mentionnée, nous aurons:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_1}{dv^2} = & -s_0 A_0 \cos 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} (\lambda_0 v + B_0) V_1 + s_0 A_0 \sin 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} (\lambda_0 v + B_0) V_1^2 \\ & + \frac{2}{3} s_0 A_0 \cos 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} (\lambda_0 v + B_0) V_1^3 - \dots - \frac{s_0}{2} (X_1 + \Omega), \end{aligned}$$

ou bien, si nous remplaçons, moyennant la relation

$$\frac{2K}{\pi} (\lambda_0 v + B_0) = \xi,$$

la variable indépendante v par ξ :

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{d^2 V_1}{d\xi^2} + k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi V_1 - k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi V_1^2 - \frac{2}{3} k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi V_1^3 + \dots \\ \dots = -X - \Omega, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$X = \frac{s_0}{2\lambda_0^2} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 X_1; \quad \Omega = \frac{s_0}{2\lambda_0^2} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 \Omega_1.$$

En utilisant l'équation que nous venons d'obtenir, il faut évidemment exprimer les fonctions X et Ω au moyen de la variable ξ , ou bien, si l'on a reçu l'intégrale sous forme d'une quadrature, restituer la variable v sous le signe \int .

2. L'équation en V_1 à laquelle nous sommes parvenus, appartient au type de l'équation (10) du paragraphe précédent. On peut donc

y appliquer soit la transformation aboutissant en l'équation (12) du dit paragraphe, soit celle dont le résultat prend la forme de l'équation (14). Je préfère la première.

En faisant:

$$Y_1 = k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi = - (2k^2 \operatorname{sn} \xi^2 - k^2),$$

la forme générale des équations (11) sera:

$$\frac{d^2 \varphi_{h,i}}{d\xi^2} - (2k^2 \operatorname{sn} \xi^2 - k^2) \varphi_{h,i} = W_{h,i},$$

où l'on a désigné par $W_{h,i}$ une fonction toute connue dont les diverses expressions sont données par les seconds membres des équations (11).

L'intégrale générale de l'équation que nous venons de mettre en évidence, s'exprimant au moyen de la formule

$$(5) \quad \varphi_{h,i} = c_{h,i} \operatorname{dn} \xi + c'_{h,i} \operatorname{dn} \xi \left\{ \frac{\theta'_i(\xi)}{\theta_i(\xi)} + \frac{E}{K} \xi \right\} \\ + \operatorname{dn} \xi \int \frac{d\xi}{\operatorname{dn} \xi^2} \int W_{h,i} \operatorname{dn} \xi d\xi,$$

nous allons considérer les divers cas correspondant à différentes valeurs des indices h et i .

D'abord, nous faisons:

$$W_{0,1} = k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi - \beta_{0,1},$$

d'où il résulte:

$$\int W_{0,1} \operatorname{dn} \xi d\xi = \int (k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi - \beta_{0,1}) \operatorname{dn} \xi d\xi.$$

Maintenant, pour éviter tout terme ayant la variable ξ pour multiplicateur, on doit annuler la constante $\beta_{0,1}$. Nous aurons de la sorte:

$$\int W_{0,1} \operatorname{dn} \xi d\xi = \frac{1}{2} k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi$$

et ensuite:

$$\int \frac{d\xi}{\operatorname{dn} \xi^2} \int W_{0,1} \operatorname{dn} \xi d\xi = \frac{1}{\operatorname{dn} \xi},$$

de façon que notre résultat sera:

$$\varphi_{0,1} = c_{0,1} \operatorname{dn} \xi + 1.$$

Pour faire disparaître, dans l'expression de $\varphi_{0.1}$, le terme constant, il faut remplacer la constante surabondante $c_{0.1}$ par $-\frac{2K}{\pi}$; il en résulte:

$$(6, a) \quad \varphi_{0.1} = 1 - \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi.$$

Avec cette expression, il sera facile de former l'expression

$$W_{1.0} = 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right) \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi + \beta_{1.0},$$

d'où nous tirons, après avoir égalé la constante $\beta_{1.0}$ à zéro, le résultat que voici:

$$\int W_{1.0} \operatorname{dn} \xi d\xi = - \left(\frac{2K}{\pi} \right) \operatorname{dn} \xi^2.$$

Après avoir opéré la seconde intégration, nous aurons:

$$\operatorname{dn} \xi \int \frac{d\xi}{\operatorname{dn} \xi^2} \int W_{1.0} \operatorname{dn} \xi d\xi = - \left(\frac{2K}{\pi} \right) \xi \operatorname{dn} \xi,$$

résultat qui paraît, au premier coup d'oeil, en contradiction avec nos suppositions, puisque le facteur ξ est sorti hors des signes trigonométriques. Cependant, si l'on fait:

$$c_{1.0} = 0; \quad c'_{1.0} = \frac{2K}{\pi} \frac{K}{E},$$

les termes semiséculaires se détruisent, et nous retiendrons

$$(6, b) \quad \varphi_{1.0} = \left(\frac{2K}{\pi} \right) \frac{K}{E} \frac{\theta'_1(\xi)}{\theta_1(\xi)} \operatorname{dn} \xi.$$

Pour déterminer la fonction $\varphi_{0.2}$, rappelons-nous qu'on a:

$$Y_2 = -k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi.$$

Il résulte de là qu'on doit adopter la valeur zéro de la constante $\beta_{0.2}$, ainsi que l'expression

$$W_{0.2} = 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \operatorname{dn} \xi^2 \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi.$$

En introduisant cette valeur dans l'équation (5), on aura tout de suite :

$$\varphi_{0.2} = c_{0.2} \operatorname{dn} \xi + c'_{0.2} \operatorname{dn} \xi \left\{ \frac{\theta'_1(\xi)}{\theta_1(\xi)} + \frac{E}{K} \xi \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \operatorname{dn} \xi \int \operatorname{dn} \xi^2 d\xi.$$

Mais, puisqu'on a :

$$\operatorname{dn} \xi^2 = \frac{d^2 \log \theta(\xi)}{d\xi^2} + \frac{E}{K},$$

il viendra, si nous faisons :

$$c_{0.2} = 0; \quad c'_{0.2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2,$$

la formule que voici :

$$(6, c) \quad \varphi_{0.2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \operatorname{dn} \xi \frac{d \log \frac{\theta_1(\xi)}{\theta(\xi)}}{d\xi} = -\frac{1}{2} k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi.$$

Cherchons maintenant la fonction $\varphi_{1.1}$.

En vertu des expressions que nous venons de signaler, nous obtenons facilement celles-ci :

$$\begin{aligned} -2 Y_2(1 - \varphi_{0.1}) \varphi_{1.0} &= 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \frac{K}{E} \operatorname{dn} \xi^2 \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} \sin 2 \operatorname{am} \xi; \\ -4 \frac{d\varphi_{0.2}}{d\xi} &= 2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \{ 2 \operatorname{dn} \xi^3 - (1 + k^2) \operatorname{dn} \xi \}, \end{aligned}$$

dont la somme, à laquelle il faut ajouter la constante $\beta_{1.1}$, donne la fonction $W_{1.1}$.

Examinons d'abord l'intégrale

$$A = -4 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \frac{K}{E} \int \operatorname{dn} \xi^3 \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} d(\operatorname{dn} \xi).$$

On obtient immédiatement

$$A = - \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \frac{K}{E} \operatorname{dn} \xi^4 \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \frac{K}{E} \int \operatorname{dn} \xi^4 \frac{d^2 \log \theta_1(\xi)}{d\xi^2} d\xi,$$

d'où l'on tire, en considérant la formule

$$\frac{k'^2}{\operatorname{dn} \xi^2} = \frac{E}{K} + \frac{d^2 \log \theta_1(\xi)}{d\xi^2},$$

le résultat:

$$A = - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{K}{E} \operatorname{dn} \xi^4 \frac{d \log \theta_1(\xi)}{d\xi} + k'^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{K}{E} \int \operatorname{dn} \xi^2 d\xi - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \int \operatorname{dn} \xi^4 d\xi.$$

En ajoutant à cette expression la suivante

$$B = - 2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \int \{(1 + k'^2) \operatorname{dn} \xi^2 - 2 \operatorname{dn} \xi^4\} d\xi,$$

nous aurons:

$$\int W_{1,1} \operatorname{dn} \xi d\xi = A + B + \beta_{1,1} \int \operatorname{dn} \xi d\xi.$$

Cela étant, nous désignerons par $U_0^{(2)}$ et $U_0^{(4)}$ les termes constants dans les développements de $\operatorname{dn} \xi^2$ et de $\operatorname{dn} \xi^4$, de sorte qu'on a:

$$U_0^{(2)} = \frac{E}{K},$$

$$U_0^{(4)} = \frac{2}{3} (1 + k'^2) \frac{E}{K} - \frac{1}{3} k'^2;$$

or, la partie constante de $\operatorname{dn} \xi$ étant égale à $\frac{\pi}{2K}$, il faut que la valeur de la constante $\beta_{1,1}$ satisfasse à l'équation de condition

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \left\{ \left(k'^2 \frac{K}{E} - 2(1 + k'^2) \right) U_0^{(2)} + 3 U_0^{(4)} \right\} + \frac{\pi}{2K} \beta_{1,1} = 0;$$

autrement la fonction $\varphi_{1,1}$ contiendrait des termes séculaires.

En introduisant, dans l'équation que nous venons de trouver, les valeurs indiquées de $U_0^{(2)}$ et $U_0^{(4)}$, on obtiendra:

$$\beta_{1,1} = 0.$$

Ayant ainsi fixé la valeur de la constante $\beta_{1,1}$, on aura sans peine la fonction $\varphi_{1,1}$ sous forme d'une série ne contenant que des termes en cosinus, vu qu'on peut toujours, par une détermination convenable de la

constante surabondante $c_{1,1}$, faire disparaître, dans le résultat, le terme constant.

La détermination de la fonction $\varphi_{2,0}$ s'opère tout-à-fait en procédant comme nous l'avons indiqué dans ce qui précède. Il suffit de remarquer qu'on peut égaler la constante $\beta_{2,0}$ à zéro. La raison en est que la fonction $W_{2,0}$ ne contient que des termes en sinus. Telle est aussi l'expression de $\varphi_{2,0}$: car, après avoir choisi la constante $c'_{2,0}$ de manière à faire disparaître les termes semiséculaires, la dite fonction sera représentée par une série ne renfermant que des termes en sinus.

On pourrait aussi se servir de la formule générale

$$\int dn \xi^{2n+2} d\xi = \frac{2n}{2n+1} (1+k'^2) \int dn \xi^{2n} d\xi - \frac{2n-1}{2n+1} k'^2 \int dn \xi^{2n-2} d\xi \\ - \frac{1}{2n(2n+1)} \frac{d(dn \xi^{2n})}{d\xi},$$

qui sert à développer les diverses intégrales de proche en proche.

Il nous reste à chercher les fonctions qui multiplient les termes du troisième degré.

D'abord, puisque nous avons:

$$Y_3 = -\frac{2}{3} k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi,$$

il est aisé de trouver l'expression suivante

$$W_{0,3} = -\frac{1}{2} k^4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (\sin 2 \operatorname{am} \xi)^2 dn \xi + \frac{2}{3} k^4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \cos 2 \operatorname{am} \xi dn \xi^3 + \beta_{0,3} \\ = -2k^4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \operatorname{sn} \xi^2 \operatorname{cn} \xi^2 dn \xi + \frac{2}{3} k^4 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1-2 \operatorname{sn} \xi^2) dn \xi^3 + \beta_{0,3},$$

ce qui entraîne:

$$W_{0,3} dn \xi = 2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \left\{ \frac{5}{3} dn \xi^5 - \frac{4}{3} (1+k'^2) dn \xi^4 + k'^2 dn \xi^2 \right\} + \beta_{0,3} dn \xi.$$

Avant tout, je vais montrer que la partie constante de cette expression s'annule de soi-même, de sorte qu'on aura:

$$\beta_{0,3} = 0.$$

A cette fin, remarquons la formule

$$U_0^{(6)} = \left[\frac{8}{15} (1 + k'^2)^2 - \frac{3}{5} k'^2 \right] \frac{E}{K} - \frac{4}{15} k'^2 (1 + k'^2),$$

$U_0^{(6)}$ étant le terme constant dans le développement de $\operatorname{dn} \xi^6$. En introduisant, avec les valeurs de $U_0^{(2)}$ et $U_0^{(4)}$ données plus haut, l'expression que nous venons de signaler, nous aurons:

$$\frac{5}{3} U_0^{(6)} - \frac{4}{3} (1 + k'^2) U_0^{(4)} + k'^2 U_0^{(2)} = 0.$$

Donc, la partie constante du développement de la fonction $W_{0,3}$ se détruit.

En conséquence du résultat que nous venons de trouver, il faut qu'on égale à zéro, la constante $\beta_{0,3}$.

Du fait que la fonction $W_{1,2}$ ne contient que des termes en sinus, il s'ensuit que la constante $\beta_{1,2}$ aura aussi la valeur zéro. On en conclut encore que toute la fonction $\varphi_{1,2}$ s'obtient sous forme d'une série ne contenant que des termes en sinus.

Quant à la constante $\beta_{2,1}$, le calcul en serait très compliqué s'il s'agissait d'en mettre en évidence l'expression algébrique. Mais puisqu'il n'importe que très peu si la constante dont il s'agit est très petite ou exactement égale à zéro, nous nous restreindrons à ne considérer que la forme de la fonction $\varphi_{2,1}$.

En inspectant l'équation (11, h) du paragraphe précédent, et en se rappelant la forme des fonctions $Y_2, Y_3, \varphi_{0,1}, \varphi_{2,0}, \varphi_{0,3}$ et $\varphi_{1,2}$, il sera aisé de voir que le produit $W_{2,1} \operatorname{dn} \xi$ est représenté au moyen d'une série en cosinus. En déterminant la constante $\beta_{2,1}$ d'une manière convenable, le terme constant disparaîtra, de sorte qu'il résultera, pour représenter la fonction $\varphi_{2,1}$, un développement ne contenant que des termes en cosinus puisque le terme constant peut être détruit au moyen de la constante surabondante $c_{2,1}$.

Finalement, en abordant la détermination de la fonction $\varphi_{3,0}$, on comprendra tout de suite que la constante $\beta_{3,0}$ est nulle, et que la dite fonction s'obtient sous forme d'une série en sinus sans terme séculaire.

3. Ayant déterminé les fonctions $\varphi_{0,1}, \varphi_{1,0}, \dots$ de la manière que nous venons d'indiquer précédemment, et après avoir introduit dans l'équation (4) l'expression

$$V_1 = (1 - \varphi_{0.1})\Psi_1 + \varphi_{1.0} \frac{d\Psi_1}{d\xi} + \varphi_{0.2}\Psi_1^2 + \dots,$$

nous obtenons:

$$\frac{d^2\Psi_1}{d\xi^2} = -X - \Omega - \Sigma$$

ou bien:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dv^2} = -\frac{s_0}{2}(X_1 + \Omega_1 + \Sigma_1),$$

le symbole

$$\Sigma = \frac{s_0}{2\lambda_0^2} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \Sigma_1$$

signifiant une suite de termes très petits, du deuxième ordre, qu'on reconnaîtra facilement en considérant l'équation (12) du paragraphe précédent.

Maintenant, si nous ne retenons qu'un seul terme de X , et que nous posions:

$$X_2 = A_2 \sin(G_2 + s_2 T) + A_3 \sin(G_3 + s_3 T) + \dots + A_0' \sin(G_0 + s_0 T) \frac{dT}{dv},$$

nous aurons:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dv^2} = -\frac{s_0}{2} A_1 \sin(G_1 + s_1 T) - \frac{s_0}{2} (X_2 + \Omega_1 + \Sigma_1).$$

Mais, puisqu'on a:

$$T = Z_0 + \frac{2}{s_0} (1 - \varphi_{0.1})\Psi_1 + \frac{2}{s_0} \frac{1}{\lambda_0} \frac{\pi}{2K} \varphi_{1.0} \frac{d\Psi_1}{dv} + \dots,$$

l'argument du terme que nous avons mis en évidence s'écrit de la manière suivante:

$$2\lambda_1 v + 2B_1 + 2\frac{s_1}{s_0} (1 - \varphi_{0.1})\Psi_1 + s_1 Z_0 + \frac{2}{\lambda_0} \frac{s_1}{s_0} \frac{\pi}{2K} \varphi_{1.0} \frac{d\Psi_1}{dv} + \dots$$

En développant, suivant les puissances de

$$-2\frac{s_1}{s_0} \varphi_{0.1} \Psi_1 + s_1 Z_0 + \dots,$$

le sinus de cet argument, après l'avoir mis sous la forme d'une série tri-

gonométrique, le résultat sera toujours convergent, et on pourrait même démontrer que le terme constant ne surpasse pas l'unité. Pour plus de détails, il suffit de renvoyer le lecteur à mon mémoire »Untersuchungen etc.» p. 241.

En supposant que la fonction Ψ_1 soit une quantité tout au plus de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$, le produit $2 \frac{s_1}{s_0} \varphi_{0.1} \Psi_1$ peut toujours être considéré comme une quantité très petite du premier ordre, vu que la fonction $\varphi_{0.1}$ s'évanouit avec k^2 , c'est-à-dire avec les forces troublantes. Il en est de même du produit $\frac{2}{\lambda_0} \frac{s_1}{s_0} \frac{\pi}{2K} \varphi_{1.0} \frac{d\Psi_1}{dv}$; pourtant, si λ_1 est très petit relativement à λ_0 , ce produit est notablement moindre que le terme dépendant de $\varphi_{0.1}$. Dans le cas d'une orbite intermédiaire, le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ est toujours peu considérable, d'où l'on pourrait tirer l'autorisation à omettre, dans la première approximation, le terme dépendant de $\frac{d\Psi_1}{dv}$. Cependant, la simplification due à ce fait n'étant pas essentielle, je n'en ferai pas usage. En revanche, j'introduirai pour abrégier l'écriture, les notations

$$2 \frac{s_1}{s_0} \varphi_{0.1} = \phi_{0.1},$$

$$\frac{2}{\lambda_0} \frac{s_1}{s_0} \frac{\pi}{2K} \varphi_{1.0} = \phi_{1.0},$$

.....

de sorte que nous aurons:

$$T = Z_0 + \frac{2}{s_0} \Psi_1 - \frac{1}{s_1} \phi_{0.1} \Psi_1 + \frac{1}{s_1} \phi_{1.0} \frac{d\Psi_1}{dv} + \frac{1}{s_1} \phi_{0.2} \Psi_1^2 + \dots$$

Cela posé, l'équation en Ψ_1 prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_1}{dv^2} = & -\frac{s_0}{2} A_1 \sin \left(G_1 + 2 \frac{s_1}{s_0} \Psi_1 \right) - \frac{s_0}{2} A_1 \cos \left(G_1 + 2 \frac{s_1}{s_0} \Psi_1 \right) \{s_1 Z_0 - \phi_{0.1} \Psi_1 + \dots\} \\ & + \frac{1}{1.2} \frac{s_0}{2} A_1 \sin \left(G_1 + 2 \frac{s_1}{s_0} \Psi_1 \right) \{s_1 Z_0 - \phi_{0.1} \Psi_1 + \dots\}^2 + \dots \\ & - \frac{s_0}{2} (X_2 + \Omega_1 + \Sigma_1). \end{aligned}$$

En examinant les divers termes du développement signalé, on s'aperçoit facilement qu'on en peut retrancher une partie telle que les termes restants deviendront indépendants de l'argument G_0 . Pour mettre en évidence la partie dont il est question, posons:

$$\Psi_1 = \frac{s_0}{2} (T_1 + \Phi_1),$$

et admettons en outre la notation

$$P_0 = 1 - \frac{h_2}{1.2} + \frac{h_4}{1.2.3.4} - \dots,$$

les h étant les parties constantes des puissances paires du produit $s_1 Z_0$. Enfin, nous désignons par $l_{0.1}, l_{1.0} \dots$ les termes constants dans les développements de $\phi_{0.1}^2, \phi_{1.0}^2, \dots$

Maintenant, si nous établissons l'équation

$$(7) \quad \frac{d^3 T_1}{dv^3} = -A_1 P_0 \sin(G_1 + s_1 T_1) + \frac{s_0^2}{1.2.4} l_{0.1} A_1 \sin(G_1 + s_1 T_1) T_1^2 + \dots \\ + A'_0 \sin(G_0 + s_0 Z) \frac{dZ_0}{dv} + \dots - (X_2 + \Omega_1) + [T_1, \Phi_1],$$

l'équation d'où s'obtient la fonction Φ_1 sera celle-ci:

$$(8) \quad \frac{d^2 \Phi_1}{dv^2} + \{s_1 A_1 \cos(G_1 + s_1 T_1) - s_1 A_1 \sin(G_1 + s_1 T_1) [s_1 Z_0 - \dots] - \dots\} \Phi_1 \\ = -A'_0 \sin(G_0 + s_0 Z) \frac{dZ_0}{dv} - A_1 \cos(G_1 + s_1 T_1) \left(s_1 Z_0 - \frac{s_0}{2} \phi_{0.1} T_1 + \dots \right) \\ - \dots - \Sigma_1 - [T_1, \Phi_1].$$

La raison d'introduire le symbole $[\]$, se comprend facilement. Il nous sert, tout comme dans le paragraphe 1 du premier chapitre, à transférer certains termes d'une équation à une autre. Nous pouvons de la sorte admettre que les termes acquérant, par l'intégration, des diviseurs moindres que λ_0 , c'est à dire les diviseurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, soient rejoints à l'équation (7), tandis que ceux qui ne deviennent pas très agrandis se trouvent réunis dans l'équation (8). Ainsi, la fonction T_1 ne dépendra plus de l'argument G_0 ou d'arguments de la forme $iG_0 \pm i'G_n$, i et i'

étant des entiers tels que la différence $i\lambda_0 \pm i'\lambda_n$ ne soit pas très petite, c'est à dire comparable à λ_1 .

Mais, puisqu'il y a toujours certaines valeurs des nombres i et i' qui rendent la différence $i\lambda_0 - i'\lambda_n$ aussi petite qu'on voudra, il sera indispensable, pour délivrer la fonction Φ_1 de termes assujettis à devenir trop grands, de les transférer à l'équation (7). Au reste, ces termes dépendant d'arguments qui sont déjà représentés dans l'équation (7), on pourra les réunir avec les termes correspondants de cette équation.

Quant au premier terme du second membre de l'équation (8), on peut aussi le considérer d'une manière très simple. En effet, ce terme ne dépendant que de l'argument G_0 , on en tient compte par une légère modification des coefficients du développement de la fonction Z_0 . A cet égard, il me faut renvoyer le lecteur aux formules que j'ai données dans les »Untersuchungen etc.», p. 237, et dont j'ai fait, dans le mémoire présent, un fréquent usage.

Cela établi, il est évident que la fonction Φ_1 est une quantité du deuxième ordre, et que ses divers termes sont multipliés par quelqu'un des facteurs A_1, A_2, \dots ; son développement, convergent en même temps que celui de T_1 , s'obtiendra sans difficulté essentielle. Il ne nous reste donc qu'à chercher le développement de la fonction T_1 .

4. Concevons en particulier le cas d'une orbite intermédiaire, où le nombre des arguments est restreint à deux seulement. On comprend aisément que la fonction T_1 reste toujours très petite, tout au plus de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$, et que la fonction Ω_1 n'existe plus. Il est donc évident que les termes de l'équation (7) qui dépendent de $T_1^2, \left(\frac{dT_1}{dv}\right)^2, \dots$ sont très petits par rapport au premier terme du second membre, et qu'on peut les considérer au moyen d'approximations successives. En négligeant, d'abord, ces termes, ou plutôt, en les réunissant avec la partie X_2 , on retient l'équation

$$(9) \quad \frac{d^2 T_1}{dv^2} = -A_1 P_0 \sin(G_1 + s_1 T_1) - X_2 + [T_1, \Phi_1].$$

Mais la forme de cette équation est précisément celle de l'équation (1), à l'exception de ce que la partie $[T_1, \Phi_1]$ figure à la place de Ω_1 ; on peut

donc réitérer les opérations qui nous ont conduit aux équations (7) et (8), procédé duquel découleront de nouvelles équations du même type que celui des équations citées. On aura ainsi le système de résultats que voici:

$$(10) \quad \begin{cases} T = Z_0 + T_1 + \Phi_1 + \frac{1}{s_1} \left\{ -\phi_{0.1}\psi_1 + \phi_{1.0} \frac{d\psi_1}{dv} + \phi_{0.2}\psi_1^2 + \dots \right\}, \\ T_1 = Z_1 + T_2 + \Phi_2 + \frac{1}{s_2} \left\{ -\phi_{0.1}^{(1)}\psi_2 + \phi_{1.0}^{(1)} \frac{d\psi_2}{dv} + \phi_{0.2}^{(1)}\psi_2^2 + \dots \right\}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

d'où l'on tire, en ajoutant les diverses équations:

$$(11) \quad \begin{aligned} T &= Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots \\ &+ \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots \\ &+ \frac{1}{s_1} \left\{ -\phi_{0.1}\psi_1 + \phi_{1.0} \frac{d\psi_1}{dv} + \dots \right\} + \frac{1}{s_2} \left\{ -\phi_{0.1}^{(1)}\psi_2 + \phi_{1.0}^{(1)} \frac{d\psi_2}{dv} + \dots \right\} + \dots \end{aligned}$$

En vertu des résultats que j'obtiens relativement aux nombres s_0, s_1, \dots lorsque, dans mon mémoire de 1887, j'établis la série dont il s'agit, il se comprend immédiatement que le développement de la première ligne de l'équation précédente est convergent.

Quant à la série

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \dots,$$

qui n'a pas été mise en évidence, dans mon mémoire cité, je remarque qu'on a:

$$\Phi_1 \cong \frac{s_1 A_1 f_1}{s_0 \lambda_0^2},$$

$$\Phi_2 \cong \frac{s_2 A_2 f_2}{s_1 \lambda_1^2},$$

.....,

les coefficients f étant des quantités tout au plus de l'ordre zéro, mais le plus souvent très petites. Mais, puisqu'on a, dans le cas intermédiaire,

$$\lambda_0 \overline{\frac{1}{s_1}},$$

$$\lambda_1 \overline{\frac{1}{s_2}},$$

.....

(voir l'introduction du mémoire que je viens de citer), il s'ensuit que la série dont il s'agit jouit au moins de la même convergence que celle-ci:

$$\frac{s_1^3 A_1}{s_0} + \frac{s_2^3 A_2}{s_1} + \frac{s_3^3 A_3}{s_2} + \dots$$

En considérant maintenant que la forme générale des coefficients A_n est:

$$A_n = M_n \varepsilon^n,$$

M_n étant un coefficient du premier ordre, et ε une quantité moindre que l'unité, il sera clair que la convergence de la série que nous venons de mettre en évidence est celle d'une progression géométrique.

Finalement, en considérant qu'on a:

$$\psi_1 \overline{\frac{s_0}{s_1} f_1},$$

$$\psi_2 \overline{\frac{s_1}{s_2} f_2},$$

.....,

on se convaincra facilement que le développement donné sur la troisième ligne de l'équation (11) est convergent. Car, si les sommes des développements entre les parenthèses ne forment pas, en elles-mêmes, une série convergente, ce qui cependant ne peut arriver que sous conditions spéciales, les dites sommes appartiennent du moins au même ordre de grandeur: la convergence dont il s'agit est donc nécessitée par les facteurs $\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \dots$. Pour mieux élucider les diverses circonstances qu'on doit considérer, en faisant la conclusion indiquée sur la convergence, voici quelques remarques.

En regardant plusieurs termes critiques qui, considérés isolément font prendre aux modules des valeurs peu différentes de l'unité, ces va-

leurs deviendraient sensiblement amoindries si on les évaluait simultanément, c'est à dire en considérant l'influence mutuelle qu'exercent les divers termes, les uns sur les autres. Cela est visible par la présence des facteurs P_0 .

La convergence des développements

$$- \phi_{0.1} \Psi_1 + \phi_{1.0} \frac{d\Psi_1}{dv} + \dots, \text{ etc.}$$

étant difficile à démontrer généralement, on peut s'en dispenser, vu qu'il n'est pas nécessaire d'introduire un nombre illimité de fonctions ψ . Il suffit, en effet, de faire disparaître les premières puissances des fonctions V_1, V_2, \dots ainsi que leurs premières dérivées: les termes non éliminés (dont la convergence s'ensuit immédiatement), ainsi que les termes, à nombre limité, dépendant des fonctions $B_{0.0}, B_{0.1}, \dots$ etc. [voir: l'équation (12) du paragraphe précédent] se réunissent aux fonctions $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$

On se rappelle que l'équation (7) contient des termes dépendant de l'argument G_1 qui ont été négligés dans l'équation (9), à savoir: les termes provenant des produits $T_1^2 \sin(G_1 + s_1 T_1)$, etc.; il sera facile de réunir à la fonction Z_1 , la partie de T_1 , due à ces termes. En effet, si nous considérons une équation du type de l'équation (4), après y avoir négligé les termes dépendant de V_2^2 , de V_2^3 , etc., et que nous omettions la partie élémentaire, nous aurons:

$$\frac{d^2 V_2}{d\xi_1^2} + k_1^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi_1 \cdot V_2 = \frac{s_1}{2\lambda_1^2} \left(\frac{\pi}{2K_1} \right)^2 X_2.$$

Or, si nous admettons, pour revenir au cas envisagé,

$$X_2 = \frac{s_0}{1.2.4} l_{0.1} A_1 T_1^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi_1,$$

ce qui est le terme le plus essentiel dont il s'agit, nous aurons:

$$\frac{d^2 V_2}{d\xi_1^2} + k_1^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi_1 \cdot V_2 = \frac{s_0 l_{0.1}}{2.4} k_1^2 T_1^2 \operatorname{sn} \xi_1 \operatorname{cn} \xi_1.$$

On tire de là, en utilisant une formule bien connue,

$$V_2 = c_1 \operatorname{dn} \xi_1 + c_2 \operatorname{dn} \xi_1 \left\{ \frac{\theta'_1(\xi_1)}{\theta_1(\xi_1)} + \frac{E_1}{K_1} \xi_1 \right\} \\ + \frac{s_0 l_{0.1}}{2.4} k_1^2 \operatorname{dn} \xi_1 \int \frac{d\xi_1}{\operatorname{dn} \xi_1} \int T_1^2 \operatorname{sn} \xi_1 \operatorname{cn} \xi_1 \operatorname{dn} \xi_1 d\xi_1.$$

Par cette formule, il est aisé de voir que la partie de V_2 que nous venons de considérer, est une quantité tout au plus du même ordre que le produit

$$\frac{l_{0.1} k_1^2}{s_1^2}.$$

elle est, dans les cas qui se présentent à l'ordinaire, une quantité du cinquième ordre par rapport aux forces perturbatrices. Quoi qu'il en soit, la partie considérée est assez petite relativement à la fonction Z_1 ; et puisque les termes semiséculaires qu'on a introduits par la double intégration, se détruisent, en déterminant d'une manière convenable la constante c_2 , la fonction V_2 ne contiendra d'autres termes dépendant de l'argument G_1 que ceux qui se réunissent à la fonction Z_1 sans la modifier sensiblement.

