Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynômiale

Laurent Saloff-Coste

Résumé. On déduit des estimations gaussiennes supérieures du noyau de la chaleur des estimations du même type pour les premières dérivées spatiales. On obtient ainsi des estimations gaussiennes inférieures du noyau de la chaleur. On donne des applications de ces résultats.

Abstract. From Gaussian upper bounds on the heat kernel we deduce similar upper bounds on the first space derivatives of the heat kernel. Gaussian lower bounds on the heat kernel are deduced and some applications are given.

I. Introduction

Soit G un groupe de Lie réel et connexe, à croissance polynômiale du volume, c'est-à-dire tel que pour un voisinage compacte symétrique Ω de l'origine dans G on ait $|\Omega^n| \cong n^D$, $\forall n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, pour un certain $D \in \mathbf{N}^*$ (par $f(t) \cong g(t)$ on entend que le rapport est compris entre deux constantes strictement positives) : G est muni d'une mesure de Haar et $|\Omega|$ est la mesure de $\Omega \subset G$. L'hypothèse que G est à croissance polynômiale entraîne qu'il est unimodulaire, voir [8]. Rappelons qu'un groupe de Lie réel, connexe est nilpotent si son algèbre de Lie est nilpotente. Plus précisément notant $\mathscr{L}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$, $\mathscr{L}_i = [\mathscr{L}_{i-1}, \mathscr{L}]$, $i = 1, 2, \dots$, G est nilpotent de rang r si $\mathscr{L}_{r+1} = \{0\}$ et $\mathscr{L}_r \neq \{0\}$. Les groupes de Lie nilpotents sont à croissance polynômiale et si G est nilpotent simplement connexe l'indice D est donné par : $D = \sum_{i=1}^{r} i \dim [\mathscr{L}_i / \mathscr{L}_{i+1}]$. Le but principal de ce travail est d'étendre à tous les groupes à croissance polynômiale des résultats déjà connus pour les groupes nilpotents, voir [19], [21]. Cette extension nécessite l'utilisation de méthodes différentes, comme le montrent en particulier des résultats de [1].

Soient $X_1, \dots, X_n$ des champs invariants à gauche sur G qui, avec leurs crochets de tous ordres engendrent l'algèbre de Lie de G (c'est l'hypothèse de Hörmander). A ces champs est associée une distance, invariante à gauche, dite distance du contrôle (voir [19], par exemple). Etant donné l'importance de cette distance dans la suite, voici brièvement comment elle est obtenue : soit l: $[0, 1] \to G$ un chemin absolument continu. Si $l'(t)=\sum_{i=1}^n a_i(t)X_i(\gamma(t))$ p. p. sur [0, 1], on pose $|l|=\int_0^1(\sum|a_i(t)|^2)^{1/2}dt$, et $|l|=+\infty$, sinon. La distance du contrôle associée à $\{X_1, \ldots, X_n\}$ entre x et y dans G est alors l'infimum des « longueurs » $|l|$ des chemins absolument continus l joignant x à y. L'invariance à gauche des champs $\{X_1, \ldots, X_n\}$ entraîne immédiatement l'invariance à gauche de la distance associée. Nous noterons $|x|$ la distance de l'élément neutre e de G à $x\in G$, de sorte que la distance entre x et y est $|y^{-1}x|$. Nous notons $\gamma(t)$ le volume des boules de rayon t associées à cette distance. Par hypothèse, on a $\gamma(t)\cong t^D$ pour $t\geqq 1$. En ce qui concerne le volume des boules de rayon $0<t\leqq 1$, rappelons qu'il existe un entier $d\in\mathbf{N}^*$ tel que $\gamma(t)\cong t^d$, $0<t\leqq 1$, voir [19], [9].

On considère le semi-groupe de la chaleur sur G, $H_t=e^{-t\Delta}$, associé à $\Delta=-\sum_i^n X_i^2$ (on ne distinguera pas ici l'opérateur différentiel Δ de son extension de Friedrichs). L'invariance à gauche de Δ et l'hypoellipticité de $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ impliquent que H_t admet un noyau de convolution $(t, x)\to h_t(x)\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^{+*}\times G)$ tel que : $H_tf(x)=\int_G h_t(y^{-1}x)f(y)dy$, pour $f\in\mathscr{C}_0^\infty(G)$. Dans [10] on a donné une preuve simple et directe du théorème suivant de N. Varopoulos [19] :

Théorème V. *Si G, $X_1, \ldots, X_n$ sont comme ci-dessus, alors*

$$h_t(e)\leqq c[\gamma(\sqrt{t})]^{-1},\quad 0<t<+\infty,$$

On sait d'autre part, voir [6], [19], [20], que ce résultat entraîne

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}h_t(x)\right|\leqq c_k\gamma(\sqrt{t})^{-1}t^{-k}\exp\left(\frac{-|x|^2}{c_k t}\right),\quad (t, x)\in\mathbf{R}^{+*}\times G.$$

La principale contribution de ce travail consiste à remarquer que ces résultats impliquent aussi la

Proposition 1. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a pour $i\in\{1, \ldots, n\}$, $k\in\mathbf{N}$:*

$$\left|X_i\frac{\partial^k}{\partial t^k}h_t(x)\right|\leqq c_k\gamma(\sqrt{t})^{-1}t^{-k-1/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{c_k t}\right),\quad (t, x)\in\mathbf{R}^{+*}\times G.$$

Les estimations des dérivées spatiales du noyau de la chaleur fournies par cette proposition sont essentielles à de nombreux résultats d'analyse. On développe ci-dessous des applications au théorème de plongement de Sobolev et à l'étude des espaces de Hardy et de Lipschitz. Une autre application de la proposition 1 est d'obtenir une estimation inférieure du noyau :

Proposition 2. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a :*

$$h_t(x)\geqq[c\gamma(\sqrt{t})]^{-1}\exp\left(-\frac{c|x|^2}{t}\right),\quad (t, x)\in\mathbf{R}^{+*}\times G.$$

Finalement, en utilisant la méthode de E. Fabes et D. Stroock [7], nous obtenons un théorème de Harnack parabolique :

Théorème 1. *Sous les hypothèses ci-dessus et étant donnés* $0<\alpha<\beta<1$, $0<\gamma<1$, *il existe une constante c telle que pour tout* $(s, x)\in \mathbf{R}\times G$, *tout* $R>0$ *et toute solution positive* $u\in\mathscr{C}^\infty([s-R^2, s]\times\bar{B}(x, R))$ *de* $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u=0$ *dans* $]s-R^2, s[\times B(x, R)$ *on ait :*

$$u(t, y) \leqq cu(s, x), \quad (t, y)\in[s-\beta R^2,\ s-\alpha R^2]\times\bar{B}(x, \gamma R).$$

Le théorème 1 contient évidemment les résultats de [22] concernant les fonctions harmoniques (solutions de $\Delta u=0$), notamment la non-existence des fonctions harmoniques positives sur G non constantes.

