Quelques propriétés de l'algèbre de Fourier du groupe des entiers dyadiques

Michel Gatesoupe et Yves Meyer

Introduction

$\mathbf{Z}_2$ désigne l'anneau des entiers dyadiques, limite projective des anneaux $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini. Un élément de $\mathbf{Z}_2$ est une série formelle $x=\sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j 2^j$ avec $\varepsilon_j(x)=0$ ou 1. Pour tout ξ fixé, $0<\xi<1/2$, on réalise un homéomorphisme topologique de $\mathbf{Z}_2$ avec l'ensemble E_ξ du type de l'ensemble de Cantor, construit sur $[0, 1]$ avec le rapport de dissection ξ en faisant correspondre à l'élément de $\mathbf{Z}_2$, $x=\sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j 2^j$, le point de E_ξ: $t=(1-\xi)\sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j \xi^j$.

$\mathbf{Z}_2$ est un compact parfait totalement discontinu, métrisable. On munit $\mathbf{Z}_2$ de la norme ultramétrique correspondant à la décomposition de $\mathbf{Z}_2$ en couronnes $\Delta_n=2^n\mathbf{Z}_2\diagdown 2^{n+1}\mathbf{Z}_2$, $n\in\mathbf{N}$. Pour tout x de Δ_n, c'est-à-dire pour $x=2^n+\sum_{j=n+1}^{+\infty} \varepsilon_j 2^j$, la norme de x notée $\|x\|$ est 2^{-n}.

Le groupe dual $\hat{\mathbf{Z}}_2$ est l'ensemble des caractères χ définis sur $\mathbf{Z}_2$ par $\chi(x)=\exp(2\pi i p 2^{-n}x)$ où n et p sont des entiers naturels; $n=0$ correspond au caractère identité: $\chi(x)=1$ $\forall x\in\mathbf{Z}_2$; pour $n\geqq 1$ fixé, on obtient 2^{n-1} caractères distincts correspondant aux valeurs impaires $p=1, 3, \ldots, 2^n-1$; l'entier n est appelé la hauteur de chacun de ces caractères et est notée $n=H(\chi)$.

$A(\mathbf{Z}_2)$ désigne l'algèbre de Fourier du groupe $\mathbf{Z}_2$. Pour toute application continue θ de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même et qui n'est pas affine par morceaux, l'ensemble des normes $\|\chi\circ\theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)}$ lorsque χ décrit $\hat{\mathbf{Z}}_2$ n'est pas borné, d'après le théorème classique de P. J. Cohen [2]. Cependant, nous verrons qu'il est possible de choisir θ de sorte que pour une suite de caractères distincts $(\chi_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la suite $\|\chi_n\circ\theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)}$ soit bornée. D'autre part, pour un choix convenable de θ, la croissance de $\|\chi\circ\theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)}$, lorsque χ décrit $\mathbf{Z}_2$, en fonction de la hauteur du caractère χ, peut être arbitrairement lente.

Pour le dernier résultat, on utilisera une condition suffisante de régularité assurant l'appartenance à $A(\mathbf{Z}_2)$, condition analogue à celle de S. Bernstein dans le cas du tore $\mathbf{T}$ [1]. Cette condition remplie pour une fonction numérique f définie sur $\mathbf{Z}_2$ assure de plus que la fonction associée définie sur E_ξ appartient à l'algèbre de restriction $A(E_\xi)$ définie à partir de $A(\mathbf{T})$.

On verra aussi que pour toute fonction numérique f continue sur $\mathbf{Z}_2$, il existe une application continue non constante θ de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même telle que $f\circ\theta$ appartienne à $A(\mathbf{Z}_2)$.

§ I.

Soit $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. On lui associe l'application θ de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même qui á $x=\sum_{j=0}^{+\infty}\varepsilon_j 2^j$ fait correspondre $\theta(x)=\sum_{j=0}^{+\infty}\varepsilon_j 2^{\lambda_j}$; θ est continue car lorsque $\|x-y\|=2^{-n}$ on a $\|\theta(x)-\theta(y)\|=2^{-\lambda_n}\leqq 2^{-n}$, donc pour tout couple (x,y), $\|\theta(x)-\theta(y)\|\leqq\|x-y\|$.

