Extension unitaire et fonctions de représentation d'une contraction de classe C_1

B. Beauzamy et M. Rome

§ 1. Extension isométrique d'une contraction de classe C_1

Soit E un espace de Hilbert complexe, et soit T une contraction de classe C_1. sur E, c'est-à-dire un opérateur vérifiant:

$$\|T\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0 \quad T^n x \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

(la terminologie "de classe C_1." est due à Sz.-Nagy—Foiaş [7]).

On peut définir un opérateur A, de E dans lui-même, par la formule:

(1) $$\langle Ax, y\rangle = \lim_{m\to+\infty} \langle T^m x, T^m y\rangle;$$

il est immédiat de vérifier que la limite au second membre existe bien.

Cet opérateur est de norme 1 (puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver x de norme 1 tel que $\lim_{m\to+\infty} \|T^m x\|^2 \geqq 1-\varepsilon$), et est auto-adjoint.

La formule

$$\langle Ax, x\rangle = \lim_{m\to+\infty} \|T^m x\|^2$$

montre que A est injectif, positif, et d'image dense (mais remarquons que A et T ne commutent pas en général).

On peut aussi considérer la formule (1) comme l'introduction sur E d'un nouveau produit scalaire, défini par:

(2) $$[x, y] = \langle Ax, y\rangle.$$

Soit $[\![\,.\,]\!]$ la norme déduite de ce produit scalaire, c'est-à-dire:

$$[\![x]\!]^2 = \langle Ax, x\rangle = \lim_{m\to+\infty} \|T^m x\|^2.$$

Il est facile de voir dans quel cas E est complet pour cette norme, ou, ce qui revient au même, à quelle condition A est inversible:

Proposition 1. *A est un isomorphisme si et seulement si il existe sur E une norme, équivalente à la norme d'origine, pour laquelle T est une isométrie.*

Démonstration. — Soit B la racine carrée de A. Si A est un isomorphisme, on peut trouver une constante $C>0$ telle que, pour tout x de E,

$$\|Bx\|^2 = \langle Ax, x\rangle \geqq C\|x\|^2$$

ou encore

$$\lim_{m\to+\infty} \|T^m x\|^2 \geqq C\|x\|^2.$$

La norme $[\![x]\!]=\lim_{m\to+\infty}\|T^m x\|$ est donc équivalente à la norme d'origine, et, pour cette norme, T est une isométrie.

Inversement, si T est une isométrie pour une norme $[\![\ ]\!]$, équivalente à la norme d'origine, on peut trouver C et $C'>0$ tels que, pour tout x de E:

$$\lim_{m\to+\infty} \|T^m x\|^2 \geqq C \lim_{m\to+\infty} [\![T^m x]\!]^2 = C[\![x]\!]^2 \geqq C'\|x\|^2$$

et donc $\langle Ax, x\rangle \geqq C'\|x\|^2$,
d'où il résulte que A est un isomorphisme.

Dans le cas général, nous notons H le complété de E pour la norme $[\![.]\!]$. L'opérateur T est une isométrie de E muni de $[\![.]\!]$ dans lui-même; il se prolonge donc en une isométrie de H dans lui-même, que nous noterons U.

L'introduction de l'espace H et de l'opérateur U est d'usage très courant, et a été faite en particulier par Sz.-Nagy—Foiaş [7].

Si l'image de T est dense dans E, et donc, en particulier, si T^{-1} existe, U est une isométrie surjective de H dans lui-même, c'est-à-dire un opérateur unitaire.

Pour tout couple x, y de points de E, posons, pour $j\in\mathbf{Z}$:

$$\lambda_j(x, y) = \lim_{m\to+\infty} \langle T^{m+j}x, T^m y\rangle. \tag{3}$$

Si $j\geqq 0$, ceci peut encore s'écrire:

$$\lambda_j(x, y) = [T^j x, y] = [U^j x, y] \tag{4}$$

et, si $j\leqq 0$:

$$\lambda_j(x, y) = [x, T^{-j} y] = [x, U^{-j} y] = [U^{*-j} x, y] \tag{5}$$

et les formules (4) et (5) ont encore un sens lorsque $x, y\in H$.

Nous posons aussi $\lambda_j(x)=\lambda_j(x, x)$, $j\in\mathbf{Z}$, $x\in H$.

On vérifie immédiatement que pour toute suite finie de complexes (a_j), on a:

$$\sum_{j,k} a_j \overline{a_k} \lambda_{-j+k}(x) \geqq 0,$$

et donc la série de Fourier $\sum_{j\in\mathbf{Z}} \lambda_{-j}(x) e^{ij\theta}$ définit une mesure positive, notée μ_x, sur le tore $\mathbf{T}$.

Si f et g sont deux fonctions dans l'algèbre du disque (notée $A(D)$), on a, pour tout $x \in H$:

(6) $$[f(U)x, g(U)x] = \int f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\mu_x(\theta).$$

On a la formule:

(7) $$\lambda_j(x, y) = \frac{1}{4}[\lambda_j(x+y) - \lambda_j(x-y) + i\lambda_j(x+iy) - i\lambda_j(x-iy)] \quad \text{pour } x, y \in H,$$

et donc la série de Fourier $\sum_{j\in\mathbf{Z}} \lambda_{-j}(x, y)e^{ij\theta}$ est celle d'une mesure, que nous notons $\mu_{x,y}$, qui vérifie:

(8) $$\mu_{x,y} = \frac{1}{4}(\mu_{x+y} - \mu_{x-y} + i\mu_{x+iy} - i\mu_{x-iy})$$

et si f et g sont deux fonctions de $A(D)$, on a:

(9) $$[f(U)x, g(U)y] = \int f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\mu_{x,y}(\theta).$$

Nous allons maintenant donner une interprétation des coefficients $\lambda_j(x, y)$ $(x, y \in E)$ utilisant la dilatation unitaire minimale de T, introduite par Sz.-Nagy—Foiaş [7].