Les propositions 1 et 2 et le théorème 1 sont prouvés dans le dernier paragraphe. Le second paragraphe traite des espaces de Lipschitz, le troisième du théorème de Sobolev et des inégalités de Trudinger, le quatrième de l'espace de Hardy H^1. Au cinquième paragraphe, on obtient des résultats partiels, mais significatifs, concernant les transformées de Riesz.

II. Espaces de Lipschitz

On note $\Delta_y f(x)=f(xy)-f(x)$ et on considère sur $\mathscr{C}_0^\infty(G)$ les normes :

$$\mathsf{L}_\alpha^{p,q}(f)=\left(\int_G\left(\frac{\|\Delta_y f\|_p}{|y|^\alpha}\right)^q\frac{dy}{\gamma(|y|)}\right)^{1/q}$$

$$\Lambda_\alpha^{p,q}(f)=\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{1-\alpha/2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}H_t f\right\|_p\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

avec $1\leqq p,\ q\leqq+\infty$ (et la modification classique si $q=+\infty$) et $0<\alpha<1$.

Théorème 2. *Soient* $0<\alpha<1$, $1\leqq p, q\leqq+\infty$, *alors sous les hypothèses du premier paragraphe les normes* $\mathsf{L}_\alpha^{p,q}$ *et* $\Lambda_\alpha^{p,q}$ *sont équivalentes sur* $\mathscr{C}_0^\infty(G)$.

Preuve. Les grandes lignes sont celles du cas classique $G=\mathbf{R}^n$, voir [16], [15], reprises aussi dans [14] dans le cas où G est stratifié. Prouvons pour commencer que $\Lambda_\alpha^{p,q}(f)\leqq c\mathsf{L}_\alpha^{p,q}(f)$, $f\in\mathscr{C}_0^\infty(G)$. Nous avons $\int_G\frac{\partial}{\partial t}h_t(x)=0$ et donc :

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}H_t f\right\|_p\leqq\int_G\left|\frac{\partial}{\partial t}h_t(y)\right|\|\Delta_y f\|_p\,dy.$$

Des estimations gaussiennes du noyau $\frac{\partial}{\partial t} h_t$ on déduit :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} H_t f \right\|_p \leqq c t^{-1} \gamma(\sqrt{t})^{-1} \int_{|y|^2<t} \|\Delta_y f\|_p \, dy + c \int_{|y|^2 \geqq t} |y|^{-2} \gamma(|y|)^{-1} \|\Delta_y f\|_p \, dy,$$

puis: $\Lambda_\alpha^{p,q}(f) \leqq \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_G K(t,y) g(y) \frac{dy}{\gamma(|y|)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$, avec $g(y) = \|\Delta_y f\|_p / |y|^\alpha$ et $K(t,y) = c t^{-\alpha/2} |y|^\alpha \left[t |y|^{-2} \chi_{\{|y|^2 \geqq t\}} + \gamma(\sqrt{t})^{-1} \gamma(|y|) \chi_{\{|y|^2 < t\}} \right]$; où χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A. On vérifie que: $\int_G K(t,y) \frac{dy}{\gamma(|y|)} \leqq c$ et $\int_0^{+\infty} K(t,y) \frac{dt}{t} \leqq c$, ce qui implique classiquement:

$$\Lambda_\alpha^{p,q}(f) \leqq c \left(\int |g(y)|^q \frac{dy}{\gamma(|y|)} \right)^{1/q} = c \mathrm{L}_\alpha^{p,q}(f).$$

Prouvons maintenant que $\mathrm{L}_\alpha^{p,q}(f) \leqq c \Lambda_\alpha^{p,q}(f)$, $f \in \mathscr{C}_0^\infty(G)$.

Lemme 1. $\|X_i h_t\|_1 \leqq c t^{-1/2}$, $t > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Il s'agit d'une conséquence de la proposition 1. On a :

$$\int |X_i h_t(x)| \, dx \leqq c t^{-1/2} \gamma(\sqrt{t})^{-1} \int \exp\left(-\frac{|x|^2}{ct} \right) dx,$$

et

$$\int_{|x|^2 \leqq t} \exp\left(-\frac{|x|^2}{ct} \right) dx \leqq c \gamma(\sqrt{t}),$$

$$\int_{|x|^2 \geqq t} \exp\left(-\frac{|x|^2}{ct} \right) dx \leqq c \sum_{\mathbf{N}} \exp(-2^n) \gamma((2^n t)^{1/2}) \leqq c \gamma(\sqrt{t}),$$

d'après les propriétés de la fonction γ, ce qui prouve le lemme. On écrit alors $f = -\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} H_s f \, ds + H_t f$, puis :

$$\|\Delta_y f\|_p \leqq 2 \int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial s} H_s f \right\|_p ds + \|\Delta_y H_t f\|_p. \tag{1}$$

Le lemme 1 et la propriété de semi-groupe impliquent :
$\left\| \frac{\partial}{\partial t} X_i H_t f \right\|_p \leqq c t^{-1/2} \left\| \frac{\partial}{\partial t} H_{t/2} f \right\|_p$, d'où l'on déduit :

$$\|X_i H_t f\|_p \leqq \int_t^{+\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial s} X_i H_s f \right\|_p ds \leqq c \int_{t/2}^{+\infty} s^{-1/2} \left\| \frac{\partial}{\partial s} H_s f \right\|_p ds.$$

Par définition de la distance du contrôle, on a donc :

$$(2)\qquad \|\Delta_y H_t f\|_p \leqq c|y|\left(\sum_{i=1}^n \|X_i H_t f\|_p\right) \leqq c|y| \int_{t/2}^{+\infty} s^{-1/2} \left\|\frac{\partial}{\partial s} H_s f\right\|_p ds.$$

En posant $|y|^2=t$, (1) et (2) donnent :

$$\mathsf{L}_\alpha^{p,q}(f) \leqq c\left(\int_G \left(\int_0^{+\infty} K'(s,y)\, g'(s) \frac{ds}{s}\right)^q \frac{dy}{\gamma(|y|)}\right)^{1/q}$$

avec

$$g'(s) = s^{1-\alpha/2} \left\|\frac{\partial}{\partial s} H_s f\right\|_p$$

et

$$K'(s,y) = c|y|^{-\alpha} s^{\alpha/2}(\chi_{\{s\leqq|y|^2\}} + s^{-1/2}|y|\,\chi_{\{2s\geqq|y|^2\}}).$$

Comme précédemment on déduit $\mathsf{L}_\alpha^{p,q}(f) \leqq c\Lambda_\alpha^{p,q}(f)$ des estimations : $\int_G K'(s,y)\dfrac{dy}{\gamma(|y|)} \leqq c$, et $\int_0^{+\infty} K'(s,y)\dfrac{ds}{s} \leqq c$, ce qui termine la preuve du théorème 2.