Par des considérations analogues, on se convaincra que ce que je viens de dire relativement à la manière de tenir compte du terme de la forme

$$A' \sin(G_0 + s_0 Z_0) \frac{dZ_0}{dv},$$

est légitime, et que le même raisonnement s'applique aussi aux autres termes de la même forme.

Ayant ainsi examiné les différentes parties du développement (11) de la fonction T , et les ayant trouvées convergentes et dépourvues de tout terme renfermant la variable hors des signes trigonométriques, on conclut que le développement dont il s'agit reste en vigueur pour toute valeur de la variable indépendante.

5. Si, contrairement aux suppositions précédentes, la fonction qui figure dans le second membre de l'égalité (4), renfermait des termes donnant lieu, par l'intégration, à des termes élémentaires, la manière d'opérer que nous avons poursuivie précédemment cesserait d'être applicable. La raison en est qu'un terme dont l'argument a la forme simple

$$H = \sigma v + b$$

peut devenir, dans le procédé d'intégration que nous avons envisagé, tellement agrandi que les termes dépendant de V_1^2 et de V_1^3 dans l'équation (4) ne seraient pas négligeables par rapport au terme qui se trouve mul-

multiplié par la première puissance de V_1 . Il nous faut donc, pour arriver à un résultat effectif, opérer l'intégration de l'équation dont il s'agit d'une autre façon.

A cette fin, reprenons l'équation (4), et commençons par y faire entrer quelques modifications, du reste peu sensibles.

D'abord, nous en retranchons le terme dépendant de la partie constante de V_1^2 , terme qui se réunit immédiatement avec la fonction Z_0 .

Or, par cette opération, on ne parvient plus à déterminer le module conformément à l'équation signalée dans le n° 1, mais bien à employer, à ce but, la relation

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 = \frac{s_0 A_0}{\lambda_0^2} \left(1 - \frac{4h_2}{1.2} + \frac{16h_4}{1.2.3.4} - \dots\right),$$

h_2, h_4, \dots étant les parties constantes des fonctions V_1^2, V_1^4, \dots . En ne considérant que la première puissance de la constante h_2 , l'équation (4) prendra la forme suivante:

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{d^2 V_1}{d\xi^2} + (1 + 2h_2)k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1 - k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi (V_1^2 - h_2) \\ - \frac{2}{3} k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1^3 = - \frac{s_0}{2\lambda_0^2} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 (X_1 + \Omega_1) \\ = -(X + \Omega). \end{aligned}$$

Maintenant, pour rendre l'étude de l'équation (12) plus aisée qu'elle ne l'est en conservant la forme primitive, introduisons, au lieu de V_1 une nouvelle fonction z , de manière que la partie essentielle du terme dépendant de sa première puissance disparaisse dans l'équation transformée. On y parvient en admettant

$$V_1 = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi \cdot z.$$

Puis, pour éviter le terme dépendant de la première dérivée de z , ou du moins, pour en faire disparaître la portion la plus considérable,

introduisons une nouvelle variable indépendante ω dont la relation à la variable ξ sera donnée par la formule

$$d\xi = \frac{K}{E} \operatorname{dn} \omega^2 d\omega,$$

E étant l'intégrale elliptique complète de seconde espèce.

Certes, on aurait pu faire disparaître aussi le terme dont j'ai parlé tout-à-l'heure, en utilisant la méthode du n° 3 du paragraphe précédent; mais je préfère, dans le cas actuel, l'emploi du moyen que je viens d'indiquer.

Cela étant, on déduit immédiatement les formules que voici:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{d\xi} &= \frac{2K}{\pi} \left\{ \frac{E}{K} \frac{\operatorname{dn} \xi}{\operatorname{dn} \omega^2} \frac{dz}{d\omega} - k^2 \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi \cdot z \right\}, \\ \frac{d^2V_1}{d\xi^2} &= \frac{2K}{\pi} \left\{ \left(\frac{E}{K} \right)^2 \frac{\operatorname{dn} \xi}{\operatorname{dn} \omega^4} \frac{d^2z}{d\omega^2} + 2 \left(\frac{E}{K} \right)^2 \left[\frac{k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \xi}{\operatorname{dn} \omega^6} - \frac{K k^2 \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi}{E \operatorname{dn} \omega^2} \right] \frac{dz}{d\omega} \right. \\ &\quad \left. - k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi \cdot z \right\}, \end{aligned}$$

en vertu desquelles l'équation (12) se transforme en celle-ci:

$$\begin{aligned} (13) \quad & \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \frac{d^2z}{d\omega^2} + \left\{ \left(\frac{2K}{\pi} \right) \frac{k^2 \sin 2 \operatorname{am} \omega}{\operatorname{dn} \omega} - \left(\frac{2K}{\pi} \right) \left(\frac{K}{E} \right) \frac{k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi}{\operatorname{dn} \xi} \operatorname{dn} \omega^2 \right\} \frac{2K}{\pi} \frac{dz}{d\omega} \\ & + 2h_2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \left(\frac{K}{E} \right)^2 k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \omega^4 z \\ & - \frac{2K}{\pi} \left(\frac{K}{E} \right)^2 \frac{k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi}{\operatorname{dn} \xi} \operatorname{dn} \omega^4 \left\{ \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \operatorname{dn} \xi^2 z^2 - h_2 \right\} \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{2K}{\pi} \right)^4 \left(\frac{K}{E} \right)^2 k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^2 \operatorname{dn} \omega^4 z^3 \\ & = - \frac{\pi}{2K} \left(\frac{K}{E} \right)^2 \frac{\operatorname{dn} \omega^4}{\operatorname{dn} \xi} (X + \mathcal{Q}).^1 \end{aligned}$$

¹ On a écrit, dans cette équation, $\left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 (X + \mathcal{Q})$ au lieu de $(X + \mathcal{Q})$.

Mais il faut qu'on remplace partout, dans cette équation, la variable ξ par son expression en ω . A cette fin, rappelons-nous la relation

$$dn \omega^2 = \frac{E}{K} + \frac{d^2 \log \theta(\omega)}{d\omega^2},$$

ce qui donne:

$$\xi = \omega + \frac{K d \log \theta(\omega)}{E d\omega},$$

ou bien:

$$\xi - \omega = \frac{\pi}{2E} \left\{ \frac{4q}{1-q^2} \sin \frac{\pi}{K} \omega + \frac{4q^3}{1-q^4} \sin 2 \frac{\pi}{K} \omega + \dots \right\}.$$

Puis, en mettant:

$$\xi = \frac{2K}{\pi} x; \quad \omega = \frac{2K}{\pi} u,$$

et en considérant les développements

$$\frac{\pi}{2K} = 1 - 4q + 12q^2 - 32q^3 + 76q^4 - \dots,$$

$$\frac{\pi}{2E} = 1 + 4q - 4q^2 - 32q^3 + 44q^4 + \dots,$$

d'où il s'ensuit:

$$\frac{\pi}{2K} \frac{\pi}{2E} = 1 - 8q^2 + 72q^4 - \dots,^1$$

¹ Le développement que nous venons de donner dans le texte, s'obtient directement de la manière suivante.

En observant qu'on a:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 dn \xi^2 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{E}{K} + \frac{8q}{1-q^2} \cos 2x + \frac{16q^3}{1-q^4} \cos 4x + \dots,$$

et d'autre part:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 dn \xi^2 = \left(1 - \frac{1}{2} k^2\right) \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi,$$

nous allons introduire, dans la seconde de ces expressions, le développement

$$k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi = -32q^2(1 + 2q^2 + 4q^4 + \dots) + \frac{16q}{1-q^2} \cos 2x + \frac{32q^3}{1-q^4} \cos 4x + \dots$$

on obtient:

$$\begin{aligned} e^{2in(x-u)} &= 1 - 16n^2q^2 \\ &+ 8inq[1 - (7 + 8n^2)q^2] \sin 2u \\ &- 32n^2q^3 \cos 2u \\ &+ 8inq^2 \sin 4u + 16n^2q^2 \cos 4u + \dots, \end{aligned}$$

n étant un entier quelconque.

De cette expression générale, on déduit les formules suivantes:

$$\cos 2x = -4q + 44q^3 + (1 - 12q^2) \cos 2u + 4q \cos 4u + \dots,$$

$$\sin 2x = (1 - 20q^2) \sin 2u + 4q \sin 4u + \dots,$$

$$\cos 4x = 24q^2 - 8q \cos 2u + \cos 4u + \dots,$$

$$\sin 4x = -8q \sin 2u + \sin 4u + \dots,$$

qui nous serviront à exprimer tous les coefficients de l'équation (13) au moyen de l'argument u .

Par la théorie des fonctions elliptiques on parvient facilement aux développements que voici:

$$\frac{2Kk^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi}{\pi \operatorname{dn} \xi} = \frac{16q}{1-q^2} \sin 2x + \dots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi = \frac{16q}{1-q^2} \sin 2x + \frac{64q^2}{1-q^4} \sin 4x + \dots,$$

Nous aurons ainsi:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{E}{K} = \frac{2K}{\pi} \frac{2E}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2}k^2\right) \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 16q^2(1 + 2q^2 + 4q^2 + \dots).$$

Mais, puisqu'on a (JACOBI, Fund. nov. p. 105):

$$\left(1 - \frac{1}{2}k^2\right) \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 24q^2 + 24q^4 + 96q^6 + \dots,$$

il viendra:

$$\frac{2K}{\pi} \frac{2E}{\pi} = 1 + 8q^2 - 8q^4 + 32q^6 - \dots,$$

d'où l'on tire, aisément, la formule signalée.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi &= -32q^2(1 + 2q^2 + \dots) + \frac{16q}{1-q^2} \cos 2x \\ &+ \frac{32q^3}{1-q^4} \cos 4x + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{dn} \xi^2 &= 1 + 8q^2 - 8q^4 + \dots + \frac{8q}{1-q^2} \cos 2x \\ &+ \frac{16q^3}{1-q^4} \cos 4x + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^2 &= 32q^2(1 + 2q^2 + \dots) + 16q(1 + 9q^2) \cos 2x \\ &+ 96q^3 \cos 4x, \end{aligned}$$

où nous allons introduire les expressions de $\sin 2x, \dots$, obtenues tout-à-l'heure. Il résulte de la sorte:

$$\frac{2K k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi}{\pi \operatorname{dn} \xi} = 16q(1 - 19q^2) \sin 2u + 64q^3 \sin 4u + \dots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi = 16q(1 - 51q^2) \sin 2u + 128q^3 \sin 4u + \dots,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi &= -96q^2 + 1344q^4 + 16q(1 - 27q^2) \cos 2u \\ &+ 96q^3 \cos 4u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{dn} \xi^2 &= 1 - 24q^2 + 696q^4 + 8q(1 - 27q^2) \cos 2u \\ &+ 48q^3 \cos 4u + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^2 &= -32q^2 + 2496q^4 + 16q(1 - 51q^2) \cos 2u \\ &+ 160q^3 \cos 4u + \dots \end{aligned}$$

Finalement, puisqu'on a:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{dn} \omega^2 = 1 + 8q^2 - 8q^4 + 8q(1 + q^2) \cos 2u + 16q^3 \cos 4u + \dots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 \operatorname{dn} \omega^4 = 1 + 48q^2 + 240q^4 + 16q(1 + 17q^2) \cos 2u + 64q^3 \cos 4u + \dots,$$

on formera aisément les expressions que voici:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k^2 \frac{\sin 2 \operatorname{am} \xi}{\operatorname{dn} \xi} \operatorname{dn} \omega^2 = 16q(1 - 3q^2) \sin 2u + 128q^2 \sin 4u + \dots,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \omega^4 &= 32q^2 - 1472q^4 + 16q(1 + 5q^2) \cos 2u \\ &+ 224q^2 \cos 4u + \dots, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^7 k^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi \operatorname{dn} \omega^4 = 16q(1 + 29q^2) \sin 2u + 256q^2 \sin 4u + \dots$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^5 k^2 \frac{\sin 2 \operatorname{am} \xi}{\operatorname{dn} \xi} \operatorname{dn} \omega^4 = 16q(1 + 29q^2) \sin 2u + 192q^2 \sin 4u + \dots,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^8 k^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^2 \operatorname{dn} \omega^4 &= 96q^2 + 1728q^4 + 16q(1 + 77q^2) \cos 2u \\ &+ 288q^2 \cos 4u + \dots \end{aligned}$$

Ayant obtenu ces développements, on aura immédiatement, en les introduisant dans l'équation (13), celle-ci:

$$\begin{aligned} (14) \quad \frac{d^2 z}{du^2} &+ \{192q^3 \sin 2u - 128q^2 \sin 4u\} \frac{dz}{du} \\ &+ h_2 \{64q^2 - 3968q^4 + 32q(1 - 11q^2) \cos 2u + 448q^2 \cos 4u\} z \\ &- \{16q(1 + 13q^2) \sin 2u + 256q^2 \sin 4u\} z^2 \\ &- \frac{2}{3} \{96q^2 + 192q^4 + 16q(1 + 61q^2) \cos 2u + 288q^2 \cos 4u\} z^3 \\ &= -h_2 \{16q(1 + 13q^2) \sin 2u + 192q^2 \sin 4u\} \\ &- \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1 - 16q^2) \frac{\operatorname{dn} \omega^4}{\operatorname{dn} \xi} (X + \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

6. Après avoir établi l'équation (14), il nous reste à la transformer au moyen d'une substitution convenable, de manière à débarrasser les divers termes des facteurs trigonométriques. Cette transformation dont la théorie générale a été exposée dans le paragraphe 5, s'opère dans notre cas tout simplement en adoptant l'expression

$$\begin{aligned}
 (15) \quad z = & y - 4q(1 + 13q^2) \sin 2u \cdot y^2 - \frac{8}{3}q(1 + 61q^2) \cos 2u \cdot y^3 \\
 & - 16q^2 \sin 4u \cdot y^2 - 16q^2 \cos 4u \cdot y^3 \\
 & + 4h_2q(1 + 13q^2) \sin 2u + 8h_2q(1 - 11q^2) \cos 2u \cdot y \\
 & + 12h_2q^2 \sin 4u + 28h_2q^2 \cos 4u \cdot y \\
 & - 8q(1 + 13q^2) \cos 2u \cdot y \frac{dy}{du} + 8q(1 + 61q^2) \sin 2u \cdot y^2 \frac{dy}{du} \\
 & - 16q^2 \cos 4u \cdot y \frac{dy}{du} + 24q^2 \sin 4u \cdot y^2 \frac{dy}{du}.
 \end{aligned}$$

On en obtient par différentiation :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{du} = & \frac{dy}{du} - 8q(1 + 13q^2) \cos 2u \cdot y^2 + \frac{16}{3}q(1 + 61q^2) \sin 2u \cdot y^3 \\
 & - 64q^2 \cos 4u \cdot y^2 + 64q^2 \sin 4u \cdot y^3 \\
 & + 8h_2q(1 + 13q^2) \cos 2u - 16h_2q(1 - 11q^2) \sin 2u \cdot y \\
 & + 48h_2q^2 \cos 4u - 112h_2q^2 \sin 4u \cdot y \\
 & + 8q(1 + 13q^2) \sin 2u \cdot y \frac{dy}{du} + 8q(1 + 61q^2) \cos 2u \cdot y^2 \frac{dy}{du} \\
 & + 32q^2 \sin 4u \cdot y \frac{dy}{du} + 48q^2 \cos 4u \cdot y^2 \frac{dy}{du} \\
 & + \{8h_2q(1 - 11q^2) \cos 2u + 28h_2q^2 \cos 4u\} \frac{dy}{du} \\
 & - \{8q(1 + 13q^2) \cos 2u + 16q^2 \cos 4u\} \left\{ \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + y \frac{d^2y}{du^2} \right\} \\
 & + \{8q(1 + 61q^2) \sin 2u + 24q^2 \sin 4u\} \left\{ 2y \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + y^2 \frac{d^2y}{du^2} \right\}
 \end{aligned}$$

et puis:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{du^2} = & \frac{d^2y}{du^2} + 16q(1 + 13q^2) \sin 2u \cdot y^2 + \frac{32}{3}q(1 + 61q^2) \cos 2u \cdot y^3 \\
& + 256q^2 \sin 4u \cdot y^2 + 256q^2 \cos 4u \cdot y^3 \\
& - 16h_2q(1 + 13q^2) \sin 2u - 32h_2q(1 - 11q^2) \cos 2u \cdot y \\
& - 192h_2q^2 \sin 4u - 448h_2q^2 \cos 4u \cdot y \\
& - \{32h_2q(1 - 11q^2) \sin 2u + 224h_2q^2 \sin 4u\} \frac{dy}{du} \\
& + \{24q(1 + 13q^2) \sin 2u + 96q^2 \sin 4u\} \left\{ \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + y \frac{d^2y}{du^2} \right\} \\
& + \{24q(1 + 61q^2) \cos 2u + 144q^2 \cos 4u\} \left\{ 2y \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + y^2 \frac{d^2y}{du^2} \right\} \\
& + \{8h_2q(1 - 11q^2) \cos 2u + 28h_2q^2 \cos 4u\} \frac{d^2y}{du^2} \\
& - \{8q(1 + 13q^2) \cos 2u + 16q^2 \cos 4u\} \left\{ 3 \frac{dy}{du} \frac{d^2y}{du^2} + y \frac{d^3y}{du^3} \right\} \\
& + \{8q(1 + 61q^2) \sin 2u + 24q^2 \sin 4u\} \left\{ 2 \left(\frac{dy}{du} \right)^3 + 6y \frac{dy}{du} \frac{d^2y}{du^2} + y^2 \frac{d^3y}{du^3} \right\}.
\end{aligned}$$

On obtient encore:

$$\begin{aligned}
z^2 = & y^2 - 8q(1 + 13q^2) \sin 2u \cdot y^3 - 32q^2 \sin 4u \cdot y^3 \\
& + \{8h_2q(1 + 13q^2) \sin 2u + 24h_2q^2 \sin 4u\} y \\
& - \{16q(1 + 13q^2) \cos 2u + 32q^2 \cos 4u\} y^2 \frac{dy}{du}.
\end{aligned}$$

Avec les expressions que nous venons de signaler, on déduit de l'équation (14) la suivante, où l'on a omis les termes surpassant le quatrième ordre et le troisième degré, la dérivée $\frac{dy}{du}$ étant toujours considérée comme une quantité du premier ordre et du premier degré:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2y}{du^2} + 2048q^4y^3 - 3072q^4h_2y \\
 & + \{192q^3 \sin 2u - 128q^2 \sin 4u\} \frac{dy}{du} \\
 & + 8.64q^3 \sin 2u(y^2 - h_2) + \frac{64.44}{3}q^3 \cos 2u.y^3 \\
 & - \{192q^3 \cos 2u - 64q^2 \cos 4u\}h_2y \\
 & - 8.64q^3 \cos 2u.y \frac{dy}{du} + \{20.64q^3 \sin 2u + 128q^2 \sin 4u\}y^2 \frac{dy}{du} \\
 & - \{32q(1 + 5q^2) \sin 2u + 224q^2 \sin 4u\}h_2 \frac{dy}{du} \\
 & + \{24q(1 + 13q^2) \sin 2u + 96q^2 \sin 4u\} \left\{ \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + y \frac{d^2y}{du^2} \right\} \\
 & + \{24q(1 + 61q^2) \cos 2u + 144q^2 \cos 4u\} \left\{ 2y \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + y^2 \frac{d^2y}{du^2} \right\} \\
 & - \{8q(1 + 13q^2) \cos 2u + 16q^2 \cos 4u\} \left\{ 3 \frac{dy}{du} \frac{d^2y}{du^2} + y \frac{d^3y}{du^3} \right\} \\
 & + \{8q(1 + 61q^2) \sin 2u + 24q^2 \sin 4u\} \left\{ 2 \left(\frac{dy}{du} \right)^3 + 6y \frac{dy}{du} \frac{d^2y}{du^2} + y^2 \frac{d^3y}{du^3} \right\} \\
 & + \{8q(1 - 11q^2) \cos 2u + 28q^2 \cos 4u\}h_2 \frac{d^2y}{du^2} \\
 & = - \left(\frac{2K}{\pi} \right)^3 (1 - 16q^3) \frac{dn \omega^4}{dn \xi} (X + \Omega),
 \end{aligned}$$

ou bien, en rassemblant les termes multipliés par $\frac{d^2y}{du^2}$, et en négligeant encore certains termes sans importance,

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2y}{du^2} \left\{ 1 + (24q \sin 2u + 96q^2 \sin 4u)y + (24q \cos 2u + 144q^2 \cos 4u)y^2 \right\} \\
 & - (24q \cos 2u + 48q^2 \cos 4u) \frac{dy}{du} + (48q \sin 2u + 144q^2 \sin 4u)y \frac{dy}{du} \\
 & + 2048q^4y^3 - 3072q^4h_2y + 512q^3 \sin 2u(y^2 - h_2) \\
 & + \{24q \sin 2u + 96q^2 \sin 4u\} \left(\frac{dy}{du} \right)^2 - 8q \cos 2u.y \frac{d^3y}{du^3} \\
 & = - \left(\frac{2K}{\pi} \right)^3 (1 - 16q^3) \frac{dn \omega^4}{dn \xi} (X + \Omega).
 \end{aligned}$$

Arrivé à cette équation, nous la multiplions par:

$$\{1 + 24q \sin 2u.y + \dots\}^{-1} = 1 - 24q \sin 2u.y + \dots;$$

puis, en considérant que les termes essentiels à facteur trigonométrique de l'expression $\frac{d^2y}{du^2}$ sont ceux-ci:

$$\frac{d^2y}{du^2} = -512q^3 \sin 2u(y^2 - h_2) - 24q \sin 2u \left(\frac{dy}{du}\right)^2,$$

d'où l'on tire:

$$\frac{d^3y}{du^3} = -1024q^3 \cos 2u(y^2 - h_2) - 48q \cos 2u \left(\frac{dy}{du}\right)^2 - \dots,$$

nous introduisons cette valeur dans l'équation dont il s'agit. Maintenant, si dans le premier membre, nous rejetons les termes du deuxième ordre dépendant d'une fonction trigonométrique, termes qui en effet sont très peu sensibles, il en résulte:

$$\begin{aligned} (16) \quad \frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4 h_2 y - 96q^2 \left(\frac{dy}{du}\right)^2 y + 24q \sin 2u \left(\frac{dy}{du}\right)^2 - 8q \cos 2u.y \frac{d^3y}{du^3} \\ = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1 - 16q^2)(1 - 24q \sin 2u.y + \dots) \frac{dn \omega^4}{dn \xi} (X + \Omega),^1 \end{aligned}$$

équation dans laquelle on a toutefois négligé, parmi d'autres termes aussi quelques-uns dépendant de la troisième et de la quatrième dérivée de y .

En supposant que y soit finalement exprimé au moyen d'une suite de termes trigonométriques, il est visible que la fonction $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$ renfermera un terme constant, nécessairement positif, du même ordre que la somme des termes périodiques. En ne considérant, dans une première approximation, que cette partie constante, on parvient à un résultat de la forme

$$(17) \quad \frac{d^2y}{du^2} - \beta_1 y = -Q,$$

¹ En formant une nouvelle expression de $\frac{d^3y}{du^3}$, il faut évidemment rejeter le terme $-48q \cos 2u \left(\frac{dy}{du}\right)^2$.

où β_1 signifie une constante positive du quatrième ordre par rapport aux forces perturbatrices, et Q , une suite de termes trigonométriques qui s'obtiennent en développant l'expression

$$Q = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 - 16q^2)(1 - 24q \sin 2u.y + \dots) \frac{dn \omega^4}{dn \xi} (X + \mathcal{Q}).$$

Les transformations que nous venons d'opérer ont fait naître, dans l'équation résultante, quelques termes de nature particulière, à savoir des termes qui ne sont multipliés ni par une fonction trigonométrique de la variable indépendante, ni par quelque autre fonction de cette variable, mais lesquels se composent de deux facteurs, dont l'un est fonction des coefficients constants entrant dans l'expression de y et l'autre fonction de y et de sa première dérivée. Ces termes — je les appellerai termes à facteur horistique ou, plus brièvement, termes horistiques¹ — sont dans la théorie des mouvements des corps célestes, on l'entend aisément, de la plus grande importance: en effet, la présence des termes de la nature envisagée rend convergentes et, quant au résultat numérique, limitées, les solutions des équations différentielles, tandis que, sans eux, le procès d'intégration pourrait aboutir à un résultat divergent.

Cependant, les coefficients constants des termes dont il s'agit n'étant que très petits, l'influence qu'ils peuvent exercer est, à l'ordinaire, peu sensible, et le mode de calcul des inégalités planétaires devient, dans la plupart des cas, presque le même que celui qu'on a employé dans les théories antérieures. Pourtant, si la période d'une inégalité est très longue, et surtout s'il s'agit du calcul d'un terme élémentaire ou de la détermination d'un terme de libration, la forme plus complète de l'équation différentielle que nous avons mise en évidence, l'emportera sur celle qu'on obtient en négligeant, dès le début, les termes d'un ordre plus élevé que le premier.

7. Il s'est montré, dans ce qui précède, que les coefficients des termes à facteur horistique sont du quatrième ordre par rapport aux forces perturbatrices: venons maintenant à l'examen des termes analogues provenant de l'équation (12), si l'on y ajoute l'expression

¹ ὀριστικός, appartenant à ce qui limite, qui termine.

$$\begin{aligned} X &= \frac{s_0}{2\lambda_0^2} A'_0 \sin(G_0 + s_0 T) \frac{dT}{dv} \\ &= \frac{s_0}{2\lambda_0} A'_0 \sin(G_0 + s_0 T) \frac{dT}{dx}. \end{aligned}$$

Faisons d'abord:

$$A'_0 = \frac{s_0}{\lambda_0} A_0 p \left\{ 1 - \frac{4h_2}{1.2} + \dots \right\},$$

ce qui nous donne:

$$X = \frac{s_0}{2} p k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \sin(G_0 + s_0 T) \frac{dT}{dx},$$

et considérons les formules

$$T = Z_0 + \frac{2}{s_0} V_1,$$

$$s_0 \frac{dZ_0}{dx} = 2 \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1 \right);$$

l'expression de X prend alors la forme que voici:

$$\begin{aligned} (18) \quad X &= p \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1 \right) \left\{ k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi + 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1 \right. \\ &\quad \left. - 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1^2 - \frac{4}{3} k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1^3 - \dots \right\} \\ &\quad + p \left\{ k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi + 2k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1 - \dots \right\} \frac{dV_1}{dx}. \end{aligned}$$

Puis, en introduisant les valeurs

$$V_1 = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi \cdot z; \quad \frac{dV_1}{dx} = \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi \frac{dz}{dx} - \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi \cdot z,$$

l'expression précédente se transforme en celle-ci:

$$\begin{aligned} (19) \quad X &= p k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1 \right) \sin 2 \operatorname{am} \xi \\ &\quad - \left\{ - 2 p k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^3 \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1 \right) \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} p k^4 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^4 \sin 2 \operatorname{am} \xi^2 \right\} z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ 2pk^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^4 \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1 \right) \sin 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^2 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + pk^4 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^5 \sin 2 \operatorname{am} \xi \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi \right\} z^2 \\
 & - \left\{ \frac{4}{3} pk^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^5 \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} \xi - 1 \right) \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^3 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - k^4 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^6 \sin 2 \operatorname{am} \xi^2 \operatorname{dn} \xi^2 \right\} z^3 \\
 & - \dots \\
 & + pk^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^3 \sin 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi \frac{dz}{dx} \\
 & + 2pk^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^4 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^2 z \frac{dz}{dx} \\
 & - 2pk^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^5 \sin 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^3 z^2 \frac{dz}{dx} \\
 & - \frac{4}{3} pk^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^6 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^4 z^3 \frac{dz}{dx} \\
 & - \dots
 \end{aligned}$$

En ne demandant que les termes du deuxième ordre par rapport à q , il sera permis de remplacer, généralement, la variable x par u , ou ξ par ω ; seulement dans le terme qui se trouve multiplié par $z \frac{dz}{dx}$, il est indispensable d'employer l'expression plus rigoureuse du coefficient, ainsi que de tenir compte du facteur

$$\left(\frac{2K}{\pi} \right)^3 (1 - 16q^2) \frac{\operatorname{dn} \omega^4}{\operatorname{dn} \xi} = 1 + 24q^2 + 12q \cos 2u + \dots,$$

qui peut être égalé à l'unité dans les autres termes.