Proposition 2. *Pour $x, y \in E$, la suite $(\lambda_{-j}(x, y))_{j\in\mathbf{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de la mesure spectrale scalaire (aux points x, y) de l'opérateur $R*$, partie $*$-résiduelle de la dilatation unitaire minimale de T.*

Démonstration. — Nous utilisons les techniques introduites par le second auteur dans [8]. Rappelons brièvement la construction faite dans [8].

Soit $l^1(\mathbf{Z}; E)$ l'espace des suites absolument sommables dans E. Soit N le sous-espace vectoriel fermé de $l^1(\mathbf{Z}; E)$ engendré par les suites de la forme $(\dots, 0, -Ty, y, 0\dots)$, $y \in E$. On note ${}^{\mathbf{Z}}E$ le quotient de $l^1(\mathbf{Z}; E)$ par N.

Si $\eta = (y_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in l^1(\mathbf{Z}; E)$, on note $\tilde{\eta}$ sa classe dans ${}^{\mathbf{Z}}E$. On vérifie que

$$\|\tilde{\eta}\|_{\mathbf{Z}_E} = \lim_{m\to+\infty} \left\|\sum_{k>-m} T^{m+k} y_k\right\|.$$

Muni de cette norme ${}^{\mathbf{Z}}E$ est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est défini par:

$$\langle \tilde{\eta}, \tilde{\eta}' \rangle_{\mathbf{Z}_E} = \lim_{m\to+\infty} \left\langle \sum_{k>-m} T^{m+k} y_k, \sum_{k>-m} T^{m+k} y'_k \right\rangle.$$

Par ailleurs, définissons un prolongement isométrique de E dans $l^1(\mathbf{Z}; E)$ par la formule:

$$u(y) = (\dots, 0, \boxed{y}, 0, \dots);\ y \in E,$$

où, comme Sz.-Nagy—Foiaş, nous entourons le terme d'indice 0. Nous notons $\tilde{u}$ l'opérateur de E dans ${}^{\mathbf{Z}}E$ obtenu par passage au quotient (on peut remarquer que l'opérateur A de la formule (1) est $\tilde{u}^*\tilde{u}$).

Soit encore S le shift à droite dans $l^1(\mathbf{Z}; E)$; il détermine un opérateur $\tilde{S}$ de ${}^{\mathbf{Z}}E$, et l'on a, $\forall y \in E$:

$$\tilde{u}(Ty) = \tilde{S}(\tilde{u}(y)).$$

Notons $D = (I - T^*T)^{1/2}$ et $\mathscr{D} = \overline{\operatorname{Im} D}$. Définissons les espaces de Hilbert: $K_1 = l^2(\mathbf{Z}; \mathscr{D})$, et $K = K_1 \oplus {}^{\mathbf{Z}}E$, somme hilbertienne.

L'application Φ, de E dans K, définie par:

$$\Phi(y) = (\ldots, 0, \boxed{Dy}, DTy, \ldots, DT^n y, \ldots) \oplus \tilde{u}(y)$$

est une isométrie, ce qui permet de considérer K comme un sur-espace de E (mais nous ne ferons pas l'identification, et conserverons la notation Φ).

Sur K, on définit un opérateur V, comme produit direct du shift à gauche sur K_1 et de l'opérateur $\tilde{S}$ sur ${}^{\mathbf{Z}}E$. Comme tous deux sont unitaires, V est une isométrie surjective.

Par ailleurs, pour tous $y_1, y_2 \in E$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a:

$$\langle V^n \varphi(y_1), \varphi(y_2) \rangle_K = \langle T^n y_1, y_2 \rangle,$$

ce qui signifie que V est une dilatation unitaire de T.

Enfin, on vérifie que:

$$\overline{\operatorname{span}} \{V^n \varphi(E); n \in \mathbf{Z}\} = K,$$

et cette dilatation est donc minimale.

Pour identifier la partie $*$-résiduelle de la dilatation, au sens de Sz. Nagy—Foiaş [7], on pose:

$$L = \overline{(V \circ \varphi - \varphi \circ T)(E)}$$

et

$$M = \overline{\operatorname{span}} \{V^n L; n \in \mathbf{Z}\}.$$

Par définition, $\mathscr{R}*$ est le supplémentaire de M dans K. Dans le cas présent, $M = K_1$ et $\mathscr{R}* = {}^{\mathbf{Z}}E$. La restriction de V à $\mathscr{R}*$, notée $R*$ par Sz.-Nagy—Foiaş [7], est donc ici l'opérateur $\tilde{S}$ sur ${}^{\mathbf{Z}}E$.