Lemme 1. *Si (λ_j-j) tend vers l'infini avec j, l'application θ n'est pas affine par morceaux.*

Démonstration. Une application continue affine par morceaux h de $\mathbf{Z}_2$ dans $\mathbf{Z}_2$ est associée à une partition de $\mathbf{Z}_2$ en classes $\mathbf{Z}_2/2^{n_0}\mathbf{Z}_2$ pour un entier $n_0\geqq 0$ fixé. Sur chaque classe $\Delta=a+2^{n_0}\mathbf{Z}_2$ où $a=\sum_{j=0}^{n_0-1}\varepsilon_j 2^j$ est fixé ($a=0$ si $n_0=0$), h est affine, c'est-à-dire:

$$h(x+y-z) = h(x)+h(y)-h(z) \tag{1}$$

pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de Δ.

Montrons que sur Δ on a:

$$h(x) = \alpha\cdot 2^{-n_0}(x-a)+\beta \tag{2}$$

où $\alpha(a)$ et $\beta(a)$ sont fixés dans $\mathbf{Z}_2$.

Lorsque x appartient à $\Delta\cap\mathbf{N}$ on a $x=a+p2^{n_0}$ où $p\in\mathbf{N}$. On voit facilement par récurrence, en utilisant (1), que:

$$h(a+p2^{n_0}) = p[h(a+2^{n_0})-h(a)]+h(a)$$

et ainsi (2) est vérifié lorsque $x=a+p2^{n_0}$ avec $\alpha=h(a+2^{n_0})-h(a)$ et $\beta=h(a)$.

$\mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{Z}_2$; la continuité de h entraîne donc (2) pour tout x de Δ.

Si θ était affine par morceaux, il existerait $n_0\geqq 0$ tel que sur chaque classe $\Delta=a+2^{n_0}\mathbf{Z}_2$:

$$\theta(x) = \alpha 2^{-n_0}(x-a)+\beta \quad \text{et} \quad \beta = \theta(a). \tag{3}$$

Prenant $x=a+2^{n_0+k}$, $k\in\mathbf{N}$, on a par définition de θ:

$$\theta(x) = \theta(a)+2^{\lambda(n_0+k)} \quad \text{car} \quad a = \sum_{j=0}^{n_0-1}\varepsilon_j 2^j. \tag{4}$$

D'après (3) et (4) on a $2^{\lambda(n_0+k)}=\alpha 2^k$, donc $\|\alpha\|=2^{-(\lambda(n_0+k)-k)}$. Si (λ_k-k) tend vers l'infini avec k, on aurait $\alpha=0$ et $\theta(x)=\theta(a)$ sur Δ ce qui est absurde.

Theoreme 1. *Soit $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers positifs tels que pour une constante fixée $K>\dfrac{3}{\operatorname{Log} 2}$, on ait $\lambda_{j+1}-\lambda_j \geqq K \operatorname{Log} j$. Soit θ l'application de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même, associée à la suite (λ_j). Soit $(\chi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de caractères définis sur $\mathbf{Z}_2$ par $\chi_n(x)=\exp(2\pi i 2^{-\lambda_n}x)$.*

Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$\|\chi_n\circ\theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq C.$$

Démonstration. Soit

$$x = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j 2^j, \quad \theta(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j 2^{\lambda_j}.$$

On a

$$\chi_n(\theta(x)) = \exp\left(2\pi i 2^{-\lambda_n} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j 2^{\lambda_j}\right) = \prod_{j=0}^{n-1}(1+\theta_{j,n})$$

avec

$$\theta_{j,n}(x) = \exp(2\pi i \varepsilon_j 2^{\lambda_j-\lambda_n})-1.$$

Désignons par e_j la fonction indicatrice du sous-ensemble U_j de $\mathbf{Z}_2$:

$$U_j = \{x\in\mathbf{Z}_2;\ \varepsilon_j(x) = 1\}.$$

On a

$$\theta_{j,n} = [\exp(2\pi i 2^{\lambda_j-\lambda_n})-1]\, e_j$$

et

$$\|\theta_{j,n}\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq 2\pi 2^{\lambda_j-\lambda_n} \|e_j\|_{A(\mathbf{Z}_2)}.$$

