Théorème de point fixe et d'approximation

B. Beauzamy et P. Enflo

Notre but dans cet article est de donner plusieurs applications de la notion (introduite dans [2] et développée dans [3]) de point minimal par rapport à un ensemble.

Nous renvoyons à [3] pour l'étude de cette notion; rappelons simplement qu'un point x est dit minimal par rapport à un sous-ensemble M d'un espace de Banach E si $\forall y \in E$, les conditions

$$\|y-m\| \leqq \|x-m\| \quad \forall m \in M$$

impliquent $y=x$.

La première application concerne la convergence faible vers les points fixes des contractions: nous montrons qu'en rempla çant les sommes de Césaro $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} T^k e$ par un point minimal par rapport à l'ensemble $\{e, Te, \dots, T^{n-1}e\}$ (qui se réduit à la somme de Césaro dans les espaces de Hilbert), on peut étendre aux espaces uniformément convexes des résultats démontrés par J. B. Baillon [1] dans les espaces de Hilbert. Cette question fait l'objet du premier paragraphe.

Dans le second paragraphe, nous nous intéressons à l'approximation des points minimaux, et nous le faisons dans un cadre plus large: celui des optima de Pareto, qui sont étudiés en Economie. Les définitions précises sont données plus loin; disons simplement que si $u_1, \dots, u_N$ sont des fonctions concaves définies sur un espace de Banach E, x est un optimum de Pareto pour ces fonctions si $\forall y \neq x$, $\exists i_0$, $u_{i_0}(y) < u_{i_0}(x)$.

Nous montrons que si un point x est un optimum de Pareto pour N fonctions u_i, il peut être approximé par un point qui est un optimum de Pareto pour seulement n de ces fonctions; en outre la plupart des choix de ces n fonctions donnent un bon résultat.

Nous énonçons, à la fin du second paragraphe, le résultat d'approximation dans le cas particulier des points minimaux, et, dans le troisième paragraphe, nous l'appliquons pour calculer, connaissant la taille d'un compact, la taille de ses points minimaux.

1. Convergence faible vers les points fixes des contractions, dans un espace uniformement convexe

Nous allons montrer dans ce paragraphe comment la notion de point minimal par rapport à un ensemble permet d'étendre aux espaces de Banach uniformément convexes un résultat de J. B. Baillon [1], obtenu dans un espace de Hilbert. Son résultat est le suivant:

Théorème (J. B. Baillon [1]): *Soit H un espace de Hilbert, C un convexe fermé borné dans H, et T une contraction de C dans lui-même (c'est-à-dire une application de C dans C vérifiant $\|Tx-Ty\| \leqq \|x-y\|$, $\forall x, y \in C$). Alors pour tout $e \in E$ les sommes de Césaro $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j e$ convergent faiblement vers un point fixe de T.*

Nous étendrons ce résultat aux espaces uniformément convexes, en remplacant les sommes de Césaro par la notion (qui la généralise, comme nous le verrons dans le lemme 1 ci-dessous) de point minimal, dans C, par rapport à l'ensemble $M_n = \{e, Te, \ldots, T^{n-1}e\}$.

Si E est un espace de Banach et C un convexe fermé borné dans E, on dira qu'un point x est minimal, dans C, par rapport à un sous-ensemble M de C, si, pour chaque $y \in C$, les conditions $\|y-m\| \leqq \|x-m\|$, $\forall m \in M$, impliquent $y=x$. Cette notion généralise celle étudiée dans [3], mais on vérifie aisément, dans ce nouveau cadre, les théorèmes analogues à ceux de [3], dont nous aurons besoin ici.

Nous noterons $\min_C M$ l'ensemble des points minimaux de M dans C. Nous dirons que M est optimal dans C si $\min_C M = M$.

Soit donc E un espace de Banach uniformément convexe, C un convexe fermé borné dans E, T une contraction de C dans lui-même. Comme nous l'avons dit, nous notons M_n l'ensemble $\{e, Te, \ldots, T^{n-1}e\}$, pour un point $e \in C$ donné. Pour p fixé avec $1<p<\infty$, on définit $s_n^{(p)}$ comme l'unique point $y \in C$ où la fonction

$$\varphi(y) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|y-T^j e\|^p$$

prend son minimum.

Le point $s_n^{(p)}$ est un point minimal pour M_n. Cette notion est une extension naturelle des sommes de Césaro, comme le montre le lemme suivant:

Lemme 1. *Si E est un espace de Hilbert,* $s_n^{(2)} = \dfrac{e+Te+\ldots+T^{n-1}e}{n}$.

Démonstration. Posons $s = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j e$. On a:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|y-T^j e\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \langle y-T^j e, y-T^j e\rangle$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\langle y-s+s-T^j e,\ y-s+s-T^j e\rangle = \|y-s\|^2+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\|s-T^j e\|^2$$

et on minimise cette quantité en prenant $y=s$.

Le théorème que nous allons démontrer est le suivant:

Théorème 1. *Pour tout p, $1<p<\infty$, chaque point d'accumulation faible de la suite $s_n^{(p)}$ est un point fixe de T.*

(Rappelons qu'il est connu qu'une contraction définie sur un convexe fermé borné dans un espace uniformément convexe admet des points fixes; nous noterons F l'ensemble de ces points fixes).

Lemme 2. *L'ensemble F est optimal dans C.*

En effet, si $x\notin F$, $\|Tx-m\|\leqq\|x-m\|$ $\forall m\in F$, et x n'est pas minimal par rapport à F dans C.