Si $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ désigne la base canonique de $l^1(\mathbf{Z})$, $\tilde{S}^j \tilde{u}(x)$ représente la classe dans ${}^{\mathbf{Z}}E$, de $e_j \otimes x$ et $\tilde{u}(y)$, celle de $e_0 \otimes y$. La formule de définition (8) du produit scalaire donne donc:

$$\langle \tilde{S}^j \tilde{u}(x), \tilde{u}(y) \rangle_{{}^{\mathbf{Z}}E} = \lim_{m \to +\infty} \langle T^{m+j} x, T^m y \rangle = \lambda_j(x, y).$$

Il en résulte que:

$$\lambda_j(x, y) = \langle R_*^j \tilde{u}(x), \tilde{u}(y) \rangle = \int e^{ij\theta} \langle E(d\theta) \tilde{u}(x), \tilde{u}(y) \rangle$$

où $\langle E(d\theta) \tilde{u}(x), \tilde{u}(y) \rangle$ représente la mesure spectrale scalaire de l'opérateur $R*$, aux points $\tilde{u}(x)$, $\tilde{u}(y)$. La proposition est donc établie.

Nous allons maintenant comparer les deux extensions de E et T réalisées: celle en H, U et celle en ${}^{\mathbf{Z}}E$, $\tilde{S}$. Nous aurons besoin d'un lemme:

Lemme 3. *Si T est d'image dense, $\tilde{u}(E)$ est dense dans ${}^{\mathbf{Z}}E$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Soit $(y_k)_{-N<k<N}$ une suite finie de points de E. La classe de $(y_k)_{-N<k<N}$ dans ${}^{\mathbf{Z}}E$ est la même que celle de $e_{-N}\otimes z$, avec $z=y_{-N}+Ty_{-N+1}+\ldots+T^k y_{-N+k}+\ldots+T^{2N}y_N$.

Si $\operatorname{Im} T$ est dense dans E, il existe $z'\in\operatorname{Im} T$, avec $\|z-z'\|<\varepsilon/N$. Soit $z'=Tz_1$. Il existe $z_1'\in\operatorname{Im} T$, avec $\|z_1-z_1'\|<\varepsilon/N$. Soit $z_1'=Tz_2$, et ainsi de suite pour $1\leqq k\leqq N-1$:

$$z_k'\in\operatorname{Im} T,\quad \|z_k-z_k'\|<\varepsilon/N,\quad \text{et}\quad z_k'=Tz_{k+1}.$$

La classe de $e_0\otimes z$ dans ${}^{\mathbf{Z}}E$ est la même que celle de

$$(z-z')\otimes e_{-N}+\ldots+(z_k-z_k')\otimes e_{-N+k}+\ldots+(z_{N-1}-z_{N-1}')\otimes e_{-1}+z_N\otimes e_0$$

or $z_N\otimes e_0\in\tilde{u}(E)$ et

$$\|(z-z')\otimes e_{-N}+\ldots+(z_{N-1}-z_{N-1}')\otimes e_{-1}\|_{{}^{\mathbf{Z}}E}$$
$$=\lim_{m\to+\infty}\|T^{m-N}(z-z')+\ldots+T^{m-N+k}(z_k-z_k')+\ldots+T^{m-1}(z_{N-1}-z_{N-1}')\|_{{}^{\mathbf{Z}}E}<\varepsilon.$$

Nous en déduisons:

Proposition 4. *Si T est d'image dense, l'injection $\tilde{u}$, de E dans ${}^{\mathbf{Z}}E$, est une isométrie de E muni de la norme $[\![\cdot]\!]$ sur $\tilde{u}(E)$ muni de la norme de ${}^{\mathbf{Z}}E$. Elle se prolonge donc en une isométrie de H sur ${}^{\mathbf{Z}}E$. Les opérateurs U et $\tilde{S}$ sont identiques, en ce sens que $\tilde{u}\circ U=\tilde{S}\circ\tilde{u}$.*

Démonstration. Pour établir la première partie de la proposition, il suffit de se reporter à la définition des normes $[\![\ ]\!]$ et $\|\ \|$. La seconde résulte alors du lemme. La troisième est évidente, puisque si $x\in E$, $\tilde{u}\circ U(x)$ est la classe de $Tx\otimes e_0$, et $\tilde{S}\circ\tilde{u}(x)$ celle de $x\otimes e_1$.

Si T n'est pas d'image dense, l'identification ci-dessus ne subsiste pas nécessairement, car U n'est pas toujours surjectif, alors que $\tilde{S}$ l'est.

Nous allons poursuivre l'étude de la mesure μ_x, définie par la série de Fourier $\sum_{j\in\mathbf{Z}}\lambda_j(x)e^{ij\theta}$. Rappelons qu'une contraction T est complètement non-unitaire (en abrégé c.n.u.) s'il n'existe pas de sous-espace fermé $F\subset E$ tel que $TF=F$ et tel que la restriction de T à F soit un opérateur unitaire.

Proposition 5. *Si T est complètement non unitaire, pour tout $x\in E$, la mesure μ_x est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur le Tore.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la Proposition 2 et du fait établi par Sz.-Nagy—Foiaş [7] que, si T est complètement non unitaire, la mesure spectrale de sa dilatation unitaire minimale est équivalente à la mesure de Lebesgue. En particulier, pour la partie $*$-résiduelle de cette dilatation, les mesures salaires sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

On peut aussi donner de la proposition 5 une démonstration directe, qui n'utilise pas le résultat de [7]. Cette démonstration, que nous allons maintenant indiquer, nous a été communiquée par A. Atzmon.

Soit $x \in E$, $x \neq 0$, et supposons que μ_x ne soit pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Il existe alors un fermé $K \subset \mathbf{T}$, de mesure de Lebesgue nulle, avec $\mu_x(K) > 0$. On peut trouver une fonction h dans l'algèbre du disque $A(D)$ avec $h=1$ sur K, $|h|<1$ sur $D \setminus K$. Considérons la suite $(h^n(T)x)_{n \in \mathbf{N}}$: elle admet une sous-suite $(h^{n_k}(T)x)_{k \in \mathbf{N}}$ qui converge faiblement dans E vers un point $z \in E$. Comme l'injection canonique de E dans H est continue, elle est aussi faiblement continue, et cette suite converge aussi faiblement dans H, vers le point z.