Avec l'expression de $k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^4 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^2$ que nous avons donnée dans le n° 5, il s'obtient:

$$\begin{aligned}
 & 2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^3 (1 - 16q^2) \frac{\operatorname{dn} \omega^4}{\operatorname{dn} \xi} k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^4 \cos 2 \operatorname{am} \xi \operatorname{dn} \xi^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad = 128q^2 + 32q \cos 2u + \dots
 \end{aligned}$$

Maintenant, si nous portons dans l'expression de X , la valeur de z donnée par l'équation (15), ainsi que celles de $\frac{dz}{dx}$, z^2 , ..., et que nous nous rappelions la relation

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \{ 1 - 8q \cos 2u - \dots \},$$

il est aisé de voir que la fonction X exprimée en y ne contiendra pas de termes du deuxième ordre de la forme $\beta_1 y$, ni de la forme $\beta_2 y^2$, β_1 et β_2 étant deux constantes de l'ordre de q^2 . Il est encore visible, si l'on ne considère que les quantités du deuxième ordre, que les autres termes indépendants d'une fonction trigonométrique de l'argument u , ne proviennent que des produits $\sin 2u \frac{dz}{du}$, $\cos 2u \cdot z \frac{dz}{du}$, Retenons seulement les termes

$$\frac{dz}{du} = \frac{dy}{du} + 8q \sin 2u \cdot y \frac{dy}{du} + 16q \sin 2u \cdot y \left(\frac{dy}{du} \right)^2,$$

$$z \frac{dz}{du} = y \frac{dy}{du} - 16q \cos 2u \cdot y \left(\frac{dy}{du} \right)^2,$$

introduisons-les dans l'expression précédente de X et rejetons les termes périodiques du deuxième ordre; nous aurons ainsi:

$$- \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 (1 - 16q^2) \frac{dn \omega^4}{dn \xi} X = - 64pq^2 y \frac{dy}{du} + 128pq^2 y \left(\frac{dy}{du} \right)^2$$

$$- 16pq \sin 2u \frac{dy}{du} - 32pq \cos 2u \cdot y \frac{dy}{du}$$

$$+ 32pq \sin 2u \cdot y^2 \frac{dy}{du} + \dots$$

Après avoir introduit, dans l'équation (16), l'expression que nous venons de trouver, il faut la multiplier par:

$$1 - 24q \sin 2u \cdot y + 24q \cos 2u \frac{dy}{du} - 48q \sin 2u \cdot y \frac{dy}{du} - \dots$$

Cette multiplication effectuée, nous aurons, au lieu de l'équation (16), celle-ci:

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \frac{d^2y}{du^2} - 1024q^4h_2y - 128pq^2y \frac{dy}{du} - (96 + 128p)q^2y \left(\frac{dy}{du}\right)^2 \\
 = -16pq \sin 2u \frac{dy}{du} - 32pq \cos 2u \cdot y \frac{dy}{du} + 32pq \sin 2u \cdot y^2 \frac{dy}{du} \\
 - 24q \sin 2u \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + 8q \cos 2u \cdot y \frac{d^3y}{du^3} \\
 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1 - 16q^2)(1 - 24q \sin 2u \cdot y + \dots) \frac{dn \omega^4}{dn \xi} \Omega.
 \end{aligned}$$

Maintenant, pour débarrasser cette équation des termes périodiques dépendant de l'argument u , nous admettons, en désignant par ζ une fonction nouvelle,

$$y = \zeta + 4pq \sin 2u \frac{d\zeta}{du} + 8pq \cos 2u \cdot \zeta \frac{d\zeta}{du} - 8pq \sin 2u \cdot \zeta^2 \frac{d\zeta}{du};$$

on en tire:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{du} &= \frac{d\zeta}{du} + 8pq \cos 2u \frac{d\zeta}{du} - 16pq \sin 2u \cdot \zeta \frac{d\zeta}{du} - 16pq \cos 2u \cdot \zeta^2 \frac{d\zeta}{du} \\
 &+ 4pq \sin 2u \frac{d^2\zeta}{du^2} + 8pq \cos 2u \left\{ \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta \frac{d^2\zeta}{du^2} \right\} \\
 &- 8pq \sin 2u \left\{ 2\zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta^2 \frac{d^2\zeta}{du^2} \right\}, \\
 \frac{d^2y}{du^2} &= \frac{d^2\zeta}{du^2} - 16pq \sin 2u \frac{d\zeta}{du} - 32pq \cos 2u \cdot \zeta \frac{d\zeta}{du} + 32pq \sin 2u \cdot \zeta^2 \frac{d\zeta}{du} \\
 &+ 16pq \cos 2u \frac{d^2\zeta}{du^2} - 32pq \sin 2u \left\{ \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta \frac{d^2\zeta}{du^2} \right\} \\
 &- 32pq \cos 2u \left\{ 2\zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta^2 \frac{d^2\zeta}{du^2} \right\} \\
 &+ 4pq \sin 2u \frac{d^3\zeta}{du^3} + 8pq \cos 2u \left\{ 3 \frac{d\zeta}{du} \frac{d^2\zeta}{du^2} + \zeta \frac{d^3\zeta}{du^3} \right\} \\
 &- 8pq \sin 2u \left\{ 2 \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^3 + 6\zeta \frac{d\zeta}{du} \frac{d^2\zeta}{du^2} + \zeta^2 \frac{d^3\zeta}{du^3} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y \frac{dy}{du} &= \zeta \frac{d\zeta}{du} + 8pq \cos 2u \cdot \zeta \frac{d\zeta}{du} + 16pq \cos 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \dots, \\
y^2 \frac{dy}{du} &= \zeta^2 \frac{d\zeta}{du} + 8pq \sin 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \dots, \\
\left(\frac{dy}{du}\right)^2 &= \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 - 32pq \sin 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Mais avant que nous allons introduire ces valeurs dans l'équation (20), examinons ce qu'il faut y placer au lieu du terme dépendant de $\frac{d^3y}{du^3}$.

Evidemment, puisqu'on a déjà tenu compte, dans l'équation (16), du terme $+ 24q \sin 2u \left(\frac{dy}{du}\right)^2$, la nouvelle expression de $\frac{d^3y}{du^3}$ ne devra contenir que les termes provenant de la fonction X. En considérant séparément ces termes, et en ne retenant que ceux qui sont périodiques et du premier ordre, nous aurons:

$$\frac{d^3y}{du^3} = -16pq \sin 2u \frac{dy}{du} - 32pq \cos 2u \cdot y \frac{dy}{du} + \dots,$$

ce qui nous donne:

$$\frac{d^3y}{du^3} = -32pq \cos 2u \frac{dy}{du} - 32pq \cos 2u \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \dots$$

Avec cette valeur, l'équation (20) deviendra:

$$\begin{aligned}
(20') \quad \frac{d^2y}{du^2} &- 1024q^4 h_2 y - 96q^2 y \left(\frac{dy}{du}\right)^2 \\
&= -16pq \sin 2u \frac{dy}{du} - 32pq \cos 2u \cdot y \frac{dy}{du} + 32pq \sin 2u \cdot y^2 \frac{dy}{du} \\
&- 24q \sin 2u \left(\frac{dy}{du}\right)^2 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1 - 24q \sin 2u \cdot y + \dots) \frac{dn \omega^4}{dn \xi} \Omega.
\end{aligned}$$

C'est dans cette équation qu'il faut substituer les expressions que nous venons de trouver tout à l'heure.

On aperçoit de la sorte que la somme des termes de la forme

$$\text{const. } \zeta \frac{d\zeta}{du} + \text{const. } \zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$

disparaît, autant que ceux-ci résultent des termes

$$- 16pq \sin 2u \frac{dy}{du} - 32pq \cos 2u \cdot y \frac{dy}{du} + 32pq \sin 2u \cdot y^2 \frac{dy}{du}.$$

L'équation qui reste, et où l'on a rejeté tout terme inutile, sera donc la suivante:

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + 16pq \cos 2u - 32pq \sin 2u \cdot \zeta - \dots \right\} \frac{d^2 \zeta}{du^2} - 1024q^4 h_2 \zeta - 96q^2 \zeta \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 \\ & \qquad \qquad \qquad - 384pq^2 \zeta \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 \\ & = - 24q \sin 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + 32pq \sin 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + 64pq \cos 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 \\ & \quad - \left\{ 4pq \sin 2u + 8pq \cos 2u \cdot \zeta - 8pq \sin 2u \cdot \zeta^2 \right\} \frac{d^3 \zeta}{du^3} \\ & \quad + \left(\frac{2K}{\pi} \right)^3 (1 - 24q \sin 2u \cdot \zeta + \dots) \frac{dn \omega^4}{dn \xi} \Omega. \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par $\{1 + 16pq \cos 2u - 32pq \sin 2u \cdot \zeta - \dots\}^{-1}$, le coefficient de $\frac{d^2 \zeta}{du^2}$ deviendra égal à l'unité, et les termes dépourvus de facteurs trigonométriques provenant du produit

$$\left\{ 1 - 16pq \cos 2u + 32pq \sin 2u \cdot \zeta \right\} \left\{ - 24q \sin 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + 32pq \sin 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + 64pq \cos 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 \right\},$$

forment, en s'ajoutant, un seul terme, savoir:

$$- 384pq^2 \zeta \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2,$$

de sorte que la multiplication envisagée fait disparaître, dans l'équation précédente, ce terme au premier membre. Mais puisqu'on a, en rejetant la fonction Ω , ainsi que tout terme d'un ordre surpassant le premier par rapport à q :

$$\frac{d^2 \zeta}{du^2} = - 24q \sin 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + 32pq \sin 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + 64pq \cos 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2,$$

d'où l'on déduit:

$$\frac{d^3\zeta}{du^3} = -48q \cos 2u \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + 64pq \cos 2u \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 - 128pq \sin 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \dots,$$

le terme dont il s'agit reparait, mais réduit à la moitié de la valeur précédente; nous aurons donc, en écrivant finalement y au lieu de ζ :

$$(21) \quad \frac{d^2y}{du^2} - 1024q^2h_2y - (96 + 192p)q^2y \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \{1 + \dots\}\Omega.$$

On aurait obtenu un résultat un peu modifié si, au lieu d'avoir adopté l'expression précédente de y , on avait retenu tous les termes mis en évidence, à l'exception de celui-ci:

$$4pq \sin 2u \frac{d\zeta}{du}.$$

En effet, avec les valeurs

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{d\zeta}{du} - 16pq \sin 2u \cdot \zeta \frac{d\zeta}{du} - 16pq \cos 2u \cdot \zeta^2 \frac{d\zeta}{du} \\ &\quad + 8pq \cos 2u \left\{ \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta \frac{d^2\zeta}{du^2} \right\} - 8pq \sin 2u \left\{ 2\zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta^2 \frac{d^2\zeta}{du^2} \right\}, \\ \frac{d^2y}{du^2} &= \frac{d^2\zeta}{du^2} - 32pq \cos 2u \cdot \zeta \frac{d\zeta}{du} + 32pq \sin 2u \cdot \zeta^2 \frac{d\zeta}{du} \\ &\quad - 32pq \sin 2u \left\{ \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta \frac{d^2\zeta}{du^2} \right\} - 32pq \cos 2u \left\{ 2\zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 + \zeta^2 \frac{d^2\zeta}{du^2} \right\} \\ &\quad + 8pq \cos 2u \left\{ 3 \frac{d\zeta}{du} \frac{d^2\zeta}{du^2} + \zeta \frac{d^3\zeta}{du^3} \right\} \\ &\quad - 8pq \sin 2u \left\{ 2 \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^3 + 6\zeta \frac{d\zeta}{du} \frac{d^2\zeta}{du^2} + \zeta^2 \frac{d^3\zeta}{du^3} \right\}, \end{aligned}$$

$$y \frac{dy}{du} = \zeta \frac{d\zeta}{du} + 16pq \cos 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2; \quad y^2 \frac{dy}{du} = \zeta^2 \frac{d\zeta}{du}$$

et:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 - 32pq \sin 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2$$

on déduit immédiatement de l'équation (20') celle-ci:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 1 - 32pq \sin 2u \cdot \zeta - \dots \right\} \frac{d^2 \zeta}{du^2} - 1024q^4 h_2 \zeta - 128p^2 q^2 \zeta \frac{d\zeta}{du} \\
 & \quad - (96 + 384p - 128p^2) q^2 \zeta \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 \\
 = & -16pq \sin 2u \frac{d\zeta}{du} - 24q \sin 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + 32pq \sin 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + 64pq \cos 2u \cdot \zeta \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 \\
 & - (8pq \cos 2u \cdot \zeta - 8pq \sin 2u \cdot \zeta^2) \frac{d^3 \zeta}{du^3} + (1 + \dots) \Omega.
 \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par:

$$1 + 32pq \sin 2u \cdot \zeta + 48pq \sin 2u \cdot \zeta \frac{d\zeta}{du} + \dots$$

et en remplaçant $\frac{d^3 \zeta}{du^3}$ par:

$$-32pq \cos 2u \frac{d\zeta}{du} + 64pq \cos 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 - 48q \cos 2u \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2,$$

on parvient finalement au résultat suivant:

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \frac{d^3 y}{du^3} + 16pq \sin 2u \frac{dy}{du} - 1024q^4 h_2 y - (96 + 192p - 256p^2) q^2 y \left(\frac{dy}{du} \right)^2 \\
 = (1 + \dots) \Omega
 \end{aligned}$$

dans lequel on a mis y à la place de ζ .

8. Bien que les termes de la forme $\mu y \frac{dy}{du}$, visibles quelquefois dans nos calculs, aient disparu dans les équations (21) et (22), nous allons considérer une équation différentielle renfermant un tel terme: nous le retrouverons, en effet, en utilisant une substitution différente de celles que nous avons employées dans les n^{os} précédents.

L'apparition d'un terme de la forme envisagée rend extrêmement pénible l'intégration de l'équation dont il s'agit, et nous ne saurons surmonter les difficultés en provenant que par des approximations ou même par des tâtonnements. Afin de nous procurer une idée de ce qui

résulte de la présence du terme signalé, concevons d'abord l'équation très simple:

$$(a) \quad \frac{d^2y}{du^2} + \mu y \frac{dy}{du} = -a \sin(\sigma u + b),$$

et désignons-y, pour abrégier, l'angle $\sigma u + b$ par H .

Or, puisqu'il ne s'agit maintenant que d'une solution particulière, et pas du tout de l'intégrale complète, supposons:

$$y = x_1 \sin H + x_2 \sin 2H + \dots$$

et cherchons à déterminer les coefficients.

D'abord, si σ n'est pas très petit, on pourrait commencer par mettre:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

et établir les équations

$$\frac{d^2y_0}{du^2} = -a \sin H,$$

$$\frac{d^2y_1}{du^2} = -\mu y_0 \frac{dy_0}{du},$$

.....,

mais par cette voie, la détermination des y appartenant aux grandes valeurs des indices, deviendrait laborieuse, et encore, la convergence du développement supposé cesserait, si le rapport $\frac{\mu a}{\sigma^2}$ excédait une certaine limite. Il faut donc, dans certains cas, éviter le développement suivant les puissances de μ , bien que cette quantité soit généralement très petite.

En admettant le développement suivant les multiples de H , on en tire:

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots) \\ &+ (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots) \cos H \\ &+ \left(-\frac{1}{2}x_1^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4 + \dots\right) \cos 2H \\ &+ (-x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_2 x_5 + \dots) \cos 3H \\ &+ \dots, \end{aligned}$$

ce qui donne par différentiation:

$$\begin{aligned}
 y \frac{dy}{du} = & -\frac{\sigma}{2}(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots) \sin H \\
 & + \frac{2\sigma}{2} \left(\frac{1}{2} x_1^2 - x_1 x_3 - x_2 x_4 - \dots \right) \sin 2H \\
 & + \frac{3\sigma}{2} (x_1 x_2 - x_1 x_4 - x_2 x_5 - \dots) \sin 3H \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans l'équation (α), et en égalant à zéro les coefficients des divers sinus, on obtiendra:

$$\begin{aligned}
 x_1 \sigma^2 + \frac{\mu \sigma}{2} (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots) &= a, \\
 4x_2 \sigma^2 - \frac{2\mu \sigma}{2} \left(\frac{1}{2} x_1^2 - x_1 x_3 - \dots \right) &= 0, \\
 9x_3 \sigma^2 - \frac{3\mu \sigma}{2} (x_1 x_2 - x_1 x_4 - \dots) &= 0, \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Il résulte de la deuxième de ces équations

$$x_2 = -\frac{\mu}{4\sigma} \left(\frac{1}{2} x_1^2 - x_1 x_3 - \dots \right),$$

valeur avec laquelle on tire de la première la suivante:

$$\frac{\mu^2}{16} x_1^3 - \frac{\mu^2}{16} x_3 x_1^2 + \left(\sigma^2 - \frac{\mu^2}{8} x_3^2 \right) x_1 = a + \dots$$

Maintenant, en supposant les coefficients x_3, x_4, \dots ou connus, ou négligeables, il se comprend que la quantité x_1 , qui s'obtient par la résolution de l'équation précédente du troisième degré, ne surpasse jamais une certaine limite qui s'approche d'autant plus de zéro, que la valeur de $\frac{16a}{\mu^2}$ est plus petite.

On aura facilement des résultats semblables relativement aux coefficients x_2, x_3, \dots . Donc, en admettant toujours la convergence du dé-

veloppement suivant les multiples de H , les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent de calculer, au moyen d'approximations successives, les valeurs des coefficients demandés. Il faut toutefois remarquer que dans le cas où σ disparaît, la série des x n'est plus convergente.

L'équation (α) se transforme facilement dans une autre dont la forme est, quelquefois, plus convenable. Pour y garder plus de généralité, désignons par Q une fonction toute connue de u , et considérons, au lieu de l'équation (α), celle-ci:

$$(\beta) \quad \frac{d^2y}{du^2} + \mu y \frac{dy}{du} = Q.$$

On en tire immédiatement, en désignant par $-\frac{1}{2}\mu h_2$ la constante d'intégration, une première intégrale, à savoir:

$$\frac{dy}{du} + \frac{1}{2}\mu(y^2 - h_2) = \int Q du;$$

et, en vertu de ce résultat, il sera facile d'obtenir de l'équation (β) la suivante:

$$(\gamma) \quad \frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{1}{2}\mu^2 h_2 + \mu \int Q du\right)y - \frac{1}{2}\mu^2 y^3 = Q.$$

Telle est la transformée de l'équation (β): on en conclut, toutes les fois que la fonction Q ne renferme qu'un nombre fini de termes trigonométriques, que le terme dépendant de μ tend à diminuer les coefficients dans la solution de l'équation dont il s'agit. Dans ce cas, on pourrait, en employant la méthode du § 5, réduire l'intégration de l'équation (γ) à celle d'un système d'équations linéaires et d'une équation du deuxième ordre et du troisième degré à coefficients constants et ne renferment plus aucun terme de la forme $\mu y \frac{dy}{du}$.

Mais si, par contre, la fonction Q contenait un terme constant, le coefficient de y , dans l'équation (γ), renfermerait la variable u multipliée par cette constante: l'intégration de l'équation (γ) deviendrait, dans un tel cas, extrêmement difficile, et on ne saurait développer la fonction y dans la forme d'une série trigonométrique.

Ayant ainsi donné une idée du rôle que joue le terme dépendant de μ , nous allons examiner des cas plus compliqués que celui qui est représenté par l'équation (β) .

9. Considérons d'abord l'équation

$$(a) \quad \frac{d^2y}{du^2} + \mu y \frac{dy}{du} = Q + R,$$

Q étant un polynôme contenant un nombre fini de termes purement trigonométriques et à coefficients constants, dont les arguments ne dépendent que de la variable u , et R , une fonction qui peut renfermer, parmi un nombre infini de termes trigonométriques, certains termes dépendant de l'inconnue y elle-même.

Dans l'équation signalée, nous allons remplacer la fonction y par la somme de deux nouvelles fonctions Y et Z , de sorte qu'on ait:

$$y = Y + Z,$$

ce qui entraîne:

$$\frac{d^2Y}{du^2} + \frac{d^2Z}{du^2} + \mu Y \frac{dY}{du} + \mu Y \frac{dZ}{du} + \mu Z \frac{dY}{du} + \mu Z \frac{dZ}{du} = Q + R.$$

L'une des fonctions Y et Z pouvant être choisie à volonté, nous établissons la relation

$$(\beta) \quad \frac{d^2Z}{du^2} + \mu Y \frac{dY}{du} + \mu Z \frac{dZ}{du} = Q;$$

et nous retiendrons l'équation que voici:

$$(\gamma) \quad \frac{d^2Y}{du^2} + \mu Y \frac{dZ}{du} + \mu Z \frac{dY}{du} = R.$$

De l'équation (β) , on tire par intégration:

$$(\delta) \quad \frac{dZ}{du} + \frac{1}{2}\mu(Y^2 - h_2) + \frac{1}{2}\mu Z^2 = \int Q du$$

— $\frac{1}{2}\mu h_2$ étant une constante surabondante, qui doit être déterminée de manière que le développement de $\frac{dZ}{du}$ ne contienne pas de terme constant. Evidemment, la valeur du binôme $Y^2 - h_2$ reste toujours négative.

Dans l'équation (δ), introduisons au lieu de Z une nouvelle fonction, ζ , dont la relation à la première soit:

$$Z = \frac{2}{1 + \zeta} \frac{d\zeta}{\mu du} :$$

il en résultera l'équation

$$(\varepsilon) \quad \frac{d^2\zeta}{du^2} + \left\{ \frac{\mu^2}{4}(Y^2 - h_2) - \frac{1}{2}\mu \int Q du \right\} \zeta = -\frac{\mu^2}{4}(Y^2 - h_2) + \frac{1}{2}\mu \int Q du.$$

Cela posé, nous allons introduire, dans l'équation (γ), la valeur de $\frac{dZ}{du}$ tirée de l'équation (δ), et nous aurons, après avoir remplacé Z par $\frac{2}{1 + \zeta} \frac{d\zeta}{\mu du}$, l'équation que voici:

$$\frac{d^2Y}{du^2} + \frac{2}{1 + \zeta} \frac{d\zeta}{du} \frac{dY}{du} + \left\{ -\frac{1}{2}\mu^2(Y^2 - h_2) - \frac{2}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + \mu \int Q du \right\} Y = R,$$

d'où l'on tire, en admettant:

$$Y = \frac{1}{1 + \zeta} U,$$

la suivante:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{du^2} + \left\{ -\frac{1}{2}\mu^2 \left[\frac{U^2}{(1 + \zeta)^2} - h_2 \right] - \frac{2}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 - \frac{1}{1 + \zeta} \frac{d^2\zeta}{du^2} + \mu \int Q du \right\} U \\ = (1 + \zeta)R, \end{aligned}$$

ou bien, en introduisant la valeur

$$-\frac{1}{1 + \zeta} \frac{d^2\zeta}{du^2} = \frac{\mu^2}{4} \left[\frac{U^2}{(1 + \zeta)^2} - h_2 \right] - \frac{1}{2}\mu \int Q du,$$

celle-ci:

$$(\zeta) \quad \frac{d^2U}{du^2} + \left\{ -\frac{1}{4}\mu^2 \left[\frac{U^2}{(1 + \zeta)^2} - h_2 \right] - \frac{2}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{d\zeta}{du} \right)^2 + \frac{1}{2}\mu \int Q du \right\} U \\ = (1 + \zeta)R.$$

Des deux équations (ε) et (ζ), il faut déduire les deux inconnues ζ et U . Pour lever les difficultés adhérent à cette tâche, voici les démarches les plus convenables.

Au lieu de supposer Q tout connu, admettons maintenant:

$$Q = Q_0 + \zeta R_0$$

et puis:

$$R = R_0 - \zeta R_0 + F,$$

où nous avons désigné par Q_0 et R_0 deux fonctions tout connues dont nous supposons la première du deuxième degré ou bien égale à zéro et la seconde, du premier degré, et par F , une fonction du troisième degré dépendant de U et ζ .

Cela admis, la fonction ζ sera évidemment une quantité du deuxième degré, et si l'on néglige, dans l'équation (ζ), les quantités du quatrième degré, et que l'on suppose tout simplement:

$$F = \beta U^3,$$

il viendra:

$$(\gamma) \quad \frac{d^2 U}{du^2} - \left\{ \frac{1}{4} \mu^2 (U^2 - h_2) + \beta U^2 - \frac{1}{2} \mu \int Q_0 du \right\} U = R_0.$$

Cette équation étant indépendante de ζ , on en déduira une valeur approchée de U , qu'il faut d'abord égaler à la fonction Y .

Ayant trouvé une valeur préalable de Y , on va chercher la fonction ζ en intégrant l'équation (ε) qui, si l'on néglige les termes du quatrième degré, s'écrit ainsi:

$$(\vartheta) \quad \frac{d^3 \zeta}{du^3} - \frac{1}{2} \mu R_0 \zeta = -\frac{\mu^2}{2} Y \frac{dY}{du} + \frac{1}{2} \mu Q_0.$$

Certes, l'intégration de cette équation n'est pas facile, mais on parvient néanmoins, par approximations successives, à l'expression de ζ sans constantes arbitraires, tout ce qu'on demande ici: d'ailleurs, l'équation du troisième ordre se transforme aisément en une autre du deuxième degré qui n'est plus linéaire, mais dont la forme, si l'on néglige un terme du troisième degré, est bien celle de l'équation (α), de sorte qu'on pourrait appliquer, à son intégration, le procédé dont nous avons fait l'exposition précédemment. Mais on peut aussi, en partant de l'équation (ε), déduire directement une nouvelle équation de même nature que l'équation (ζ).

En effet, si nous posons:

$$\zeta = e^{\int \varphi du} - 1,$$

nous aurons de l'équation (ε) celle-ci:

$$\frac{d\varphi}{du} + \varphi^2 + \frac{\mu^2}{4}(Y^2 - h_2) - \frac{1}{2}\mu \int Q du = 0,$$

et puis, par différentiation:

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2\varphi \frac{d\varphi}{du} + \frac{\mu^2}{2} Y \frac{dY}{du} = \frac{1}{2}\mu Q.$$

En éliminant $\frac{d\varphi}{du}$ entre ces deux équations, et en admettant la notation

$$\varphi = \mu y_1,$$

il viendra:

$$\frac{d^2 y_1}{du^2} - \left[\frac{\mu^2}{2}(Y^2 - h_2) + 2\mu^2 y_1^2 - \mu \int Q du \right] y_1 = -\frac{1}{2}\mu Y \frac{dY}{du} + \frac{1}{2} Q,$$

équation qui appartient, évidemment, au type de l'équation (ζ) ou de l'équation (η).

En intégrant l'équation que nous venons de trouver, nous pouvons dans la première approximation négliger Q , de sorte que le second membre soit réduit à:

$$-\frac{1}{2}\mu Y \frac{dY}{du}.$$

S'il s'agit de déterminer des termes élémentaires, la quantité signalée est du troisième ordre et du quatrième degré par rapport aux excentricités, tandis que R_0 est du deuxième ordre et du deuxième degré; en considérant les termes non-élémentaires, la fonction R_0 peut être du premier ordre, mais le produit $\mu Y \frac{dY}{du}$ est alors du quatrième ordre par rapport aux forces troublantes. On a donc obtenu une vraie approximation.

De la relation

$$\log(1 + \zeta) = \mu \int y_1 du$$

on déduit aisément:

$$Z = \frac{2}{1 + \zeta} \frac{d\zeta}{\mu du} = 2y_1,$$

de sorte qu'on aura:

$$y = Y + 2y_1.$$

Evidemment, cette formule n'est qu'approximative; elle donne cependant, dans la plupart des cas, le résultat d'une exactitude suffisante.

10. Pour la transformation de l'équation (α) du numéro précédent, voici une autre méthode.

Faisons d'abord:

$$(23) \quad y = \frac{3U}{\mu \left(1 + \int U du\right)},$$

ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{3}{\mu \left(1 + \int U du\right)} \frac{dU}{du} - \frac{3U^2}{\mu \left(1 + \int U du\right)^2}, \\ \frac{d^2y}{du^2} &= \frac{3}{\mu \left(1 + \int U du\right)} \frac{d^2U}{du^2} - \frac{9}{\mu \left(1 + \int U du\right)^2} U \frac{dU}{du} + \frac{6U^3}{\mu \left(1 + \int U du\right)^3}, \\ y \frac{dy}{du} &= \frac{9}{\mu^2 \left(1 + \int U du\right)^2} U \frac{dU}{du} - \frac{9U^3}{\mu^2 \left(1 + \int U du\right)^3}. \end{aligned}$$

En introduisant ces expressions dans l'équation dont j'ai parlé, il s'ensuit immédiatement:

$$(24) \quad \frac{d^2U}{du^2} - \frac{U^3}{\left(1 + \int U du\right)^2} = \frac{\mu}{3} \left(1 + \int U du\right) (Q + R).$$

Telle est l'équation transformée remplaçant l'équation (α): on l'utilisera avantageusement, mais seulement, bien entendu, en adoptant l'hypothèse que $\int U du$ s'exprime au moyen d'un développement convergent, et que cette intégrale soit inférieure à l'unité. Mais en tous cas, l'emploi de la transformation indiquée se montre avantageuse s'il ne s'agit que

d'une solution approchée et que la somme d'un nombre fini de termes représentant l'intégrale dont nous avons parlé, ait une valeur suffisamment petite.

Concevons encore le cas où la fonction R renferme un terme de la forme

$$-yf(u),$$

$f(u)$ étant une fonction toute connue de u .

En désignant la somme des termes restants dans R par \bar{R} , nous aurons facilement de l'équation (24) la suivante:

$$(25) \quad \frac{d^2U}{du^2} + f(u)U - U^3 = \frac{u}{3} \left(1 + \int Udu \right) (Q + \bar{R}) \\ - 2U^3 \int Udu - \dots,$$

résultat dont nous pourrions faire application prochainement. Dans le cas des termes élémentaires, la fonction U est, le plus souvent, une quantité du deuxième ordre et l'intégrale $\int Udu$ du premier.

11. La manière d'opérer la transformation de l'équation fondamentale que nous venons de poursuivre dans les nos 5—7, se remplace avantageusement par plusieurs autres procédés, dont voici un qui mérite d'être examiné soigneusement.