Ainsi:

$$\|\chi_n\circ\theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq \prod_{j=0}^{n-1}\left(1+2\pi 2^{\lambda_j-\lambda_n}\|e_j\|_{A(\mathbf{Z}_2)}\right). \tag{1}$$

On choisit une suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ vérifiant:

$$2^{\lambda_{j+1}} \geqq (1+j^2)\,\|e_j\|_{A(\mathbf{Z}_2)} 2^{\lambda_j}, \tag{2}$$

(λ_j) est ainsi strictement croissante et pour $j\leqq n-1$ on a:

$$\|e_j\|\, 2^{(\lambda_j-\lambda_n)} \leqq \|e_j\|\, 2^{(\lambda_j-\lambda_{j+1})} \leqq \frac{1}{1+j^2}; \tag{3}$$

ainsi d'après (1) et (3):

$$\|\chi_n\circ\theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq \sum_{j=0}^{+\infty}\left(1+\frac{2\pi}{1+j^2}\right).$$

Il reste à préciser la croissance de $\|e_j\|_{A(\mathbf{Z}_2)}$ qui détermine le choix de (λ_j).

Lemme 2. *Il existe une constante $C_1>0$ telle que pour tout entier $j\geqq 0$:*

$$\|e_j\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq C_1(1+j).$$

En admettant ce lemme, l'hypothèse $\lambda_{j+1}-\lambda_j \geqq K \operatorname{Log} j$ avec $K > \frac{3}{\operatorname{Log} 2}$ assure l'existence d'un entier $j_0 \geqq 1$ tel que l'inégalité (2) soit satisfaite pour tout $j \geqq j_0$. Il en résulte:

$$\|\chi_n \circ \theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq C_2 \, \Pi_{j=j_0}^{+\infty} \left(1+\frac{2\pi}{1+j^2}\right).$$

Démonstration du lemme 2. Considérons le caractère χ défini sur $\mathbf{Z}_2$ par:

$$\chi(x) = \exp\left(2\pi i 2^{-(j+1)} x\right) = \exp\left(2\pi i 2^{-(j+1)} \textstyle\sum_{l=0}^{j} \varepsilon_l 2^l\right).$$

χ étant considéré comme une application de $\mathbf{Z}_2$ dans $\mathbf{T}$, soit $V_j = \chi(U_j)$ et $W_j = \chi(\mathbf{Z}_2 \setminus U_j)$. Soit F une application de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{R}$ qui vaut 1 sur V_j, 0 sur W_j: ainsi $e_j = F \circ \chi$. L'application $f \to f \circ \chi$ définit un homomorphisme de $A(\mathbf{T})$ dans $A(\mathbf{Z}_2)$ de norme unité, donc:

$$\|e_j\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq \|F\|_{A(\mathbf{T})}.$$

Identifiant $\mathbf{T}$ à $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, on choisit pour $F = F_j$ la fonction 2π-périodique continue linéaire par morceaux telle que $F_j(t) = 1$ sur l'intervalle $\left[\pi, 2\pi - \frac{\pi}{2^j}\right]$ qui contient $V_j = \left\{\pi\left(1+\frac{\varepsilon_{j-1}}{2}+\dots+\frac{\varepsilon_0}{2^j}\right)\right\}$ et $F_j(t) = 0$ sur l'intervalle $\left[0, \pi - \frac{\pi}{2^j}\right]$ qui contient $W_j = \left\{\pi\left(\frac{\varepsilon_{j-1}}{2}+\dots+\frac{\varepsilon_0}{2^j}\right)\right\}$, F_j étant linéaire sur les deux intervalles de $[0, 2\pi]$ restant.