Pour toute fonction $g \in A(D)$, on a, d'après (6):

$$[z, g(T)x] = \lim_{k \to +\infty} [h^{n_k}(T)x, g(T)x] = \lim_{k \to +\infty} \int h^{n_k}(e^{i\theta}) \bar{g}(e^{i\theta}) d\mu_x(\theta)$$
$$= \int_K \bar{g}(e^{i\theta})\, d\mu_x.$$

En particulier, $[z, x] = \mu_x(K) > 0$, et donc $z \neq 0$. Choisissons maintenant une fonction $\varphi \in A(D)$, avec $\|\varphi\|_\infty = 1$ et $\varphi(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$, $\theta \in K$. Nous allons montrer que

$$T\varphi(T)z = z \tag{10}$$

En effet, pour tout $g \in A(D)^{\urcorner}$ on a:

$$[(T\varphi(T)-I)z,\ g(T)x] = \lim_{k \to +\infty} \int (e^{i\theta}\varphi(e^{i\theta})-1) h^{n_k}(e^{i\theta}) \bar{g}(e^{i\theta})\, d\mu_x(\theta)$$
$$= \int_K (e^{i\theta}(\varphi(e^{i\theta}))-1) \bar{g}(e^{i\theta}) d\mu_x = 0,$$

d'après la définition de φ.

Il en résulte que pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$[(T\varphi(T)-I)z,\ (T\varphi(T)-I)h^{n_k}(T)x] = 0.$$

Faisant tendre k vers $+\infty$, nous obtenons

$$[\![(T\varphi(T)-I)z]\!] = 0, \quad \text{et donc} \quad T\varphi(T)z = z, \quad \text{comme annoncé.}$$

Posons $S = \varphi(T)$. Alors S est une contraction sur E, qui commute avec T. Pour toute suite finie de complexes $(a_k)_{k \geqq 0}$, on a $ST(\sum_{k \geqq 0} a_k T^k z) = \sum_{k \geqq 0} a_k T^k z$, et donc $\|T(\sum_{k \geqq 0} a_k T^k z)\| = \|\sum_{k \geqq 0} a_k T^k z\|$,et T est une isométrie sur $F = \overline{\text{span}}\,\{T^k z, k \geqq 0\}$ T est surjectif sur cet espace, car $\varphi(T)z \in F$, et $z = T\varphi(T)z$. Ceci contredit le fait que T est complètement non unitaire.

Puisque la mesure μ_x, $x \in E$, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la série $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \lambda_j(x) e^{ij\theta}$ est la série de Fourier d'une fonction de $L^1\left(\mathbf{T}, \dfrac{d\theta}{2\pi}\right)$, que nous notons $\Lambda_z(\theta)$. On a donc $\lambda_j(x) = \int e^{-ij\theta} \Lambda_x(\theta) \dfrac{d\theta}{2\pi}$, et, si l'on pose $\check{\Lambda}_x(\theta) =$

$=\Lambda_x(-\theta)$, $\check{\Lambda}_x$ est la densité de la mesure μ_x par rapport à la mesure de Lebesgue:

$$\mu_x = \check{\Lambda}_x \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{11}$$

De la formule (7) résulte que les coefficients $\lambda_j(x, y)$ sont aussi les coefficients de Fourier d'une fonction de $L^1\left(\mathbf{T}, \frac{d\theta}{2\pi}\right)$, que nous notons $\Lambda_{x,y}$. Or on a:

$$\Lambda_{x,y} = \frac{1}{4}(\Lambda_{x+y} - \Lambda_{x-y} + i\Lambda_{x+iy} - i\Lambda_{x-iy}) \tag{12}$$

Les fonctions Λ_x sont à valeurs positives, mais les fonctions $\Lambda_{x,y}$ ne sont pas à valeurs réelles en général.

Des formules (9) et (11) résulte que, pour tous $x, y \in E$, et toutes fonctions $f, g \in A(D)$, on a:

$$[f(T)x,\ g(T)y] = \int f(e^{i\theta})\bar{g}(e^{i\theta})\check{\Lambda}_{x,y}(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} \tag{13}$$

et si $x, y \in H$:

$$[f(T)x,\ g(T)y] = \int f(e^{i\theta})\bar{g}(e^{i\theta})\, d\mu_{x,y}(\theta), \tag{14}$$

où $\mu_{x,y}$ est, rappelons-le, la mesure dont les coefficients de Fourier sont $\big(\lambda_{-j}(x, y)\big)_{j\in\mathbf{Z}}$.