Le lemme suivant est connu (voir [4]); nous en donnerons cependant une nouvelle démonstration (qui nous a été suggérée par B. Maurey):

Lemme 3. *Si une suite x_n converge faiblement vers un point x et si $\|x_n-Tx_n\|_{n\to\infty}\to 0$, alors x est un point fixe de T.*

Démonstration. On peut se ramener au cas où la suite (x_n) converge faiblement vers 0; on extrait alors de cette suite une suite basique, encore notée (x_n). Puisque l'espace est uniformément convexe, il existe, d'après un théorème de Gurarii—James, un nombre r, $1<r\leqq 2$, et une constante C tels que, pour toute suite de scalaires (α_i), on ait:

$$\|\sum \alpha_i x_i\| \leqq C(\sum |\alpha_i|^r)^{1/r}.$$

Notons $\tilde{E}$ l'ultrapuissance $E^{\mathbf{N}}/\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbf{N}$), $\tilde{C}$ le sous-ensemble de $\tilde{E}$ constitué des points $\tilde{x}$ qui ont un représentant $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ avec $x_i\in C$ $\forall i$. Notons aussi $\tilde{T}$ l'extension de T à $\tilde{C}$. Soit X_k le point de $\tilde{C}$ dont un représentant est $(x_k, x_{k+1}, \ldots)$. Les points X_k, $k\in\mathbf{N}$, sont des points fixes pour $\tilde{T}$. Soit $\tilde{F}$ l'ensemble des points fixes de $\tilde{T}$; c'est un ensemble optimal, dans un convexe fermé ([3], chap. III, § 3). Or on a:

$$\left\|\frac{x_{k+1}+\ldots+x_{k+n}}{n}\right\|_E \leqq Cn^{-1/r'} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$$

et donc

$$\left\|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right\|_{\tilde{E}} \leqq Cn^{-1/r'}$$

et les points $\dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n}$, qui sont des points fixes de $\tilde{T}$, convergent vers 0, qui est donc aussi un point fixe de $\tilde{T}$. Il en résulte que 0 est un point fixe de T, ce qui prouve le lemme 3.

Dans la suite de la démonstration, nous notons s_n au lieu de $s_n^{(p)}$.

Lemme 4. *On a*

$$\|s_n - Ts_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \; .$$

Démonstration. On sait, d'après [3], chap. 2, lemme 2, que si δ désigne le module de convexité de E, on a:

$$\varphi(z) \geqq \varphi(s_n) + \left\|\frac{z-s_n}{2}\right\|^p \delta\left(\left\|\frac{z-s_n}{3}\right\|\right)$$

puisque s_n est le point où φ prend son minimum. Il nous suffira donc, pour démontrer le lemme, de montrer que

$$\varphi(Ts_n) - \varphi(s_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\|Ts_n - T^j e\|^p - \sum_{j=0}^{n-1}\|s_n - T^j e\|^p\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \; .$$

Or

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\|Ts_n - T^j e\|^p \leqq \frac{1}{n}\left(\|Ts_n - e\|^p + \sum_{j=0}^{n-2}\|s_n - T^j e\|^p\right)$$

et donc:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\|Ts_n - T^j e\|^p - \sum_{j=0}^{n-1}\|s_n - T^j e\|^p\right) \leqq \frac{1}{n}\left(\|Ts_n - e\|^p - \|s_n - T^{n-1}e\|^p\right).$$

Mais puisque C est borné, les quantités $\|Ts_n - e\|$ et $\|s_n - T^{n-1}e\|$ sont bornées indépendamment de n, et le second membre tend vers 0, ce qui prouve le lemme. Le théorème se déduit immédiatement des lemmes 3 et 4.

Il peut se faire, a priori, que la suite $s_n^{(p)}$ ait plusieurs points d'accumulation faible différents. Ce n'est pas le cas, toutefois, dans l^p $(1<p<\infty)$.

Théorème 2. *Dans l^p $(1<p<\infty)$, la suite $s_n^{(p)}$ converge faiblement vers un point fixe de T.*

Si $x\in l^p$, nous noterons $x(k)$ sa $k^{\text{ème}}$ coordonnée, et nous continuerons à noter s_n au lieu de $s_n^{(p)}$.

Lemme 5. *$s_n(k)$ est le nombre t qui minimise* $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|t-(T^j e)(k)|^p$.

Démonstration. On a en effet $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\|z - T^j e\|_{l^p}^p = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_k |z(k)-(T^j e)(k)|^p = \sum_k \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|z(k)-(T^j e)(k)|^p$, et on obtient le minimum de cette somme en minimisant chaque terme, d'où le lemme.

Nous allons d'abord nous limiter au cas $p\geqq 2$.

Lemme 6. *Si x_j sont des nombres réels et s le point où la fonction $f(t)=\sum_{j=0}^{n-1}|t-x_j|^p$ prend son minimum, on a, si $p\geqq 2$, pour tout $z\in\mathbf{R}$:*

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|z-x_j|^p\geqq\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|s-x_j|^p+\frac{1}{2^{p-1}}|z-s|^p.$$

Démonstration. Ceci se déduit de l'inégalité de Clarkson $\left|\frac{a+b}{2}\right|^p+\left|\frac{a-b}{2}\right|^p\leqq\frac{1}{2}(|a|^p+|b|^p)$ par un raisonnement analogue à celui de [3], chap II, lemme 2. On posera $C=2^{p-1}$.

Supposons maintenant, pour démontrer le théorème, que la suite s_n ait deux points d'accumulation différents a et b, pour la topologie faible:

$$a=\lim_{l\to+\infty}s_{n_l},\quad b=\lim_{l\to\infty}s_{n'_l}.$$

Soit $\alpha=\|a-b\|_{l^p}$. Posons aussi $M=\sup_{x\in C}\|x\|$.

Il est clair que si s_{n_l} converge faiblement vers a, on a, $\forall k$, $s_{n_l}(k)\xrightarrow[l\to\infty]{}a(k)$.