Reprenons comme point de départ l'équation (4), à savoir, si nous admettons toujours la notation $\xi = \frac{2K}{\pi} x$, celle-ci:

$$(4') \quad \frac{d^2V_1}{dx^2} + k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1 - k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1^3 \\ - \frac{2}{3} k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1^3 = -X - Q.$$

Or, au lieu de faire disparaître le terme du premier degré, nous nous proposons seulement de débarrasser les termes du deuxième et du troisième degré des facteurs trigonométriques. On peut donc tout-d'abord mettre:

$$\varphi_{0.1} = 0,$$

ce qui entraîne immédiatement:

$$\varphi_{1.0} = 0.$$

Maintenant, en adoptant l'expression

$$\begin{aligned} V_1 = z - \{4q(1 - 11q^2) \sin 2x + 4q^2 \sin 4x\}z^2 \\ - \left\{ \frac{8}{3}q(1 - 16q^2) \cos 2x + \frac{20}{3}q^2 \cos 4x \right\}z^3 \\ - \{8q(1 - 11q^2) \cos 2x + 4q^2 \cos 4x\}z \frac{dz}{dx} \\ + \{8q(1 - 16q^2) \sin 2x + 10q^2 \sin 4x\}z^2 \frac{dz}{dx}, \end{aligned}$$

nous aurons:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dx} = \frac{dz}{dx} - \{8q(1 - 11q^2) \cos 2x + 16q^2 \cos 4x\}z^2 \\ + \left\{ \frac{16}{3}q(1 - 16q^2) \sin 2x + \frac{80}{3}q^2 \sin 4x \right\}z^3 \\ + \{8q(1 - 11q^2) \sin 2x + 8q^2 \sin 4x\}z \frac{dz}{dx} \\ + \{8q(1 - 16q^2) \cos 2x + 20q^2 \cos 4x\}z^2 \frac{dz}{dx} \\ - \{8q(1 - 11q^2) \cos 2x + 4q^2 \cos 4x\} \left\{ \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + z \frac{d^2z}{dx^2} \right\} \\ + \{8q(1 - 16q^2) \sin 2x + 10q^2 \sin 4x\} \left\{ 2z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + z^2 \frac{d^2z}{dx^2} \right\}, \\ \frac{d^2V_1}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} + \{16q(1 - 11q^2) \sin 2x + 64q^2 \sin 4x\}z^2 \\ + \left\{ \frac{32}{3}q(1 - 16q^2) \cos 2x + \frac{320}{3}q^2 \cos 4x \right\}z^3 \\ + \{24q(1 - 11q^2) \sin 2x + 24q^2 \sin 4x\} \left\{ \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + z \frac{d^2z}{dx^2} \right\} \\ + \{24q(1 - 16q^2) \cos 2x + 60q^2 \cos 4x\} \left\{ 2z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + z^2 \frac{d^2z}{dx^2} \right\} \\ - \{8q(1 - 11q^2) \cos 2x + 4q^2 \cos 4x\} \left\{ 3 \frac{dz}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} + z \frac{d^3z}{dx^3} \right\} \\ + \{8q(1 - 16q^2) \sin 2x + 10q^2 \sin 4x\} \left\{ 2 \left(\frac{dz}{dx} \right)^3 + 6z \frac{dz}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} + z^2 \frac{d^3z}{dx^3} \right\}, \end{aligned}$$

et encore:

$$V_1^2 = z^2 - \{8q(1 - 11q^2) \sin 2x + 8q^2 \sin 4x\}z^3 \\ - \{16q(1 - 11q^2) \cos 2x + 8q^2 \cos 4x\}z^2 \frac{dz}{dx} - \dots,$$

$$V_1^3 = z^3 - \dots$$

Ensuite, si nous établissons l'expression

$$k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1 = k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot z \\ + \left\{ -32q^2 - \dots + \frac{16q}{1-q^2} \cos 2x + \frac{32q^2}{1-q^4} \cos 4x + \dots \right\} \\ \times \left\{ \begin{array}{l} -\{4q(1 - 11q^2) \sin 2x + 4q^2 \sin 4x\}z^2 \\ -\left\{ \frac{8}{3}q(1 - 16q^2) \cos 2x + \frac{20}{3}q^2 \cos 4x \right\}z^3 \\ -\{8q(1 - 11q^2) \cos 2x + 4q^2 \cos 4x\}z \frac{dz}{dx} \\ +\{8q(1 - 16q^2) \sin 2x + 10q^2 \sin 4x\}z^2 \frac{dz}{dx} \end{array} \right\} \\ = k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot z \\ - \left\{ \frac{64}{3}q^2(1 - 15q^2) + \frac{320}{3}q^4 \right\}z^3 - 64q^2 z \frac{dz}{dx} \\ + \{160q^3 \sin 2x - 32q^2 \sin 4x\}z^2 \\ - \left\{ \frac{32}{3}q^3 \cos 2x + \frac{64}{3}q^2 \cos 4x \right\}z^3$$

ainsi que celles-ci:

$$k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sin 2 \operatorname{am} \xi \cdot V_1^2 = -\{64q^2(1 - 12q^2) + 128q^4\}z^3 \\ + \{16q(1 - q^2) \sin 2x + 32q^2 \sin 4x\}z^2 \\ - \{192q^3 \cos 2x - 64q^2 \cos 4x\}z^3,$$

$$\frac{2}{3}k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi. V_1^3 = - \left\{ \frac{64}{3}q^2 + \frac{128}{3}q^4 \right\} z^3 \\ + \left\{ \frac{32}{3}q(1+q^2) \cos 2x + \frac{64}{3}q^2 \cos 4x \right\} z^3,$$

et que nous les introduisons dans l'équation (4'), il en résultera :

$$\frac{d^2z}{dx^2} + k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi. z + (64q^2 - 384q^4)z^3 - 64q^2 z \frac{dz}{dx} \\ + \{24q(1 - 11q^2) \sin 2x + 24q^2 \sin 4x\} \left\{ \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z \frac{d^2z}{dx^2} \right\} \\ + \{24q(1 - 16q^2) \cos 2x + 60q^2 \cos 4x\} \left\{ 2z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2 \frac{d^2z}{dx^2} \right\} \\ - \{8q(1 - 11q^2) \cos 2x + 4q^2 \cos 4x\} \left\{ 3 \frac{dz}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} + z \frac{d^3z}{dx^3} \right\} \\ + \{8q(1 - 16q^2) \sin 2x + 10q^2 \sin 4x\} \left\{ 2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 6z \frac{dz}{dx} \frac{d^2z}{dx^2} + z^2 \frac{d^3z}{dx^3} \right\} \\ = -X - Q.$$

En multipliant, pour égaler à l'unité le coefficient de $\frac{d^2z}{dx^2}$, l'équation précédente par :

$$\left\{ 1 + [24q(1 - 11q^2) \sin 2x + 24q^2 \sin 4x]z \right. \\ \left. + [24q(1 - 16q^2) \cos 2x + 60q^2 \cos 4x]z^2 \right. \\ \left. - [24q(1 - 11q^2) \cos 2x + 12q^2 \cos 4x] \frac{dz}{dx} \right. \\ \left. + [48q(1 - 16q^2) \sin 2x + 60q^2 \sin 4x]z \frac{dz}{dx} \right\}^{-1} \\ = 1 - [24q(1 - 11q^2) \sin 2x + 24q^2 \sin 4x]z \\ + [24q(1 - 11q^2) \cos 2x + 12q^2 \cos 4x] \frac{dz}{dx} \\ + [12.24q^2 - 24q(1 - 40q^2) \cos 2x - 12.29q^2 \cos 4x]z^2,$$

on obtiendra:

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & \frac{d^2 z}{dx^2} + k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi . z + 64q^2 z^3 - 384q^4 z^3 \\
 & + 128q^2 z \frac{dz}{dx} - 288q^2 z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \\
 & - [12.16.48q^4 + 12.16q^2(1 - 39q^2) + 12.16.29q^4] z^3 \\
 & + 24q \sin 2x \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \\
 & - \{ [8q(1 - 11q^2) \cos 2x + 4q^2 \cos 4x] z + 96q^2 z \frac{dz}{dx} \\
 & - [8q(1 - 16q^2) \sin 2x + 10q^2 \sin 4x] z^2 \} \frac{d^3 z}{dx^3} \\
 & = - \left\{ 1 - 24q \sin 2x . z + 24q \cos 2x \frac{dz}{dx} \right. \\
 & \quad \left. - 24q \cos 2x . z^2 + \dots \right\} (X + \Omega),
 \end{aligned}$$

ou, afin de faciliter au lecteur la vérification du calcul, on a mis en évidence, les différentes parties dont est composé le coefficient de z^3 .

Il nous reste encore à remplacer, dans l'équation que nous venons de trouver, la troisième dérivée de z par sa valeur, autant qu'elle est connue.

Dans ce but, écrivons:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3 z}{dx^3} &= - k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi . z - 24q \sin 2x \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - Z \\
 &= \{ 32q^2 - 16q(1 + q^2) \cos 2x - 32q^2 \cos 4x \} z - 24q \sin 2x \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - Z,
 \end{aligned}$$

où la partie essentielle de Z est égale à $X + \Omega$.

De l'équation précédente, on tire par différentiation:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 z}{dx^4} &= \{ 32q(1 + q^2) \sin 2x + 128q^2 \sin 4x \} z - 48q \cos 2x \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \\
 &+ \{ 32q^2 - 16q \cos 2x - 32q^2 \cos 4x \} \frac{dz}{dx} + \frac{dZ}{dx};
 \end{aligned}$$

et maintenant, si l'on introduit cette valeur de $\frac{d^2 z}{dx^2}$ dans l'équation (26), les termes du deuxième ordre de la forme

$$\text{const. } z^3$$

se détruisent, et on obtient l'équation que voici:

$$\begin{aligned} (27) \quad & \frac{d^2 z}{dx^2} + k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi \cdot z - 8960q^4 z^3 - 96q^2 z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 192q^2 z \frac{dz}{dx} \\ & = -24q \sin 2x \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \\ & \quad - \{ [8q(1 - 11q^2) \cos 2x + 4q^2 \cos 4x] z \\ & \quad \quad - [8q(1 - 16q^2) \sin 2x + 10q^2 \sin 4x] z^2 \} \frac{dZ}{dz} \\ & \quad - \left\{ 1 - 24q \sin 2x \cdot z + 24q \cos 2x \cdot \frac{dz}{dx} - 24q \cos 2x \cdot z^2 + \dots \right\} (X + \Omega). \end{aligned}$$

Cherchons maintenant les termes provenant de la fonction X en adoptant, pour cette fonction, la valeur que nous avons donnée par l'équation (18).

En ne demandant que les termes horistiques du deuxième ordre par rapport à q , nous aurons, en vertu de l'expression mentionnée, en y portant les valeurs précédentes de $V_1, \frac{dV_1}{dx}, \dots$

$$\begin{aligned} -X = & -32pq^2 \sin 4x \\ & -64pq^2 z + \left(\frac{128}{3} - \frac{128}{3}\right) pq^2 z^3 + 128pq^2 z^3 \\ & + 128pq^2 z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \\ & - 16pq \sin 2x \frac{dz}{dx} - 32pq \cos 2x \cdot z \frac{dz}{dx} + 32pq \sin 2x \cdot z^2 \frac{dz}{dx} + \dots \end{aligned}$$

Il suffit également de mettre:

$$Z = + 16pq \sin 2x \frac{dz}{dx} + 32pq \cos 2x \cdot z \frac{dz}{dx} + Z_1,$$

Z_1 étant une fonction renfermant les termes non considérés dans nos calculs actuels, et qui donneraient naissance à des termes horistiques d'un ordre ou degré plus élevés que le deuxième ou le troisième.

En différentiant l'expression signalée de Z , et ne retenant que les termes dépendant de $\cos 2x$ et de $\frac{dz}{dx}$, nous aurons:

$$\frac{dZ}{dx} = 32pq \cos 2x \frac{dz}{dx} + 32pq \cos 2x \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dZ_1}{dx}.$$

Maintenant, si nous introduisons cette expression dans l'équation (27), et que nous multiplions l'expression précédente de X par

$$1 - 24q \sin 2x.z + \dots,$$

ce qu'exige l'équation (27), l'équation dont il s'agit prendra la forme

$$\begin{aligned} (28) \quad & \frac{d^2z}{dx^2} + \left\{ h^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi + 64pq^2 \right\} z + 16pq \sin 2x \frac{dz}{dx} \\ & - (128pq^2 + 8960q^4)z^3 + (192 + 64p)q^2z \frac{dz}{dx} - (96 - 384p)q^2z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \\ & = - 24q \sin 2x \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - 32pq \cos 2x.z \frac{dz}{dx} + 32pq \sin 2x.z^2 \frac{dz}{dx} \\ & - 8q \cos 2x.z \frac{dZ_1}{dx} \\ & - \{1 - 24q \sin 2x.z + \dots\} Q, \end{aligned}$$

où l'on a négligé le terme périodique du second ordre.

On pourrait se contenter du résultat que nous venons d'obtenir; cependant, pour garder plus d'homogénéité dans les termes périodiques restants, je préfère de chercher une autre équation ne contenant plus le terme de la forme

$$pq \cos 2x.z \frac{dz}{dx}.$$

Dans ce but, je fais la substitution de

$$z = y + 8pq \cos 2x \cdot y \frac{dy}{dx}$$

et des expressions en découlant, à savoir:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dy}{dx} - 16pq \sin 2x \cdot y \frac{dy}{dx} + 8pq \cos 2x \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} \right\}, \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} - 32pq \cos 2x \cdot y \frac{dy}{dx} - 32pq \sin 2x \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} \right\} \\ &\quad + 8pq \cos 2x \left\{ 3 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{d^3y}{dx^3} \right\}. \\ \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 &= \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 32pq \sin 2x \cdot y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \dots, \\ z \frac{dz}{dx} &= y \frac{dy}{dx} + \dots, \end{aligned}$$

dans l'équation (28), et j'obtiens:

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 - 32pq \sin 2x \cdot y + 24pq \cos 2x \frac{dy}{dx} \right\} \frac{d^2y}{dx^2} \\ &+ 16pq \sin 2x \frac{dy}{dx} + \left\{ k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi + 64pq^2 \right\} y - (128pq^2 + 8960q^4) y^3 \\ &+ (192q^2 + 128pq^2 - 128p^2q^2) y \frac{dy}{dx} - 96q^2 y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ &= -24q \sin 2x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 32pq \sin 2x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 32pq \sin 2x \cdot y^2 \frac{dy}{dx} \\ &\quad - 8pq \cos 2x \cdot y \frac{d^3y}{dx^3} - \{ 1 - 24q \sin 2x \cdot y + \dots \} \Omega. \end{aligned}$$

En multipliant ce résultat, dans lequel on peut supprimer le terme dépendant de $\frac{dZ_1}{dx}$, par $\left\{ 1 - 32pq \sin 2x \cdot y + 24pq \cos 2x \frac{dy}{dx} \right\}^{-1}$, et en y portant l'expression

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -16q \cos 2x \frac{dy}{dx} - 32pq \cos 2x \frac{dy}{dx} - 48q \cos 2x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 64pq \cos 2x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2,$$

on obtient finalement:

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & \frac{d^2y}{dx^2} + 16pq \sin 2x \frac{dy}{dx} + \left\{ k^2 \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 \cos 2 \operatorname{am} \xi + 64pq^2 \right\} y \\
 & - \{ 128pq^2 + 8960q^4 \} y^3 + 64(3-2p)q^2y \frac{dy}{dx} - 32(3-6p+8p^2)q^2y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\
 & = -8(3-4p)q \sin 2x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 32pq \sin 2x \cdot y^2 \frac{dy}{dx} \\
 & - (1 - 24q \sin 2x \cdot y + \dots) Q.
 \end{aligned}$$

Dans cette équation, qu'on peut regarder comme le résultat essentiel de nos transformations, il faut remarquer que le coefficient de y^3 ne contient pas tous les termes du quatrième ordre; mais les termes qui y manquent encore, ne peuvent pas, excepté dans un cas spécial, annuler ce coefficient, vu qu'ils sont multipliés par le nombre irrationnel p ou bien par son carré.

12. Si l'on avait introduit, dans l'équation (27), au lieu de la valeur de X qu'on a empruntée à l'équation (18), un terme du type

$$A_1 \sin(2\lambda_1 v + s_1 T),$$

on aurait obtenu des termes dépendant d'un nouveau module, et notamment de nouveaux termes horistiques. En désignant par q_1 la valeur de q qu'on déduit avec A_1, λ_1 et s_1 , les nouveaux termes horistiques sont, pour la plus grande part, multipliés par $q^2 q_1^2$ et par q_1^4 ; ils sont en conséquence du quatrième ordre. Le nombre de ces termes étant très grand, on pourrait croire que leur influence l'emportât sur les termes que nous venons de mettre en évidence. Cependant, ayant calculé ces termes par différentes méthodes, je me suis convaincu que leur somme n'aura d'autre effet que d'agrandir le coefficient négatif de y^3 : le résultat que nous venons de donner par l'équation (29), n'aurait donc pas changé quant à la forme. Or, dans le mémoire présent, il ne s'agit pas de donner des formules parfaitement préparées à l'usage des calculateurs, mais seulement de désigner les méthodes d'obtenir la solution absolue du problème des trois corps, tel qu'il se présente dans notre système planétaire. Voilà la raison pourquoi je me suis dispensé, pour le moment,

de communiquer mes recherches, d'ailleurs assez laborieuses, sur la totalité des termes horistiques; mais, j'ai pris cette résolution encore par un autre motif, dont voici l'explication.

Dans les calculs numériques exécutés d'après les règles qu'on pourrait déduire en intégrant l'équation (29) ou une autre équation de la même nature, il n'est pas du tout indispensable de connaître, dès l'abord, tout le coefficient d'un terme horistique; il suffit, au contraire, d'en avoir évalué la plus grande partie, disons un peu plus que la moitié. Cela se comprend aisément par un exemple, dans lequel on suivra la marche des approximations.

Supposons à cet égard qu'on ait l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (\nu^2 - \delta)y = -a_1 \sin H_1 - a_2 \sin H_2 - \dots,$$

où les H sont donnés au moyen de la formule générale

$$H_n = \sigma_n x + b_n,$$

et où δ désigne une quantité positive ou négative, dont la valeur absolue est inférieure à ν^2 . Supposons encore que la série des a soit convergente.

Cela étant, on voit immédiatement que si l'on commence par intégrer l'équation

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} - \nu^2 y_0 = -a_1 \sin H_1 - a_2 \sin H_2 - \dots,$$

on aura tout d'abord le résultat approximatif

$$y_0 = \frac{a_1}{\sigma_1^2 + \nu^2} \sin H_1 + \frac{a_2}{\sigma_2^2 + \nu^2} \sin H_2 + \dots,$$

développement qui est nécessairement convergent. Dans la deuxième approximation, supposons qu'on connaisse déjà une valeur approchée de δ , désignons-la par δ_0 , et procédons à intégrer l'équation

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - \nu^2 y_1 = -\frac{a_1 \delta_0}{\sigma_1^2 + \nu^2} \sin H_1 - \frac{a_2 \delta_0}{\sigma_2^2 + \nu^2} \sin H_2 - \dots,$$

d'où il résulte:

$$y_1 = \frac{a_1 \delta_0}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^2} \sin H_1 + \frac{a_2 \delta_0}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^2} \sin H_2 + \dots,$$

Selon l'hypothèse, le rapport $\frac{\delta_0}{\nu^2}$ est inférieur à l'unité; donc, les fractions $\frac{\delta_0}{\sigma_1^2 + \nu^2}, \frac{\delta_0}{\sigma_2^2 + \nu^2}, \dots$ sont à *fortiori* moindres que l'unité. Il s'ensuit de là que le développement de y_1 sera aussi convergent.

Admettons que $\delta_0 + \delta_1$ soit une valeur plus approchée de δ que ne l'est δ_0 seul: or, nous allons intégrer l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_2}{dx^2} - \nu^2 y_2 = & - a_1 \left[\frac{\delta_0(\delta_0 + \delta_1)}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^2} + \frac{\delta_1}{\sigma_1^2 + \nu^2} \right] \sin H_1 \\ & - a_2 \left[\frac{\delta_0(\delta_0 + \delta_1)}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^2} + \frac{\delta_1}{\sigma_2^2 + \nu^2} \right] \sin H_2 + \dots \end{aligned}$$

En continuant ces opérations, on trouvera dans la quatrième approximation:

$$\begin{aligned} y_2 = & a_1 \left[\frac{\delta_0(\delta_0 + \delta_1)(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^4} + \frac{\delta_1(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^3} + \frac{\delta_0 \delta_1}{(\sigma_1^2 + \nu^2)^2} + \frac{\delta_2}{\sigma_1^2 + \nu^2} \right] \sin H_1 \\ & + a_2 \left[\frac{\delta_0(\delta_0 + \delta_1)(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^4} + \frac{\delta_1(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^3} + \frac{\delta_0 \delta_2}{(\sigma_2^2 + \nu^2)^2} + \frac{\delta_2}{\sigma_2^2 + \nu^2} \right] \sin H_2 \\ & + \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Maintenant, si l'on établit la somme de tous ces développements convergents, on aura, ce qu'on voit facilement, un résultat également convergent et identique à celui-ci:

$$y = \frac{a_1}{\sigma_1^2 + \nu^2 - \delta} \sin H_1 + \frac{a_2}{\sigma_2^2 + \nu^2 - \delta} \sin H_2 + \dots;$$

seulement, les divers coefficients de la somme dont nous avons parlé constituent certaines transformations des coefficients qui entrent dans l'expression dernièrement signalée.

Quant à la forme développée des coefficients, il se comprend aisément qu'elle admet des développements convergents, pourvu que la suite des approximations successives par lesquelles s'obtient δ , c'est à dire, la série

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \dots$$

soit convergente.

Puis, des conditions

$$\frac{\delta_0}{\nu^2} < 1 ; \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \dots,$$

on conclut la convergence de la suite

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

Mais on voit encore de ce que nous venons de mettre en évidence, qu'il est favorable de commencer les approximations par une valeur de ν^2 un peu plus forte, de façon à obtenir une valeur positive de δ_0 . De cette manière, on trouverait les principales parties des divers coefficients des développements de y_0, y_1, \dots toujours positives, ainsi qu'un agrégat de termes positifs, quand on établit la somme des divers y_n . Evidemment, les différents termes dont la somme constitue un coefficient de la fonction complète y , seront de la sorte les plus petits possibles. Ainsi, une valeur positive de δ , c'est à dire une valeur un peu trop grande de ν^2 , sera, en effet, plus avantageuse à la convergence des approximations successives, que ne l'est une valeur négative de δ ou bien, ce qui revient au même, une valeur de ν^2 , inférieure à la valeur effective. Voilà aussi pourquoi l'emploi de l'équation (29) est préférable à celui de l'équation (17).

§ 7. *Equations linéaires.*

1. Par les transformations dont nous venons de faire l'exposition dans les deux paragraphes précédents, on a les moyens de ramener les équations différentielles de la mécanique céleste à des types plus simples, notamment à celui-ci :

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{dv^2} + Zz - \beta_3 z^3 = X,$$

où l'on a désigné par Z et X deux fonctions connues, dont la première se trouve très souvent réduite à un coefficient constant, et par β_3 , une quantité toujours constante. Cependant, puisqu'il est inutile d'effectuer la réduction complète, ce qui serait aussi extrêmement difficile si non

impossible, on doit supposer la fonction X , non plus tout à fait connue, mais seulement quant à ses termes principaux, ceux-ci étant donnés par l'expression

$$- A_n \frac{\sin}{\cos} \left\{ G_n \right\}^1$$

La solution définitive ne s'obtient donc qu'au moyen d'approximations successives, dont la convergence n'est, cependant, soumise à aucun doute, pourvu que la partie de X qu'on a négligée d'abord soit suffisamment petite.

Mais l'intégration de l'équation proposée est néanmoins très pénible: elle ne s'opère aisément que dans deux cas particuliers. D'abord, si la fonction Z est remplacée par une constante et que la fonction X ne contienne qu'un seul terme, l'équation dont il s'agit s'intègre sans trop de peine, comme nous l'avons vu dans le Chap. I. Puis, s'il était possible de réduire notre équation à la forme linéaire, la forme du résultat serait telle qu'on en obtiendrait l'intégrale d'une manière aisée. Dans ce qui suit, nous allons examiner comment une telle réduction s'opère.

La principale objection qu'on peut faire contre l'emploi d'une équation linéaire comme point de départ des approximations successives est celle qu'il donne naissance à des expressions dont les dénominateurs peuvent acquérir des valeurs très petites et même évanouissantes. En effet, ayant formé l'équation linéaire tout simplement en supprimant le terme $-\beta_3 z^3$, on tombera dans une solution souvent assez inexacte et quelque fois même tout à fait inadmissible; et une telle équation ne fournira pas de fondement pour démontrer la convergence du résultat.

Mais si, au contraire, on opère la réduction à la forme linéaire en tenant compte, de la manière qu'on va apprendre prochainement, du terme en z^3 , l'intégrale de l'équation transformée a la propriété de n'excéder jamais certaines limites. Les difficultés adhérent à l'emploi d'une équation linéaire où l'on a négligé entièrement les quantités du troisième degré, ayant ainsi disparu, on aura l'occasion fréquente de considérer des équations linéaires d'une forme spéciale.

Concevons maintenant la réduction de l'équation (1) à la forme linéaire.

¹ Nous admettons toujours: $G_n = 2\lambda_n v + 2B_n$, λ_n ayant une valeur quelconque.

2. En désignant par ϕ une fonction encore indéterminée, nous allons introduire, dans l'équation (1), une nouvelle inconnue au lieu de z , en admettant la relation

$$z = \frac{y}{1 + \phi}.$$

Nous aurons de la sorte:

$$(2) \quad \frac{1}{1 + \phi} \frac{d^2 y}{dv^2} - \frac{2}{(1 + \phi)^2} \frac{d\phi}{dv} \frac{dy}{dv} + \left\{ \frac{2}{(1 + \phi)^3} \left(\frac{d\phi}{dv} \right)^2 - \frac{1}{(1 + \phi)^2} \frac{d^2 \phi}{dv^2} + \frac{Z}{1 + \phi} \right\} y - \beta_3 \frac{y^3}{(1 + \phi)^3} = X,$$

et, si nous déterminons la fonction ϕ de manière à satisfaire à la condition

$$(3) \quad \frac{d^2 \phi}{dv^2} = (1 + \phi) \nu^2 - \beta_3 \frac{y^2}{(1 + \phi)},$$

ν^2 étant une constante, nous aurons, pour déterminer la fonction y , l'équation que voici:

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dv^2} - \frac{2}{1 + \phi} \frac{d\phi}{dv} \frac{dy}{dv} + \left\{ Z - \nu^2 + \frac{2}{(1 + \phi)^2} \left(\frac{d\phi}{dv} \right)^2 \right\} y = (1 + \phi) X.$$

Cela étant, si nous admettons qu'on sache intégrer l'équation

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dv^2} + \{Z - \nu^2\} y = (1 + \phi) X,$$

le second membre étant supposé connu, nous aurons immédiatement, en négligeant d'abord la quantité ϕ , une valeur préalable de la fonction y .

Avec l'expression de y qu'on obtient ainsi, on va chercher la fonction ϕ au moyen de l'équation (3); à cette occasion on doit aussi déterminer le coefficient ν^2 de manière que la fonction ϕ soit dépourvue de tout terme constant.

Dans ce but, écrivons l'équation (3) de la manière suivante:

$$(3') \quad \frac{d^2 \phi}{dv^2} - 2\nu^2 \phi = \nu^2 - \beta_3 y^2 - (\nu^2 - \beta_3 y^2) \phi - \beta_3 y^2 \phi^2 + \dots,$$

d'où il s'entend immédiatement que la demi-somme des carrés de tous les

coefficients que renferme l'expression de y , cette demi-somme multipliée par β_3 constitue la partie essentielle de la constante ν^2 .

En effet, si nous admettons que l'intégrale de l'équation (5), les constantes arbitraires étant égalées à zéro, soit exprimée par le développement

$$y = x_1 \cos G_1 + x_2 \cos G_2 + \dots,$$

il s'ensuivra:

$$y^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots) + \frac{1}{2}x_1^2 \cos 2G_1 + \frac{1}{2}x_2^2 \cos 2G_2 + \dots \\ + x_1 x_2 \{\cos(G_1 - G_2) + \cos(G_1 + G_2)\} + \dots$$

En introduisant cette expression dans l'équation précédente, on obtient tout d'abord les résultats approchés que voici:

$$\nu^2 = \frac{1}{2}\beta_3(x_1^2 + x_2^2 + \dots), \\ \psi = \frac{\frac{1}{2}\beta_3 x_1^2}{16\lambda_1^2 + 2\nu^2} \cos 2G_1 + \frac{\frac{1}{2}\beta_3 x_2^2}{16\lambda_2^2 + 2\nu^2} \cos 2G_2 + \dots \\ + \frac{\beta_3 x_1 x_2}{4(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 2\nu^2} \cos(G_1 - G_2) + \frac{\beta_3 x_1 x_2}{4(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 2\nu^2} \cos(G_1 + G_2) + \dots,$$

développement dont la convergence est évidente, si la série

$$x_1 + x_2 + \dots,$$

chaque terme étant pris avec le signe positif, jouit de cette propriété.

Ayant établi ces résultats, il sera facile de parvenir aux expressions algébriques des coefficients x , toutes les fois qu'on sait intégrer l'équation (5).

En admettant d'abord que la fonction Z soit réduite à une constante, $-g$, et en désignant par H la demi-somme

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots),$$

de sorte qu'on ait:

$$\nu^2 = \beta_3 H,$$

les expressions des coefficients demandés seront visiblement celles-ci:

$$x_1 = \frac{A_1}{4\lambda_1^2 + g + \beta_3 H},$$

$$x_2 = \frac{A_2}{4\lambda_2^2 + g + \beta_3 H},$$

.