Dans la suite de cet article, nous supposerons T complètement non-unitaire. La fonction Λ_x s'appellera fonction de représentation de l'opérateur T au point x. La raison de cette dénomination apparaîtra plus loin, mais nous allons voir immédiatement une première application de cette fonction: elle permet d'estimer la distance entre le point x et l'espace engendré par ses itérés. Plus précisément:

Proposition 6. *Soit* $x \in E$, *on a:*

a)
$$\exp \int \log \Lambda_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = \operatorname*{Inf}_{m\geqq 0}\left[\operatorname{dist}_E(T^m x, \overline{\operatorname{span}}\{T^{m+1}x, T^{m+2}x, \dots\})\right]^2$$

b) Lorsque T est inversible, cette quantité est encore égale à

$$\operatorname*{Inf}_{m\geqq 0}\left[\operatorname{dist}_E(T^m x, \overline{\operatorname{span}}\{T^{m-1}x, T^{m-2}x, \dots\})\right]^2$$

et les deux infima peuvent être pris sur $m \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. Pour tout polynôme $p(T)=\sum_{k\geqq 0} a_k T^k$, on peut écrire:

$$\operatorname*{Inf}_{m\geqq 0}\left\|T^m(x-p(T)x)\right\|^2 = [\![x-p(T)x]\!]^2 = \int |1-p(e^{i\theta})|^2\, d\mu_x(\theta)$$

$$= \int |1-p(e^{i\theta})|^2\, \check{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi},$$

et si l'on prend l'infimum des deux membres pour tous les polynômes $p(T)$, le théorème de Szegö donne *a*). Si T est inversible, on considère les polynômes $q(T)=\sum_{k\leq 0} b_k T^k$, et on obtient *b*). Le fait que l'infimum puisse être pris en $m\in\mathbf{Z}$ résulte du fait que, T étant une contraction, il s'agit simplement de la limite lorsque $m\to+\infty$.

Corollaire 7. *Si T est inversible,* Log Λ_x *est intégrable si et seulement si*

$$\operatorname*{Inf}_{m\in\mathbf{Z}} \operatorname{dist}_E(T^m x, \overline{\operatorname{span}}\{T^{m-1}x, T^{m-2}x, \ldots\}) > 0.$$

Ceci se produit si et seulement si

$$\operatorname*{Inf}_{m\in\mathbf{Z}} \operatorname{dist}_E(T^m x, \overline{\operatorname{span}}\{T^{m+1}x, T^{m+2}x, \ldots\}) > 0.$$

Ce résultat doit être rapproché du théorème 1 de [4]: il y était démontré que, si T ne vérifie pas d'équation fonctionnelle asymptotique (voir [4]) et si Λ_x n'est pas cyclique dans PF (espace de pseudo-fonctions, c'est-à-dire des distributions dont la suite des coefficients de Fourier est dans $c_0(\mathbf{Z})$) pour la multiplication par $e^{i\theta}$, alors T a des sous-espaces invariants non triviaux.

Mais, si $\Lambda_x\in L^1$, le fait que Λ_x ne soit pas cyclique dans PF pour la multiplication par $e^{i\theta}$ équivaut au fait qu'il existe $f\in\mathscr{A}(\mathbf{T})$ (espace des fonctions dont la série de Fourier est absolument convergente), non identiquement nulle telle que $f\cdot\Lambda_x\in H^1(\mathbf{T})$. Mais alors, ou bien $f\cdot\Lambda_x=0$, ou bien $\int \operatorname{Log}\Lambda_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}>-\infty$.

Dans le second cas, le résultat présent est donc plus précis.

Dans le cas du shift à poids sur $l^2(\mathbf{Z})$ étudié par le premier auteur dans [5], le calcul fait dans [5] montre que pour tout $x\neq 0$, Log Λ_x est intégrable. Il en résulte, comme annoncé dans [5] que, pour tout $x\neq 0$, $x\notin\overline{\operatorname{span}}\{Tx, T^2x, \ldots\}$; la proposition ci-dessus établit en outre que la distance entre $T^m x$ et ses itérés est uniformément minorée, pour $m\in\mathbf{Z}$, ce qui précise le résultat de [5].

Pour terminer ce paragraphe, remarquons que l'on peut introduire une suite de fonctions convergeant vers Λ_x dans $L^1(\mathbf{T})$ et, pour ces fonctions, donner un calcul explicite.

Pour $0<r<1$, soit $P_r(\theta)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} r^{|k|}e^{ik\theta}$ le noyau de Poisson. On pose $\Lambda_x^{(r)}= =P_r*\Lambda_x$. Les fonctions $\Lambda_x^{(r)}$ convergent vers Λ_x lorsque $r\to 1^-$ et peuvent s'écrire:

$$\Lambda_x^{(r)}(\theta)=\lambda_0(x)+2\lim_{m\to+\infty}\operatorname{Re}\left\langle T^{m+1}\left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}-T\right)^{-1}x, T^m x\right\rangle$$

$$=\operatorname{Re}\operatorname*{Lim}_{m\to+\infty}\left\langle\left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}-T\right)^{-1}\left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}+T\right)T^m x, T^m x\right\rangle.$$

La fonction $\Lambda_x^{(r)}$ est donc la partie réelle, pour $z=e^{-i\theta}$, de la fonction

$$F_x^{(r)}(z)=\lambda_0(x)+2\left[\left(\frac{1}{r}z-T\right)^{-1}x,\, x\right]$$

qui est holomorphe pour $|z|<1/r$.