Soit $\varepsilon>0$. Choisissons K tel que $\left(\sum_{k\geqq K}|a(k)|^p\right)^{1/p}\leqq\varepsilon\alpha$ et $\left(\sum_{k\geqq K}|b(k)|^p\right)^{1/p}\leqq\varepsilon\alpha$.

Soit K_1 le sous-ensemble de $\{1,2,\dots,K\}$ des k tels que $a(k)-b(k)\neq 0$. On peut trouver l_0 tel que $l\geqq l_0$, $k\leqq K$, impliquent $|a(k)-s_{n_l}(k)|\leqq\varepsilon\inf\left(|a(k)-b(k)|,|a(k)-b(k)|^p\right)$ si $k\in K_1$ et $|a(k)-s_{n_l}(k)|\leqq\varepsilon\frac{M}{K}$ si $k\notin K_1$.

D'après le lemme 6, on a $\forall n$, $\forall k$,

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|t-(T^je)(k)|^p\geqq\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|s_n(k)-(T^je)(k)|^p+\frac{1}{C}|s_n(k)-t|^p$$

et donc

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|b(k)-(T^je)(k)|^p\geqq\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|s_n(k)-(T^je)(k)|^p+\frac{1}{C}|s_n(k)-b(k)|^p.$$

Or, $\forall j$

$$|s_n(k)-(T^je)(k)|^p\geqq|a(k)-(T^je)(k)|^p-(4M)^{p-1}p|s_n(k)-a(k)|$$

donc

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|b(k)-(T^je)(k)|^p\geqq\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|a(k)-(T^je)(k)|^p$$

$$-(4M)^{p-1}p|s_n(k)-a(k)|+\frac{1}{C}|s_n(k)-b(k)|^p.$$

Prenons maintenant $n=n_l$, $l\geqq l_0$.

On a aussi $|s_n(k)-b(k)|\geqq(1-\varepsilon)|b(k)-a(k)|$ et donc, si $k\in K_1$:

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|b(k)-(T^je)(k)|^p$$

$$\geqq \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|a(k)-(T^je)(k)|^p+\left(\frac{(1-\varepsilon)^p}{C}-(4M)^{p-1}p\varepsilon\right)|b(k)-a(k)|^p$$

$$\geqq \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|a(k)-(T^je)(k)|^p+\frac{1}{2C}|b(k)-a(k)|^p,$$

si ε a été choisi assez petit pour que

$$\frac{(1-\varepsilon)^p}{C}-(4M)^{p-1}p\varepsilon\geqq\frac{1}{2C}.$$

Si $k\leqq K$ mais $k\notin K_1$, on écrira simplement

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|b(k)-(T^je)(k)|^p=\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|a(k)-(T^je)(k)|^p.$$

On a donc, $\forall k\leqq K$:

$$\sum_{k\in K}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|b(k)-(T^je)(k)|^p\geqq\sum_{k\leqq K}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|a(k)-(T^je)(k)|^p$$

$$+\frac{1}{2C}\sum_{k\in K}|b(k)-a(k)|^p$$

et, si l'on a pris la précaution de prendre en outre $1-(2\varepsilon)^p\geqq 1/2$, on aura:

$$\sum_{k\leqq K}|b(k)-a(k)|^p\geqq\frac{\alpha^p}{2}.$$

Posons $\beta=\alpha^p/4C$.

Par ailleurs, on déduit de la formule des accroissements finis

$$||(T^je)(k)-b(k)|^p-|(T^je)(k)|^p|\leqq p|b(k)|[|(T^je)(k)|+|b(k)|]^{p-1},$$

$$||(T^je)(k)-a(k)|^p-|(T^je)(k)|^p|\leqq p|a(k)|[|(T^je)(k)|+|b(k)|]^{p-1}$$

et donc

$$||b(k)-(T^je)(k)|^p-|a(k)-(T^je)(k)|^p|$$

$$\leqq p\left[|b(k)|[|(T^je)(k)|+|b(k)|]^{p-1}+|a(k)|[|(T^je)(k)|+|a(k)|]^{p-1}\right]$$

donc

$$\sum_{k>K}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}\left(|b(k)-(T^je)(k)|^p-|a(k)-(T^je)(k)|^p\right)\leqq 2p\varepsilon\alpha(2M)^{p/p'}.$$

Donc, si, en outre, ε est assez petit pour que $2p\varepsilon\alpha(2M)^{p/p'} \leqq \beta/2$ on aura pour $l \geqq l_0$:

$$\frac{1}{n_l}\sum_0^{n_l-1}\|b-T^je\|_{l^p}^p \geqq \frac{1}{n_l}\sum_0^{n_l-1}\|a-T^je\|_{l^p}^p+\beta/2.$$

Or a et b sont des points fixes, et donc les suites $\|b-T^je\|_{l^p}^p$ et $\|a-T^je\|_{l^p}^p$ sont décroissantes lorsque $j\to\infty$. Donc les suites

$$\frac{1}{n}\sum_1^n\|b-T^je\|_{l^p}^p \text{ et } \frac{1}{n}\sum_1^n\|a-T^je\|_{l^p}^p$$

sont convergentes lorsque $n\to\infty$. Si l_b et l_a sont leurs limites respectives, on a donc

$$l_b \geqq l_a+\beta/2.$$

En intervertissant les rôles de a et b, on trouve de même

$$l_a \geqq l_b+\beta/2,$$

d'où l'on déduit $\beta=0$, ce qui contredit $\|a-b\|_{l^p}\neq 0$.