III. Théorème de Sobolev et inégalités de Trudinger

Introduisons sur $\mathscr{C}_0^\infty(G)$ les normes de Sobolev définies par : $\|f\|_{p,0}=\|f\|_p$, $\|f\|_{p,\alpha}=\sum_{i=1}^n \|X_i f\|_{p,\alpha-1}$, $\alpha\in\mathbf{N}^*$, $1\leqq p\leqq+\infty$, ainsi que les normes de Lipschitz : $\Lambda_\beta(f)=\sup_{t>0}\left\{t^{k-\beta/2}\left\|\dfrac{\partial^k}{\partial t^k} H_t f\right\|_\infty\right\}$, où $0<\beta<+\infty$ et $k=\inf\{n\in\mathbf{N}|n>\beta\}$ (en particulier, si $0<\beta<1$, $\Lambda_\beta \cong \Lambda_\beta^{\infty,\infty}$). Dans ce paragraphe on supposera que $d\leqq D$.

Théorème 3. *Soient* $\alpha\in\mathbf{N}^*$, $1\leqq p<+\infty$, $n\in[d, D]$.

i) *Si* $\alpha p<n$ *et* $q=pn/(n-\alpha p)$, *alors* $\|f\|_q \leqq c\|f\|_{p,\alpha}$, $f\in\mathscr{C}_0^\infty(G)$.

ii) *Si* $\alpha p>n$ *et* $\beta=\alpha-n/p$ *alors* $\Lambda_\beta(f)\leqq c\|f\|_{p,\alpha}$, $f\in\mathscr{C}_0^\infty(G)$.

Le résultat i) est dû à N. Varopoulos [19]. Nous en donnons ici une autre preuve reposant sur les résultats de [10] et la proposition 1. On vérifie qu'il suffit de prouver i) avec $\alpha=p=1$ et l'on sait d'autre part (voir [21]) que les estimations : $h_t(e)\leqq ct^{-n/2}$ et $\|X_i h_t\|_1 \leqq ct^{-1/2}$ pour $t>0$, entraînent automatiquement l'inégalité : $\|f\|_{n/(n-1)} \leqq c\|f\|_{1,1}$, ce qui prouve i) d'après les résultats de [10] et le lemme 1. La seconde partie du théorème est très facile. Considérons seulement le cas $\alpha=1$, les autres se traitant de la même façon. Ecrivons :

$$-\frac{\partial}{\partial t} H_t f = \Delta H_t f = -\sum_{i=1}^n H_t X_i X_i f.$$

Du lemme 1 et de la propriété de semi-groupe on déduit que $\|X_i h_t\|_q \leqq ct^{-1/2-n/2p}$,

$t>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. D'autre part $\|X_i h_t\|_q$ domine la norme d'opérateur $\|H_t X_i\|_{p\to\infty}$ par dualité, ce qui donne

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} H_t f\right| \leqq ct^{-1+(1-n/p)/2}\|f\|_{p,1}, \quad t>0,$$

qui est le résultat recherché. Le théorème 2 permet d'interpréter ii) quand $0<\beta<1$.

Remarque. Si $\alpha p\in]d,D[\neq\emptyset$ on a à la fois $\|f\|_q\leqq c\|f\|_{p,\alpha}$ et $\Lambda_\beta(f)\leqq c\|f\|_{p,\alpha}$ pour certains $q\in]p,+\infty[$ et certains $\beta\in]0,\alpha[$. En fait on vérifie facilement que l'on a $\|f\|_\infty\leqq c\|f\|_{p,\alpha}$, $f\in\mathscr{C}_0^\infty(G)$, voir [5].

Pour compléter le théorème 3 il reste à étudier les cas limites $\alpha p=d$ et $\alpha p=D$ qui correspondent quand $G=\mathbf{R}^n$, aux inégalités de Trudinger [17].

Théorème 4. *Si* $1<p<+\infty$, $\alpha p=d$ *ou* $\alpha p=D$, *il existe une constante c telle que :*

$$\int_\Omega \exp\left[(f(x)/c\|f\|_{p,\alpha})^{p/(p-1)}\right] dx \leqq c|\Omega|$$

pour tout $f\in\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, Ω *ouvert de* G.

Preuve du théorème 4. On peut retrouver f à partir de ses dérivés d'ordre α fixé de la façon suivante : si α est pair, $\alpha=2k$, on a (en notant $f*g(x)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)\,dy$) :

$$f=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{+\infty} t^{k-1}H_t\Delta^k f\,dt=\Delta^k f*T_\alpha, \quad \text{où} \quad T_\alpha=c_\alpha\int_0^{+\infty} t^{\alpha/2-1}h_t\,dt.$$

Si $\alpha=2k-1$ est impair, on a :

$$f=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{+\infty} t^{k-1}H_t\Delta^k f\,dt=\sum_{i=1}^n c_\alpha\int_0^{+\infty} t^{k-1}H_tX_i^2\Delta^{k-1}f\,dt,$$

et

$$H_tX_i^2\Delta^{k-1}f(x)=\int_G h_t(x^{-1}y)X_i^2\Delta^{k-1}f(y)\,dy=-\int_G X_ih_t(x^{-1}y)X_i\Delta^{k-1}f(y)\,dy$$

et finalement :

$$f=\sum_1^n X_i\Delta^{k-1}f*T_{\alpha,i} \quad \text{où} \quad T_{\alpha,i}(x)=c_\alpha\int_0^{+\infty} t^{(\alpha-1)/2}X_ih_t(x^{-1})\,dt.$$

Lemme 2. *Avec les notations ci-dessus on a :*

si $\alpha\neq d$, $0<\alpha<D$, $|T_\alpha(x)|\leqq c\gamma(|x|)^{-1}|x|^\alpha$, $x\in G$;

si $\alpha=d<D$, $|T_\alpha(x)|\leqq c(\chi_B(x)\log(|x|^{-1})+\gamma(|x|)^{-1}|x|^\alpha)$;

où $B=\{x/|x|\leqq 1\}$. *Les mêmes estimations sont valables pour* $T_{\alpha,i}$, $i\in\{1,\dots,n\}$.

Le lemme 2 est élémentaire à partir des estimations fournies par la proposition 1.

Lemme 3. *Si* $0<\alpha<D$, $1<p<+\infty$, $\alpha p=d$ *ou* $\alpha p=D$ *alors :*

$$\|f\|_r \leqq c r^{1-1/p} |\Omega|^{1/r} \|f\|_{p,\alpha}, \quad 1<r<+\infty, \quad \Omega \text{ ouvert } \subset G.$$

A partir du lemme 3, on conclut la preuve du théorème 4 en développant la fonction exponentielle en série, voir [17], [11]. La preuve du lemme 3 repose sur le

Lemme 4. *Soit* $B=\{|x|\leqq 1\}$, $B^c=\{|x|>1\}$.

$$\int_\Omega \frac{\chi_B(x^{-1}\xi)}{|x^{-1}\xi|^{d-\beta}}\, d\xi \leqq c\beta^{-1}|\Omega|^{\beta/d}, \quad 0<\beta<d,$$

$$\int_\Omega \frac{\chi_{B^c}(x^{-1}\xi)}{|x^{-1}\xi|^{D-\beta}}\, d\xi \leqq c\beta^{-1}|\Omega|^{\beta/D}, \quad 0<\beta<D,$$

pour tout ouvert $\Omega\subset G$.