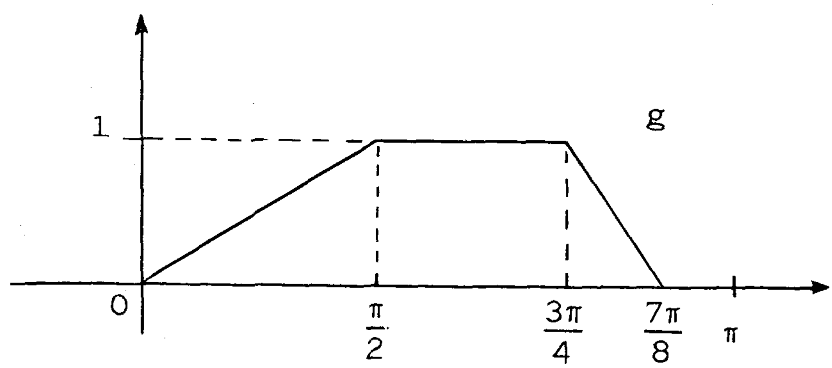
Soit $\tilde{F}_j$ la fonction 2π-périodique paire sur $\mathbf{R}$, obtenue par translation à partir de F_j, enfin soit G_j la fonction coïncidant avec $\tilde{F}_j$ sur $[-\pi, \pi]$ et nulle hors de cet intervalle.

Le lemme 2 résulte alors du:

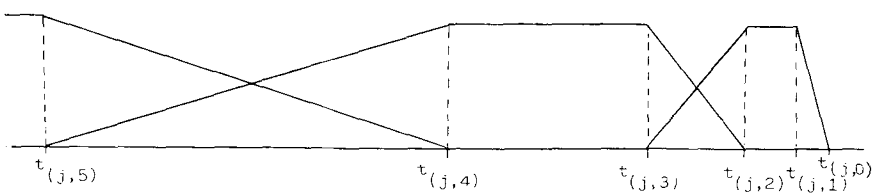
Lemme 3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $j \geqq 0$:*

$$\|G_j\|_{A(\mathbf{R})} \leqq C(1+j).$$

Démonstration. Soit g la fonction continue définie sur $\mathbf{R}$ à support $\left[0, \frac{7\pi}{8}\right]$, égale à 1 sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, linéaire sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}\right]$.



Pour tout entier $l \geqq 0$ on considère la fonction g_l définie sur $\mathbf{R}$, $g_l(t)=g(2^l t)$. Pour $j \geqq 3$, considérons la suite finie de nombres positifs décroissant à partir de $t_{(j,0)}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^{j+1}}$ définie par $t_{(j,l+1)}=t_{(j,l)}-\frac{\pi}{2^{j-l}}$, $l=0, 1, \ldots, j-1$. On considère la translatée de la fonction g_{j-3} dont le support est l'intervalle $[t_{(j,3)}, t_{(j,0)}]$, soit g^*_{j-3} cette fonction. De

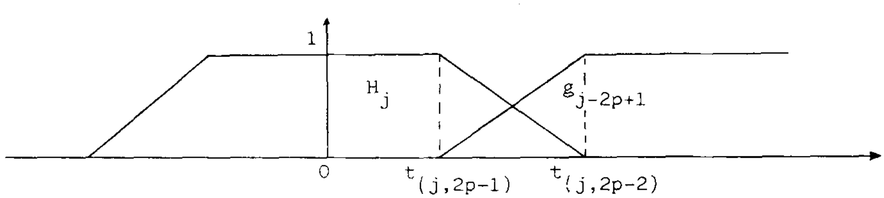


façon générale, on considère pour toutes les valeurs possibles $m=0, 1, 2, \ldots$ la fonction translatée g_{j-2m-3} dont le support est l'intervalle $[t_{(j,2m+3)}, t_{(j,2m)}]$ soit g^*_{j-2m-3} cette fonction. m doit vérifier $2m+3 \leqq j-1$.

Soit $p=\left[\frac{j}{2}\right]$ la partie entière de $\frac{j}{2}$; m prend donc toutes les valeurs $0, 1, \ldots, p-2$. Sur la demi-droite $[t_{(j,2p-2)}, +\infty[$ on a $G_j(t)=\sum_{m=0}^{p-2} g^*_{j-2m-3}(t)$. Par symétrie sur $]-\infty, -t_{(j,2p-2)}]$, on a $G_j(t)=\sum_{m=0}^{p-2} g^*_{j-2m-3}(-t)$. Ainsi:

$$Gj(t) = H_j(t)+\sum_{m=0}^{p-2}[g^*_{j-2m-3}(t)+g^*_{j-2m-3}(-t)] \tag{1}$$

où H_j est la fonction paire linéaire par morceaux telle que $H_j(t)=1$ sur $[-t_{(j,2p-1)}, t_{(j,2p-1)}]$, $H_j(t)=0$ pour $|t| \geqq t_{(j,2p-2)}$ et H_j est linéaire sur l'intervalle $[t_{(j,2p-1)}, t_{(j,2p-2)}]$ et l'intervalle symétrique:



ainsi $\sup |H'_j(t)| \leqq \sup |g'_{j-2p+1}(t)|$.