Si $1<p\leqq 2$, on écrira de même

Lemme 6 bis. *Il existe une constante C telle que, si x_j sont des nombres réels et s le point où $f(t)=\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|t-x_j|^p$ prend son minimum, on ait,* $\forall z$,

$$\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|z-x_j|^p \geqq \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|s-x_j|^p+\frac{1}{C}|z-s|^2.$$

Ceci se déduit du fait que, si $1<p\leqq 2$,

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leqq \frac{1}{2}(|x|^p+|y|^p)-\frac{1}{C}|x-y|^2.$$

On fait la démonstration de la même manière, avec $\alpha=(\sum_k|b(k)-a(k)|^2)^{1/2}$. On choisira K tel que

$$\Big(\sum_{k\geqq K}|a(k)|^p\Big)^{1/p} \leqq \varepsilon\alpha,\quad \Big(\sum_{k\geqq K}|b(k)|^p\Big)^{1/p} \leqq \varepsilon\alpha,$$

et l_0 tel que $l\geqq l_0 \Rightarrow |a(k)-s_{n_l}(k)|\leqq\varepsilon|a(k)-b(k)|^2$ si $a(k)\neq b(k)$, et $k\leqq K$.

On obtient, par un calcul analogue au précédent:

$$\sum_{k\leqq K}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|b(k)-(T^je)(k)|^p$$

$$\geqq \sum_{k\leqq K}\frac{1}{n}\sum_0^{n-1}|a(k)-(T^je)(k)|^p+\frac{1}{2C}\sum_{k\leqq K}|b(k)-a(k)|^2;$$

et $\sum_{k\leqq K}|b(k)-a(k)|^2\geqq\alpha^2/2$ si ε est assez petit; on achève le calcul comme précédemment.

Les théorèmes analogues pour des semi-groupes continus de contractions sont vrais et se démontrent de la même manière:

Soit E un espace de Banach séparable uniformément convexe, C un convexe fermé borné de E, $S(t)$ un semi-groupe continu de contraction de C dans C: pour chaque $t \geqq 0$, $S(t)$ est une contraction de C dans lui-même, avec, en outre:

$$S(t+t') = S(t) \circ S(t') \quad \forall t, t' \geqq 0,$$

$$S(0) = \mathrm{Id},$$
$$\forall x, \|S(t)x - x\| \to 0, \quad t \to 0.$$

Alors on a:

Théorème 1 bis. *Soit $e \in E$ et p un réel avec $1 < p < \infty$. Posons $\varphi_t^{(p)}(z) = \dfrac{1}{t} \int_0^t \|z - S(\tau)e\|^p \, d\tau$, et notons $s^p(t)$ le point où $\varphi_t^{(p)}$ prend son minimum. Alors tout point faiblement adhérent à une suite $(s^p(t_k))$, où les t_k tendent vers l'infini, est un point fixe pour tous les $S(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$.*

Théorème 2 bis. *Dans l^p, $1 < p < \infty$, la famille $s^p(t)$ converge faiblement lorsque $t \to \infty$, vers un point fixe de tous les $S(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$.*

2. Approximation des optima de Pareto

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à une notion plus large que celle de point minimal: celle d'optimum de Pareto, qui a des applications en Economie (voir p ex [5]). Nous montrons d'abord brièvement comment étendre à ce nouveau cadre les résultats démontrés dans [3] pour les points minimaux, avant d'établir le résultat principal de ce paragraphe, qui concerne l'approximation des Optima de Pareto.

Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Nous considérons une famille finie de fonctions $u_1, \ldots, u_N$, définies sur E, à valeurs réelles, possédant les propriétés suivantes:

— a) chaque u_i est concave, continue et, sur chaque ensemble borné, elle est minorée.

— b) chaque u_i tend vers $-\infty$ à l'infini: pour chaque réel C, l'ensemble $\{x \in E, u_i(x) \geqq C\}$ est borné.

— c) chaque u_i est Gâteaux-différentiable en tout point: pour chaque x, il existe une forme linéaire $u_i'(x)$ avec, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall y \in E$:

$$u_i(x+ty) = u_i(x) + tu_i'(x)(y) + t\lambda_i(t), \; \lambda_i(t) \underset{t \to 0}{\to} 0$$

(et, puisque u_i est concave, $t\lambda_i(t) \leqq 0 \; \forall t$).

Il résulte de ces hypothèses que chaque u_i atteint son maximum en un point au moins, et que, pour chaque i, l'ensemble des $\|u_i'(x)\|$ est majoré lorsque x se trouve dans un ensemble borné.

Nous ferons encore l'hypothèse suivante, qui sera essentielle pour la démonstration du théorème:

— d) chaque u_i est uniformément concave sur les ensembles bornés: pour tout borné M, il existe un nombre δ_M tel que si $x_1, x_2 \in M$, on a

$$u_i\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}\left(u_i(x_1)+u_i(x_2)\right)+\delta_M(\|x_1-x_2\|).$$

Nous appellerons ces fonctions u_i des fonctions d'utilité. Nous dirons qu'un point $x \in E$ est un optimum de Pareto pour ces fonctions si $\forall y \neq x$, $\exists i$ tel que $u_i(y) < u_i(x)$.

Cette notion généralise celle de point minimal par rapport à un ensemble dans le sens suivant: si $m_1, \ldots, m_N$ sont des points de E et si $u_i(z) = -\|z-m_i\|^p$ $(1 < p < \infty)$, les optima de Pareto pour ces fonctions sont les points minimaux pour $M = \{m_1, \ldots$ $\ldots, m_N\}$.