On a en effet:

$$\int_\Omega \frac{\chi_B(x^{-1}\xi)}{|x^{-1}\xi|^{d-\beta}}\, d\xi \leqq \int_{|x^{-1}\xi|\leqq \inf(1,|\Omega|^{1/d})} \frac{d\xi}{|x^{-1}\xi|^{d-\beta}}$$

$$\leqq c\sum_0^{+\infty} (2^{-n}\inf(1,|\Omega|^{1/d}))^\beta \leqq c\beta^{-1}|\Omega|^{\beta/d},$$

pour tout $0<\beta<d$; l'autre inégalité se traite de la même façon.

Il reste à prouver le lemme 3. Supposons pour fixer les idées que α est pair et $\alpha p=d<D$, et écrivons :

$$f=\Delta^{\alpha/2}f*T_\alpha=\Delta^{\alpha/2}f*T^0+\Delta^{\alpha/2}f*T^\infty, \quad \text{avec} \quad T^0=\chi_B T_\alpha.$$

Comme $\alpha p=d<D$ et $T^\infty(x)\leqq c(1+|x|)^{-D+\alpha}$, nous obtenons : $T^\infty\in L^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et donc $\|\Delta^{\alpha/2}f*T^\infty\|_\infty\leqq c\|\Delta^{\alpha/2}f\|_p$ et la contribution de $\Delta^{\alpha/2}f*T^\infty$ à $\|f\|_r$ est donc contrôlée. En ce qui concerne $\Delta^{\alpha/2}f*T^0$, on reprend les calculs explicités dans [17], [11] en utilisant le lemme 4 pour terminer la preuve du lemme 3.

Dans le cas où $\alpha p=D>d$ les rôles de T^0 et T^∞ sont échangés ; dans le cas où $\alpha p=d=D$, on n'effectue plus de découpage et les calculs sont ceux de [11]. Ceci termine la preuve du théorème 4.

IV. Espace de Hardy

L'espace de Hardy $H^1_{\max}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^1$ tel que $f^+ = \sup_{t>0} |H_t f| \in L^1$. L'espace de Hardy atomique H^1_{at} est l'espace des fonctions $f \in L^1$ qui admettent une décomposition $f = \sum \lambda_n a_n$ où $\sum |\lambda_n| < +\infty$ et les a_n sont des atomes. Rappelons qu'un atome est ici une fonction a telle que $\int a = 0$ et qu'il existe une boule B telle que $\operatorname{supp}(a) \subset B$ et $\|a\|_\infty \leqq |B|^{-1}$. Ces deux espaces sont munis de leur norme naturelle. Rappelons enfin que l'espace BMO est l'ensemble des fonctions $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ (modulo les constantes) telles que :

$\sup_B \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \right\} < +\infty$, pour toute boule B, où f_B est la moyenne de f sur B.

Théorème 5. *Sous les hypothèses du premier paragraphe on a :*

$$H^1_{\max} = H^1_{at} \quad \textit{et donc} \quad (H^1_{\max})^* = BMO.$$

Pour prouver le théorème 5 nous nous référerons simplement aux résultats de [18] comme c'était déjà le cas dans [12]. Plus précisément, nous considérons sur G la quasi-distance (cf. [18]) : $d(x, y) = \gamma(|x^{-1}y|)$ et posons pour une constante $a > 0$ à choisir :

$$K(r, x, y) = a\gamma(t) h_{t^2}(y^{-1}x), \quad \text{pour} \quad (x, y) \in G \times G \quad \text{et} \quad r = \gamma(t) > 0,$$

de sorte que:

$$f^+ = \sup_{t>0} |H_t f| = \frac{1}{a} \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{r} \left| \int_G K(r, x, y) f(y)\, dy \right| \right\}.$$

De l'estimation $h_t(x) \leqq c[\gamma(\sqrt{t})]^{-1} \exp\left(-\frac{|x|^2}{ct}\right)$, on déduit que pour tout $N > 0$:

$$K(r, x, y) \leqq aC_N \left(1 + \frac{d(x, y)}{r}\right)^{-N}, \quad (r, x, y) \in \mathbf{R}^{+*} \times G \times G. \tag{40}$$

De $h_t(e) \geqq [c\gamma(\sqrt{t})]^{-1}$ (voir [19], par exemple), on déduit évidemment :

$$K(r, x, x) \geqq ac^{-1} > 0, \quad (r, x) \in \mathbf{R}^{+*} \times G. \tag{41}$$

De la proposition 1 et de la définition de la distance sur G on déduit :

$$|h_t(x) - h_t(xz)| \leqq c\gamma(\sqrt{t})^{-1} |z|\, t^{-1/2} \exp(-|x|^2/ct)$$

pour $(t, x, z) \in \mathbf{R}^{+*} \times G \times G$ avec $|z| \leqq (\sqrt{t} + |x|)/2$.

On en déduit par des calculs élémentaires qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

(42) $$|K(r, x, y) - K(r, x, z)| \leqq aC_N(d(y, z)/r)^\delta (1 + d(x, y)/r)^{-N}$$

dès que $(r, x, y, z) \in \mathbf{R}^{++} \times G^3$ vérifie $d(y, z) < (r + d(x, y))/4c$.

On peut alors choisir $a > 0$ pour que (40), (41), (42) soient exactement les propriétés requises pour appliquer les résultats de [18] (§ 4 — p. 586 de [18]).

V. Un résultat sur les transformées de Riesz

Notons, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $R_i = X_i \Delta^{-1/2}$. Les opérateurs R_i sont trivialement bornés sur L^2 puisque :

$$\sum_{i=1}^n \|X_i \Delta^{-1/2} f\|_2^2 = -\sum_{i=1}^n (X_i^2 \Delta^{-1/2} f, \Delta^{-1/2} f) = (\Delta^{1/2} f, \Delta^{-1/2} f) = \|f\|_2^2.$$

D'autre part R_i est donné par la convolution à droite par un noyau K_i, $R_i f = f * K_i$ et K_i s'exprime sous la forme :

$$K_i = c \int_0^{+\infty} t^{-1/2} X_i h_t \, dt.$$

Soit $\tilde{X}_i$ le champ invariant à droite sur G qui coïncide avec X_i à l'origine. On a :

Proposition 3. i) $|K_i(x)| \leqq c\gamma(|x|)^{-1}$, $x \in G$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

ii) $|\tilde{X}_i K_j(x)| \leqq c(|x| \gamma(|x|))^{-1}$, $x \in G$, $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$.