Maintenant, si nous établissons l'expression de la somme des carrés des divers x , il en résulte immédiatement l'équation

$$(6) \quad H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_1^2}{[4\lambda_1^2 + g + \beta_3 H]^2} + \frac{A_2^2}{[4\lambda_2^2 + g + \beta_3 H]^2} + \dots \right\},$$

d'où s'obtient toujours une valeur réelle et positive de H , pourvu que la série mise entre les crochets soit convergente.

La fonction H déterminée de la sorte, je l'appellerai *fonction horistique*, vu que sa présence dans le coefficient de y rend la solution de l'équation linéaire convergente, et quant à sa valeur, limitée; en conséquence, une équation linéaire renfermant, dans le coefficient de l'inconnue même, une fonction horistique, sera appelée *équation horistique*. Mais je désignerai plus généralement par fonction horistique la somme des puissances paires des coefficients x_1, x_2, \dots , multipliées par des coefficients positifs quelconques.

Donc, par la réduction d'une équation contenant des termes horistiques, on est parvenu à une équation horistique.

La fonction H supposée réelle, il sera facile de démontrer la convergence de la série

$$x_1 + x_2 + \dots$$

Dans ce but, reprenons l'équation

$$x_n = \frac{A_n}{4\lambda_n^2 + g + \beta_3 H},$$

et posons-y:

$$4\lambda_n^2 + g + \beta_3 H - \frac{1}{2}\beta_3 x_n^2 = P,$$

la quantité P est donc indépendante de x_n ; on obtient ainsi:

$$\frac{1}{2}\beta_3 x_n^3 + P x_n = A_n,$$

d'où l'on conclut que la valeur de x_n , quel que soit P , ne surpasse jamais la limite

$$2 \sqrt[3]{\frac{A_n}{\beta_3}}.$$

Or, les A formant une série dont la convergence égale celle d'une progression géométrique, il s'ensuit que la convergence de la série dont il s'agit est au moins aussi rapide que celle de

$$\frac{2}{\sqrt[3]{\beta_3}} \{\sqrt[3]{A_1} + \sqrt[3]{A_2} + \sqrt[3]{A_3} + \dots\}.$$

La recherche sur la convergence de notre développement est donc ramenée à celle de la réalité de la fonction horistique H .

3. En supposant, dans l'équation (6), une valeur positive de g , les termes du second membre forment nécessairement une série convergente; donc, la valeur de H sera réelle et positive.

Mais si, par contre, la valeur de g était négative, la discussion de l'équation (6) deviendrait délicate.

En entamant cette discussion, nous posons, pour abrégé,

$$\vartheta_n = 4\lambda_n^2 + g;$$

puis, nous omettons l'indice 3 attaché à β , après quoi l'équation (6) s'écrira ainsi

$$\nu^2 = \frac{1}{2}\beta \left\{ \frac{A_1^2}{(\vartheta_1 + \nu^2)^2} + \frac{A_2^2}{(\vartheta_2 + \nu^2)^2} + \dots \right\}.$$

En utilisant toujours la notation

$$x_n = \frac{A_n}{\vartheta_n + \nu^2},$$

ce qui entraîne l'expression

$$\nu^2 = -\vartheta_n + \frac{A_n}{x_n},$$

nous aurons:

$$\frac{A_n}{x_n} = \vartheta_n + \frac{1}{2}\beta\{x_1^2 + x_2^2 + \dots\}.$$

Maintenant, si nous supposons fini le nombre des termes de X dans l'équation (5), on trouve toujours une valeur réelle et positive de la somme

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_{n+1}^2 + \dots + x_m^2; \quad m > n:$$

donc, en désignant cette somme par

$$\frac{2}{\beta}(P_m^{(n)} - \vartheta_n)$$

le coefficient $P_m^{(n)}$ dans l'équation

$$A_n = P_m^{(n)}x_n + \frac{1}{2}\beta x_n^3$$

est une quantité réelle et finie.

Puis, si l'on désigne par Z_n , sans tenir compte du signe, la valeur maximum que peut acquérir x_n pour une valeur réelle quelconque de $P_m^{(n)}$, on aura, quelles que soient les valeurs des quantités $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$, ainsi que celles des coefficients A_1, A_2, \dots, A_m , la comparaison

$$Z_n \subseteq \sqrt[3]{\frac{A_n}{\beta}},$$

d'où il s'ensuit:

$$\vartheta_n + \nu^2 \subseteq \beta^{\frac{1}{3}} A_n^{\frac{2}{3}},$$

expression qui montre que la valeur minimum de $\vartheta_n + \nu^2$ ne peut s'abaisser au-dessous d'une quantité du même ordre que $\beta^{\frac{1}{3}} A_n^{\frac{2}{3}}$.

En supposant toujours que les A_n forment une suite de quantités, décroissant comme les termes d'une progression géométrique, il s'ensuit de ce que je viens d'établir, que les coefficients x_1, x_2, \dots, x_m , et *a fortiori*, leurs carrés $x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2$ diminuent dans le rapport indiqué: et comme cette thèse est également vraie quelque grand que soit le nombre m , nous en concluons la convergence de la série

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots,$$

c'est-à-dire, que P_∞ est une quantité réelle et finie. Il nous reste à montrer qu'on peut toujours, au moyen d'approximations successives, s'approcher de la valeur exacte de ν^2 .

Dans ce but, désignons par ν_m^2 ce que devient ν^2 , lorsqu'on ne considère, dans l'équation (6), que les m premiers termes du second membre, et cherchons à déterminer la différence

$$\nu_{m+1}^2 - \nu_m^2 = \xi_{m+1},$$

dont la valeur s'obtient au moyen de l'équation

$$\begin{aligned} \xi_{m+1} = & -\beta \xi_{m+1} \left\{ \frac{A_1^2}{(\vartheta_1 + \nu_m^2)(\vartheta_1 + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2} \right. \\ & + \frac{A_2^2}{(\vartheta_2 + \nu_m^2)(\vartheta_2 + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2} + \dots + \frac{A_m^2}{(\vartheta_m + \nu_m^2)(\vartheta_m + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2} \left. \right\} \\ & - \frac{1}{2} \beta \xi_{m+1}^2 \left\{ \frac{A_1^2}{(\vartheta_1 + \nu_m^2)^2(\vartheta_1 + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2} \right. \\ & + \frac{A_2^2}{(\vartheta_2 + \nu_m^2)^2(\vartheta_2 + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2} + \dots + \frac{A_m^2}{(\vartheta_m + \nu_m^2)^2(\vartheta_m + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2} \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} \beta \frac{A_{m+1}^2}{(\vartheta_{m+1} + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2}. \end{aligned}$$

En vertu des considérations précédentes, on conclut facilement que les rapports

$$\frac{\xi_{m+1}}{\vartheta_1 + \nu_m^2}, \quad \frac{\xi_{m+1}}{\vartheta_2 + \nu_m^2}, \quad \dots, \quad \frac{\xi_{m+1}}{\vartheta_m + \nu_m^2}$$

sont de petites quantités, lesquelles, dans une première approximation, il sera permis de négliger auprès de l'unité. L'équation que nous venons de signaler, s'écrit donc de la manière suivante:

$$\left\{ 1 + \frac{\beta A_1^2}{(\vartheta_1 + \nu_m^2)^3} + \frac{\beta A_2^2}{(\vartheta_2 + \nu_m^2)^3} + \dots + \frac{\beta A_m^2}{(\vartheta_m + \nu_m^2)^3} \right\} \xi_{m+1} = \frac{1}{2} \frac{\beta A_{m+1}^2}{(\vartheta_{m+1} + \nu_m^2 + \xi_{m+1})^2},$$

d'où l'on tire toujours une valeur réelle de ξ_{m+1} qui s'évanouit avec A_{m+1} .

Après avoir repris l'équation primitive, il ne reste plus aucune difficulté à obtenir une valeur plus exacte de ξ_{m+1} .

De la manière indiquée, on parvient à déterminer les $\xi_{m+2}, \xi_{m+3}, \dots$ sans autres inconvénients que ceux qui tiennent à la peine d'un long calcul numérique.

Ajoutons ici la remarque que tous les calculs précédents auraient été plus compliqués mais quant à leur portée et nature pas essentiellement changés, si l'équation (1) avait contenu les termes

$$Z_1 \frac{dz}{dv} - \beta_2 z \left(\frac{dz}{dv} \right)^2,$$

Z_1 étant une fonction connue de v . Je ne tiens pas, cependant, opportun d'entrer dans le détail y relatif.

4. Considérons maintenant le cas plus compliqué où la fonction Z n'a plus une valeur constante, mais désigne une fonction connue de v . En désignant par α une constante, nous supposons encore la fonction dont il s'agit telle, que si l'on met:

$$Z = \alpha + X,$$

l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Xy = 0$$

soit connue.

Admettons d'abord le développement

$$y = \psi_0 z + \psi_1 \frac{dz}{dx} + \psi_2 \frac{d^2z}{dx^2} + \dots,$$

d'où l'on tire par différentiation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum \left\{ \frac{d^2\psi_n}{dx^2} \frac{d^n z}{dx^n} + 2 \frac{d\psi_n}{dx} \frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + \psi_n \frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}} \right\}.$$

Si nous portons ces expressions dans l'équation

$$(7) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + (X + \alpha)y = 0,$$

et que nous désignons par p une constante encore à notre disposition, il en résultera l'équation de condition que voici:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \frac{d^3 \Psi_0}{dx^2} z + 2 \frac{d\Psi_0}{dx} \frac{dz}{dx} + \Psi_0 \frac{d^2 z}{dx^2} \\
 & + \frac{d^3 \Psi_1}{dx^2} \frac{dz}{dx} + 2 \frac{d\Psi_1}{dx} \frac{d^2 z}{dx^2} + \Psi_1 \frac{d^3 z}{dx^3} \\
 & + \frac{d^3 \Psi_2}{dx^2} \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{d\Psi_2}{dx} \frac{d^3 z}{dx^3} + \Psi_2 \frac{d^4 z}{dx^4} \\
 & + \dots \\
 & + (X + \alpha + p) \left\{ \Psi_0 z + \Psi_1 \frac{dz}{dx} + \dots \right\} - p \left\{ \Psi_0 z + \Psi_1 \frac{dz}{dx} + \dots \right\} = 0:
 \end{aligned}$$

évidemment, les termes multipliés par p s'annulent identiquement.

Pour satisfaire à cette condition, établissons avant tout l'équation

$$(9) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + (\alpha + p)z = 0,$$

ce qui donne:

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + (\alpha + p) \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + (\alpha + p) \frac{d^2 z}{dx^2} = 0,$$

.....

et encore:

$$z = -\frac{1}{\alpha + p} \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{(\alpha + p)^2} \frac{d^4 z}{dx^4} = \dots,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\alpha + p} \frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{1}{(\alpha + p)^2} \frac{d^5 z}{dx^5} = \dots$$

Avec ces relations, on tire immédiatement de l'équation (8) une autre, où ont déjà disparu certains termes; puis si l'on met:

$$p = p_1 + p_2 + \dots,$$

et que l'on introduise, dans l'équation dont il s'agit,

$$pz = -\frac{p_1}{\alpha + p} \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{p_2}{(\alpha + p)^2} \frac{d^4 z}{dx^4} - \dots,$$

$$p \frac{dz}{dx} = -\frac{p_1}{\alpha + p} \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{p_2}{(\alpha + p)^2} \frac{d^5 z}{dx^5} - \dots,$$

on parviendra, en égalant à zéro les coefficients de z , de $\frac{dz}{dx}$, ..., aux conditions que voici:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Psi_0}{dx^2} + X \Psi_0 = 0, \\ \frac{d^2 \Psi_1}{dx^2} + X \Psi_1 = -2 \frac{d \Psi_0}{dx}, \\ \frac{d^2 \Psi_2}{dx^2} + X \Psi_2 = -2 \frac{d \Psi_1}{dx} - \frac{p_1}{a+p} \Psi_0, \\ \frac{d^2 \Psi_3}{dx^2} + X \Psi_3 = -2 \frac{d \Psi_2}{dx} - \frac{p_1}{a+p} \Psi_1, \\ \frac{d^2 \Psi_4}{dx^2} + X \Psi_4 = -2 \frac{d \Psi_3}{dx} - \frac{p_1}{a+p} \Psi_2 + \frac{p_3}{(a+p)^2} \Psi_0, \\ \dots \end{array} \right.$$

La forme de toutes ces équations est évidemment telle qu'on peut, selon la supposition, déterminer les diverses fonctions Ψ_0, Ψ_1, \dots sans avoir recours à des approximations. Cependant, la partie tout connue de chaque équation étant formée au moyen des fonctions précédentes, on ne saurait parvenir aux intégrales demandées que de proche en proche. Par ce fait, la marche à suivre pour obtenir ces diverses fonctions est indiquée. Mais il faut qu'on fasse encore une observation.

L'intégration d'une équation quelconque du système (10) introduit, dans l'intégrale, deux arbitraires: ces constantes étant, en effet, surabondantes, on les déterminera de façon que l'expression de l'intégrale soit exempte de termes contenant la variable indépendante hors des signes trigonométriques. Mais puisque, avec ces constantes seules, on ne saurait éviter tout terme de la nature mentionnée, on a introduit une suite d'autres constantes, à savoir p_1, p_3, \dots qu'on va choisir de manière à atteindre le but proposé.

5. Supposons qu'on ait trouvé, par l'intégration de la première des équations (10), l'expression

$$\Psi_0 = c_1 f_1(x) + c_2 [h x f_1(x) + f_2(x)],$$

c_1 et c_2 étant les deux arbitraires, et h une constante tellement choisie que l'équation

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = 1$$

subsiste, dans laquelle on a désigné par y_1 et y_2 les deux intégrales particulières de l'équation proposée, de sorte qu'on ait:

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = hx f_1(x) + f_2(x).$$

Avec ces valeurs, la condition établie s'exprime de la manière suivante:

$$f_2(x) \frac{df_1(x)}{dx} - f_1(x) \frac{df_2(x)}{dx} - h(f_1(x))^2 = -1,$$

ou bien, si l'on admet la notation

$$f_2(x) = \varphi(x) f_1(x),$$

ainsi:

$$h = \frac{1}{(f_1(x))^2} \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

En substituant, dans la formule (16) du § 2, l'expression précédente de h , il est facile de parvenir au résultat que voici:

$$(11) \quad y = c_1 f_1(x) + c_2 f_1(x)[hx + \varphi(x)] \\ + f_1(x) \int \frac{dx}{(f_1(x))^2} \int f_1(x) W dx,$$

formule qui peut devenir d'un usage très fréquent.

Maintenant, si nous désignons par W_n les divers membres de droite des équations (9), on aura:

$$y_n = c_1^{(n)} f_1(x) + c_2^{(n)} f_1(x)[hx + \varphi(x)] \\ + f_1(x) \int \frac{dx}{(f_1(x))^2} \int f_1(x) W_n dx.$$

Evidemment, les constantes p_n entrant dans les expressions des divers W doivent être déterminées de manière à débarrasser les produits $f_1(x)W_n$ de tout terme constant: par le choix convenable des constantes $c_1^{(n)}$ et $c_2^{(n)}$, on pourra ensuite faire disparaître, dans la formule précédente, le terme constant ainsi que celui qui est formé par une constante multipliée par x . Seulement, si n est égal à zéro — cas dans lequel on doit, tout d'abord, annuler la constante $c_2^{(0)}$ — l'autre constante, à savoir $c_1^{(0)}$, peut être choisie à volonté. En effet, ayant attribué à la constante $c_1^{(0)}$ une valeur quelconque, cela n'exerce qu'une modification des arbitraires introduites par l'intégration de l'équation (9). Egalons donc, dès le début, la constante $c_1^{(0)}$ à l'unité, ce qui donne:

$$\Psi_0 = f_1(x).$$

Ayant ainsi déterminé les fonctions Ψ_n , admettons la notation

$$\alpha + p = -\nu^2,$$

et nous aurons, en intégrant l'équation (9),

$$z = C_1 e^{\nu x} + C_2 e^{-\nu x},$$

C_1 et C_2 étant les deux constantes effectivement arbitraires.

Maintenant, si nous nous rappelons le développement supposé de y , il sera facile de parvenir au résultat que voici:

$$(12) \quad y = C_1 \{ \Psi_0 + \nu \Psi_1 + \nu^2 \Psi_2 + \dots \} e^{\nu x} \\ + C_2 \{ \Psi_0 - \nu \Psi_1 + \nu^2 \Psi_2 - \dots \} e^{-\nu x}.$$

En admettant les notations

$$(13) \quad \begin{cases} P = \Psi_0 + \nu^2 \Psi_2 + \nu^4 \Psi_4 + \dots \\ Q = \Psi_1 + \nu^2 \Psi_3 + \nu^4 \Psi_5 + \dots, \end{cases}$$

la formule précédente s'écrit ainsi:

$$(12') \quad y = C_1 (P + \nu Q) e^{\nu x} + C_2 (P - \nu Q) e^{-\nu x};$$

et, si nous posons:

$$y_1 = \beta_1 (P + \nu Q) e^{\nu x}; \quad y_2 = \beta_2 (P - \nu Q) e^{-\nu x},$$

β_1 et β_2 étant deux constantes que nous allons déterminer de manière à avoir:

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = 1,$$

nous aurons les termes à ajouter à la formule (12'), afin qu'elle donne l'intégrale de l'équation complète

$$(7') \quad \frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha + X)y = W,$$

au moyen de l'expression

$$(14) \quad -\beta_1\beta_2(P + \nu Q)e^{\nu x} \int W(P - \nu Q)e^{-\nu x} dx \\ + \beta_1\beta_2(P - \nu Q)e^{-\nu x} \int W(P + \nu Q)e^{\nu x} dx.$$

Pour arriver à une relation d'où s'obtient le produit $\beta_1\beta_2$ — car nous n'avons aucun moyen immédiat pour séparer les deux facteurs — voici un procédé.

En introduisant, dans l'équation

$$\frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = \frac{1}{y_1^2},$$

les valeurs de y_1 et de y_2 , il viendra:

$$\frac{d\left(\frac{P - \nu Q}{P + \nu Q} e^{-2\nu x}\right)}{dx} = \frac{1}{\beta_1\beta_2 (P + \nu Q)^2};$$

on tire de là, après avoir effectué la différentiation,

$$(15) \quad 2\nu\beta_1\beta_2 \left\{ P^2 - \nu^2 Q^2 - Q \frac{dP}{dx} + P \frac{dQ}{dx} \right\} = -1.$$

Par cette relation, il sera visible que, si l'on y introduit les valeurs de P et Q qu'on va trouver prochainement, le produit $\beta_1\beta_2$ soit égal à $-\frac{1}{2\nu}$.

En supposant que W , P et Q soient donnés au moyen d'expressions ne contenant que des termes périodiques ou des constantes, on se convaincra que chaque diviseur introduit par le procès d'intégration, prendra la forme

$$\sigma^2 + \nu^2,$$

σ étant le coefficient de x dans l'argument du terme dont il s'agit. Donc, si α renferme une fonction horistique des coefficients dans y_1 , fonction qui entre aussi dans l'expression de ν^2 , et que W , P et Q soient donnés au moyen de séries, convergeant comme des progressions géométriques, le résultat qu'on obtient, en effectuant le calcul d'après la formule (14), sera aussi convergent.

6. Ayant établi les expressions de y_1 et de y_2 au moyen des fonctions P et Q , on pourrait se proposer de déterminer, d'une manière directe, ces fonctions sans passer par les fonctions Ψ_0, Ψ_1, \dots . Si dans ce but, on introduit, dans l'équation (7), après y avoir écrit X au lieu de $\alpha + X$, l'expression de y_1 ou bien celle de y_2 , il sera aisé d'en tirer une nouvelle équation qui se divise immédiatement en deux autres, pourvu qu'on égale séparément à zéro les termes dépendant des puissances paires de ν , ainsi que ceux qui contiennent comme facteur une puissance impaire de cette quantité. Ces deux équations, les voici:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d^2 P}{dx^2} + 2\nu^2 \frac{dQ}{dx} + (X + \nu^2)P = 0, \\ \frac{d^2 Q}{dx^2} + 2 \frac{dP}{dx} + (X + \nu^2)Q = 0. \end{cases}$$

Le système des deux équations linéaires que nous venons de déduire, se remplace facilement par une seule équation du deuxième ordre qui, toutefois, n'est plus linéaire. En effet, si nous posons:

$$\begin{aligned} P + \nu Q &= (1 + \phi) e^{\nu \int \frac{dx}{(1+\phi)^2} - \nu x}, \\ P - \nu Q &= (1 + \phi) e^{-\nu \int \frac{dx}{(1+\phi)^2} + \nu x}, \end{aligned}$$

toutes les deux équations (16) seront satisfaites par la valeur de ϕ qui résulte en intégrant l'équation

$$(17) \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\nu^2}{(1+\phi)^3} + X(1+\phi) = 0.$$

Nous reviendrons plus tard à cette équation qui, si on la développe suivant les puissances de ϕ , renfermera des termes horistiques, et qui en conséquence admet une solution uniformément convergente.

Mais, en procédant ainsi, on trouverait les fonctions P et Q affectées des exponentielles, réelles ou imaginaires, vu que les puissances paires de ϕ renferment nécessairement des termes constants. Bien que l'inconvénient qui en résulte ne soit pas, en effet, très grave, cherchons néanmoins à déterminer, s'il est possible, les P et Q autrement, mais de manière à ne contenir, outre un terme constant, que des termes trigonométriques dépendant des arguments qui se trouvent déjà dans la fonction X , ainsi que leurs multiples.

Il ne s'agit toutefois que d'une solution particulière du système (16) laquelle s'obtient quelquefois très aisément au moyen d'approximations.

Posons dans l'équation (7), en écrivant toujours X au lieu de $\alpha + X$,

$$(18) \quad y = (1 + \varphi)e^{\nu x + \int z dx},$$

où l'on a désigné par φ et z deux nouvelles fonctions que nous allons déterminer de façon à remplir certaines conditions. On obtient de la sorte l'équation

$$(19) \quad \frac{1}{1+\varphi} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2(\nu+z)}{1+\varphi} \frac{d\varphi}{dx} + \nu^2 + 2\nu z + z^2 + \frac{dz}{dx} + X = 0.$$

Or, puisqu'une des fonctions φ et z est entièrement arbitraire, on pourrait établir la condition

$$z = \frac{\nu}{(1+\varphi)^2} - \nu,$$

ce qui nous amènerait à l'équation (17) de sorte que φ fût égal à ϕ ; mais cherchons d'autres modes pour déterminer les deux fonctions φ et z .

D'abord, si l'on exprime ces deux fonctions au moyen d'une troisième, en admettant les relations

$$1 + \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}},$$

$$z = \nu\eta,$$

φ est encore égal à ψ , et il sera facile d'obtenir l'équation que voici:

$$(20) \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \eta} \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 - 2\nu^2(1 + \eta)^3 - 2X(1 + \eta) = 0,$$

résultat qui n'est au fond qu'une simple transformation de l'équation (17).

Evidemment, après avoir développé, suivant les puissances de η , l'équation que nous venons de trouver, elle renfermera des termes horistiques, et on en pourrait, par conséquent, tirer une solution uniformément convergente. En déterminant, en même temps, la constante ν de manière que la fonction η ne contienne aucun terme constant, nous aurons les fonctions P et Q exprimées au moyen des formules

$$P + \nu Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}} e^{\nu \int \eta dx},$$

$$P - \nu Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}} e^{-\nu \int \eta dx},$$

qui permettent de déterminer les deux fonctions dont il s'agit de façon qu'elles ne dépendent que des arguments qui figurent dans η ou bien déjà dans X . Donc, si l'on suppose que la fonction X ne contienne, outre un terme constant, que des termes périodiques, il sera toujours possible de parvenir, après avoir obtenu une solution particulière de l'équation (20), à l'intégrale générale de l'équation (7).

Mais on pourra aussi opérer la détermination des deux fonctions φ et z de la manière suivante.

Si l'on établit l'équation

$$(21) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} - l^2\varphi = -X + l^2 - \varphi X,$$

l^2 étant une constante encore à notre disposition, il restera, pour déterminer la fonction z , celle-ci:

$$(22) \quad \frac{dz}{dx} + 2 \left(\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{1 + \varphi} + \nu \right) z + \frac{2\nu \frac{d\varphi}{dx}}{1 + \varphi} + \nu^2 + l^2 + z^2 = 0;$$

et on en conclut la formule suivante:

$$z = - \frac{e^{-2\nu x}}{(1 + \varphi)^2} \int (1 + \varphi)^2 e^{2\nu x} \left\{ \frac{2\nu \frac{d\varphi}{dx}}{1 + \varphi} + \nu^2 + l^2 + z^2 \right\} dx,$$

qui sert à calculer z de proche en proche.

En considérant la relation

$$\int (1 + \varphi) \frac{d\varphi}{dx} e^{2\nu x} dx = \left(\frac{1}{2} (1 + \varphi)^2 - c \right) e^{2\nu x} - 2\nu \int \left(\frac{1}{2} (1 + \varphi)^2 - c \right) e^{2\nu x} dx,$$

où l'on a désigné par c une constante surabondante qu'il faut déterminer de manière à avoir le facteur

$$\frac{1}{2} (1 + \varphi)^2 - c$$

exempt du terme constant, l'expression précédente de z se transforme aisément en celle-ci:

$$(23) \quad z = - 2\nu \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{(1 + \varphi)^2} \right) - \frac{e^{-2\nu x}}{(1 + \varphi)^2} \int \left\{ (\nu^2 + l^2 + z^2)(1 + \varphi)^2 - 4\nu^2 \left(\frac{1}{2} (1 + \varphi)^2 - c \right) \right\} e^{2\nu x} dx.$$

Mais avant d'aller plus loin, cherchons à déterminer la fonction φ par intégration de l'équation (21).

7. Supposons qu'on ait:

$$X = a_0 + a_1 \cos H_1 + a_2 \cos H_2 + \dots + a_n \cos H_n,$$

les a_1, a_2, \dots, a_n étant des coefficients positifs, et les arguments H_n , donnés au moyen de la formule générale

$$H_n = \sigma_n x + b_n.$$

Ensuite, posons:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots$$

et déterminons la fonction φ_0 au moyen de l'équation

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} - l^2\varphi_0 = -X + a_0.$$

Il s'ensuivra:

$$\varphi_0 = \frac{a_1}{\sigma_1^2 + l^2} \cos H_1 + \frac{a_2}{\sigma_2^2 + l^2} \cos H_2 + \dots + \frac{a_n}{\sigma_n^2 + l^2} \cos H_n.$$

Maintenant, en formant le produit $\varphi_0 X$, et en ne considérant que la partie constante y contenue, la condition que le second membre de l'équation (21) soit dépourvu du terme constant, s'établit immédiatement, tant qu'elle est indépendante des termes qu'on va obtenir dans les approximations suivantes. La condition dont nous parlons s'exprime au moyen de la relation

$$(a) \quad l^2 = a_0 + \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{\sigma_1^2 + l^2} + \frac{1}{2} \frac{a_2^2}{\sigma_2^2 + l^2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{a_n^2}{\sigma_n^2 + l^2}.$$

Evidemment, si la valeur de a_0 est positive, l'équation que nous venons d'établir, admet toujours une racine réelle et positive.

Mais, si, au contraire, a_0 a une valeur négative, distinguons alors deux cas: l'un où l'on a:

$$-a_0 + \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2} \frac{a_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{a_n^2}{\sigma_n^2} > 0,$$

et l'autre où l'inégalité

$$-a_0 + \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2} \frac{a_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{a_n^2}{\sigma_n^2} < 0$$

subsiste.

Dans le premier cas, il y a évidemment une valeur de l^2 , entre 0 et $+\infty$, qui satisfait l'équation (a): en effet, la somme

$$-l^2 - a_0 + \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{\sigma_1^2 + l^2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{a_n^2}{\sigma_n^2 + l^2},$$

qui, selon l'hypothèse, est positive, si l^2 est disparu, reste toujours con-

tinue, autant que l^2 est positif, et prend une valeur négative lorsque l^2 acquiert une valeur suffisamment grande.

Dans le second cas, écrivons $-l^2$ au lieu de l^2 , et désignons par σ la plus petite des quantités $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. Or, la valeur de

$$l^2 - a_0 + \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{\sigma_1^2 - l^2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{a_n^2}{\sigma_n^2 - l^2}$$

étant négative, si l^2 est égal à zéro, et continue, l^2 ayant une valeur entre 0 et σ^2 , nous en concluons qu'il y a une valeur de l^2 , entre 0 et σ^2 , satisfaisant l'équation (a), mais il en peut aussi résulter une racine, à peu près égale à a_0 . L'équation dont il s'agit a donc toujours au moins une racine réelle, qui peut aussi être considérée comme une petite quantité, pourvu que les coefficients a_0, \dots, a_n ainsi que les $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ aient de petites valeurs.

Après avoir ainsi déterminé une valeur approchée de l^2 et en conséquence trouvé une expression approchée de φ_0 , passons aux approximations suivantes. On aura d'abord la fonction φ_1 en intégrant l'équation

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - l^2\varphi_1 = l^2 - \varphi_0 X.$$

Dans le courant des approximations successives, il y a lieu de faire une remarque importante. En établissant le produit $\varphi_1 X$, il en pourra déjà résulter une partie constante qui se rejoint à l'équation (a), et qui, par conséquent, tend à modifier un peu le résultat qu'on venait de trouver dès le début. Cela arrive toutes les fois que quelques-uns des arguments H_n sont des multiples de quelques-uns des autres H_n . Mais en continuant les approximations par la voie indiquée, on retrouvera, du moins dans l'expression de φ_2 , et dans celles des fonctions suivantes, les arguments d'où dépendent les termes de la fonction φ_0 . Il s'ensuit que les approximations consécutives nécessitent des incréments à ajouter au résultat qu'on a obtenu d'abord relativement à l^2 . Que ces incréments tendent à augmenter la valeur positive de l^2 , ou bien à diminuer sa valeur négative, cela se comprend par le fait que tous les nouveaux termes entrant dans la fonction φ sont positifs, pourvu qu'on y fasse l^2 égal à zéro. De cette circonstance, on conclut aussi la convergence des approximations successives, d'où découle immédiatement celle

du résultat final, vu que chaque approximation ne donne qu'un nombre fini de termes. En effet, plus la valeur positive de l^2 est sensible, moins s'agrandit φ par le procès d'intégration: et puisque les approximations successives tendent à agrandir la valeur positive de l^2 , on finira par avoir le rapport $\frac{X_n}{l^2}$, — X_n étant égal à $l^2 - \varphi_{n-1}X$, moindre que l'unité. A partir de là, les résultats des approximations consécutives diminuent en raison hypergéométrique. Rien n'empêche cependant que le résultat ne converge, la valeur de l^2 étant négative; seulement, on ne saurait, d'une manière aisée, mettre cette convergence en lumière sans avoir recours aux valeurs spéciales des constantes entrant dans la fonction X .