Dans la suite, nous supposerons désormais T *inversible.*

§ 2. Le spectre de U et celui de T

Puisque T est inversible, U est unitaire, et son spectre est contenu dans le cercle unité $\mathscr{C}=\{z\in\mathbf{C},\ |z|=1\}$. S'il existe un point x_0 de E cyclique pour T, c'est-à-dire tel que $E=\overline{\operatorname{span}}\{T^k x_0,\ k\geqq 0\}$, alors x_0 est aussi cyclique pour U dans H. Les éléments de H peuvent être considérés comme des fonctions de $L^2(\mathbf{T},\mu_{x_0})$ avec $\mu_{x_0}=$ $=\overset{v}{\Lambda}_{x_0}\dfrac{d\theta}{2\pi}$, et U peut être représenté par la multiplication par $e^{i\theta}$, dans cet espace. En notant $x(\theta)$ la fonction associée à x, on peut écrire, pour tous $x, y\in H$

$$[x,y]=\int x(\theta)\,\overline{y(\theta)}\,\overset{v}{\Lambda}_{x_0}(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{15}$$

Le spectre de U est $\{e^{i\theta},\ \theta\in\text{support } \overset{v}{\Lambda}_{x_0}\}$ (rappelons que le support de $\overset{v}{\Lambda}_{x_0}$ est le complémentaire du plus grand ouvert où $\overset{v}{\Lambda}_{x_0}$ est nulle presque partout); nous le notons K_0, il est contenu dans le cercle unité.

La W^*-algèbre engendré par U est isomorphe à $L^\infty(K_0,\mu_{x_0})$, et, pour toute fonction $f\in L^\infty(K_0,\mu_{x_0})$, on a, si $x,y\in H$:

$$[f(U)x,y]=\int f(e^{i\theta})\,d\mu_{x,y}(\theta). \tag{16}$$

La correspondance $f\in L^\infty(K_0,\mu_{x_0})\leftrightarrow f(U)$ est un homéomorphisme de L^∞ dans $\mathscr{L}(H)$, espace des opérateurs bornés sur H, muni de la norme d'opérateurs. L'espace $\mathscr{L}(H)$ est le dual de l'espace, note $\mathscr{L}^1(H)$, des opérateurs nucléaires sur H. L'application ci-dessus est aussi un homéomorphisme de $L^\infty(K_0,\mu_{x_0})$ muni de $\sigma(L^\infty,L^1)$ dans $\mathscr{L}(H)$, muni de $\sigma(\mathscr{L}(H),\mathscr{L}^1(H))$.

En composant avec l'injection canonique de $L^\infty\left(\mathbf{T},\dfrac{d\theta}{2\pi}\right)$ dans $L^\infty(K_0,\mu_{x_0})$, on obtient une application $L^\infty\left(\mathbf{T},\dfrac{d\theta}{2\pi}\right)\to\mathscr{L}(H)$, continue pour les normes et les topologies $\sigma(L^\infty,L^1)$, $\sigma(\mathscr{L}(H),\mathscr{L}^1(H))$. Cette application est donc la transposée d'une application $\mathscr{I}$ de $\mathscr{L}^1(H)$ dans $L^1\left(\mathbf{T},\dfrac{d\theta}{2\pi}\right)$, continue pour les normes et les topologies $\sigma(\mathscr{L}^1(H),\mathscr{L}(H))$, $\sigma(L^1,L^\infty)$.

Si $x, y \in H$, on leur associe l'opérateur de rang 1, noté $x \otimes y$, défini par $x \otimes y(z) = [z, y]x$, $\forall z \in H$. Cet opérateur est dans $\mathscr{L}^1(H)$. Pour tout $\varphi \in L^1$, on a:

$$\langle \varphi, \mathscr{I}(x \otimes y) \rangle_{(L^1, L^\infty)} = \langle \mathscr{I}^* \varphi, x \otimes y \rangle_{(\mathscr{L}(H), \mathscr{L}^1(H))} = \langle \varphi(U), x \otimes y \rangle_{(\mathscr{L}(H), \mathscr{L}^1(H))}$$
$$= [\varphi(U)x, y] = \int \varphi(\theta)\, d\mu_{x,y}(\theta).$$

En particulier, si $x, y \in E$, on obtient

$$[\varphi(U)x, y] = \int \varphi(\theta)\, \check{\Lambda}_{x,y}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

et donc $\check{\Lambda}_{x,y}$ est l'image par $\mathscr{I}$ de l'opérateur $x \otimes y$.

On en déduit immédiatement que, pour $x, y \in E$, l'application $(x, y) \to \check{\Lambda}_{x,y}$ est continue de $H \times H$ dans L^1. Il en résulte que $\check{\Lambda}_{x,y} \in L^1$ si $x, y \in H$, et que cette application est continue sur $H \times H$ tout entier.

On a donc obtenu:

Proposition 7. *Pour tous* $x, y \in H$, $\mu_{x,y} = \check{\Lambda}_{x,y} \dfrac{d\theta}{2\pi}$ *et* $\check{\Lambda}_{x,y} \in L^1\left(\mathbf{T}; \dfrac{d\theta}{2\pi}\right)$. *La mesure* $\mu_{x,y}$ *est la mesure spectrale scalaire de* U *aux points* x, y, *et on peut écrire, pour tous* $f, g \in L^\infty(K_0, \mu_{x_0})$:

$$[f(U)x, g(U)y] = \int f(e^{i\theta}) \bar{g}(e^{i\theta})\, \check{\Lambda}_{x,y}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{17}$$

Nous allons maintenant étudier les formules de transformation concernant les fonctions $\check{\Lambda}_{x,y}$.

Proposition 8. *Soient* $x, y \in H$, $\varphi, \psi \in L^\infty(K_0, \mu_{x_0})$, *et soient* $x' = \varphi(U)x$, $y' = \psi(U)y$; *on a:*

$$\check{\Lambda}_{x',y'} = \varphi \bar{\psi}\, \check{\Lambda}_{x,y}. \tag{18}$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a en effet

$$[U^k x', y'] = [U^k \varphi(U)x,\ \psi(U)y] = \int e^{ik\theta} \varphi(e^{i\theta}) \bar{\psi}(e^{i\theta}) \check{\Lambda}_{x,y}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

d'où la proposition.