Or $j-2p+1=1$ ou 2 selon la parité de j. Ainsi il existe une constante $M>0$ telle que pour tout j: $\sup |H_j'(t)| \leqq M$. Par ailleurs $|H_j(t)| \leqq 1$ et H_j est à support compact, donc il existe $C_1>0$ telle que pour tout $j \geqq 0$: $\|H_j\|_{A(R)} \leqq C_1$.

D'après (1), avec $\|g_1^*\|_{A(\mathbf{R})} = \|g_1\|_{A(\mathbf{R})} = \|g\|_{A(\mathbf{R})}$, on a:

$$\|G_j\|_{A(\mathbf{R})} \leqq C_1 + 2(p-1)\|g\|_{A(\mathbf{R})} \leqq C(1+j)$$

ce qui achève la démonstration.

§ II.

Soit φ une application croissante de $[0, +\infty[$ dans lui-même avec $\varphi(0)=0$. $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$ désigne l'espace des fonctions continues à valeurs complexes définies sur $\mathbf{Z}_2$ dont le module de continuité

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\|x-y\| \leqq \delta} |f(x)-f(y)|$$

vérifie la condition $\omega_f(\delta) = O(\varphi(\delta))$ lorsque $\delta \to 0$.

Theoreme 2. *Si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2} \varphi(2^{-n})$ *converge, alors* $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$ *est contenu dans* $A(\mathbf{Z}_2)$.

Cette condition suffisante est la même que celle du théorème classique de S. Bernstein [1], relatif au tore $\mathbf{T}$. La démonstration donnée par A. Zygmund [5] s'adapte de façon éclairante au cas de $\mathbf{Z}_2$:

On considère la série de Fourier d'une fonction f appartenant à $L^2(\mathbf{Z}_2)$:

$$f(x) \sim \sum_{\chi \in \hat{\mathbf{Z}}_2} c_\chi \chi(x).$$

Pour tout $h \in \mathbf{Z}_2$ fixé, la série de Fourier de $f(x+h)$ est:

$$f(x+h) \sim \sum_{\chi \in \hat{\mathbf{Z}}_2} c_\chi \chi(h) \chi(x)$$

et d'après le théorème de Plancherel:

$$\int_{\mathbf{Z}_2} |f(x+h)-f(x)|^2 dx = \sum_{\chi \in \hat{\mathbf{Z}}_2} |c_\chi|^2 |\chi(h)-1|^2. \tag{1}$$

Pour chaque entier $n \geqq 1$, considérons les 2^{n-1} caractères χ de hauteur $H(\chi)=n$, définis sur $\mathbf{Z}_2$ par $\chi(x) = \exp(2\pi i p 2^{-n} x)$ où p prend les valeurs impaires $1, 3, \ldots, 2^n-1$.

D'après l'inégalité de Schwarz:

$$\sum_{H(\chi)=n} |c_\chi| \leqq 2^{(n-1)/2} \Big(\sum_{H(\chi)=n} |c_\chi|^2\Big)^{1/2}. \tag{2}$$

Considérons les couronnes $\Delta_n = 2^{n-1}\mathbf{Z}_2 \setminus 2^n\mathbf{Z}_2$ pour $n \geqq 1$. La hauteur de χ étant n, lorsque h appartient à Δ_n, on a:

$$\chi(h) = \exp\left[2\pi i p 2^{-n}\left(2^{n-1} + \sum_{j=n}^{+\infty} \varepsilon_j 2^j\right)\right] = \exp \pi i p = -1$$

donc $|\chi(h)-1| = 2$. Ainsi, pour tout h fixé dans Δ_n:

$$\sum_{H(\chi)=n} |c_\chi|^2 = \frac{1}{4} \sum_{H(\chi)=n} |c_\chi|^2 |\chi(h)-1|^2.$$