La propriété i) est une conséquence élémentaire de la proposition 1 et de la représentation du noyau K_i donnée ci-dessus. Pour obtenir ii) remarquons tout d'abord que, notant $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ on a $\tilde{X}_i \check{f} = -(X_i f)\check{}$; et comme $h_t = \check{h}_t$, la proposition 1 donne :

$$|\tilde{X}_i h_t(x)| = |(X_i h_t)(x^{-1})| \leqq ct^{-1/2} \gamma(\sqrt{t})^{-1} \exp(-|x|^2/ct).$$

On en déduit (voir le lemme 5 ci-dessous) que :

$$\int e^{2\alpha|x|} |\tilde{X}_i h_t(x)|^2 \, dx \leqq ct^{-1} \gamma(\sqrt{t})^{-1} e^{\alpha^2 t}, \quad t > 0, \ \alpha > 0.$$

D'autre part, $X_i \tilde{X}_j h_t(x) = \tilde{X}_j X_i h_t(x) = \int X_i h_{t/2}(y^{-1}x) \tilde{X}_j h_{t/2}(y) dy$. Ce qui donne pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} |e^{\alpha|x|} X_i \tilde{X}_j h_t(x)| &\leqq \int |X_i h_{t/2}(y^{-1}x)| |\tilde{X}_j h_{t/2}(y)| e^{\alpha|y^{-1}x|} e^{\alpha|y|} \, dy \\ &\leqq ct^{-1} \gamma(\sqrt{t})^{-1} e^{\alpha^2 t}. \end{aligned}$$

En optimisant sur $\alpha > 0$ pour x et t fixé, comme au paragraphe VI—1 ci-dessous on obtient finalement :

$$|X_i \tilde{X}_j h_t(x)| \leqq ct^{-1}\gamma(\sqrt{t})^{-1} \exp(-|x|^2/ct)$$

ce qui conduit immédiatement au ii) de la proposition 3.

Changeons de notations en posant $k_i(x, y) = K_i(y^{-1}x)$ de sorte que $R_i f(x) = \int k_i(x\ y) f(y)\, dy$. Les estimations i) et ii) de la proposition 3 se traduisent en :

$$|k_i(x, y)| \leqq c\gamma(|y^{-1}x|)^{-1},$$

$$|k_i(x, y) - k_i(x, y_0)| \leqq c\,|y_0^{-1}y|\,[|y_0^{-1}x|\,\gamma(|y_0^{-1}x|)]^{-1}, \quad \text{si} \quad 2\,|y_0^{-1}y| \leqq |y_0^{-1}x|.$$

Le groupe G muni de sa mesure de Haar et de la distance du contrôle étant un espace de type homogène « à la Coifman—Weiss », les estimations de k_i obtenues ci-dessus donnent (cf. [3] [4]):

Théorème 6. *Pour tout* $i \in \{1, \dots n\}$ *l'opérateur* R_i *est borné sur* H^1_{at}, *de* L^1 *dans* L^1*-faible et donc de* L^p *dans* L^p *pour* $1 < p \leqq 2$.

Corollaire. *Pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$ *l'opérateur* $R_i^* = \Delta^{-1/2} X_i$ *est borné de BMO dans BMO et de* L^p *dans* L^p *pour* $2 \leqq p < +\infty$.

Le corollaire est immédiat puisque R_i^* est bien l'adjoint de $-R_i$. Remarquons que l'opérateur R_i^* a pour noyau $k_i^*(x, y) = -k_i(y, x) = -K_i(x^{-1}y)$. Pour appliquer la méthode ci-dessus afin d'obtenir la bornitude de R_i^* sur H^1_{at} il faudrait savoir contrôler correctement $X_i X_j h_t$ (i.e. par $ct^{-1}\gamma(\sqrt{t})^{-1} \exp(-|x|^2/ct)$, $x \in G$, $t > 0$), ce que nous ne savons pas faire, et pour cause : un contre-exemple récent, construit par G. Alexopoulos [1] montre qu'une telle estimation est impossible et qu'en général l'opérateur $X_i^2 \Delta^{-1}$ n'est pas borné, même sur L^2. Pour terminer notons que l'interpolation complexe fournit des résultats (sans aucun doute partiels) sur la bornitude des opérateurs $R_{\alpha,\beta} = \Delta^{-\alpha} X_i \Delta^{-\beta}$, $\alpha + \beta = 1/2$, sur les espaces L^p, $1 < p < +\infty$.

Remarque. En fait on obtient par la méthode ci-dessus la bornitude de R_i sur H^p_{at} pour p assez proche de 1 (cf. [4]). Cette remarque vaut aussi pour le paragraphe précédent au sens où $H^p_{\mathrm{at}} = H^p_{\max}$ pour p assez proche de 1 (voir [18]).

VI. Estimations du noyau et inégalité de Harnack

VI—1. Preuve de la proposition 1. On reprend ici les idées déjà utilisées par l'auteur dans [13]. On suppose $k=0$, le cas où $k \in \mathbf{N}^*$ étant similaire. Des estimations gaussiennes de $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k} h_t$ rappelées au premier paragraphe on déduit en utilisant les hypothèses faites sur le volume :

Lemme 5. $\left\|e^{\alpha|\cdot|}\dfrac{\partial^k}{\partial t^k}h_t(\cdot)\right\|_2 \leqq c_k\gamma(\sqrt{t})^{-1/2}t^{-k}\exp[c_k\alpha^2 t]$, *pour* $t>0$, $\alpha\geqq 0$.

En effet: $\left\|e^{\alpha|\cdot|}\dfrac{\partial^k}{\partial t^k}h_t(\cdot)\right\|_2^2 \leqq c_k\gamma(\sqrt{t})^{-2}t^{-2k}\int_G \exp\left[2\alpha|x|-\dfrac{2|x|^2}{ct}\right]dx$. Un calcul élémentaire montre que $2\alpha|x|-\dfrac{2|x|^2}{ct}\leqq c'\alpha^2 t-\dfrac{|x|^2}{c't}$ pour tout $\alpha\geqq 0$, $t>0$, $x\in G$, ce qui avec les mêmes calculs qu'au lemme 1, donne le résultat. Ecrivons $X_i h_t(x)=\int_G h_{t/2}(y)X_i h_{t/2}(y^{-1}x)\,dy$ et utilisons l'inégalité triangulaire pour obtenir :

$$|e^{\alpha|x|}X_i h_t(x)| \leqq \|e^{\alpha|\cdot|}h_{t/2}(\cdot)\|_2\,\|e^{\alpha|\cdot|}X_i h_{t/2}(\cdot)\|_2.$$

$\|e^{\alpha|\cdot|}h_{t/2}(\cdot)\|_2$ est contrôle par le lemme 5. Nous nous permettrons d'utiliser abusivement la notation $X_i e^{\alpha|x|}$ et le fait que $|X_i e^{\alpha|x|}|\leqq\alpha e^{\alpha|x|}$ qui est (formellement) une conséquence immédiate de la définition de la distance sur G. Notons $E_i=\|e^{\alpha|\cdot|}X_i h_{t/2}(\cdot)\|_2$:

$$E_i^2=-\int_G X_i e^{2\alpha|x|}X_i h_{t/2}(x)h_{t/2}(x)\,dx-\int_G e^{2\alpha|x|}X_i^2 h_{t/2}(x)h_{t/2}(x)\,dx$$

et donc

$$E_i^2\leqq\sum_{i=1}^n E_i^2=-\sum_{i=1}^n\int_G X_i e^{2\alpha|x|}X_i h_{t/2}(x)h_{t/2}(x)\,dx-\int_G e^{2\alpha|x|}\Delta h_{t/2}(x)h_{t/2}(x)\,dx$$
$$\leqq c\|e^{2\alpha|\cdot|}h_{t/2}(\cdot)\|_2(\alpha\|\Delta^{1/2}h_{t/2}\|_2+\|\Delta h_{t/2}\|_2),$$

puisque $\sum_1^n\|X_i h_{t/2}\|_2\leqq c\|\Delta^{1/2}h_{t/2}\|_2$. On obtient en utilisant le lemme 5 :

$$|e^{\alpha|x|}X_i h_t(x)|\leqq c\gamma(\sqrt{t})^{-1}t^{-1/2}\exp(c\alpha^2 t).$$

Notons que nous avons utilisé pour majorer $\|\Delta^{1/2}h_{t/2}\|_2$ l'estimation classique : $\|\Delta^{1/2}H_t f\|_2\leqq ct^{-1/2}\|f\|_2$, $f\in L^2$ obtenue par exemple par théorie spectrale. Finalement, le choix de $\alpha=|x|/2ct$, conduit à :

$$|X_i h_t(x)|\leqq c\gamma(\sqrt{t})^{-1}t^{-1/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4ct}\right),$$

ce qui termine la preuve de la proposition 1.