Corollaire 9. *Toutes les fonctions* $\check{\Lambda}_{x,y}$, $x, y \in H$, *sont nulles presque partout sur* $\{\theta, e^{i\theta} \notin K_0\}$.

Démonstration. Si $\mathrm{Sp}\, U = K_0$ n'est pas le cercle $\mathscr{C}$ tout entier, choisissons $\varphi = \psi = 1$ sur K_0, nulle hors de K_0, dans la formule (15).

Alors $\varphi(U) = I$, et donc $\check{\Lambda}_{x,y} = |\varphi|^2\, \check{\Lambda}_{x,y}$, d'où le résultat.

Il faut remarquer à cet égard que Sp $\tilde{S}$ peut fort bien être le cercle unité tout entier. C'est le cas, par exemple, pour l'opérateur de shift à poids sur $l^2(\mathbf{Z})$, étudié par le premier auteur dans [5].

Ce spectre n'est cependant jamais de mesure nulle, comme le montre la proposition suivante, qui est implicitement contenue dans Sz.-Nagy—Foiaş [7]:

Proposition 10. *Le spectre de U est de mesure positive; il est contenu dans l'intersection de celui de T avec le cercle unité.*

Démonstration. Le fait que la mesure du spectre de U soit non-nulle résulte simplement du fait que la fonction $\overset{v}{\Lambda}_{x_0}$ est intégrable, et d'intégrale non nulle.

Le second point est tout aussi clair: puisque U est une extension de T, sp $U \subset$ $\subset$ sp T.

Proposition 11. *Soient $x, y \in E$, et soient $x' = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k x$, $y' = \sum_{j \in \mathbf{Z}} b_j T^j y$ deux séries convergentes dans H de sommes respectives x' et y'. On suppose en outre que les fonctions $\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{ik\theta}$ et $\psi(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_j e^{ij\theta}$ sont dans $L^\infty(K_0, \mu_{x_0})$. Alors*

$$[x', y'] = \int \varphi(\theta) \bar{\psi}(\theta) \overset{v}{\Lambda}_{x,y}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Démonstration. Puisque les séries convergent dans H, on a:

$$[x', y'] = \left[\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k x, \ \sum_{j \in \mathbf{Z}} b_j T^j y\right] = \sum_{k, j \in \mathbf{Z}} a_k \overline{b_j} [T^k x, T^j y]$$

$$= \sum_{k, j \in \mathbf{Z}} a_k \overline{b_j} \lambda_{k-j}(x, y) = \int \varphi(\theta) \overline{\psi(\theta)} \overset{v}{\Lambda}_{x,y}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Il faut remarquer que ceci vaut a fortiori pour des séries convergeant dans E.

Nous allons maintenant étudier la disposition du spectre de S par rapport à sp $T \cap \mathscr{C}$.

Proposition 12. *Soit λ, avec $|\lambda| = 1$, $\lambda \notin$ Sp U. L'image de $T - \lambda I$ contient tous les points $x \in E$ tels que*

$$\|T^{-k} x\| \leqq \varrho_k, \quad k \in \mathbf{N}$$

pour une certaine suite $(\varrho_k)_{k \in \mathbf{N}}$, dépendant de x, et telle que

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} \varrho_k \geqq 1 \forall k; \quad \varrho_{m+n} \leqq \varrho_m \varrho_n, \quad \forall m, \quad \forall n; \\ \sum_{k > 0} \dfrac{\log \varrho_k}{1 + k^2} < +\infty. \end{cases}$$

Démonstration. Elle est inspirée d'un calcul de A. Atzmon [1]). — Pour simplifier les notations, nous supposerons $\lambda = 1 \notin$ Sp U. Pour φ de classe $C^1(\mathbf{T})$. Définissons la fonction $q(\theta)$ par:

(20) $$\varphi(\theta)-\varphi(0) = (e^{i\theta}-1)\,q(\theta).$$

Soient

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ik\theta}, \quad q = \sum_{j\in\mathbf{Z}} b_j e^{ij\theta}$$

les séries de Fourier. Les coefficients de Fourier de q sont liés à ceux de φ par les relations:

(21) $$\begin{cases} b_j = \sum_{l>j} a_l & j \geqq 0 \\ b_j = -\sum_{l\leqq j} a_l & j < 0 \end{cases}$$

qui s'obtiennent immédiatement au vu de (20).

Si $\varrho=(\varrho_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite vérifiant (19), notons $\mathscr{A}_\varrho$ l'algèbre des fonctions $f\in\mathscr{A}(\mathbf{T})$, $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ik\theta}$, telles que $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k|\,\varrho_{|k|}<+\infty$.

Soit $x\in E$, tel que $\|T^{-k}x\|\leqq\varrho_k$ $\forall k\in\mathbf{N}$, ϱ_k vérifiant (19). Soit ϱ' la suite définie par $\varrho'_k=\varrho_0+\ldots+\varrho_k$, $k\geqq 1$. Elle vérifie encore (19).