Nous allons maintenant donner pour les optima de Pareto des résultats qui sont les analogues de ceux démontrés dans [3] pour les points minimaux, et qui nous seront utiles par la suite. Le lemme suivant est bien connu:

Lemme 1. *Pour une famille finie $(u_i)_{i=1,\ldots,N}$ de fonctions d'utilité, les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) x est un optimum de Pareto,

b) il existe des coefficients positifs $p_1, \ldots, p_N$ de somme 1, avec $\sum_1^N p_i u_i'(x)=0$,

c) il existe des coefficients positifs $p_1, \ldots, p_N$ de somme 1, tels que $\varphi(z)=\sum_1^N p_i u_i(z)$ atteigne son maximum pour $z=x$.

Démonstration. a)$\Rightarrow$b): Si b) est faux, 0 n'est pas dans l'enveloppe convexe des $u_i'(x)$ $i=1, \ldots, N$. On peut donc trouver un nombre $a>0$ et un point $y \in E$ tels que $u_i'(x)(y)>a$, $i=1, \ldots, N$; on a alors $u_i(x+ty)>u_i(x)$ pour t assez petit, et pour tout i; ceci implique que x n'est pas un optimum de Pareto.

b)$\Rightarrow$c). On peut écrire, $\forall y \in E$:

$$\sum_1^N p_i u_i(x+ty) = \sum_1^N p_i u_i(x) + t\sum_1^N p_i u_i'(x)(y) + t\sum_1^N \lambda_i(t)$$

et donc, si $\sum_1^N p_i u_i'(x)=0$, puisque $t\lambda_i(t) \leqq 0$ $\forall t$,

$$\sum_1^N p_i u_i(x+ty) \leqq \sum_1^N p_i u_i(x),$$

c)$\Rightarrow$a). Si x n'est pas un optimum de Pareto, on peut trouver x' avec $u_i(x') \geqq u_i(x)$ $\forall i$, donc $\sum_1^N p_i u_i(x') \geqq \sum_1^N p_i u_i(x)$.

Remarque. Il résulte de la condition b) que l'ensemble $\mathcal{O}$ des optima de Pareto des (u_i) est borné: soit $A=\inf\{\sum_1^N p_i u_i(0),\ p_i\geqq 0,\ \sum_1^N p_i=1\}$. On sait qu'il existe K tel que $\|z\|\geqq K\Rightarrow u_i(z)<A$ pour tout i, donc $\sum_1^N p_i u_i(z)<A\leqq\sum_1^N p_i u_i(0)$, et le maximum n'est pas atteint en z.

Soit $d=\sup\{\|z\|,\ z\in\mathcal{O}\}$, et D la boule de centre 0 et rayon d.

Lemme 2. *Soient p_i des coefficients positifs de somme* 1, $\varphi(z)=\sum_1^N p_i u_i(z)$, x *l'optimum de Pareto correspondant. On a, si* $\|z\|\leqq d$,

$$\varphi(z)\leqq\varphi(x)-2\delta_D(\|x-z\|).$$

Démonstration. Ce lemme est l'analogue du lemme 2 de [3], chap. II, et se démontre de la même manière, en utilisant l'hypothèse d).

Un cas particulier important d'optimum de Pareto est celui du point qui maximise $\frac{1}{N}\sum_1^N u_i(z)$. Nous le noterons o.p. $(u_1,\dots,u_N)$.

Dans ce qui suit, nous supposerons, pour simplifier les calculs que, pour tout borné M de E, il existe une constante C_M et un nombre $q>2$ tels que l'hypothèse d) soit satisfaite avec $\delta_M(\varepsilon)\geqq C_M\varepsilon^q$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe:

Théorème 1. *Soit $u_1,\dots,u_N$ une famille finie de fonctions d'utilité. Il existe une constante K et un nombre $\gamma>0$ tels que, si $p_1,\dots,p_N$ sont des coefficients positifs de somme* 1, *x_0 l'optimum de Pareto correspondant, $X_1,\dots,X_k,\dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace (Ω,P) prenant les valeurs $u_1,\dots,u_N$ avec les probabilités $p_1,\dots,p_N$, on ait, pour tout $n\in\mathbf{N}$:*

$$E\|\text{o.p.}(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))-x_0\|\leqq\frac{K}{n^\gamma}.$$

Remarque: La constante K et le nombre $\gamma>0$ dépendent seulement du module de convexité de E, et de la constante C_M et du nombre q intervenant, pour la famille (u_i), dans l'hypothèse d) pour le borné $M=D$, mais ne dépendent pas de N.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin d'un résultat d'approximation dans l'enveloppe convexe, dont la démonstration (qui se situe dans un cadre un peu plus général), nous a été communiquée par B. Maurey:

Lemme 3. *Soit F un espace de Banach de type p-Rademacher $(1<p\leqq 2)$, x un point de F, $Y_1,Y_2,\dots,Y_k,\dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace (Ω,P) de même loi, à valeurs dans un borné de F, et d'espérance x. On a, pour $n\in\mathbf{N}$:*

$$E\left\|\frac{Y_1+\dots+Y_n}{n}-x\right\|\leqq Cn^{\frac{1}{p}-1}$$

où C est une constante qui ne dépend que de la constante de type p-Rademacher de l'espace F et du diamètre du borné où les Y_k prennent leurs valeurs.