VI—2. Preuve de la proposition 2. Rappelons (voir [19] par exemple) que l'on a : $h_t(e)\geqq[c\gamma(\sqrt{t})]^{-1}$, $t>0$. C'est une simple conséquence de l'estimation gaussienne supérieure et de l'hypothèse faite sur le volume : Par un calcul similaire à celui du lemme 1, on montre qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $A\geqq 1$ on ait :

$$\int_{|x|^2\geqq At}h_t(x)\,dx\leqq cA^{-\alpha},\quad t>0.$$

On peut donc trouver A tel que :

$$\int_{|x|^2\leqq At}h_t(x)\,dx=1-\int_{|x|^2>At}h_t(x)\,dx\geqq 1/2.$$

pour tout $t>0$; et on obtient ainsi :

$$\gamma(\sqrt{At})\, h_t(e) \geqq \int_{|x|^2 \leqq At} h_t(x)\, dx \geqq 1/2, \quad t > 0.$$

Lemme 6. *Il existe $a>0$ tel que :*

$$h_t(x) \geqq \left[c\gamma(\sqrt{t})\right]^{-1}, \quad t > 0, \quad |x|^2 \leqq at.$$

En effet nous avons:

$$|h_t(e) - h_t(x)| \leqq c\,|x| \sup\left\{|X_i h_t(y)|,\ i \in \{1, \ldots, n\},\ |y| \leqq 2\,|x|\right\}$$

et donc:

$$h_t(x) \geqq \left[c\gamma(\sqrt{t})\right]^{-1} - \frac{c\,|x|}{\sqrt{t}}\, \gamma(\sqrt{t})^{-1} \geqq (c^{-1} - c\sqrt{a})\,\gamma(\sqrt{t})^{-1},$$

ce qui donne le lemme 6 (on a utilisé la proposition 1).

L'argument qui permet d'obtenir la proposition 2 à partir du lemme 6 est classique (voir [7] par exemple). Nous pouvons supposer que $|x|^2 > at$, sinon le lemme 6 donne le résultat voulu. On a, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in G$:

$$\text{(4)} \qquad h_t(x) = \left[(H_{t/N})^{N-1} h_{t/N}\right](x)$$

$$\geqq \int_{S(x,N)} h_{t/N}(x_1^{-1}x)\, h_{t/N}(x_2^{-1}x_1) \ldots h_{t/N}(x_{N-1})\, dx_1 \ldots dx_{N-1}$$

avec : $S(x, N) = \left\{(x_1, \ldots, x_{N-1}) / |x_i^{-1} y_i| \leqq \dfrac{|x|}{N}\right\}$, où $y_0 = x, y_1, \ldots, y_N = e$ est une suite de points vérifiant $|y_{i+1}^{-1} y_i| \leqq \dfrac{2\,|x|}{N}$, $i \in \{0, \ldots, N-1\}$. Par construction, on a alors pour $(x_1, \ldots, x_{N-1}) \in S(x, N)$: $|x_{i+1}^{-1} x_i| \leqq \dfrac{4\,|x|}{N}$, (avec $x_0 = x$, $x_N = e$). Choisissons $N \in \mathbf{N}^*$ tel que : $N - 1 \leqq 16\,|x|^2/at < N$, de sorte que pour tout $(x, \ldots, x_{N-1}) \in S(x, N)$, $|x_{i+1}^{-1} x_i|^2 \leqq \dfrac{at}{N}$, ce qui permet d'utiliser le lemme 6 dans (4) et d'obtenir pour tout $t>0$:

$$h_t(x) \geqq \left[c\gamma(\sqrt{t/N})\right]^{-N} \left[\gamma\left(\frac{|x|}{N}\right)\right]^{N-1} \geqq c^{-N} \gamma(\sqrt{t})^{-1},$$

la dernière inégalité provenant du choix de $N \cong \dfrac{|x|^2}{t}$, et donc :

$$h_t(x) \geqq \left[c\gamma(\sqrt{t})\right]^{-1} \exp\left(-\frac{c\,|x|^2}{t}\right), \quad (t, x) \in \mathbf{R}^{+*} \times G,$$

ce qui prouve la proposition 2.

VI—3. Preuve du théorème 1. Nous suivons ici la démarche de [7] auquel nous renvoyons le lecteur pour d'autres références. Il est cependant important de remarquer qu'il existe une différence essentielle entre le problème résolu dans [7] et le nôtre: dans [7] les auteurs se ramènent à prouver l'équivalent du théorème 1 avec $R=1$ grâce aux propriétés d'invariance des hypothèses par dilatation de l'espace. Dans notre cas le théorème 1 avec $R=1$ est essentiellement contenu dans [2] et toute la difficulté est de prouver que la constante C dans l'inégalité de Harnack est indépendante de $R>0$.

Fixons donc $R>0$ et, par translation, supposons que $x=e$ est l'élément neutre de G. $B(R)$ est la boule de centre e et de rayon R.

Soit $h_t^R(x, y)$, $t\in\mathbf{R}^+$, $x, y\in B(R)\times B(R)$ la solution fondamentale de $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u=0$, avec condition de Dirichlet au bord, dans $\mathbf{R}^{+*}\times B(R)$. Autrement dit $u(t, x)=h_t^R(x, y)$ vérifie pour chaque $y\in B(R)$ $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u=0$, $u=0$ sur $\mathbf{R}^{+*}\times\partial B(R)$ et $u(0, x)=\delta(x^{-1}y)$.