Donc, d'après (1):

(3) $$\sum_{H(\chi)=n} |c_\chi|^2 \leqq \frac{1}{4} \int_{\mathbf{Z}_2} |f(x+h)-f(x)|^2 \, dx.$$

Lorsque f appartient à $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$, il existe une constante $C_f > 0$ telle que pour tout $\delta > 0$:

$$\sup_{\|h\| \leqq \delta} |f(x+h)-f(x)| \leqq C_f \varphi(\delta)$$

et lorsque h appartient à Δ_n, $\|h\| = 2^{-n+1}$. On a donc:

(4) $$|f(x+h)-f(x)| \leqq C_f \varphi(2^{-n+1})$$

et d'après (3) et (4):

(5) $$\left(\sum_{H(\chi)=n} |c_\chi|^2\right)^{1/2} \leqq 1/2\, C_f \varphi(2^{-n+1})$$

ce qui, avec (2), donne:

$$\sum_{H(\chi)=n} |c_\chi| \leqq 1/2\, C_f 2^{(n-1)/2} \varphi(2^{-n+1})$$

donc:

$$\sum_{\chi \in \mathbf{Z}_2} |c_\chi| = |c_1| + \sum_{n \geqq 1} \left(\sum_{H(\chi)=n} |c_\chi|\right) \leqq |c_1| + 1/2\, C_f \sum_{n \geqq 1} 2^{(n-1)/2} \varphi(2^{-n+1})$$

ce qui achève la démonstration.

Ce résultat suggère la recherche d'une réciproque. Il suggère aussi de comparer $A(\mathbf{Z}_2)$ avec l'algèbre de restriction $A(E_\xi)$ de $A(\mathbf{T})$ pour $0 < \xi < 1/2$ fixé.

Le théorème suivant va dans cette direction.

L'homéomorphisme J qui associe au point $t = (1-\xi) \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j \xi^j$ de E_ξ le point $x = J(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j 2^j$ de $\mathbf{Z}_2$ associe bijectivement à une fonction f définie sur $\mathbf{Z}_2$ la fonction $f \circ J$ définie sur E_ξ.

Theoreme 3. *Soit φ une application croissante de $[0, +\infty[$ dans lui-même avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\delta_1 + \delta_2) \leqq \varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2)$ pour tout couple $(\delta_1, \delta_2) \geqq 0$. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2} \varphi(2^{-n})$ converge, pour tout ξ fixé, $0 < \xi < 1/2$, les fonctions associées sur E_ξ aux fonctions de $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$ appartiennent à l'algèbre de restriction $A(E_\xi)$.*

Démonstration. ξ étant fixé, soit (x, y) un couple de $\mathbf{Z}_2$, (s, t) le couple associé de E_ξ, $x=J(s)$, $y=J(t)$. On a $\|x-y\|=2^{-n}$ pour un $n\geqq 0$ unique et:

(1) $$(1-2\xi)\xi^n \leqq |s-t| \leqq \xi^n.$$

Soit f une fonction de $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$ et $F=f\circ J$ la fonction associée sur E_ξ. On a:

$$|F(s)-F(t)| = |f(x)-f(y)| \leqq C_f\varphi(2^{-n}).$$

Posons $|s-t|=\delta$, $\varrho=\dfrac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} \xi^{-1}}$, $A=\exp\left(\dfrac{\operatorname{Log} 2 \operatorname{Log}(1-2\xi)^{-1}}{\operatorname{Log} \xi^{-1}}\right)$; on a: $\delta^\varrho\leqq 2^{-n}\leqq A\delta^\varrho$.

La condition $\varphi(\delta_1+\delta_2)\leqq\varphi(\delta_1)+\varphi(\delta_2)$ assure qu'il existe une constante $K>0$ telle que pour tout δ:

$$\varphi(A\delta^\varrho) \leqq K\varphi(\delta^\varrho)$$

et ainsi $\varphi(\delta^\varrho)\leqq\varphi(2^{-n})\leqq K\varphi(\delta^\varrho)$.

Soit $\tilde{\varphi}$ définie sur $[0, +\infty[$ par $\tilde{\varphi}(u)=\varphi(u^\varrho)$.