Démonstration du lemme 3. Rappelons tout d'abord que F est de type p-Rademacher $(1<p\leqq 2)$ s'il existe une constante C telle que, pour tout n et tout *n-tuple* de points $x_1, \ldots, x_n$ dans F, on ait, en désignant par $(\varepsilon_i(t))$ la suite de variables de Rademacher:

$$\int \left\|\sum_1^n \varepsilon_i(t) x_i\right\| dt \leqq C\left(\sum_1^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

Posons $\tilde{Y}_k(\omega, \omega')=Y_k(\omega)-Y_k(\omega')$. Ce sont des variables symétriques définies sur $\Omega\times\Omega$. On a, pour tout n,

$$\int\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k(\omega)-x\right\| dP(\omega) \leqq \iint\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \tilde{Y}_k(\omega, \omega')\right\| dP(\omega)\, dP(\omega').$$

Puisque les $\tilde{Y}_k$ sont des variables indépendantes et symétriques, cette dernière quantité est égale à:

$$\iiint\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \varepsilon_k(t)\tilde{Y}_k(\omega, \omega')\right\| dt\, dP(\omega)\, dP(\omega').$$

On en déduit, par définition du type p-Rademacher:

$$E\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k-x\right\| \leqq \frac{C}{n}\iint\left(\sum_{k=1}^n \|\tilde{Y}_k(\omega, \omega')\|^p\right)^{1/p} dP(\omega)\, dP(\omega') \leqq 2CKn^{\frac{1}{p}-1}$$

en notant K le diamètre du borné où Y_k prend ses valeurs, c'est à dire $K=\sup_{k,\omega}\|Y_k(\omega)\|$.

En utilisant ce lemme, nous allons maintenant démontrer le théorème 1.

Soient $p_1, \ldots, p_N$ des coefficients positifs de somme 1, x_0 l'optimum de Pareto associé. Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires définies sur (Ω, P), prenant les valeurs $u_1 \ldots u_N$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_N$. Pour chaque entier k, définissons une variable aléatoire $Y_k(\omega)$ par $Y_k(\omega)=u_i'(x_0)$ si $X_k(\omega)=u_i$; les variables $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots$ sont donc indépendantes, à valeurs dans E', et prennent les valeurs $u_1'(x_0), \ldots, u_N'(x_0)$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_N$.

E est uniformément convexe, donc E' est uniformément lisse, et a fortiori de type p-Rademacher pour un $p>1$. Donc le lemme 3 s'applique, et en remarquant que $EY_n=0$ $\forall n$, on obtient

$$\mathbf{E}\left\|\frac{1}{n}\sum_1^n Y_j\right\| \leqq Cn^{\frac{1}{p}-1}$$

et donc

$$\mathscr{P}\left\{\left\|\frac{1}{n}\sum_1^n Y_j\right\| \geqq Cn^{\frac{1-p}{2p}}\right\} \leqq n^{\frac{1-p}{2p}}.$$

Soit Ω_1 l'ensemble $\left\{\omega, \left\|\frac{1}{n}\sum_1^n Y_j\right\| < Cn^{\frac{1-p}{2p}}\right\}$, Ω_2 son complémentaire. Pour $\omega \in \Omega_1$ $n \in \mathbf{N}$, les valeurs de $Y_1(\omega), \ldots, Y_n(\omega)$ sont une suite $u'_{i_1}(x_0), \ldots, u'_{i_n}(x_0)$ (deux indices quelconques n'étant pas nécessairement distincts), avec

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u'_{i_j}(x_0)\right\| < Cn^{\frac{1-p}{2p}}.$$

Notons x le point où $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u_{i_j}$ prend son maximum: c'est o.p. $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$, et considérons la fonction convexe dérivable de la variable réelle t définie par:

$$\psi(t) = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u_{i_j}(x + t(x_0 - x)).$$

Le minimum est atteint pour $t=0$, la dérivée est croissante entre 0 et 1, et pour $t=1$ elle vaut $-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u'_{i_j}(x_0)(x_0-x)$. On a donc, en utilisant le lemme 2:

$$C_1\|x-x_0\|^q \leqq \psi(1)-\psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)\,dt \leqq |\psi'(1)|$$

$$\leqq \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u'_{i_j}(x_0)\right\| \|x-x_0\| \leqq Cn^{\frac{1-p}{2p}} \|x-x_0\|$$

d'où

$$\|x-x_0\| \leqq \left(\frac{C}{C_1}\right)^{\frac{1}{q-1}} n^{\frac{1-p}{2p(q-1)}}.$$

Par ailleurs:

$$E\|\text{o.p.}(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) - x_0\| = \int_{\Omega_1} \|\text{o.p.}(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) - x_0\|\,dP(\omega)$$

$$+\int_{\Omega_2} \|\text{o.p.}(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) - x_0\|\,dP(\omega) \leqq \left(\frac{C}{C_1}\right)^{\frac{1}{q-1}} n^{\frac{1-p}{2p(q-1)}} + 2dn^{\frac{1-p}{2p}}$$

$$\leqq \frac{K}{n^\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{p-1}{2p}$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque. Ce théorème signifie que pour calculer un optimum de Pareto pour les fonctions $u_1, \ldots, u_N$, il suffit, approximativement, de le calculer pour n d'entre elles, et, mieux, la plupart des choix de n éléments parmi les N donneront un bon résultat.

Nous n'avons considéré ici, par souci de simplicité, que des familles finies de fonctions d'utilité. On peut envisager une étude semblable avec des familles infinies, en ajoutant des hypothèses, destinées à assurer l'existence d'optima de Pareto, et à rendre les calculs précédents possibles. Par exemple, on renforcera l'hypothèse d) en supposant la famille uniformément équi-concave sur les bornés (le nombre δ est le même pour toutes les fonctions). Pour le cas particulier des points minimaux, les techniques ont été développées dans [3], ce qui permet d'obtenir les énoncés suivants, dont les démonstrations sont, pour l'essentiel, analogues à celles qui précèdent.

Lemme 4. *Soit E réflexif, lisse et strictement convexe. Soit M un compact de la boule unité de E, x un point minimal pour M, p un réel avec* $1<p<\infty$, μ *la mesure représentant x*: $\varphi_\mu(z)=\int \|z-m\|^p d\mu(m)$ *prend son minimum en x. Notons* ξ_m *la forme linéaire de norme* 1 *qui norme* $x-m$. *On a:*

$$\int \|x-m\|^{p-1}\xi_m \, d\mu(m) = 0.$$

Si $m_1, \ldots, m_n$ sont des points donnés, et n fixé on note $\min_q(m_1, \ldots, m_n)$ le point qui minimise $\frac{1}{n}\sum_1^n \|z-m_k\|^q$.