Ayant ainsi obtenu le résultat que la fonction φ s'exprime au moyen d'une série trigonométrique, uniformément convergente et exempte du terme constant, revenons à la formule (23).

8. Si nous désignons par h_2, h_4, \dots les parties constantes de $\varphi^2, \varphi^4, \dots$, et que nous ne considérons que la partie exempte du signe \int , nous aurons tout de suite l'équation de condition que voici:

$$\frac{1}{2} - c(1 + 3h_2 + 5h_4 + \dots) = 0,$$

d'où s'obtient la valeur

$$c = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}h_2 \pm \dots;$$

ensuite, après avoir admis le développement

$$z = z_0 + z_1 + \dots,$$

on peut établir l'expression suivante, qui donne approximativement la fonction z ,

$$z_0 = -2\nu\varphi.$$

Cependant, la structure algébrique des résultats qu'on pourrait obtenir en étendant plus loin l'application de l'équation (23), devenant fort compliquée, je préfère l'emploi de l'équation (22) comme base des recherches sur la fonction z . En mettant dans la dite équation,

$$z = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{1 + \varphi} + \zeta,$$

nous aurons immédiatement:

$$\frac{d\zeta}{dx} + 2\nu\zeta + \zeta^2 + \nu^2 + l^2 - \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{1 + \varphi} = 0,$$

ou bien, en vertu de l'équation (21), celle-ci:

$$(24) \quad \frac{d\zeta}{dx} + 2\nu\zeta + \zeta^2 + \nu^2 + X = 0.$$

Si nous remplaçons ζ par deux nouvelles fonctions, U et V , de manière à avoir:

$$\zeta = U + \nu V,$$

nous pouvons les déterminer de façon que chacune d'elles ne dépende que des puissances paires de ν . De la sorte, si ν était imaginaire, les deux fonctions dont il s'agit deviendraient néanmoins réelles.

Par la condition admise, l'équation en ζ se divise dans les deux suivantes:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dx} + 2\nu^2 V + U^2 + \nu^2 V^2 + \nu^2 + X = 0, \\ \frac{dV}{dx} + 2U + 2UV = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire, en différentiant la première, et en remplaçant les premières dérivées de U et de V par leurs valeurs tirées de ces équations elles-mêmes, le résultat

$$(26) \quad \frac{d^2U}{dx^2} - 2XU - 2U^3 - 6\nu^2 U(1 + V)^2 = -\frac{dX}{dx}.$$

Mais la première des équations (25) nous donne:

$$\nu^2(1 + V)^2 = -\frac{dU}{dx} - U^2 - X,$$

de sorte que nous pouvons remplacer l'équation précédente par celle-ci:

$$(26') \quad \frac{d^2U}{dx^2} + 4XU + 6U\frac{dU}{dx} + 4U^3 = -\frac{dX}{dx}.$$

Cette équation du troisième degré se transforme aisément en une

équation linéaire du troisième ordre, du reste bien connue: en effet, si l'on introduit la fonction χ au moyen de la relation

$$U = \frac{1}{2} \frac{\frac{d\chi}{dx}}{1 + \chi},$$

il résultera:

$$(27) \quad \frac{d^3\chi}{dx^3} + 4X \frac{d\chi}{dx} + 2(1 + \chi) \frac{dX}{dx} = 0,$$

équation qui s'écrit aussi de la manière suivante:

$$(1 + \chi) \frac{d^3\chi}{dx^3} + \frac{d\chi}{dx} \frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{d\chi}{dx} \frac{d^2\chi}{dx^2} + 4(1 + \chi) \frac{d\chi}{dx} X + 2(1 + \chi)^2 \frac{dX}{dx} = 0.$$

On en tire immédiatement une intégrale, à savoir:

$$(27') \quad (1 + \chi) \frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + 2(1 + \chi)^2 X = -2\gamma^2,$$

$2\gamma^2$ étant l'arbitraire introduite par l'intégration.

Ayant trouvé la solution d'une des équations (26), (26'), (27) ou (27'), la difficulté principale de notre tâche est surmontée, vu que la fonction V , encore indéterminée, s'obtient au moyen de la formule très simple:

$$\begin{aligned} V &= e^{-2\int U dx} (\text{const.} - e^{2\int U dx}) \\ &= \frac{\text{const.}}{1 + \chi} - 1. \end{aligned}$$

En introduisant cette valeur de V , ainsi que celle de U exprimée par χ , dans la première des équations (25), nous retrouverons tout facilement l'équation (27'), et il en résultera simultanément la valeur

$$\text{const.} = \frac{\gamma}{\nu}.$$

Mais, on pourrait aussi chercher la fonction V d'une manière directe. Dans ce but, nous tirons de la seconde des équations (25) la suivante

$$\frac{d^2V}{dx^2} + 2(1 + V) \frac{dU}{dx} + 2U \frac{dV}{dx} = 0;$$

en introduisant dans la première des équations (25), au lieu de U , la valeur $-\frac{1}{2} \frac{\frac{dV}{dx}}{1+V}$, nous retrouvons l'équation (20), excepté que V aura pris la place de η . Nous en concluons l'égalité

$$\eta = V.$$

Egalement, il sera facile d'établir une relation simple entre la fonction χ et celle que nous avons désignée, un peu plus haut, par ϕ . En effet, si nous admettons:

$$1 + \phi = \sqrt{1 + \chi},$$

on retrouvera l'équation (17), à condition toutefois qu'on ait:

$$\gamma = \nu.$$

Nous retomberons donc dans la formule déjà établie

$$V = \eta = \frac{1}{(1 + \phi)^2} - 1.$$

Maintenant, puisqu'on a:

$$U = \frac{\frac{d\phi}{dx}}{1 + \phi},$$

on arrivera immédiatement au résultat

$$z = -\frac{\frac{d\phi}{dx}}{1 + \phi} + \frac{\frac{d\phi}{dx}}{1 + \phi} + \nu\eta,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \int z dx &= \nu \int \eta dx + \log \frac{1 + \phi}{1 + \phi} \\ &= \nu \int \eta dx + \phi - \phi - \frac{1}{2}(\phi^2 - \phi^2) + \frac{1}{3}(\phi^3 - \phi^3) + \dots \end{aligned}$$

La différence $\phi - \phi$ qui entre dans la formule signalée, s'obtient directement en vertu d'une équation différentielle du second ordre que nous allons déduire maintenant.

En supposant ϕ moindre que l'unité, l'équation (17) s'écrit de la manière suivante:

$$(17') \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} + [X - 3\nu^2]\phi + 6\nu^2\phi^2 - 10\nu^2\phi^3 + \dots = -X - \nu^2;$$

la différence entre cette équation et l'équation (21) nous donne immédiatement:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2(\phi - \varphi)}{dx^2} + [X - 3\nu^2](\phi - \varphi) \\ & = -l^2 - \nu^2 + (3\nu^2 - l^2)\varphi - 6\nu^2\phi^2 + 10\nu^2\phi^3 + \dots \end{aligned}$$

Mais puisqu'on a:

$$\phi = \phi - \varphi + \varphi; \quad \phi^2 = (\phi - \varphi)^2 + 2\varphi(\phi - \varphi) + \varphi^2; \quad \dots,$$

l'équation précédente se met sous la forme qui voici:

$$\begin{aligned} (28) \quad & \frac{d^2(\phi - \varphi)}{dx^2} + [X - 3\nu^2 + 12\nu^2\varphi - 30\nu^2\varphi^2 + \dots](\phi - \varphi) \\ & + 6\nu^2(\phi - \varphi)^2 - 10\nu^2(\phi - \varphi)^3 + \dots \\ & = -l^2 - \nu^2 + (3\nu^2 - l^2)\varphi - 6\nu^2\varphi^2 + \dots \end{aligned}$$

Il est visible par là que la détermination de la différence $\phi - \varphi$ s'opère, à peu près, de la même manière que celle de la fonction ϕ ; l'introduction de la fonction φ paraît donc inutile. Néanmoins, si le second membre de l'équation (28) est très petit, la différence $\phi - \varphi$ deviendra aussi très petite, de sorte que les approximations conduisant à l'intégrale particulière de cette équation convergent rapidement: dans ce cas, l'emploi de ladite équation est à préférer à celui de l'équation (17), vu que la fonction φ s'obtient, par l'intégration de l'équation (21), d'une manière relativement facile.

9. A ce qui concerne l'intégration des diverses équations qui se sont présentées, l'une après l'autre, dans les nos 6 et 8, il y a quelques observations à faire.

La plupart des équations dont j'ai parlé renfermant des termes horistiques, on saurait généralement en tirer une solution dont la convergence serait uniforme; cependant, ces termes pouvant s'annuler, certaines conditions étant satisfaites, il paraît nécessaire d'étudier séparément les diffé-

rents cas qui peuvent se présenter. Mais sans entrer dans le détail d'une analyse qui serait d'intérêt, plutôt pour la théorie des équations linéaires que pour les recherches sur les mouvements des planètes, je me borne à envisager le cas où la quantité ν^2 aura disparu ou du moins sera très petite, et encore à traiter l'intégration de l'équation (20).

La condition que ν^2 soit égal à zéro, s'exprime au moyen de la relation

$$-a_0 = \overset{0}{\mathbf{T}}(U^2),$$

a_0 étant toujours le terme constant dans l'expression de \mathbf{X} . Ce résultat, s'obtenant sans calcul en vertu de l'équation (24), peut être vérifié au moyen de l'équation (20).

En effet, si l'on met dans cette équation ν égal à zéro, elle devient:

$$\frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{1+\eta} - \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}{(1+\eta)^2} = 2X;$$

et si l'on y introduit:

$$\frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}}{1+\eta} = -2 \frac{dU}{dx} - 2U \frac{\frac{d\eta}{dx}}{1+\eta},$$

$$\frac{\frac{d\eta}{dx}}{1+\eta} = -2U,$$

la relation mentionnée sera retrouvée, vu que la dérivée $\frac{dU}{dx}$ ne peut contenir aucun terme constant.

Supposons maintenant qu'on ait ν exactement égal à zéro; l'équation (26) devient alors:

$$(26'') \quad \frac{d^2U}{dx^2} - 2XU - 2U^3 = -\frac{dX}{dx},$$

dont le terme horistique $-2U^3$ ne disparaît aucunement.

Admettons le développement

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots,$$

et désignons par g une constante que nous supposons également donnée au moyen d'un développement, à savoir:

$$g = g_{1.0} + g_{2.0} + g_{2.1} + g_{3.0} + g_{3.1} + g_{3.2} + \dots$$

Cela étant, nous allons déterminer les divers U au moyen des équations suivantes:

$$\frac{d^2 U_0}{dx^2} - (2a_0 + g)U_0 = -\frac{dX}{dx},$$

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2} - (2a_0 + g)U_1 = 2(X - a_0)U_0 + 2U_0^3 - g_{1.0}U_0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_2}{dx^2} - (2a_0 + g)U_2 = & 2(X - a_0)U_1 + 6U_0^2 U_1 + 6U_0 U_1^2 + 2U_1^3 \\ & - g_{1.0}U_1 - g_{2.0}U_0 - g_{2.1}U_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_3}{dx^2} - (2a_0 + g)U_3 = & 2(X - a_0)U_2 + 6(U_0^2 + U_1^2)U_2 + 2U_2^3 \\ & + 6U_2^2(U_0 + U_1) + 12U_0 U_1 U_2 \\ & - g_{2.1}U_0 - g_{2.0}U_1 - (g_{1.0} + g_{2.0} + g_{2.1})U_2 \\ & - g_{3.0}U_0 - g_{3.1}U_1 - g_{3.2}U_2 \end{aligned}$$

etc.

Evidemment, les divers g sont introduits afin de rendre les seconds membres des équations établies si petits que possible, mais il ne sera aucunement nécessaire en remplir exactement cette condition. Les g , pouvant ainsi être choisis en quelque sorte à volonté, on peut les déterminer de manière qu'ils soient toujours positifs. En désignant par $h_2^{(0)}$ la partie constante de U_0^2 , par $h_2^{(1)}$ la partie constante de U_1^2 , et ainsi de suite, puis, par $f_{1.0}, f_{2.0}, f_{2.1}, \dots$ des constantes positives, on pourra établir les formules:

$$g_{1.0} = f_{1.0}h_2^{(0)},$$

$$g_{2.0} = f_{2.0}h_2^{(1)}; \quad g_{2.1} = f_{2.1}h_2^{(1)},$$

$$g_{3.0} = f_{3.0}h_2^{(2)}; \quad g_{3.1} = f_{3.1}h_2^{(2)}; \quad g_{3.2} = f_{3.2}h_2^{(2)}$$

etc.;

et, après avoir introduit ces expressions dans les équations ci-dessus, il sera facile de choisir les valeurs les plus convenables des constantes f , g , h , qui en effet doit être dirigé selon les données numériques de l'équation proposée.

Cela fait, on parvient à l'équation

$$(30) \quad g = \sum \frac{N_m}{(\sigma_m^2 + 2a_0 + g)^2} + \sum \frac{N_{n,m}}{(\sigma_m^2 + 2a_0 + g)(\sigma_n^2 + 2a_0 + g)} + \dots,$$

où l'on a désigné par $N_m, N_{m,n}, \dots$ des coefficients positifs constituant une série dont la convergence est celle d'une progression géométrique. De cette équation, il résultera nécessairement une valeur positive de g , ce qui entraîne la convergence de la série

$$U_0 + U_1 + \dots$$

laquelle, en effet, peut être très rapide si g acquiert une valeur considérable.

En supposant que la fonction U soit finalement exprimée par la série

$$U = \lambda_1 \sin H_1 + \lambda_2 \sin H_2 + \dots,$$

les λ étant des coefficients constants, et les H_1 des arguments dont une partie se trouvent déjà dans la fonction X , on aura la condition

$$(31) \quad -a_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots)$$

qui doit être satisfaite, pour avoir le coefficient ν égal à zéro. Il y aurait donc, si ν^2 n'était pas exactement égal à zéro, deux équations, à savoir les équations (30) et (31), qu'il faudrait résoudre simultanément, si l'on voulait en même temps trouver l'intégrale générale de l'équation (26'') et déterminer la valeur de la constante α entrant dans l'équation (7).

Dans le cas envisagé dernièrement, c'est à dire, si ν^2 avait une valeur très petite mais différente de zéro, on pourrait intégrer l'équation (26) au moyen d'approximations successives, mais on trouverait aussi l'intégrale cherchée en utilisant la méthode que nous avons présentée dans le n° 4 du paragraphe présent.

10. Considérons encore l'équation (20) qui paraît s'accommoder le mieux à la détermination de la constante ν^2 .

En développant suivant les puissances de η , on peut d'abord s'arrêter à l'équation que voici:

$$(32) \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} - \left[2X - \frac{3}{2} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 + 6\nu^2 \right] \eta = 2X + 2\nu^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2,$$

où il s'agit de déterminer la constante ν^2 de manière que la fonction η ne renferme que des termes périodiques.

Supposons, comme dans les numéros précédents, qu'on ait:

$$X = a_0 + a_1 \cos H_1 + a_2 \cos H_2 + \dots,$$

et désignons par $-e^2$ la partie constante de $2X - \frac{3}{2} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 + 6\nu^2$, de sorte que e^2 soit donné au moyen de l'expression

$$e^2 = -2a_0 - 6\nu^2 + \frac{3}{2} \overset{\circ}{\Gamma} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2.$$

Cela étant, admettons le développement

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \dots,$$

et remplaçons l'équation posée par le système

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{d^2\eta_0}{dx^2} + e^2\eta_0 = 2(X - a_0), \\ \frac{d^2\eta_1}{dx^2} + e^2\eta_1 = 2X\eta_0 - 2\overset{\circ}{\Gamma}(X\eta_0), \\ \text{etc.;} \end{cases}$$

évidemment, la constante ν^2 doit satisfaire à la condition

$$0 = 2a_0 + 2\nu^2 + \frac{3}{2} \overset{\circ}{\Gamma} \left(\left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right) + 2\overset{\circ}{\Gamma}(\eta X) + \dots,$$

de sorte que cette constante ne figure plus dans le système signalé.

De l'expression précédente de e^2 , on tire maintenant celle-ci:

$$e^2 = 4a_0 + 6\overset{\circ}{\Gamma} \left(\left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right) + 6\overset{\circ}{\Gamma}(\eta X) + \dots,$$

où il faut, pour avoir une valeur préalable de e^2 , introduire, au lieu de η , sa valeur approchée η_0 .

L'intégration de la première des équations (33) nous donne tout de suite:

$$\eta_0 = -\frac{2a_1}{\sigma_1^2 - e^2} \cos H_1 - \frac{2a_2}{\sigma_2^2 - e^2} \cos H_2 - \dots,$$

d'où s'obtient:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbb{T}} \left(\left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 \right) &= \frac{2a_1^2 \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 - e^2)^2} + \frac{2a_2^2 \sigma_2^2}{(\sigma_2^2 - e^2)^2} + \dots, \\ \overset{\circ}{\mathbb{T}} (\eta_0 X) &= -\frac{a_1^2}{\sigma_1^2 - e^2} - \frac{a_2^2}{\sigma_2^2 - e^2} - \dots \end{aligned}$$

Avec ces valeurs, on trouve immédiatement l'équation

$$(34) \quad e^2 = 4a_0 + 6 \left\{ \frac{a_1^2(\sigma_1^2 + e^2)}{(\sigma_1^2 - e^2)^2} + \frac{a_2^2(\sigma_2^2 + e^2)}{(\sigma_2^2 - e^2)^2} + \dots \right\},$$

d'où il résulte toujours une valeur réelle de e^2 .

Ayant déterminé la valeur de e^2 , celle de ν^2 en découle facilement, vu qu'on a:

$$6\nu^2 = -e^2 - 2a_0 + 3 \left\{ \frac{a_1^2 \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 - e^2)^2} + \frac{a_2^2 \sigma_2^2}{(\sigma_2^2 - e^2)^2} + \dots \right\},$$

expression qui se remplace facilement par la suivante:

$$(35) \quad \nu^2 = -a_0 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1^2(\sigma_1^2 + 2e^2)}{(\sigma_1^2 - e^2)^2} + \frac{a_2^2(\sigma_2^2 + 2e^2)}{(\sigma_2^2 - e^2)^2} + \dots \right\}.$$

On voit par là que ν^2 est négatif toutes les fois que a_0 garde une valeur positive, mais que, si a_0 est négatif, ν^2 peut passer par zéro et même devenir positif. Et encore, bien que e^2 soit une fonction de a_0 , ce qui est d'abord visible de l'équation (34), cette dernière quantité entre dans l'expression de ν^2 principalement comme terme additif sans être multiplié par aucun autre facteur que l'unité. En conséquence, si l'on va chercher la solution de l'équation (7), à savoir de celle-ci:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Xy = W,$$

une fonction horistique se trouvant dans a_0 entrera comme terme additif dans les dénominateurs des divers termes dont la somme constitue la fonction y .

En continuant les approximations que nécessite l'intégration de l'équation (20), on se convaincra facilement, soit de la convergence des approximations successives, soit de celle des séries trigonométriques, par lesquelles sont représentés les résultats obtenus dans les diverses approximations.

En effet, les conditions rigoureuses qu'il faut remplir étant celles-ci :

$$\begin{aligned}
 e^2 &= -2a_0 - 6\nu^2 + \frac{3}{2} \overset{\circ}{\Gamma} \left(\frac{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}{1-\eta^2} \right) - 2\nu^2 \overset{\circ}{\Gamma}(\eta^2), \\
 0 &= 2a_0 + 2\nu^2 + \frac{3}{2} \overset{\circ}{\Gamma} \left(\frac{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}{1-\eta^2} \right) + 6\nu^2 \overset{\circ}{\Gamma}(\eta^2) \\
 &\quad + 2 \overset{\circ}{\Gamma}(\eta X) - \frac{3}{2} \overset{\circ}{\Gamma} \left(\frac{\eta \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}{1-\eta^2} \right) - 2\nu^2 \overset{\circ}{\Gamma}(\eta^3),
 \end{aligned}$$

il est immédiatement visible que la valeur de la fonction η ne peut se rapprocher trop de l'unité, vu qu'autrement la valeur de e^2 deviendrait très grande, ce qui rendrait, à son tour, les coefficients x et, en conséquence, toute la fonction η assez petite. S'étant ainsi assuré que les résultats des diverses approximations ne peuvent pas différer beaucoup l'un de l'autre, on ne doutera pas qu'on ne parvienne finalement à un résultat définitif. Néanmoins, les premières approximations pouvant, dans un cas critique, s'écarter plus du résultat vrai qu'il n'était désirable, on pourrait, dans un tel cas, pousser la convergence des approximations successives au moyen de certains artifices de calcul, dont je ne tiens pas, cependant, nécessaire de faire mention ici.

Mais examinons encore la convergence du résultat qu'on obtient dans une certaine approximation.

Dans ce but, écrivons d'abord l'équation (20) ainsi :

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + e^2\eta = -N,$$

où l'on a désigné par N une somme de termes trigonométriques dont les coefficients sont déterminés en vertu des approximations précédentes. N'en mettons en évidence que les parties principales. Les voici :

$$-N = 2X + 2\eta X - \frac{3}{2}\eta\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + 6\nu^2\eta^2 + \dots + \text{partie const.}$$

En substituant, dans cette expression, la valeur de η qu'on a déjà trouvée il en résultera un développement de la forme suivante

$$\begin{aligned} N &= N_1 \cos H_1 + N_2 \cos H_2 + \dots \\ &+ N_{1,1} \cos 2H_1 + N_{2,2} \cos 2H_2 + \dots \\ &+ \dots \\ &+ N_{1,2} \cos (H_1 + H_2) + N_{1,-2} \cos (H_1 - H_2) + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Cela posé, la fonction η s'exprime au moyen du développement

$$\begin{aligned} (36) \quad \eta &= x_1 \cos H_1 + x_2 \cos H_2 + \dots \\ &+ x_{1,1} \cos 2H_1 + x_{2,2} \cos 2H_2 + \dots \\ &+ \dots \\ &+ x_{1,2} \cos (H_1 + H_2) + x_{1,-2} \cos (H_1 - H_2) + \dots \\ &+ \dots, \end{aligned}$$

où les coefficients sont des quantités qu'on obtient au moyen des formules

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{N_n}{\sigma_n^2 - e^2}, \\ x_{m,n} &= \frac{N_{m,n}}{(\sigma_m + \sigma_n)^2 - e^2}; \quad x_{m,-n} = \frac{N_{m,-n}}{(\sigma_m - \sigma_n)^2 - e^2}. \end{aligned}$$

L'équation qui sert à déterminer e^2 est maintenant, à ne tenir compte que des termes du deuxième degré, celle-ci :

$$\begin{aligned}
 e^2 = & 4a_0 + 3\{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \dots \\
 & + 4\sigma_1^2 x_{1.1}^2 + 4\sigma_2^2 x_{2.2}^2 + \dots \\
 & + \dots \\
 & + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 x_{1.2}^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 x_{1.-2}^2 + \dots \\
 & + \dots\} \\
 & + 3\{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots\}.
 \end{aligned}$$

Généralement, la quantité e^2 est sensiblement différente de zéro: si elle est négative, la convergence du développement (36) est immédiatement visible; ne considérons donc que le cas où e^2 est positif. Admettons encore que, si l'on pose:

$$(37) \quad e^2 = 3a_n x_n + 3\sigma_n^2 x_n^2 + M_n,$$

la somme des termes indépendants de x_n , que nous avons désignée par M_n soit une quantité positive.

Cela étant, l'expression par laquelle est donné le coefficient x_n , devient:

$$x_n = \frac{N_n}{\sigma_n^2 - 3a_n x_n - 3\sigma_n^2 x_n^2 - M_n},$$

d'où l'on tire l'équation du troisième degré que voici:

$$(38) \quad 3\sigma_n^2 x_n^3 + 3a_n x_n^2 - (\sigma_n^2 - M_n)x_n = -N_n.$$

Qu'on distingue maintenant deux groupes de termes dans l'expression (36): au premier groupe appartiennent ceux dont les arguments se trouvent déjà dans la fonction X ; les termes du second genre dépendent, au contraire, d'arguments qui apparaissent en vertu des opérations exécutées pour arriver à l'expression mentionnée. Les termes du premier groupe sont marqués par un seul indice, ceux du second groupe, par deux.

Considérons d'abord un terme du second genre.

En formant l'expression du type (37), le terme dépendant de a_n y

manquera évidemment; et le terme analogue manquera également dans l'équation (38), de sorte que nous avons:

$$3\sigma_{m,n}^2 x_{m,n}^3 - (\sigma_{m,n}^2 - M_{m,n})x_{m,n} = -N_{m,n}.$$

De cette équation, il est facile de voir que les $x_{m,n}$ forment nécessairement une série convergente, pourvu que les $N_{m,n}$ en forment une: car si $\sigma_{m,n}^2$ était une quantité fort petite, l'expression approchée de $x_{m,n}$ deviendrait:

$$x_{m,n} = -\frac{N_{m,n}}{M_{m,n}};$$

et puisque les différentes $M_{m,n}$ ne diffèrent guère, m et n étant de grands nombres, l'un de l'autre, la convergence des $x_{m,n}$ est presque la même que celle des $N_{m,n}$; ensuite, si $\sigma_{m,n}^2$ était égal à $M_{m,n}$, ne fût ce même qu'approximativement, on aurait à peu près:

$$x_{m,n} = -\sqrt[3]{\frac{N_{m,n}}{3M_{m,n}}},$$

formule qui montre que les $x_{m,n}$ convergent comme les racines cubiques des $N_{m,n}$.

Venons maintenant aux termes du premier genre.

Si l'on remplace, dans l'équation (37), a_n par la valeur

$$\frac{a_n}{N_n} \frac{N_n}{\sigma_n^2 - e^2} (\sigma_n^2 - e^2) = f_n x_n (\sigma_n^2 - e^2),$$

où l'on a écrit, pour abrégé, f_n au lieu de $-\frac{a_n}{N_n}$, il viendra:

$$e^2 = 3f_n x_n^2 (\sigma_n^2 - e^2) + 3\sigma_n^2 x_n^2 + M_n.$$

On tire de là:

$$e^2 = \frac{3f_n \sigma_n^2 x_n^2 + 3\sigma_n^2 x_n^2 + M_n}{1 + 3f_n x_n^2};$$

et ensuite, par l'introduction de cette valeur dans la formule

$$x_n = \frac{N_n}{\sigma_n^2 - e^2},$$

on obtiendra :

$$x_n = \frac{N_n(1 + 3f_n x_n^2)}{\sigma_n^2 - M_n - 3\sigma_n^2 x_n^2},$$

ou bien :

$$3\sigma_n^2 x_n^3 - (\sigma_n^2 - M_n)x_n = -N_n(1 + 3f_n x_n^2)$$

résultat qui s'obtient, d'ailleurs, immédiatement de l'équation (38).

L'équation que nous venons d'établir se résout facilement, en mettant, dans le second membre, la valeur de x_n qui est connue par les approximations précédentes; et on en conclut, comme auparavant, que les x_n forment une série convergente ou même limitée, pourvu que le nombre des N_n ou bien, ce qui revient au même, le nombre des a_n soit fini.

De la manière indiquée, on parvient à exprimer la fonction γ au moyen d'une série ne contenant que des termes trigonométriques, et dont la convergence est uniforme.

11. Dans les derniers numéros, on a établi des méthodes pour intégrer l'équation linéaire du second ordre dans laquelle le coefficient de la fonction inconnue est un agrégat de termes trigonométriques. On y a notamment trouvé les moyens nécessaires pour arriver aux développements numériques des différentes fonctions servant à exprimer l'intégrale demandée. Passant maintenant à l'intégrale de l'équation complète (7'), on sera amené à chercher le développement d'une expression comme celle-ci :

$$(39) \quad E = e^{-\nu x - \int z dx} \int \Phi e^{\nu x + \int z dx} dx,$$

où ν^2 signifie une constante renfermant comme terme additif une fonction horistique de tous les coefficients du développement de E , et où l'on a désigné par Φ et z , deux développements uniformément convergents.

Mais bien que le développement de z soit uniformément convergent, il pourrait toutefois arriver que la fonction $\int z dx$ ne le fût plus. Dans un tel cas, l'usage de l'expression signalée paraît d'abord défendu. Cependant, en retranchant de z une partie z_0 telle que $\int z_0 dx$ s'exprime au

moyen d'une série uniformément convergente, on peut choisir z_0 de manière que le reste z_1 devienne aussi petit qu'on voudra. Donc, les fonctions $e^{-f_{z_0} dx}$ et $e^{f_{z_0} dx}$ se développant toujours en séries uniformément convergentes, on retombe dans une formule du type (39), à la seule exception que z se trouve remplacé par z_1 , fonction dont nous considérons la valeur toujours comme très petite par rapport à $\int \Phi_0 e^{\nu x} dx$, Φ_0 étant égal à $\Phi e^{f_{z_0} dx}$.