Nous utiliserons les deux faits suivants concernant h^R :

(5) Pour chaque $t>0$ et chaque $y\in B(R)$ il existe une mesure μ_y, positive et de masse totale inférieure à 1 portée par $[0, t[\times\partial B(R)$ telle que :

$$h_t^R(x, y) = h_t(x^{-1}y)-\int_{[0,t[\times\partial B(R)} h_{t-r}(x^{-1}z)\,\mu_y(dr\times dz),$$

(6) Pour toute solution positive u de $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u=0$ dans $[a, b]\times B(R)$ on a :

$$u(t, x) \geqq \int_{B(R)} u(s, y)\,h_{t-s}^R(x, y)\,dy,$$

$$x\in B(R),\quad s\in[a, b],\quad t\in[a, b],\quad t>s.$$

Lemme 7. *Soit* $\delta\in]0, 1[$, *il existe une constante* $c>0$ *telle que :*

$$h_t^R(x, y) \geqq [c\gamma(\sqrt{t})]^{-1}\exp\left[-c\frac{|x^{-1}y|^2}{t}\right],$$

$$R>0,\quad 0<t\leqq R^2,\quad (x, y)\in B(\delta R)\times B(\delta R).$$

En effet (5) donne, pour $x\in B(\delta R)$, $y\in B(R)$ et $t>0$, en utilisant les estimations gaussiennes de h :

$$h_t^R(x, y)\geqq [c\gamma(\sqrt{t})]^{-1}\exp\left[-\frac{c\,|x^{-1}y|^2}{t}\right]-c\sup_{0<r\leqq t}\left\{\gamma(\sqrt{r})^{-1}\exp\left[-\frac{(1-\delta)^2R^2}{cr}\right]\right\},$$

d'où l'on déduit qu'il existe r dépendant de δ et c, mais pas de R, tel que :

$$h_t^R(x, y)\geqq [2c\gamma(\sqrt{t})]^{-1}\exp\left[-\frac{c\,|x^{-1}y|^2}{t}\right] \tag{7}$$

pour $x\in B(\delta R)$, $y\in B(R)$, $|x^{-1}y|\leqq rR$, $t\in[0, (rR)^2]$.

Considérons $0<\delta'<\delta<1$, $x\in B(\delta' R)$, $y\in B(\delta' R)$ et $|x^{-1}y|>rR$, $t\in[0,(rR)^2]$. Nous pouvons relier x à y en restant dans $B(\delta' R)$, (par exemple en passant par l'élément neutre e de G) par un chemin de longueur inférieure à $2R$. Soit alors y_i, $i=\{0,\dots,n\}$ des points pris sur ce chemin tels que $y_0=x$, $y_n=y$ et $|y_i^{-1}y_{i+1}|\leqq\dfrac{2R}{n}$.

Notons B_i la boule $B\left(y_i,\dfrac{rR}{3}\right)$ et choisissons $n\in]6/r,(6/r)+1]$ de sorte que : $\dfrac{2R}{n}<\dfrac{rR}{3}$. Si $z_i\in B_i$, nous avons alors $|z_i^{-1}z_{i+1}|<rR$, ce qui permet d'assurer d'après (7)

$$h^R_{t/n}(z_i,z_{i+1})\geqq[2c\gamma(\sqrt{t/n})]^{-1}\exp\left(-\frac{cn(rR)^2}{t}\right). \tag{8}$$

Par ailleurs $B(\delta R)\cap B_i$ contient $B(y_i,(\delta-\delta')R)$ dès que $(\delta-\delta')<r/3$ et donc $|B(\delta R)\cap B_i|\geqq\gamma((\delta-\delta')R)$. Cette dernière inégalité, (8), et la propriété de semi-groupe donnent :

$$\begin{aligned}h^R_t(x,y)&\geqq[2c\gamma(\sqrt{t/n})]^{-n}\exp\left(-\frac{cn^2(rR)^2}{t}\right)[\gamma((\delta-\delta')R)]^{n-1}\\&\geqq[A\gamma(\sqrt{t})]^{-1}\exp\left[-\frac{A|x^{-1}y|^2}{t}\right].\end{aligned}$$

Il reste donc à examiner le cas où $x\in B(\delta' R)$, $y\in B(\delta' R)$ et $t\in[(rR)^2,R^2]$. On choisit $n\in]r^{-2},r^{-2}+1]$, de sorte que $t/n\leqq(rR)^2$. La propriété de semi-groupe et ce qui précède fournissent alors :

$$h^R_t(x,y)\geqq[\gamma(\delta' R)]^{n-1}[A\gamma(\sqrt{t/n})]^{-n}\exp\left[-\frac{An^2(\delta' R)^2}{(rR)^2}\right]\geqq[A'\gamma(\sqrt{t})]^{-1},$$

qui est suffisant pour conclure la preuve du lemme 7.

Posons pour $(s,x)\in\mathbf{R}\times G$ et $u\in\mathscr{C}^\infty([s-\varrho^2,s]\times B(x,\varrho))$:

$$\operatorname{Osc}(u,s,x,\varrho)=\sup\{|u(t,y)-u(t',y')|\,;\ (t,y),(t',y')\in[s-\varrho^2,s]\times B(x,\varrho)\}.$$

Lemme 8. *Pour tout* $0<\delta<1$, *il existe* $0<a<1$ *tel que*

$$\operatorname{Osc}(u,s,x,\delta\varrho)\leqq a\operatorname{Osc}(u,s,x,\varrho),$$

dès que $(s,x)\in\mathbf{R}\times G$, $u\in\mathscr{C}^\infty([s-\varrho^2,s]\times B(x,\varrho))$, *et* $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u=0$ *dans* $]s-\varrho^2,s[\times B(x,\varrho)$, $\varrho>0$.

La preuve du lemme 8, à partir du lemme 7 est identique à celle du lemme (5—2) de [7] p. 335 et nous y renvoyons le lecteur.

Nous sommes prêts à présent pour la preuve du théorème 1. Comme indiqué plus haut, nous supposerons $x=e$, mais aussi $s=0$; u est donc une solution positive de $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u=0$ dans $]-R^2, 0[\times B(R)$. Nous pouvons supposer $u(0,0)=1$ et d'après (6) et le lemme 7 nous avons pour tout $t\in]-R^2, -\alpha R^2[$, $0<\delta'<1$:

$$1 = u(0,0) \geqq \int_{B(\delta' R)} h^R_{-t}(0,x)\, u(t,x)\, dx \geqq \frac{\lambda}{A\gamma(R)} |S(t,\lambda,R)|$$

où $S(t,\lambda,R)=\{x\in B(\delta' R);\ u(t,x)\geqq\lambda\}$, et l'on a donc pour tout $t\in]-R^2, -\alpha R^2[$ et tout $\lambda>0$, $|S(t,\lambda,R)|\leqq A\gamma(R)\lambda^{-1}$.

Supposons que $(t,y)\in]-R^2, -\alpha R^2[\times S(t,\lambda,R)$ et que λ est assez grand pour que, si l'on définit $T=T(\lambda)$ par $\gamma(T)=\frac{2A\gamma(R)}{\sigma\lambda}$ avec $\sigma=\frac{1}{2}(1-a)$, a étant la constante apparaissant dans le lemme 8, on ait : $t-(2T)^2\in]-R^2, -\alpha R^2[$ et $B(y,2T)\subset B(\delta' R)$, alors on a :

$$|B(y,T)| = \gamma(T) = 2A\gamma(R)(\sigma\lambda)^{-1} \geqq A\gamma(R)(\sigma\lambda)^{-1} \geqq |S(t,\sigma\lambda,R)|,$$

donc il existe $z\in B(y,T)$ tel que $u(t,z)<\sigma\lambda$. Cela implique en utilisant le lemme 8 :

$$\operatorname{Osc}(u,t,y,2T) \geqq \frac{1}{a}\operatorname{Osc}(u,t,y,T) \geqq \frac{1}{a}|u(t,y)-u(t,z)|$$

$$\geqq \frac{1}{a}(\lambda-\sigma\lambda) = \lambda\left(\frac{1+a}{2a}\right) = b\lambda$$

avec $b>1$. Il existe donc $(t',y')\in[t-(2T)^2, t]\times B(y,2T)$ tels que $u(t',y')\geqq \operatorname{Osc}(u,t,y,2T)\geqq\lambda b$.