Théorème 2. *Soit E un espace lisse et uniformément convexe avec* $\delta(\varepsilon)\geqq C_1\varepsilon^q$. *Il existe une constante K et un nombre* $\gamma>0$ *tels que, pour tout compact M de la boule unité, pour tout point* x_0 *minimal par rapport à M, pour toute suite* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *de variables indépendantes définies sur* (Ω, P) *à valeurs dans M avec* $X_k(P)=\mu_0$ $\forall k$, (μ_0 *est la mesure représentant x), on ait, pour tout n:*

$$\mathbf{E}\|\min_q(X_1, \ldots, X_n)-x_0\| \leqq \frac{K}{n^\gamma}.$$

Remarque. Les hypothèses $\delta\geqq C\varepsilon^q$ dans les théorèmes précédents ne sont pas essentielles et ne servent qu'à simplifier les calculs et la présentation du résultat.

3. Taille d'un ε-net dans l'ensemble des points minimaux d'un compact

Soit M un compact contenu dans la boule unité d'un espace de Banach uniformément convexe E, et $N(\varepsilon)$ la fonction qui donne la taille d'un ε-net dans M (c'est-à-dire la nombre minimum de points qu'il faut pour que les boules de rayon ε qui y sont centrées recouvrent M). Notre but dans ce paragraphe est d'estimer la fonction $N'(\varepsilon)$ correspondante pour min M (on sait que min M est compact au vu de [3], §2, th. 3). Nous obtiendrons deux estimations différentes par deux procédés différents, l'une ou l'autre étant la meilleure suivant les cas.

Nous supposerons, pous simplifier les calculs, que le module de convexité de E satisfait à $\delta(\varepsilon)\geqq K\varepsilon^p (p\geqq 2)$, mais des estimations semblables peuvent être obtenues dans le cas général.

Lemme 1. *Soient $m_1, \ldots, m_N$ les points d'un ε-net dans M, μ une probabilité portée par M. Il existe des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, positifs et de somme 1, tels que, si l'on pose:*

$$\psi(z) = \int \|z-m\|^p \, d\mu(m), \quad \varphi(z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \|z-m_k\|^p,$$

on ait, pour tout point z de norme au plus égale à 2:

$$|\psi(z)-\varphi(z)| \leqq 3^{p-1} p\varepsilon.$$

Démonstration. Soient $B_1, \ldots, B_N$ les boules fermées de centre $m_1, \ldots, m_N$ et de rayon ε qui recouvrent M. Soient $C_1=B_1$, $C_2=B_2-C_1 \ldots C_k=B_k-(C_1 \cup \ldots \cup C_{k-1}), \ldots$ $\ldots, C_N=B_N-(C_1 \cup \ldots \cup C_{N-1})$. Soit μ_k la restriction de μ à C_k et $\alpha_k=\mu(C_k)$. On a évidemment $\alpha_k \geqq 0$ et $\sum_1^N \alpha_k=1$. Par ailleurs, si $m \in C_k$ et $\|z\| \leqq 2$, on a:

$$\big|\|z-m\|^p-\|z-m_k\|^p\big| \leqq 3^{p-1} p\varepsilon$$

et donc

$$\left|\int \|z-m\|^p \, d\mu(m) - \sum_{k=1}^N \alpha_k \|z-m_k\|^p\right| = \left|\sum_{k=1}^N \int_{C_k} (\|z-m\|^p-\|z-m_k\|^p) \, d\mu(m)\right| \leqq 3^{p-1} p\varepsilon$$

ce qui prouve le lemme.

Lemme 2. *Soient μ_1 et μ_2 deux probabilités sur M, ψ_1 et ψ_2 les fonctions correspondantes, x_1 et x_2 les points où elles prennent leurs minimums respectifs. Si pour tout z avec $\|z\| \leqq 2$ on a:*

$$|\psi_1(z)-\psi_2(z)| \leqq \varepsilon, \quad \textit{alors} \quad \|x_1-x_2\| \leqq \left(\frac{2\varepsilon}{K}\right)^{1/p}.$$

Démonstration. On a en effet $|\psi_1(x_1)-\psi_2(x_1)| \leqq \varepsilon$, $|\psi_1(x_2)-\psi_2(x_2)| \leqq \varepsilon$ (le minimum est en effet atteint en un point de norme au plus égale à 2), et en outre $\psi_1(x_1) \leqq \psi_1(x_2)$, $\psi_2(x_2) \leqq \psi_2(x_1)$. On en déduit $\psi_1(x_2) \leqq \psi_2(x_2)+\varepsilon \leqq \psi_2(x_1)+\varepsilon$, et donc $\psi_2(x_1)-\varepsilon \leqq \psi_1(x_1) \leqq \psi_1(x_2) \leqq \psi_2(x_1)+\varepsilon$. Donc $|\psi_1(x_2)-\psi_2(x_1)| \leqq \varepsilon$. Comme $|\psi_2(x_1)-\psi_1(x_1)| \leqq \varepsilon$, on a

$$|\psi_1(x_1)-\psi_1(x_2)| \leqq 2\varepsilon.$$

Mais on sait que, pour tout z avec $\|z\| \leqq 2$ ([3], chap. 2, lemme 2 bis):

$$\psi_1(z) \geqq \psi(x_1)+K\|x_1-z\|^p,$$

d'où l'on déduit le résultat annoncé.