Or, on obtient au moyen d'intégration par parties:

$$\begin{aligned} E &= e^{-\nu x} \int \Phi_0 e^{\nu x} dx - e^{-\nu x - f_{z_1} dx} \int z_1 e^{f_{z_1} dx} dx \int \Phi_0 e^{\nu x} dx \\ &= e^{-\nu x} \int \Phi_0 e^{\nu x} dx - e^{-\nu x} \int z_1 dx \int \Phi_0 e^{\nu x} dx \\ &\quad + e^{-\nu x - f_{z_1} dx} \int z_1 e^{f_{z_1} dx} dx \int z_1 dx \int \Phi_0 e^{\nu x} dx, \\ &= \dots \end{aligned}$$

de sorte que, si l'on admet la notation

$$\Phi_n e^{\nu x} = z_1 \int \Phi_{n-1} e^{\nu x} dx,$$

la fonction E sera exprimée par le développement

$$\begin{aligned} E &= e^{-\nu x} \int \{ \Phi_0 - \Phi_1 + \Phi_2 - \dots \pm \Phi_{m-1} \} e^{\nu x} dx \\ &\quad \mp e^{-\nu x - f_{z_1} dx} \int \Phi_m e^{\nu x + f_{z_1} dx} dx. \end{aligned}$$

Mais bien qu'on puisse généralement supposer que la convergence du développement

$$\Phi_0 - \Phi_1 + \dots$$

soit très rapide, il sera néanmoins utile d'examiner un peu plus soigneusement la nature du reste donné au moyen de la formule

$$R = e^{-\nu x - f_{z_1} dx} \int \Phi_m e^{\nu x + f_{z_1} dx} dx.$$

Admettons d'abord:

$$z_1 = \gamma_1 \cos H_1 + \gamma_2 \cos H_2 + \dots,$$

et supposons que la série

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots$$

soit convergente, mais qu'au contraire la série

$$\frac{\gamma_1}{\sigma_1} + \frac{\gamma_2}{\sigma_2} + \dots$$

soit divergente.

Maintenant, en désignant par H'_n ce que devient H_n lorsqu'on remplace, dans la formule

$$H_n = \sigma_n x + b_n,$$

la variable x par une autre ξ , on sait, en vertu des recherches de M. POINCARÉ,¹ que la série

$$\frac{\gamma_1}{\sigma_1} (\sin H_1 - \sin H'_1) + \frac{\gamma_2}{\sigma_2} (\sin H_2 - \sin H'_2) + \dots$$

est convergente, bien que cette convergence ne soit pas uniforme, et que la somme tende vers une limite dépendant de la différence $x - \xi$.

Cela étant, et si nous nous réservons, après avoir exécuté l'intégration demandée, de mettre ξ égal à x , l'expression de R s'écrit de la manière suivante:

$$R = e^{-\nu x - \int z_1 dx} \int \Phi_m e^{\nu x + \int z_1 dx} dx = e^{-\nu x} \int \Phi_m e^{\nu x + \frac{\gamma_1}{\sigma_1} (\sin H_1 - \sin H'_1) + \frac{\gamma_2}{\sigma_2} (\sin H_2 - \sin H'_2) + \dots} dx,$$

formule dans laquelle on pourra développer, suivant les puissances de $\frac{\gamma_1}{\sigma_1}$, de $\frac{\gamma_2}{\sigma_2}$, ... l'exponentielle sous le signe \int . Opérant ainsi, on parviendra à des intégrales du type

$$I(n_1, n_2, \dots) = \frac{\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\gamma_2}{\sigma_2}\right)^{n_2} \dots e^{-\nu x}}{1.2.3 \dots n_1.1.2.3 \dots n_2 \dots} \int \Phi_m (\sin H_1 - \sin H'_1)^{n_1} (\sin H_2 - \sin H'_2)^{n_2} \dots e^{\nu x} dx,$$

où l'on a désigné par n_1, n_2, \dots des entiers positifs.

Je vais d'abord montrer que, en exécutant l'intégration qu'exige la formule signalée, les dénominateurs $\sigma_1^{n_1}, \sigma_2^{n_2}, \dots$ se détruisent en vertu des facteurs sortant des opérations successives.

¹ Bulletin astronomique, T. I, p. 319 — voir aussi la note insérée par M. CHARLIER dans les Astr. Nachrichten, T. 122, p. 161.

Dans ce but, admettons la notation

$$\Psi^{(n_1)} = \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\sigma_2}\right)^{n_2} \left(\frac{\gamma_3}{\sigma_3}\right)^{n_3} \dots}{1.2.3\dots n_2.1.2.3\dots n_3\dots} \Phi_m(\sin H_2 - \sin H_2')^{n_2} (\sin H_3 - \sin H_3')^{n_3} \dots,$$

ce qui donne:

$$I(n_1, n_2, \dots) = \frac{\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1}}{1.2.3\dots n_1} e^{-\nu x} \int \Psi^{(n)} (\sin H_1 - \sin H_1')^{n_1} e^{\nu x} dx.$$

On tire de là, en intégrant par parties, et en remplaçant, après avoir effectué l'intégration, ξ par x ou bien, ce qui revient au même, H_1' par H_1 ,

$$\begin{aligned} & I(n_1, n_2, \dots) \\ &= -\frac{\gamma_1 \left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1-1}}{1.2.3\dots(n_1-1)} e^{-\nu x} \int \cos H_1 (\sin H_1 - \sin H_1')^{n_1-1} dx \int \Psi^{(n_1)} e^{\nu x} dx; \end{aligned}$$

ensuite, si nous posons:

$$\cos H_1 \int \Psi^{(n_1)} e^{\nu x} dx = \Psi_1^{(n_1)} e^{\nu x},$$

la formule précédente prend la forme

$$I(n_1, n_2, \dots) = -\frac{\gamma_1 \left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1-1}}{1.2.3\dots(n_1-1)} e^{-\nu x} \int \Psi_1^{(n_1)} (\sin H_1 - \sin H_1')^{n_1-1} e^{\nu x} dx.$$

Mais encore, si nous admettons la notation

$$\begin{aligned} & I(n_2, n_3, \dots) \\ &= \frac{\left(\frac{\gamma_2}{\sigma_2}\right)^{n_2} \left(\frac{\gamma_3}{\sigma_3}\right)^{n_3} \dots e^{-\nu x}}{1.2.3\dots n_2.1.2.3\dots n_3\dots} \int \Phi_m(\sin H_2 - \sin H_2')^{n_2} (\sin H_3 - \sin H_3')^{n_3} \dots e^{\nu x} dx, \end{aligned}$$

ce qui serait en pleine concordance avec la notation déjà utilisée, nous aurons:

$$\Psi_1^{(n_1)} = \cos H_1 I(n_2, n_3, \dots)$$

et:

$$\begin{aligned} & I(n_1, n_2, \dots) \\ &= -\frac{\gamma_1 \left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1}\right)^{n_1-1}}{1.2\dots(n_1-1)} e^{-\nu x} \int \cos H_1 (\sin H_1 - \sin H_1')^{n_1-1} e^{\nu x} I(n_2, n_3, \dots) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_1^{(n)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{i\lambda x + iH}}{\nu + i\lambda} + \frac{e^{-i\lambda x - iH}}{\nu - i\lambda} + \frac{e^{i\lambda x - iH}}{\nu + i\lambda} + \frac{e^{-i\lambda x + iH}}{\nu - i\lambda} \right\} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \nu (e^{i\lambda x + iH} + e^{-i\lambda x - iH}) - \frac{i\lambda}{2} (e^{i\lambda x + iH} - e^{-i\lambda x - iH})}{\nu^2 + \lambda^2} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2} \nu (e^{i\lambda x - iH} + e^{-i\lambda x + iH}) - \frac{i\lambda}{2} (e^{i\lambda x - iH} - e^{-i\lambda x + iH})}{\nu^2 + \lambda^2}.
\end{aligned}$$

Inutile de continuer plus loin le calcul; car on voit immédiatement que la fonction $I(n)$ se compose d'un nombre fini de termes, chacun ayant pour dénominateur le produit de $n + 1$ facteurs de la forme

$$\nu^2 + (\lambda \pm m\sigma)^2,$$

m étant un entier n'excédant pas n . Et que la puissance γ^n divisée par un tel produit sera toujours très petite, cela se comprend parce qu'on peut choisir les γ aussi petits qu'on voudra, mais encore parce que la quantité ν^2 contient, selon l'hypothèse, une fonction horistique de tous les coefficients figurant dans la fonction E , et par conséquent, aussi dans le reste R .

On conclut de ces considérations que la fonction R se développe, suivant les multiples des divers H , dans une série uniformément convergente.

Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent d'accomplir la résolution de la question entamée dans le n° 2 du paragraphe actuel; car la seule difficulté y restant a été levée par notre méthode générale d'établir l'intégrale d'une équation linéaire du second ordre avec un coefficient de l'inconnue renfermant plusieurs termes périodiques.

Ces résultats suffiront encore pour établir, d'une manière absolue, le développement de l'intégrale de l'équation (53, § 2), aussi que de celles de plusieurs autres équations que nous avons rencontrées dans les pages précédentes.

12. Avant de mettre un terme aux considérations générales que suggère l'emploi des équations résultant de nos transformations dans les paragraphes 5 et 6, voici encore quelques réflexions utiles.

L'admission du principe sur lequel reposent les dites transformations, amenait inévitablement des termes dépendant de la troisième dérivée de l'intégrale cherchée; néanmoins, on put conserver la forme des équations différentielles du second ordre par la raison que ces dérivées étaient multipliées par de très petits coefficients du premier ordre, ce qui permettait d'en remplacer la plus grande partie par une fonction connue. Cependant, comme on a déjà remarqué dans le n° 4 du paragraphe 5, la poursuite de telles éliminations ne conduit pas à un résultat jouissant d'une exactitude surpassant une limite déterminée, bien qu'on puisse de la sorte s'approcher de l'expression rigoureuse de l'intégrale cherchée de manière que l'écart inévitable soit tout à fait insensible dans les calculs numériques. Mais on a aussi, d'un autre côté, révélé le moyen de parvenir à une solution exacte. En effet, la quantité Ω_0 , donnée par la formule (15) du paragraphe 5, étant extrêmement petite, la fonction qui résulte de l'intégration de l'équation (16) du même paragraphe, est aussi fort petite, vu que Ω_0 ne doit plus contenir de termes sensibles s'agrandissant par l'intégration. On aura donc, au moyen d'approximations successives, l'intégrale de l'équation (16).

Mais entrons un peu plus profondément dans le détail de la méthode que nous avons mise en usage pour débarrasser l'équation transformée des termes dépendant de la troisième dérivée, et cherchons en la portée.

Evidemment, cette méthode repose, au fond, sur le remplacement de l'équation du troisième ordre par un système de deux équations dont l'une est du second ordre et l'autre du premier. En effet, si nous admettons la notation

$$\frac{d^2z}{dv^2} + Y_1 z = L,$$

ce qui entraîne:

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \frac{dL}{dv} - \frac{dY_1}{dv} z - Y_1 \frac{dz}{dv},$$

nous aurons, en introduisant, dans l'équation (14) du paragraphe 5, cette valeur de la troisième dérivée, une équation du second ordre par rapport à z , mais qui renferme, outre z , la fonction inconnue L . D'autre part, nous aurons, pour déterminer la nouvelle inconnue, au lieu de l'équation (28), une équation du type

$$(40) \quad L = N + S_0 - \varphi \frac{dL}{dv},$$

ce qui revient à avoir mis, dans l'équation (14, § 5), $\Omega + S_0$ à la place de Ω . En conséquence, nous aurions au lieu de l'équation (15, § 5), celle-ci:

$$\Omega_0 = \Omega + S_0 - Y_1 y_0 - Y_2 y_0^2 - Y_3 y_0^3 - \frac{d^2 y_0}{dv^2}.$$

Nous allons voir qu'on pourra déterminer la fonction L de manière que le reste de la solution de l'équation (40), que nous admettons identique avec S_0 , soit une quantité très petite ne renfermant que des termes périodiques dont les périodes sont extrêmement courtes. Donc, la fonction S_0 qui figure dans le second membre de l'équation (16), étant en elle-même très petite, ne peut donner, par l'intégration, naissance à des termes sensibles.

Pour montrer la propriété de S_0 que nous venons de signaler, admettons le développement fini

$$L = U_0 + \varphi U_1 + \varphi^2 U_2 + \dots + \varphi^n U_n + R,$$

et déterminons les fonctions U_0, U_1, \dots, U_n, R au moyen des équations de condition

$$\begin{aligned} U_0 &= \Omega, \\ \left(1 + \frac{d\varphi}{dv}\right) U_1 &= -\frac{dU_0}{dv}, \\ \left(1 + 2 \frac{d\varphi}{dv}\right) U_2 &= -\frac{dU_1}{dv}, \\ &\dots \dots \dots \\ \left(1 + n \frac{d\varphi}{dv}\right) U_n &= -\frac{dU_{n-1}}{dv}, \\ \varphi \frac{dR}{dv} + R &= S_0 - \varphi^{n+1} \frac{dU_n}{dv}. \end{aligned}$$

Evidemment, si l'on a désigné par n un nombre très grand, de sorte que le produit $n \frac{d\varphi}{dv}$ peut être considéré comme une quantité de l'ordre zéro, bien que sa valeur soit inférieure à l'unité, les fonctions U_n tendent

à s'agrandir considérablement: d'abord, parce que le dénominateur $1 + n \frac{d\varphi}{dv}$ peut acquérir des valeurs voisines de zéro, et encore, parce que les opérations successives font naître des termes trigonométriques dans les fonctions dont il s'agit, dépendant des multiples très élevés de v , ce qui fera ressortir, en effectuant les différentiations successives, de grands facteurs. En désignant par ε la valeur maximum de la fonction $\frac{d\varphi}{dv}$, on peut estimer la valeur maximum de U_n en raison de celle de U_1 au moyen de l'expression

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots n^2 \cdot \varepsilon^n;$$

donc, si n n'excède pas considérablement la valeur de $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, le produit signalé sera une quantité très petite. Mais le nombre n peut sortir beaucoup hors de cette limite sans que le produit $\varphi^{n+1} \frac{dU_n}{dv}$ cesse d'être une quantité extrêmement petite.

Cela étant, divisons le produit dont nous avons parlé tout à l'heure, en deux parties V_1 et W_1 , de sorte que la première renferme seulement des termes de même nature que celle des termes de la fonction N , et la seconde, des termes à périodes très courtes. Or, on pourra appliquer le procédé précédent à l'équation

$$\varphi \frac{dR}{dv} + R = -V_1 + S_1,$$

et égaler le reste S_0 à $W_1 + S_1$. De la sorte, on obtiendrait une valeur très petite de R , mais aussi très exacte, de façon que le nouveau reste S_1 sera extrêmement petit en comparaison avec le reste S_0 .

Ainsi, on peut continuer les approximations aussi loin qu'on voudra, et de cette manière obtenir les fonctions cherchées avec une exactitude illimitée.

CHAPITRE III.

Applications aux inégalités des planètes.

Les matières que je viens de traiter dans les chapitres précédents étant accrues considérablement malgré moi, il me faut limiter le plus possible l'exposé des applications qu'on en pourrait faire aux théories des planètes. Je m'arrêterai donc à seulement mettre au jour les principaux traits des grandes perturbations dépendant des arguments astronomiques, ainsi qu'à essayer de répandre quelques lumières sur les inégalités dites librationés. Mais je vais ajouter encore quelques remarques relativement aux restes des solutions supposées mises en nombres, prouvant qu'on pourra, en effet, rendre ces restes aussi insignifiants qu'on voudra, bien qu'une partie d'eux contiennent une infinité de discontinuités.

§ 8. *Inégalités dépendant d'arguments astronomiques.*

1. La détermination des inégalités du rayon vecteur ainsi que celles de la latitude s'opèrent en intégrant un système d'équations différentielles du type que nous avons envisagé dans les équations (47) et (48) du paragraphe 5. Ces équations étant du second ordre et du troisième degré, on peut les remplacer par des équations linéaires toutes les fois que les membres de droite ne contiennent pas de termes critiques. Mais comme il y a toujours une infinité de tels termes, bien que leurs coefficients soient généralement extrêmement petits, il convient de conserver dès l'abord la forme plus rigoureuse des équations dont il s'agit.

Considérons en premier lieu le système (47), dont les diverses équations sont plus simples que celles du système (48), et admettons le développement

$$(\mathcal{Q}) = - \Sigma \gamma_n \cos ((1 - \sigma_n)u - B_n).$$

Quant aux coefficients γ_n , dont la convergence est celle d'une progression géométrique, nous en supposons les plus grands du premier ordre et du premier degré; nous admettons de plus que le coefficient d'un terme critique soit tout au moins du troisième degré.

Maintenant, après avoir remplacé dans les équations (47), H par $\frac{3}{4}H$, H_0 par $\frac{3}{4}H_0$, etc., ce qui rend plus simples les opérations à exécuter sans déranger l'identité de la somme des équations dont il s'agit avec l'équation (39), nous allons établir l'intégrale de la première d'elles. Le résultat s'écrit immédiatement ainsi:

$$(1) \quad V_0 = x \cos((1 - \zeta)u - \Gamma) \\ + \sum \frac{\gamma_n}{(1 - \sigma_n)^2 - 1 + \beta_1 + \frac{3}{4}\beta_3 H} \cos((1 - \rho_n)u - B_n),$$

x et Γ étant les deux constantes arbitraires et ζ , une quantité qui s'obtient au moyen de l'équation

$$(1 - \zeta)^2 = 1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 H.$$

Avec l'expression trouvée, où la fonction horistique H figure encore comme une quantité indéterminée, il sera facile de former le développement de

$$\left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 + (1 - \beta)V_0^2,$$

ainsi que celui de

$$\beta_3 \left\{ (1 - \beta)V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 - \frac{3}{4}H_0 \right\} V_0 - \beta_0 \left\{ (1 - \beta)V_0^2 + \left(\frac{dV_0}{du}\right)^2 \right\} \chi.$$

Dans ces formules, ainsi que dans plusieurs formules précédentes de même nature, on a supposé β du premier ordre par rapport aux forces troublantes, mais cela n'était pas inévitable. Au contraire, on pouvait élever, sans inconvénient essentiel, cette quantité à zéro, ce qui rendrait un peu plus simples les seconds membres des équations (47) à partir de la deuxième.

Maintenant, si nous déterminons H_0 de manière à débarasser la deuxième des équations (47) du terme dépendant de l'argument $(1 - \zeta)u - \Gamma$,

nous aurons, en omettant la partie s'évanouissant avec les facteurs du premier ordre,

$$(2) \quad H_0 = x^2 + \sum \frac{\gamma_n^2}{\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)^2},$$

équation dans laquelle nous avons employé la notation

$$\vartheta_n = (1 - \sigma_n)^2 - 1 + \beta_1.$$

De l'équation que nous venons d'établir, on peut tirer une valeur préalable de H , en identifiant cette quantité avec H_0 ; mais il peut arriver qu'on s'arrête ainsi à un résultat intermédiaire bien différent du résultat cherché, à savoir de la fonction horistique totale. Or, on arrive à un résultat plus satisfaisant en opérant de la manière suivante.

Considérons la deuxième des équations (47), et portons dans les termes de son second membre, termes que nous avons d'ailleurs mis en évidence un peu plus haut, l'expression obtenue de V_0 , ainsi que celle de χ que nous supposons connue: de la sorte nous parviendrons à l'équation que voici:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_1}{du^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 H\right) V_1 &= - \sum x^2 g_n \cos((1 - \tau_n)u - C_n) \\ &- \sum \sum \frac{x h_n h_{n'}}{\vartheta_n + \frac{2}{4}\beta_3 H} \cos((1 - \tau_{nn'})u - C_{nn'}) \\ &- \sum \sum \sum \frac{l_n l_{n'} l_{n''}}{\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right) \left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)} \cos((1 - \tau_{nn'n''})u - C_{nn'n''}) \\ &- \sum \sum \sum \frac{p_{nn'n''} \gamma_n \gamma_{n'} \gamma_{n''}}{\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right) \left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right) \left(\vartheta_{n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)} \cos((1 - \sigma_{nn'n''})u - B_{nn'n''}). \end{aligned}$$

Dans cette équation, on a employé plusieurs notations nouvelles: on a d'abord désigné par g_n des quantités de même nature que les γ_n , par τ_n , des quantités analogues aux σ , par C_n , des angles constants, et on a en particulier admis le développement

$$\beta_0 \chi = \sum g_n \cos((1 - \tau_n)u - C_n).$$

On a ensuite désigné: par h_n et l_n , certains coefficients, comme les γ_n et les g_n , tout au moins du premier ordre et du premier degré; par $\tau_{nn'}$, des sommes des coefficients ζ , σ_n et τ_n chacun multiplié par un nombre entier, positif ou négatif; par $C_{nn'}$, de semblables combinaisons des angles Γ , B_n et C_n ; par $\tau_{nn'n''}$, des combinaisons analogues de σ_n , $\sigma_{n'}$ et $\tau_{n''}$, ainsi que par $C_{nn'n''}$, des combinaisons de B_n , $B_{n'}$ et $C_{n''}$; par $\sigma_{nn'n''}$ et $B_{nn'n''}$, de pareilles sommes des produits de trois σ_n ou de trois B_n avec certains nombres entiers. Finalement, les $p_{nn'n''}$ signifient certains coefficients contenant un facteur purement numérique multiplié par β_3 .

Maintenant, si nous admettons encore les notations

$$\begin{aligned}\omega_n &= (1 - \tau_n)^2 - 1 + \beta_1, \\ \omega_{nn'} &= (1 - \tau_{nn'})^2 - 1 + \beta_1, \\ \omega_{nn'n''} &= (1 - \tau_{nn'n''})^2 - 1 + \beta_1, \\ \vartheta_{nn'n''} &= (1 - \sigma_{nn'n''})^2 - 1 + \beta_1,\end{aligned}$$

l'intégrale de l'équation précédente sera donnée au moyen de la formule suivante, où l'on a supprimé tout terme dépendant de constantes arbitraires nouvelles:

$$\begin{aligned}(3) \quad V_1 &= \sum \frac{x^2 g_n}{\omega_n + \frac{3}{4} \beta_3 H} \cos((1 - \tau_n)u - C_n) \\ &+ \sum \sum \frac{x h_n l_{n'}}{\left(\omega_{nn'} + \frac{3}{4} \beta_3 H\right) \left(\vartheta_n + \frac{3}{4} \beta_3 H\right)} \cos((1 - \tau_{nn'})u - C_{nn'}) \\ &+ \sum \sum \sum \frac{l_n l_{n'} l_{n''}}{\left(\omega_{nn'n''} + \frac{3}{4} \beta_3 H\right) \left(\vartheta_n + \frac{3}{4} \beta_3 H\right) \left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4} \beta_3 H\right)} \cos((1 - \tau_{nn'n''})u - C_{nn'n''}) \\ &+ \sum \sum \sum \frac{p_{nn'n''} \gamma_n \gamma_{n'} \gamma_{n''}}{\left(\vartheta_{nn'n''} + \frac{3}{4} \beta_3 H\right) \left(\vartheta_n + \frac{3}{4} \beta_3 H\right) \left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4} \beta_3 H\right) \left(\vartheta_{n''} + \frac{3}{4} \beta_3 H\right)} \cos((1 - \sigma_{nn'n''})u - B_{nn'n''}).\end{aligned}$$

Ayant obtenu ce résultat, il faut l'introduire dans la troisième des équations (47). A cette occasion, on déterminera la partie H_1 de la fonction horistique totale, en satisfaisant à la condition que nul terme dé-

pendant de l'argument $(1 - \zeta)u - \Gamma$ n'apparaisse dans le second membre de l'équation mentionnée. Par cette condition, on sera conduit à une expression de la forme

$$\begin{aligned}
 (4) \quad H_1 = & \sum \frac{A_n}{\left[\omega_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right]^2} \\
 & + \sum \sum \frac{A_{nn'}}{\left[\left(\omega_{nn'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\right]^2} \\
 & + \sum \sum \sum \frac{A_{nn'n''}}{\left[\left(\omega_{nn'n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\right]^2} \\
 & + \sum \sum \sum \frac{A'_{nn'n''}}{\left[\left(\vartheta_{nn'n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n'} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\left(\vartheta_{n''} + \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\right]^2},
 \end{aligned}$$

les coefficients A étant tout connus et respectivement du deuxième, du quatrième, du sixième et du huitième ordre.

En réunissant les équations (2) et (4), et en identifiant $H_0 + H_1$ avec H , on aura une nouvelle équation d'où l'on pourra toujours tirer une valeur réelle et positive de H . Certes, cette équation sera très compliquée, mais il faut toutefois se rappeler que, si l'on s'arrête aux termes d'un degré pas très élevé, le nombre des termes critiques sera très petit, de sorte qu'on pourra tout d'abord rejeter la plupart des termes apparaissant dans la somme des deux équations mentionnées. On aura néanmoins une valeur de H ayant le caractère d'une véritable approximation. Ce sont seulement les termes du deuxième degré et ceux dont les diviseurs sont presque évanouissants qu'il faut retenir en opérant cette première approximation.

On pourrait encore s'imaginer qu'il serait quelquefois nécessaire de considérer simultanément avec les termes de H_0 et de H_1 quelques termes provenant des fonctions V_2, V_3, \dots . Certes, cela peut arriver, et il faudrait opérer, le cas échéant, en continuant les procédés que nous venons d'expliquer, mais un tel cas est si rare et si peu probable que nous ne nous en soucions pas.

Quant à la convergence des développements des diverses fonctions V , on s'en convainc par la circonstance que H est une fonction horistique de tous les coefficients se trouvant dans la somme $V_0 + V_1 + \dots$. Il s'ensuit encore que cette somme elle-même constitue une série convergente, parce qu'autrement une valeur assez grande de H sortirait d'un nombre fini de fonctions V , ce qui à son tour rendrait ces fonctions très petites et même insensibles.¹

Encore une remarque. En se rappelant qu'un coefficient isolé x_n donné au moyen de l'équation

$$x_n = \frac{\gamma_n}{\vartheta_n + \frac{3}{4}\beta_n H},$$

change de signe sans passer par zéro, ni par l'infini, lorsque cette équation admet des racines égales, et en considérant qu'il y a un nombre infini de valeurs négatives des ϑ_n qui s'accordent à peu près avec la condition de racines égales, et qui rempliraient cette condition exactement, si la constante arbitraire x subissait un changement même extrêmement petit, on en conclut que *les divers x_n ne sont pas des fonctions uniformes de la constante d'intégration*. Ce résultat s'énonce aussi en disant *qu'une infinité de x_n ne peuvent pas être développés suivant les puissances de Δx , quelque petit que soit cet accroissement de x* .

Cela est en harmonie avec le théorème que la science doit au génie de M. POINCARÉ, et que l'éminent géomètre a exprimé par les mots: *le problème des trois corps n'admet pas d'autre intégrale uniforme que celles des forces vives et des aires*.²

Néanmoins si les constantes arbitraires sont fixées, et qu'elles aient des valeurs convenables, on peut toujours, abstraction faite d'un cas extrêmement rare appelé cas asymptotique, obtenir une solution numérique donnant les coordonnées d'une planète au moyen des séries trigonométriques uniformément convergentes.

Mais une telle solution, représentant assurément une fonction uniforme quand les constantes y entrant ont des valeurs fixées, est soumise

¹ Voir, pour plus de détail, le dernier passage du n° 8, § 5.

² M. BRUNS, dans une note présentée à la Société de Leipzig et réimprimée dans ce journal, a montré que le problème dont il s'agit n'admet pas d'intégrale algébrique ou abélienne outre les intégrales connues.

à une altération finie, bien que celle-ci puisse être insignifiante, si certaines arbitraires changent d'une quantité si petite qu'on voudra. Or, ayant déterminé numériquement, et jusqu'à un certain degré d'approximation, les constantes arbitraires et les premiers termes des développements mentionnés, ces termes n'offriront généralement aucune discontinuité, lorsque l'arbitraire entrant dans le dénominateur varie d'une quantité très petite; et bien qu'on ne puisse dire la même chose des termes restants, on est néanmoins sûr que leur somme n'excédera jamais une limite déterminée, dont la valeur est proportionnelle à la somme des racines cubiques des termes critiques qu'on a négligés dans la fonction perturbatrice. En d'autres mots: l'étendu du changement brusque que peut subir, après l'intégration, un certain terme critique de la fonction perturbatrice, est une quantité comparable à la racine cubique de ce terme, multiplié, il est vrai, par un facteur de l'ordre -1 par rapport aux masses troublantes, mais qui est commun à tous les termes. Donc, en considérant que la convergence des termes critiques dans la fonction perturbatrice est comparable à celle d'une progression géométrique, il sera facile de conclure qu'on pourra pousser le degré d'approximation si loin qu'on voudra, de sorte que le reste deviendra moindre qu'une quantité donnée.

Ce que nous venons de dire relativement aux coefficients x_n s'applique aussi à la fonction horistique H considérée comme fonction de la constante arbitraire x . L'examen de cette fonction, qui admet une infinité de discontinuités, bien qu'elle ne devienne jamais infinie, doit être d'un certain intérêt pour l'analyse algébrique.

2. Quant à l'application des équations (48) du paragraphe 5, on fera tout d'abord la remarque que chacune d'elles s'intègre, le second membre étant supposé tout connu, d'après les méthodes que j'ai développées avec assez de détail pour le cas d'un seul terme tout connu. Il n'y a, en effet, que très peu à ajouter aux matières du chapitre I pour étendre les règles du calcul y exposées aux cas de plusieurs termes connus. Envisageons d'abord l'application de la méthode que nous venons d'exposer dans le n° 4 du paragraphe 1.