$\tilde{\varphi}$ est croissante, $\tilde{\varphi}(0)=0$ et $\tilde{\varphi}(u_1+u_2)\leqq\tilde{\varphi}(u_1)+\tilde{\varphi}(u_2)$.

Les espaces $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$ et $\Lambda_{\tilde{\varphi}}(E_\xi)$ se correspondent donc bijectivement par l'homéomorphisme J.

D'après un théorème de J. P. Kahane et R. Salem [3], la condition:

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n/2}\tilde{\varphi}(\xi^n) < +\infty$$

assure que $\Lambda_{\tilde{\varphi}}(E_\xi)$ est contenu dans $A(E_\xi)$. Or $\tilde{\varphi}(\xi^n)=\varphi(\xi^{n\varrho})$ et $\xi^{n\varrho}=2^{-n}$; donc (2) se réduit à la condition $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n/2}\varphi(2^{-n})<+\infty$.

§ III.

Pour tout $r>0$, considérons la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$, $\varphi(u)=u^r$. L'espace $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$ est noté $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_2)$.

Lemme 4. *Pour toute fonction f à valeurs complexe continue sur $\mathbf{Z}_2$ et pour tout $r>0$, il existe une application θ de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même, non constante, telle que $f\circ\theta$ appartienne à $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_2)$.*

Démonstration. Soit $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs et θ l'application associée de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même définie en I. La fonction f continue de $\mathbf{Z}_2$ dans $\mathbf{C}$ étant donnée, on choisit une fonction φ croissante de $[0, +\infty[$ dans lui-même avec $\varphi(0)=0$ telle que pour tout $\delta>0$ et module de continuité de f vérifie $\omega_f(\delta)\leqq c\varphi(\delta)$. Lorsque $\|x-y\|=2^{-n}$, on a $\|\theta(x)-\theta(y)\|=2^{-\lambda_n}$ donc:

$$\left|f(\theta(x))-f(\theta(y))\right| \leqq c\varphi(2^{-\lambda_n}).$$

Choisissons (λ_n) strictement croissante telle que $\varphi(2^{-\lambda_n})\leqq 2^{-nr}$. On a, pour tout $\delta>0$, $\sup_{\|x-y\|\leqq\delta}\left|f(\theta(x))-f(\theta(y))\right|\leqq c\delta^r$ ainsi $f\circ\theta$ appartient à $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_2)$.

(*) Un problème ouvert posé par Lusin est de trouver pour chaque fonction f continue à valeurs complexes définie sur $\mathbf{T}$ un homéomorphisme h de $\mathbf{T}$ sur lui-même tel que $f \circ h$ appartienne à $A(\mathbf{T})$. Le problème analogue pour $\mathbf{Z}_2$ a été résolu par B. Wells Jr [4]. En corollaire immédiat du lemme 4 et du théorème 2 (prendre $r > 1/2$), on obtient un résultat moins précis mais de démonstration très simple.

Proposition 4. *Pour toute fonction f continue à valeurs complexes définie sur $\mathbf{Z}_2$, il existe une application continue non constante θ de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même telle que $f \circ \theta$ appartienne à $A(\mathbf{Z}_2)$.*

Nous terminons en montrant qu'il est possible de choisir une application θ de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même qui n'est pas affine par morceaux et telle que $\|\chi \circ \theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)}$ ait une croissance arbitrairement lente en fonction de la hauteur du caractère χ.

Theoreme 5. *Soit ψ une application croissante, non bornée, de $\mathbf{N}$ dans $[1, +\infty[$. Il existe une application continue θ de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même qu n'est pas affine par morceaux et une constante $C > 0$ telles que pour tout caractère χ de hauteur n on ait:*

$$\|\chi \circ \theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq C\psi(n).$$

Démonstration. Soit $(\lambda_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $(\lambda_j - j)$ tend vers l'infini avec j. L'application associée θ de $\mathbf{Z}_2$ dans lui-même n'est pas affine par morceaux. Soit χ un caractère quelconque de hauteur n définie sur $\mathbf{Z}_2$ par $\chi(x) = \exp(2\pi i p 2^{-n} x)$ où p vaut $1, 3, \ldots, 2^n - 1$.