Fixons $\delta<\delta'<1$ et soit $\lambda>0$ tel qu'il existe $(t_0,y_0)\in]-\beta R^2, -\alpha R^2[\times B(\delta R)$ avec $u(t_0,y_0)\geqq\lambda$.

Par l'argument précédent nous pouvons construire une suite de points (t_n,y_n) telle que :

$$u(t_n,y_n)\geqq b^n\lambda$$
$$t_n\in\left[t_0-\textstyle\sum_1^{n-1}(2T_k)^2, t_0\right];\ y_n\in B\left(\delta+\textstyle\sum_1^{n-1}T_k\right)$$

où T_k est défini par $\gamma(T_k)=\frac{2A\gamma(R)}{\sigma\lambda b^{k-1}}$.

Pour pouvoir passer du rang n au rang $n+1$ dans cette construction nous devons nous assurer que :

$$t_0-\textstyle\sum_1^n(2T_k)^2>-R^2 \quad\text{et}\quad \delta R+2\textstyle\sum_1^n T_k<\delta' R.$$

Finalement nous aurons terminé la preuve du théorème 1 si nous pouvons trouver un $\Lambda>0$, indépendant de R tel que pour tout $\lambda\geqq\Lambda$:

$$(*)\qquad -\beta R^2-\textstyle\sum_1^\infty(2T_k)^2>R^2 \quad\text{et}\quad \delta R+2\textstyle\sum_1^\infty T_k<\delta' R.$$

En effet dans ce cas, l'existence de (t_0, y_0) dans $]-\beta R^2, -\alpha R^2[\times B(\delta R)$ tel que $u(t_0, x_0) > A$, impliquerait que u n'est pas bornée dans $[-R^2, 0]\times \bar{B}(R)$, ce qui est absurde. Pour prouver l'existence de A remarquons que si $R \leqq 1$ $T_k \leqq cR(\lambda^{-1}b^{-k+1})^{1/d}$ et donc $(*)$ se réduit à : $-\beta-4c^2\lambda^{-2/d}b^{2/d}/(b^{2/d}-1) > -1$ et $\delta+2c\lambda^{-1/d}b^{1/d}/(b^{1/d}-1) < \delta'$, ce qui prouve l'existence de A dans ce cas. Si $R \geqq 1$, soit N le premier entier tel que $\dfrac{2A\gamma(R)}{\sigma\lambda b^{N-1}} \leqq 1$, alors pour $k \leqq N$, $T_k \leqq cR(\lambda^{-1}b^{-k+1})^{1/D}$ et $\sum_1^N (2T_k)^2 \leqq c'\lambda^{-2/D}R^2$, $\sum_1^N 2T_k \leqq c'\lambda^{-1/D}R$; tandis que si $k > N$, on a $T_k \leqq cR^{D/d}(\lambda^{-1}b^{-k+1})^{-1/d} \leqq 1$ et donc :

$$\text{si} \quad d \leqq D, \quad T_k \leqq cR(\lambda^{-1}b^{-k+1})^{-1/d}$$

$$\text{si} \quad d < D, \quad T_k \leqq \left(cR^{D/d}(\lambda^{-1}b^{-k+1})^{-1/d}\right)^{d/D} = cR(\lambda^{-1}b^{-k+1})^{-1/D}.$$

Dans tous les cas nous obtenons finalement la réduction de $(*)$ à $-\beta-c\lambda^{-\alpha} > -1$ et $\delta+c'\lambda^{-\alpha'} < \delta'$ pour des constantes c, c', α, α' positive et indépendante de R, ce qui termine la preuve du théorème 1.

Bibliographie

1. ALEXOPOULOS, G., Quelques propriétés des fonctions harmoniques positives sur les groupes de Lie résolubles à croissance polynômiale du volume, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), 337—338.
2. BONY, J. M., Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité des problèmes de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **19** (1969), 277—304.
3. COIFMAN, R. et WEISS, G., *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math. **242** Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1971.
4. COIFMAN, R. et WEISS, G., Extensions of Hardy spaces and their uses in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 569—645.
5. COULHON, TH. et SALOFF-COSTE, L., Théorèmes de Sobolev pour les semi-groupes d'opérateurs et application aux groupes de Lie unimodulaires, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **309** (1989), 289—294.
6. DAVIES, E. B., Explicit constants for Gaussian upper-bounds on heat kernels, *Amer. J. Math.* **109** (1987), 319—333.
7. FABES, E. B. et STROOCK, D. W., A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **96** (1986), 327—338.
8. GUIVARC'H, Y., Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques, *Bull. Soc. Math. France* **101** (1973), 333—379.
9. NAGEL, A., STEIN, E. M. et WAINGER, S., Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties, *Acta Math.* **155** (1985), 103—147.
10. SALOFF-COSTE, L., Sur la décroissance des puissances de convolution sur les groupes, *Bull. Sci. Math.* **113** (1989), 3—21.
11. SALOFF-COSTE, L., Théorème de Sobolev et inégalités de Trudinger sur les groupes homogènes, *prépublication*, 1988.

12. SALOFF-COSTE, L., Fonctions maximales sur certains groupes de Lie, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987), 457—459.
13. SALOFF-COSTE, L., Analyse sur les groupes de Lie nilpotents, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **302** (1986), 499—502.
14. SAKA, K., Besov spaces and Sobolev spaces on nilpotent Lie groups, *Tôhoku Math. J.* **31** (1979), 383—437.
15. STEIN, E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.
16. TAIBLESON, M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean spaces, *J. Math. Mech.* **13** (1964), 407—480.
17. TRUDINGER, N., On embeddings into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.* **17** (1967), 473—483.
18. UCHIYAMA, A., A maximal function characterization of H^p on the space of homogeneous type, *Trans. Amer. Math. Soc.* **262** (1980), 579—592.
19. VAROPOULOS, N. TH., Analysis on Lie groups, *J. Funct. Anal.* **76** (1988), 346—410.
20. VAROPOULOS, N. TH., Semi-groupes d'opérateurs sur les espaces L^p, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), 865—868.
21. VAROPOULOS, N. TH., Analysis on nilpotent groups, *J. Funct. Anal.* **66** (1986), 406—431.
22. VAROPOULOS, N. TH., Fonctions harmoniques sur les groupes de Lie, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **304** (1987), 519—521.

Reçu le 18 mai 1989

Laurent Saloff-Coste
Laboratoire d'analyse complexe et géometrie
C.N.R.S.
Université Paris VI
Tour 45—46, 5e étage
4, Place Jussieu
F-75252 Paris-Cedex 05
France