A cet égard, reprenons une équation quelconque du système (48) du paragraphe 5, et remplaçons y: V_n par ρ ; u , par v ; $(1 - \beta)V_n^2 + \left(\frac{dV_n}{du}\right)^2$,

par η^2 ; β_3 par $\frac{3}{4}\beta_3$. Ensuite, figurons-nous que la partie $\frac{3}{4}\beta_3(H - H_n)$, qui ne dépend pas des coefficients entrant dans la fonction V_n , soit réunie avec β_1 . Nous aurons de la sorte:

$$(5) \quad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3\eta^2\right)\rho = -\sum r_n \cos((1 - \sigma_n)v - B_n).$$

Maintenant, si l'on opère les transformations indiquées dans le n° 4 du paragraphe 1, on retrouvera les équations (24), (25), (26) et (27) du dit paragraphe, à la seule exception que le second membre de l'équation (24) sera dans le cas actuel:

$$-\frac{1}{(1 + \phi)^2} \sum r_n \cos((1 - \sigma_n)v - B_n).$$

Ecrivons l'intégrale de l'équation envisagée de la manière suivante:

$$E = k \cos((1 - \sigma)u - G) + \sum \frac{r_n}{(1 - \sigma_n)^2 - (1 - \beta)} \cos((1 - \sigma_n)u - B_n + (1 - \sigma_n)\Psi) + \theta,$$

k et G étant les deux arbitraires; θ , une correction que nous allons déterminer prochainement, et β , la quantité $\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_3 H$.

Puisque H est une fonction horistique de tous les coefficients qui entrent dans l'expression que nous venons d'établir, ce développement est uniformément convergent, du moins si l'on ne tient pas compte de la correction θ . Pour déterminer cette correction, différencions l'expression précédente de E , et introduisons le résultat, ainsi que la valeur de E , dans l'équation (24) du § 1. Nous avons de la sorte un résultat qui renfermera une partie dépendant du facteur $\frac{d\Psi}{du}$, une autre partie dépendant du facteur $\left(\frac{d\Psi}{du}\right)^2$ et une troisième partie multipliée par $\frac{d^2\Psi}{du^2}$. En considérant que ces derniers facteurs sont des quantités du deuxième ordre, nous aurons, si nous ne retenons que les termes du premier ordre, et que nous nous rappelions la valeur approchée

$$\frac{d\Psi}{du} = \frac{3}{8}\beta_3(\eta^2 - H),$$

l'équation suivante, servant à déterminer la correction θ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\theta}{du^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_3 H\right)\theta \\ &= \frac{3}{4}\beta_3(\gamma^2 - H) \sum \frac{(1 - \sigma_n)^2 \gamma_n}{(1 - \sigma_n)^2 - (1 - \beta)} \cos((1 - \sigma_n)u - B). \end{aligned}$$

Après avoir porté, dans l'équation trouvée, la valeur approchée

$$\gamma^2 = E^2 + \left(\frac{dE}{du}\right)^2,$$

on obtiendra par intégration une expression de θ , nécessairement convergente, parce que H est horistique aussi par rapport aux coefficients dans l'expression de θ , et dont la valeur numérique est aussi généralement très petite par rapport à celles des plus grands coefficients mis en évidence dans l'expression de E . Mais il peut aussi arriver, dans le cas de termes critiques, que la fonction θ soit du même ordre que les premiers termes figurant dans E . En tel cas, on peut opérer de la manière suivante.

On commence par établir l'expression approchée

$$E = k \cos((1 - \varsigma)u - G) + \sum_1^{\infty} \frac{\gamma_n}{(1 - \sigma_n)^2 - (1 - \beta)} \cos((1 - \sigma_n)u - B_n),$$

d'où l'on tire par différentiation

$$\begin{aligned} \frac{dE}{du} &= -(1 - \varsigma)k \sin((1 - \varsigma)u - G) \\ &\quad - \sum_1^{\infty} \frac{(1 - \sigma_n)\gamma_n}{(1 - \sigma_n)^2 - (1 - \beta)} \sin((1 - \sigma_n)u - B_n). \end{aligned}$$

En multipliant par cette équation, membre par membre, l'équation

$$\frac{d^2E}{du^2} + (1 - \beta)E = - \sum_1^{\infty} \gamma_n \cos((1 - \sigma_n)u - B_n),$$

et en ne retenant que les termes devenant agrandis par l'intégration, on obtiendra

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2E}{du^2} + (1 - \beta)E \right\} \frac{dE}{du} \\ &= - \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{n'=0}^{n'=\infty} A_{nn'} \sin((\sigma_n - \sigma_{n'})u + (1 - \sigma_{n'})\Psi + B_n - B_{n'}), \end{aligned}$$

où l'on doit identifier σ_0 avec ς .

Cela étant, différencions l'équation (27) du § 1 deux fois, ce qui nous donne:

$$\frac{d^2 \Psi}{du^2} = \frac{3}{8} \beta_3 \frac{d\eta^2}{du},$$

d'où l'on tire, après avoir remplacé $\frac{d\eta^2}{du}$ par sa valeur approximative, à savoir:

$$2 \left[\frac{d^2 E}{du^2} + (1 - \beta) E \right] \frac{dE}{du},$$

l'équation

$$\frac{d^2 \Psi}{du^2} = -\frac{3}{4} \beta_3 \sum \sum A_{nn'} \sin [(\sigma_n - \sigma_{n'})u + B_n - B_{n'} + (1 - \sigma_{n'})\Psi].$$

Si, dans cette équation, on met à part les termes dont les indices sont égaux, et que l'on supprime le facteur $(1 - \sigma_n)$, qui en effet est fort près de l'unité, on tombera dans une équation du type

$$\frac{d^2 \Psi}{du^2} = -\alpha^2 \sin \Psi - \sum A_n \sin (2\lambda_n u + 2B_n + \Psi),$$

où α^2 est une quantité positive ou négative du deuxième ordre, $2\lambda_n$, une différence $\sigma_n - \sigma_{n'}$ et $2B_n$, une différence $B_n - B_{n'}$.

On cherchera la solution de cette équation, en utilisant une des méthodes que j'ai exposées, soit dans le § 3 du présent mémoire, soit dans le mémoire *Untersuchungen über die Convergenz* etc.

Ayant ainsi obtenu une expression approximative de Ψ , on formera celles des fonctions $\cos \Psi$ et $\sin \Psi$, après quoi il sera facile d'établir une nouvelle équation du type de l'équation (24) § 1. Ensuite, on déduira une nouvelle valeur de $\frac{dE}{du}$, laquelle servira à renouveler les procédés que nous venons d'expliquer précédemment, et notamment à refaire le calcul du coefficient α^2 ainsi que celui des coefficients A_n .

De la manière dont nous venons d'esquisser les traits principaux du calcul, on parviendra à une solution aussi approchée de l'équation (5).

3. Quant à l'application de la méthode du § 2, il suffit de réveiller l'attention du lecteur sur l'équation (14) du dit paragraphe, la-

quelle renferme, dans son second membre, le terme $-\frac{9}{128}\beta^2\Delta z^3$.¹ Elle se transforme donc, au moyen d'une substitution convenable, en une autre du type de l'équation (15), si l'on y augmente le coefficient de y par la quantité $-bH$, b étant un coefficient du même ordre que β^2 , et H , une fonction horistique des coefficients dans le développement de la fonction Δz . L'équation qu'on obtient ainsi s'intègre en employant la méthode du n° 5 du paragraphe précédent.

Mais il nous reste à signaler une difficulté qui concerne le développement de la fonction W .

On a, dans le § 2, établi les formules

$$M = -\frac{d^2G}{dv^2}; \quad N = -\frac{d^2H}{du^2};$$

cependant, si l'équation (1) renfermait, dans son membre de droite, plusieurs termes tout connus, les expressions de M et de N seraient évidemment plus compliquées. Or, il peut arriver que l'intégrale

$$\int \left[M \frac{dG}{dv} + N \frac{dH}{dv} \right] dv$$

que renferme l'équation (12), ne soit pas exprimée au moyen d'un développement convergent, bien que les fonctions M et N soient données par de telles séries. Dans ce cas, la méthode envisagée n'est plus applicable, bien qu'elle puisse rendre de grands services toutes les fois que l'intégrale mise en évidence s'exprime au moyen d'un développement convergent.

Je n'insiste pas davantage sur les nombreuses applications qu'on pourra faire des théories précédentes au calcul des perturbations du rayon vecteur et de la troisième coordonnée.

4. La détermination des grandes inégalités de la longitude exige qu'on intègre l'équation (1) du § 6. Cette équation étant assez compliquée, on l'a transformée de diverses manières afin de parvenir à d'autres équations plus simples, notamment aux équations (17) et (29). Je vais main-

¹ Par une erreur d'impression, le signe = avant le terme $-\frac{27}{128}\beta^2(-\delta+z_0)\Delta z^2$ a manqué.

tenant montrer l'application de ces deux équations au calcul des grandes inégalités et aux inégalités élémentaires.

Supposons qu'on ait, dans le second membre de l'équation (17), remplacé la variable v , qui y figure encore dans les arguments, par la nouvelle variable u , et négligeons de plus les petits termes de courte période, qui effectivement sont sans aucune importance. Alors nous aurons, en mettant ν^2 au lieu de β_1

$$(6) \quad \frac{d^2y}{du^2} - \nu^2 y = - \sum a_n \sin(\sigma_n u + b_n),$$

dont l'intégrale s'écrit immédiatement ainsi:

$$y = c_1 e^{\nu u} + c_2 e^{-\nu u} + \sum \frac{a_n}{\sigma_n^2 + \nu^2} \sin(\sigma_n u + b_n).$$

Pourvu que les a_n forment une série convergente comme une progression géométrique, ce que nous avons supposé dès le début, la série trigonométrique figurant dans l'expression de y est visiblement uniformément convergente quelles que soient les valeurs de σ_n . Quant aux deux arbitraires c_1 et c_2 , il faut évidemment les élever à zéro, vu qu'autrement des exponentielles paraîtraient dans l'expression de la longitude. Or, il est dans la nature des choses que cela soit ainsi; parce que: élever à zéro les constantes c_1 et c_2 , c'est faire prendre au mouvement moyen sa vraie valeur. Au contraire, si l'on avait calculé les coordonnées d'une planète en employant une valeur du mouvement moyen pas tout à fait exacte, on aurait nécessairement établi certains développements suivant les puissances du temps, développements qui cesseraient d'être convergents lorsque le temps eût acquis des valeurs dépassant une certaine limite.

Considérons maintenant, au lieu de l'équation (6), celle-ci:

$$(7) \quad \frac{d^2y}{du^2} - \nu^2 y = - A \sin(2\lambda u + 2b + sy),$$

où l'argument du seul terme de droite renferme la fonction cherchée multipliée par un nombre s que nous supposons assez grand. L'équation considérée convient d'ailleurs à la recherche d'une inégalité de très longue période provenant d'un terme très éloigné dans le développement de la fonction perturbatrice. Il y a donc lieu de supposer A et λ très petits, ainsi que le produit sA .

En désignant par φ un facteur que nous allons choisir convenablement, nous mettons l'équation précédente sous la forme

$$(7') \quad \frac{d^2 y}{du^2} = -\frac{A}{1+\varphi} \sin(2\lambda u + 2b + sy) + \nu^2 y - \frac{\varphi A}{1+\varphi} \sin(2\lambda u + 2b + sy);$$

puis, nous déterminons un module elliptique en établissant l'équation

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 = \frac{sA}{\lambda^2(1+\varphi)}.$$

Maintenant, si nous négligeons la somme des deux derniers termes du second membre, nous aurons facilement:

$$(8) \quad y = \frac{2}{s} \left\{ \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(\lambda u + b) - \lambda u - b \right\} \\ = \frac{2}{s} \left\{ \frac{2q}{1+q^2} \sin 2(\lambda u + b) + \frac{2q^2}{2(1+q^4)} \sin 4(\lambda u + b) + \dots \right\}$$

et:

$$\frac{\varphi A}{1+\varphi} \sin(2\lambda u + 2b + sy) = \frac{\varphi \lambda^2}{s} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \sin 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(\lambda u + b) \\ = \frac{\varphi \lambda^2}{s} \left\{ \frac{16q}{1+q^2} \sin 2(\lambda u + b) + \frac{32q^2}{1+q^4} \sin 4(\lambda u + b) \right\}.$$

Ensuite, si l'on fait:

$$\varphi = \frac{1}{4} \frac{\nu^2}{\lambda^2},$$

les termes dépendant de $\sin 2(\lambda u + b)$ disparaîtront de l'équation (7'), de sorte que la somme des deux derniers termes de son second membre sera toujours très petite autant que le module k^2 n'est pas très près de l'unité. Donc, en calculant le module moyennant la formule

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 = \frac{4sA}{4\lambda^2 + \nu^2}$$

l'expression de y que nous venons de signaler, donnera avec un très haut degré d'approximation, la solution de l'équation (7'). Il serait facile d'en obtenir la correction si approchée qu'on voudrait.

En considérant, dans le développement de la fonction perturbatrice, des termes assez éloignés pour que le produit sA soit moindre que ν^2 ,

on voit immédiatement que des inégalités sensibles ne peuvent pas se produire en dehors d'une certaine limite, même si λ acquiert une valeur évanouissante. Il est encore visible que, si l'on calcule une suite de modules avec divers A convergeant comme une progression géométrique, la série des modules convergera de la même manière. Donc, en supposant, dans le second membre de l'équation (7), une suite de termes au lieu d'un seul, dont les coefficients convergent comme une progression géométrique, on pourra renouveler les opérations que nous avons exposées dans le n° 3 du § 6, et on aura de la sorte une expression de l'intégrale cherchée, d'abord plus convergente que les différentes parties de l'expression (11) du même paragraphe. Il serait facile de rapprocher ces deux résultats, l'un de l'autre; je n'insisterai cependant pas sur ce point.

5. S'il s'agit de calculer un terme élémentaire, et surtout une grande inégalité provenant d'un terme de la fonction perturbatrice multipliée par un coefficient très grand par rapport à ν^2 , la méthode simple que nous venons d'expliquer précédemment ne paraît pas assez efficace, principalement parce que les équations (6) et (7) ne renferment pas de terme dépendant de y^3 . On aura, dans ces cas, un meilleur point de départ pour le calcul, dans l'équation (29) du § 6. Mais cette équation, étant dans sa forme primitive trop compliquée, on lui donnera la forme de l'équation (1) du § 7, ou une forme analogue.

Pour cet effet, mettons:

$$y = \frac{z}{1 + \psi}; \quad dx = \frac{e^{-8pq \cos 2x}}{(1 + \psi)^2} du,$$

et nous aurons une nouvelle équation, dans laquelle a disparu le terme dépendant de $\frac{dz}{du}$. Puis, en opérant comme dans le n° 6 du § 5, on pourra déterminer la fonction ψ de manière que l'équation résultante prenne la forme

$$(9) \quad \frac{d^2z}{du^2} + \alpha z - \beta z^3 = R,$$

α et β étant des constantes, dont β est toujours positive, mais α généralement négative. La fonction R renferme, il est vrai, des termes dépendant

de z et $\frac{dz}{du}$, ainsi que de ϕ , mais ces termes, étant sans importance essentielle, on pourra les négliger dans la première approximation, ou plutôt, n'en considérer que la plus grande partie, en modifiant un peu les valeurs de α et de β .

Cela admis, nous allons chercher la solution de l'équation

$$(10) \quad \frac{d^2z}{du^2} + \alpha z - \beta z^3 = -a \sin(\sigma u + b),$$

ce qui revient à déterminer le terme élémentaire qui provient du terme mis en évidence dans le second membre.

En opérant comme dans le n° 9 du § 4, nous écrivons l'équation précédente ainsi:

$$\frac{d^2z}{du^2} + (\alpha + h)z - \beta z^3 = -a \sin(\sigma u + b) + hz;$$

puis, en désignant par g , k et x trois quantités constantes, dont une est arbitraire, nous déterminons les autres en vertu des équations

$$\alpha + h = \frac{g^2}{x^2}(1 + k^2); \quad \beta = 2 \frac{g^2 k^2}{x^4}.$$

Nous aurons de la sorte:

$$(11) \quad \frac{d^2z}{g^2 du^2} + (1 + k^2) \frac{z}{x^2} - 2k^2 \frac{z^3}{x^4} = \frac{1}{g^2} \{-a \sin(\sigma u + b) + hz\}.$$

En admettant la constante h déterminée de manière que le second membre soit aussi petit que possible, on aborde l'intégration de l'équation précédente en mettant ce membre exactement égal à zéro; on obtient ainsi:

$$z = x \operatorname{sn} \left(\frac{g}{x} u + b \right), \quad \operatorname{mod} = k,$$

l'arbitraire qui entre dans l'argument étant égalée à b .

L'autre arbitraire, introduite par l'intégration de l'équation du second ordre, doit être choisie de manière que la période de la fonction elliptique coïncide avec celle de $\sin(\sigma u + b)$; donc, il faut mettre:

$$\frac{g}{x} \frac{\pi}{2K} = \sigma.$$

Puis, en égalant la constante h à $\frac{a}{x}$, ce qui annule, dans le second membre de l'équation (1), le terme dépendant de $\sin(\sigma u + b)$, on aura:

$$\alpha + \frac{a}{x} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 + k^2) \sigma^2,$$

et en soustrayant de cette relation celle ci:

$$\frac{1}{2} \beta x^2 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \sigma^2,$$

on retiendra:

$$\alpha + \frac{a}{x} - \frac{1}{2} \beta x^2 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sigma^2,$$

équation qui se met immédiatement sous la forme

$$\frac{1}{2} \beta x^3 + \left[\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \sigma^2 - \alpha \right] x = a.$$

En vertu de cette équation, il sera facile de conclure la valeur de x , à savoir celle du coefficient du terme élémentaire, mais seulement sous la condition que le module k soit connu. Or, la valeur du module n'étant pas connue dès l'abord, on pourra le plus souvent commencer le calcul par mettre $\frac{2K}{\pi}$ égal à l'unité, ce qui conduira à une valeur approchée de x . Avec cette valeur de x , on déduira celle de k au moyen de l'équation

$$k^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\beta x^2}{\sigma^2},$$

et, ayant ainsi une valeur approchée de $\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2$, on renouvelera le calcul de x .

Dans les cas où k s'approche beaucoup de l'unité, on peut entamer les approximations en utilisant l'équation

$$\frac{1}{2} \beta \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) x^3 - \alpha x = a.$$

On voit, par l'analyse précédente, combien peut être différente, la vraie valeur du coefficient d'un terme élémentaire de celle qu'on obtiendrait en employant la formule brute

$$x = \frac{a}{\sigma^2}.$$

§ 9. *De la libration.*

1. L'inégalité dans les mouvements de translation que LAPLACE nomme libration, se manifesta pour la première fois dans le système des satellites de Jupiter.

Les observations ayant prouvé que le mouvement moyen du premier satellite, moins trois fois celui du second, plus deux fois celui du troisième est toujours égal à zéro, l'auteur de la mécanique céleste en découvrit la vraie cause et établit ainsi la théorie de la libration. — Depuis lors, un long intervalle s'était accompli avant que le second cas d'une telle inégalité fut signalé, cette fois, par M. M. HALL, MARTH et NEWCOMB dans le système des satellites de Saturne. Mais ce cas étant plus compliqué que celui de LAPLACE, il paraît que la théorie en est encore susceptible de quelque perfectionnement. Il en est de même, mais à un plus haut degré encore, de quelques autres tentatives, peut-être plus intrépides que décisives, parce que les librations auxquelles visent ces essais, se trouvent mêlées avec plusieurs autres inégalités, ce qui rend extrêmement difficile leur étude.

La théorie des librations est généralement très compliquée. On ne saurait la traiter avec succès — sauf dans des cas exceptionnellement simples — sans avoir recours aux fonctions elliptiques. Cela s'entend de l'analyse communiquée dans la section II de mon mémoire de 1887; et presque en même temps, M. TISSERAND montra, d'une manière très claire, ce même fait dans une note insérée dans les Comptes rendus de l'Académie de Paris. Dans mon mémoire cependant, j'ai tenté de donner quelques renseignements sur la convergence des inégalités ordinaires, lorsque les mouvements moyens remplissent la condition de la libration; et on y peut voir qu'une grande valeur du coefficient de cette inégalité, rend douteuse la convergence de certaines autres inégalités. Donc, si l'on a obtenu, en vertu des observations, une valeur considérable du coefficient dont il s'agit — car ce coefficient est en effet une constante d'intégration — il y aurait lieu à quelques doutes de la réalité du résultat.

Que LAPLACE, alors que la théorie des fonctions elliptiques était à peine créée, ait néanmoins réussi à obtenir un résultat, q'on peut con-

sidérer comme à peu près exact, cela doit être attribué d'abord à la presque insensibilité du coefficient de la libration, mais aussi à la circonstance que la période de cette inégalité, dans le cas envisagé, est indépendante des excentricités et des inclinaisons. Dans le cas opposé, à savoir si la période de la libration dépendait des excentricités ou des inclinaisons ou de ces deux éléments ensemble, les termes horistiques l'emporteraient considérablement sur la dite période, et ils pourraient même la rendre imaginaire finalement. On peut, en effet, énoncer la règle générale que: *plus élevé est le degré d'un terme critique, moins il est probable qu'il en sortira un terme de libration.*

Dans aucune des recherches de 1887, ni dans celles de M. TISSERAND, ni dans les miennes, on n'avait pu tenir compte des termes horistiques, alors encore inconnus. C'est sur le rôle que jouent ces termes dans la théorie des librations que je vais donner quelques remarques assez rapides.

2. Considérons en premier lieu le cas simple où le coefficient de la libration est très petit, de sorte qu'on en peut négliger les puissances surpassant la première.

Si dans l'équation (7) du paragraphe précédent, on met λ et b égaux à zéro, et qu'on remplace u par v , il en résulte:

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dv^2} - \nu^2 y = -A \sin sy.$$

Voilà l'équation différentielle, d'où l'on déduit, par intégration, l'expression de l'inégalité cherchée. Après avoir développé le second membre suivant les puissances de sy et négligé les termes dont le degré surpasse le premier, on aura immédiatement l'expression analytique de l'inégalité demandée. La voici:

$$y = l \sin(\sqrt{sA - \nu^2} \cdot v - L),$$

l et L étant les deux arbitraires dont nous supposons la première très petite.

Quand le produit sA , que nous supposons toujours positif, l'emporte sur le coefficient ν^2 , aussi positif, la solution trouvée sera réelle et périodique; dans le cas opposé, c'est à dire, si:

$$\nu^2 > sA,$$

la solution sera donnée au moyen des exponentielles multipliées par des

constantes arbitraires. Evidemment, ces constantes doivent être égales à zéro.

En supposant, par impossible, le coefficient ν^2 rigoureusement égal à zéro, des librations pourraient se produire, quelque petit que fût le produit sA ; par contre, à l'état réel des choses, il y a là une limite, déterminée par la condition

$$sA - \nu^2 > 0.$$

Par ce résultat, on conclut qu'une relation linéaire de la forme

$$s_0 v + s_1 v' + s_2 v'' + \dots = \text{termes périodiques,}$$

v, v', v'', \dots étant des arguments astronomiques, et s_0, s_1, \dots des entiers quelconques, positifs ou négatifs, ne reste pas maintenue par les forces attractives, si la somme des entiers surpasse un certain nombre.

En partant de l'équation (1), il sera facile d'obtenir un résultat plus approché que le précédent. Pour y arriver, écrivons la dite équation, après avoir désigné par h un facteur constant, de la manière suivante:

$$\frac{d^2 y}{dv^2} = - (A - h) \sin sy + \nu^2 y - h \sin sy.$$

Maintenant, si l'on fait:

$$h = \frac{\nu^2}{s},$$

la somme des deux derniers termes de droite de l'équation précédente sera très petite, et on aura, en intégrant l'équation

$$\frac{d^2 y}{dv^2} = - \left(A - \frac{\nu^2}{s} \right) \sin sy,$$

une valeur très approchée de la fonction y . Pour en déduire la correction, il faut recourir à l'équation (24) de l'article III de mon mémoire *Untersuchungen über die Convergenz* etc.

3. Dans les recherches sur les librations, il faut évidemment qu'on emploie des termes horistiques aussi bien déterminés que possible. Il est donc à présumer que l'emploi de l'équation (29) du § 6, ou bien de l'équation (9) du paragraphe précédent conduise plus rapidement au résultat que ne le fait, l'équation (1). Car dans cette équation-là, la partie des termes horistiques mise en évidence est, comme on le trouve immédiatement, plus grande que dans l'équation dernièrement citée.

Reprenons donc l'équation (9) du paragraphe précédent, et remplaçons-y, pour établir dès l'abord le cas de la libration, la fonction R par le terme $-A \sin sz$. Puis, en développant ce terme suivant les puissances de sz , et en ne retenant que les deux premiers membres de ce développement, nous aurons:

$$(2) \quad \frac{d^2 z}{du^2} + (\alpha + sA)z - \left(\beta + \frac{1}{6}s^3 A\right)z^3 = 0.$$

Admettons encore les notations:

$$z = \frac{\theta}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\beta + \frac{1}{6}s^3 A\right)}}; \quad \frac{1}{\mu^2} dx^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\beta + \frac{1}{6}s^3 A\right)} du^2,$$

$$a = \frac{\alpha + sA}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\beta + \frac{1}{6}s^3 A\right)}},$$

μ étant une constante à notre disposition, et rappelons-nous que le coefficient a peut prendre des valeurs négatives aussi bien que des valeurs positives. Notre équation sera alors:

$$\mu^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + a\theta - 2\theta^3 = 0.$$

On en déduit tout de suite, en désignant par g^2 une constante d'intégration que nous supposons moindre que l'unité,

$$(3) \quad \mu^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = g^2 - a\theta^2 + \theta^4$$

$$= g^2 - \frac{1}{4}a^2 + \left(\frac{1}{2}a - \theta^2\right)^2.$$

Mettons encore:

$$\frac{1}{4}a^2 - g^2 = b^2,$$

et nous aurons:

$$(4) \quad \mu^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a - b - \theta^2\right)\left(\frac{1}{2}a + b - \theta^2\right),$$

ou bien:

$$\mu^2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \left(\frac{1}{2}a - b \right) \left(\frac{1}{2}a + b \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{\frac{1}{2}a - b} \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{\frac{1}{2}a + b} \right).$$

Donc, si nous posons:

$$\theta^2 = \left(\frac{1}{2}a - b \right) \zeta^2; \quad \frac{\frac{1}{2}a - b}{\frac{1}{2}a + b} = k^2; \quad \frac{1}{2}a + b = \mu^2,$$

il résultera:

$$\left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^2 = (1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2),$$

ce qui donne:

$$\zeta = \operatorname{sn} x; \quad \theta = \frac{g}{\mu} \operatorname{sn} x = \frac{g}{\sqrt{\frac{1}{2}a + g} \sqrt{\left(\frac{1}{2}a + g \right) \left(\frac{1}{2}a - g \right)}} \operatorname{sn} x,$$

la deuxième constante d'intégration étant renfermée dans x .

Si b était égal à zéro, le module k prendrait la valeur 1, et le cas deviendrait asymptotique. Si ensuite g devenait plus grand que $\frac{1}{2}a$, la transformation précédente conduirait à des expressions dépendant des arguments imaginaires: pour les éviter, écrivons l'équation (3) ainsi:

$$(5) \quad \mu^2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = (g + n\theta + \theta^2)(g - n\theta + \theta^2),$$

le coefficient n étant égal à $\sqrt{a + 2g}$, de sorte qu'on a:

$$2g - n^2 = -a.$$

Maintenant, si l'on introduit, au lieu de θ , une nouvelle fonction ϕ , en mettant:

$$\theta = \sqrt{g} \frac{1 - \varepsilon \operatorname{tang} \phi}{1 + \varepsilon \operatorname{tang} \phi},$$

on trouvera par un calcul pas très long:

$$\phi = \operatorname{am} x; \quad k^2 = 1 - \varepsilon^4; \quad \mu^2 = \frac{1}{4}g \left(2 + \frac{n}{\sqrt{g}} \right)^2;$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2\sqrt{g} - n}{2\sqrt{g} + n}.$$

Nous avons supposé:

$$a \leq 2g;$$

donc, le coefficient n est réel et moindre que $2\sqrt{g}$. Il s'ensuit que ε^2 , et en conséquence aussi k^2 sont des quantités réelles, positives et moindres que l'unité. Mais dans ce cas, puisque la fonction θ peut passer par l'infini, ce qui ne convient pas aux inégalités dont il s'agit, il faut mettre g égal à zéro. Donc, la libration est impossible.

En supposant:

$$a = 2g,$$

on aura:

$$n = 2\sqrt{g},$$

et en conséquence:

$$\varepsilon^2 = 0; \quad k^2 = 1;$$

on est donc retombé dans le cas asymptotique.

Supposons finalement a négatif, ce qui entraîne la forme suivante de l'équation (4):

$$\mu^2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \left(\frac{1}{2}a + b + \theta^2 \right) \left(\frac{1}{2}a - b + \theta^2 \right).$$

En mettant:

$$\theta = \frac{g}{\mu} \operatorname{tang} \phi = \sqrt{\frac{a}{2} - b} \operatorname{tang} \phi,$$

il résultera l'équation que voici:

$$\mu^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \left(\frac{1}{2}a + b \right) \left(1 - \left(1 - \frac{\frac{1}{2}a - b}{\frac{1}{2}a + b} \right) \sin^2 \phi \right).$$

Donc, les quantités

$$\mu^2 = \frac{1}{2}a + b; \quad k^2 = 1 - \frac{\frac{1}{2}a - b}{\frac{1}{2}a + b}$$

sont réelles, et le module k , moindre que l'unité. En conséquence, la fonction ϕ peut prendre toute valeur entre $-\infty$ et $+\infty$, en sorte que θ passera par l'infini. Mais cela est contre la nature des inégalités considérées, d'où l'on conclut que la libration est impossible, ce qui revient à dire qu'il faut égaler à zéro la constante g .

Par l'analyse précédente, deux choses ont été démontrées: 1° que la libration est impossible si le coefficient a est négatif; 2° que la libration peut exister si le coefficient mentionné est positif, mais seulement à condition que:

$$g < \frac{1}{2}a.$$

Or, pour les termes éloignés dans le développement de la fonction perturbatrice, le coefficient a est négatif; on en conclut que des librations ne peuvent pas s'engendrer de ces termes.