Pour toute fonction φ croissante de $[0, +\infty[$ dans lui-même avec $\varphi(0) = 0$, considérons $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$; χ et $\chi \circ \theta$ appartiennent à $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$ pour tout φ, car n étant la hauteur de χ, lorsque $\|x - y\| \leqq 2^{-n}$, on a $\chi(x) = \chi(y)$ et $\|\theta(x) - \theta(y)\| \leqq 2^{-\lambda_n} \leqq 2^{-n}$, donc aussi $\chi(\theta(x)) = \chi(\theta(y))$. En particulier, $\chi \circ \theta$ appartient à $\mathscr{C}^1(\mathbf{Z}_2)$ qui est un espace de Banach pour la norme:

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1(\mathbf{Z}_2)} = \sup_{x \in \mathbf{Z}_2} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|}. \tag{1}$$

Comme $\mathscr{C}^1(Z_2) \subset_* A(\mathbf{Z}_2)$ d'après le théorème 2, il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$\|f\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq M \|f\|_{\mathscr{C}^1(\mathbf{Z}_2)}. \tag{2}$$

χ appartenant à $\Lambda_\varphi(\mathbf{Z}_2)$, il existe une constante $A > 0$ dépendant de χ et de φ, $A = A(\chi, \varphi)$, telle que:

$$|\chi(u) - \chi(v)| \leqq A(\chi, \varphi)\varphi(\|u - v\|) \tag{3}$$

pour tout couple (u, v) de $\mathbf{Z}_2$. En particulier:

$$|\chi(\theta(x)) - \chi(\theta(y))| \leqq A(\chi, \varphi)\varphi(\|\theta(x) - \theta(y)\|). \tag{4}$$

(*) La réponse, négative, vient d'être apportée par A. M. Olevskii "Change of variables..." Soviet Math. Dokl. Vol. 23 (1981), No 1.

φ étant fixé, on choisit la suite (λ_j) de sorte que:

$$\varphi(2^{-\lambda_j}) \leqq 2^{-j} \quad j \in \mathbf{N}.$$

Alors, pour $\|x-y\|=2^{-j}$, on a $\|\theta(x)-\theta(y)\|=2^{-\lambda_j}$ et d'après (4):

$$\left|\chi(\theta(x))-\chi(\theta(y))\right| \leqq A(\chi, \varphi)2^{-j}$$

donc

$$\left|\chi(\theta(x))-\chi(\theta(y))\right| \leqq A(\chi, \varphi)\|x-y\|$$

et d'après (1):

$$\|\chi\circ\theta\|_{\mathscr{C}^1(\mathbf{Z}_2)} \leqq 1+A(\chi, \varphi)$$

et d'après (2):

$$\|\chi\circ\theta\|_{A(\mathbf{Z}_2)} \leqq M\big(1+A(\chi, \varphi)\big).$$

Pour $\|x-y\| \leqq 2^{-n}$, on a $\chi(x)=\chi(y)$, donc:

$$A(\chi, \varphi) = \sup_{x \neq y} \frac{|\chi(x)-\chi(y)|}{\varphi(\|x-y\|)} = \sup_{\|x-y\| \geqq 2^{-n+1}} \frac{|\chi(x)-\chi(y)|}{\varphi(\|x-y\|)}$$

donc $A(\chi, \varphi) \leqq \dfrac{2}{\varphi(2^{-n+1})}$.

On choisit φ de sorte que $M\left(1+\dfrac{2}{\varphi(2^{-n+1})}\right) \leqq C\psi(n)$.

References

1. S. Bernstein, Voir [5].
2. P. J. Cohen, On homomorphisms of group algebras. *Am. J. Math.* **82** (1960), 213—226.
3. J. P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* Paris Hermann 1963, chap. X.
4. B. Wells Jr., Rearrangements of functions on the ring of integers of a p-series field. *Pacific J. Math.* **65** (1976), 253—259.
5. A. Zygmund, *Trigonometric series* **I, II**. Chap. VI-3, Cambridge University Press, 1959.

Received September 5, 1980

Michel Gatesoupe
Institut de Mathematique
Universite de Nantes
2 Chemin de la Houssinniere
44072 Nantes Cedex
France

Yves Meyer
Departement de Mathematiques
Universite de Paris Sud
91405 Orsay
France