Nous adopterons la notation suivante: $\beta(N, \varepsilon)$ désigne la taille d'un ε-net dans l'ensemble $S_N=\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \alpha_k \geqq 0, \sum_1^N \alpha_k=1\}$, muni de la norme l^1. Une estimation évidente de $\beta(N, \varepsilon)$ est $\beta(N, \varepsilon) \leqq \dfrac{2^{n!}}{\varepsilon^n}$.

Soient maintenant y un point minimal par rapport à M, $\varepsilon > 0$ donné, $m_1, \dots, m_N$ un ε-net dans M. Soit μ la mesure qui représente y, en ce sens que $\psi(z) = \int \|z-m\|^p \, d\mu(m)$ prend son minimum en y. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les coefficients donnés par le lemme 1: si $\varphi(z) = \sum_1^N \alpha_k \|z-m_k\|^p$, $|\psi(z) - \varphi(z)| \leqq 3^{p-1} p\varepsilon$ si $\|z\| \leqq 2$. Soit x le point minimal associé à φ. Soient $(\alpha_1^i, \dots, \alpha_N^i)$, $i = 1, \dots, \beta(N, \varepsilon)$, des coefficients formant un $\beta(N, \varepsilon)$ net dans δ_N. Pour un certain i_0, on a $\sum_1^N |\alpha_k - \alpha_k^{i_0}| \leqq \varepsilon$. Si φ_{i_0} est la fonction associée aux coefficients $(\alpha_k^{i_0})$, on a, si $\|z\| \leqq 2$,

$$|\varphi(z) - \varphi_{i_0}(z)| \leqq 3^p \varepsilon$$

et donc

$$|\psi(z) - \varphi_{i_0}(z)| \leqq (p3^{p-1} + 3^p)\varepsilon = 3^{p-1}(p+3)\varepsilon.$$

Il résulte alors du lemme 2, que si x_{i_0} est le point minimal associé à φ_{i_0},

$$\|y - x_{i_0}\| \leqq \left(\frac{2 \cdot 3^{p-1}(p+3)\varepsilon}{K} \right)^{1/p}$$

et donc, si l'on pose $\varepsilon' = \dfrac{2 \cdot 3^{p-1}(p+3)\varepsilon}{K}$, on a démontré que tout point minimal par rapport à M se trouvait à distance au plus $\varepsilon'^{1/p}$ d'un des points x_i; il en résulte pour la taille d'un ε-net dans $\min M$ l'estimation:

$$N'(\varepsilon) \leqq \beta[N(\varepsilon'^p), \varepsilon'^p].$$

Nous allons maintenant donner une autre estimation de $N'(\varepsilon)$, en utilisant le théorème d'approximation des points minimaux qui a été démontré dans le paragraphe précédent. Un corollaire de ce théorème est le suivant:

Soit E un espace de Banach uniformément convexe; il existe un nombre $\gamma \leqq 1/2$ et une constante C tels que, pour tout M compact de la boule unité, tout y minimal par rapport à M, tout $n \in \mathbf{N}$, il existe n points $x_1, \dots, x_n$ de M, et un point x minimal par rapport à $\{x_1, \dots, x_n\}$ avec $\|x - y\| \leqq \dfrac{C}{n^\gamma}$.

Soient donc y minimal pour M, $\varepsilon > 0$ donné, $m_1, \dots, m_N$ un ε-net dans M, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ les coefficients donnés par le lemme 1, x le point minimal correspondant. Choisissons n pour que $\dfrac{C}{n^\gamma} \leqq \varepsilon$, et soient $m_{i_1}, \dots, m_{i_n}$ les points donnés par le théorème d'approximation: il existe un point x_0 minimal pour $\{m_{i_1}, \dots, m_{i_n}\}$ avec $\|x - x_0\| \leqq \varepsilon$, et donc $\|x_0 - y\| \leqq 2\varepsilon$. A son tour, le point x_0 peut-être approximé par un point x_0', associé à une fonction $\varphi_0'(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{j_0} \|z - m_{i_k}\|^p$ dont les coefficients sont pris dans un ensemble (α_k^j) formant un $\dfrac{K}{2}\varepsilon^p$ net dans l'ensemble S_N, avec $\|x - x_0'\| \leqq 3\varepsilon$.

On a donc $\|y-x_0'\| \leqq 5\varepsilon$. Comme il-y-a au plus C_N^n points x_0 et, pour chacun d'eux, au plus $\beta\left(n, \frac{K}{2}\varepsilon^p\right)$ points x_0', on obtient l'estimation:

$$N'(\varepsilon) \leqq C_N^n \beta\left(n, \frac{K}{2}\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^p\right).$$

Dans le cas d'un compact M formé de N points, on vérifie aisément que la première estimation est la meilleure si N est fixé et ε varie; par contre, c'est la seconde si ε est fixé et N varie.

Bibliographie

1. Baillon, J. B., Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans les espaces de Hilbert. *Note C.R.A.S.* Paris t 280—9 Juin 75, p. 1511—1514.
2. Beauzamy, B., Points minimaux dans les espaces de Banach *Note C.R.A.S.* Paris t 280—17 Mars 75, p. 717—720.
3. Beauzamy, B. et Maurey, B., Points minimaux et ensembles optimaux dans les espaces de Banach. *J. of Functional Analysis,* **(24)**, 1977, 107—139.
4. Brezis, H., *Opérateurs maximaux monotones.* North Holland. Lectures Notes № 5.
5. Smale, S., *Global analysis and economics. Dynamical Systems.* Academic Press New-York 1973.

Received December 1982

Bernard Beauzamy
Université de Lyon 1
Département de Mathématiques
43, Bd. du 11 Novembre 1918
69 622 Villeurbanne Cedex
France

Per Enflo
Royal Institute of Technology
Dept. of Mathematics
S-100 44 Stockholm
Sweden