Lemme. *Si $\varphi\in\mathscr{A}_\varrho$, la fonction q définie par* (20) *appartient à la classe $\mathscr{A}_\varrho$.*

Démonstration du lemme. On a $\sum_{j\geqq 0} |b_j|\,\varrho_j\leqq\sum_{j\geqq 0}\sum_{l>j} |a_l|\,\varrho_j\leqq$ $\leqq|a_1|\,\varrho_1+|a_2|(\varrho_1+\varrho_2)+\ldots+|a_k|(\varrho_0+\ldots+\varrho_{k-1})+\ldots$ et donc

$$\sum_{j\geqq 0}|b_j|\,\varrho_j \leqq \sum_{k\geqq 0}|a_k|\,\varrho'_k <+\infty,$$

de même

$$\sum_{j<0}|b_j|\,\varrho_{-j} \leqq \sum_{j>0}\sum_{l\leqq -j}|a_l|\,\varrho_j$$

$$\leqq |a_{-1}|\,\varrho_1+|a_{-2}|(\varrho_1+\varrho_2)+\ldots+|a_{-k}|(\varrho_1+\ldots+\varrho_k)+\ldots \leqq \sum_{k\geqq 1}|a_{-k}|\,\varrho'_k <+\infty,$$

ce qui prouve le lemme.

Choisissons pour fonction φ une fonction valant -1 en 0 à support dans C sp $\tilde{S}$. On peut en trouver une dans la classe $\mathscr{A}_{\varrho'}$, car celle-ci n'est pas quasi-analytique.

Par conséquent, les deux séries $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k x$ et $\sum_{j\in\mathbf{Z}} b_j T^j x$ convergent dans E, donc dans H. Notons pour simplifier $\varphi(T)x$ et $q(T)x$ leurs sommes respectives: ce sont des points de E (mais les opérateurs $\varphi(T)$ et $q(T)$ n'existent pas!). Puisque φ et q sont dans $\mathscr{A}(\mathbf{T})$, elles sont a fortiori bornées, et, d'après la proposition 11, on obtient:

$$[\![\varphi(T)+I-(T-I)\,q(T)x]\!]^2 = \int |\varphi(\theta)+1-(e^{i\theta}-1)\,q(\theta)|^2\, \check{\Lambda}_x(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int |1-(e^{i\theta}-1)\,q(\theta)|^2\check{\Lambda}_x(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}, \quad \text{car } \varphi \text{ est nulle sur le support de } \check{\Lambda}_x,$$

$$= [\![(I-(T-I)\,q(T))x]\!]^2.$$

Mais aussi $\varphi(\theta)+1-(e^{i\theta}-1)q(\theta)=0$, d'après (20), et donc $x=(T-I)q(T)x$.

Il faut remarquer que l'antécédent de x pour $T-I$ a été trouvé sous la forme d'une série convergente $q(T)x$, telle que la fonction $q(\theta)\in L^\infty$. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Corollaire. *Si, pour tout $x\in E$ on peut trouver une suite $(\varrho_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant* (19) *telle que $\|T^{-k}x\|\leqq\varrho_k$, alors $\operatorname{sp}\tilde{S}=\operatorname{sp}T\cap\mathscr{C}$. C'est le cas en particulier si*

$$\sum_{k<0}\frac{\log\|T^k\|}{1+k^2}<+\infty.$$

Nous allons maintenant, pour poursuivre cette étude, développer un calcul fonctionnel lié aux séries convergentes.

§ 3. Construction d'un calcul fonctionnel adapté aux séries convergentes

Comme au paragraphe précédent, T est une contraction inversible de classe $C_1.$, et complètement non unitaire. Nous nous intéressons aux séries convergentes $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k T^k x$, mais non nécessairement normalement convergentes.

Proposition 13. *Soit $x\in E$, avec $x\neq 0$. Soit $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k T^k x$ une série convergente dans H, de somme x'.*

La série de Fourier $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k e^{ik\theta}$ définit une fonction φ de $L^2\left(\check{\Lambda}_x\frac{d\theta}{2\pi}\right)$: les sommes $\sum_{-N}^{M}\gamma_k e^{ik\theta}$ convergent dans $L^2\left(\check{\Lambda}_x\frac{d\theta}{2\pi}\right)$ lorsque $M,\ N\to+\infty$; cette fonction vérifie en outre

$$\check{\Lambda}_{x'}=|\varphi|^2\check{\Lambda}_x \text{ p.p.} \tag{22}$$

Démonstration. Posons, pour $M,\ N\in\mathbf{N}$, $x_{M,N}=\sum_{-N}^{M}\gamma_k T^k x$, et $\varphi_{M,N}(\theta)=\sum_{-N}^{M}\gamma_k e^{ik\theta}$. Si la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k T^k x=x'$ est convergente, alors $x_{M,N}\xrightarrow[M,N\to+\infty]{}x'$. Donc, si $M,N,M',N'\in\mathbf{N}$, $[\![x_{M,N}-x_{M',N'}]\!]^2=\int|\varphi_{M,N}(\theta)-\varphi_{M',N'}(\theta)|^2\check{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$ et $(\varphi_{M,N})_{M,N\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy, ce qui prouve notre première assertion.

Par ailleurs, pour toute fonction $f\in L^\infty(\mathbf{T})$, on a:

$$[\![f(U)x']\!]^2=\lim_{M,N\to+\infty}[\![f(U)x_{M,N}]\!]^2=\lim_{M,N\to+\infty}\int|f(\theta)|^2|\varphi_{M,N}(\theta)|^2\check{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$$

et donc

$$\int|f(\theta)|^2\check{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}=\int|f(\theta)|^2|\varphi(\theta)|^2\check{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}$$

et la proposition est ainsi démontrée.

Remarquons que ceci vaut a fortiori si la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k T^k x$ converge dans E.

Il n'est pas réellement nécessaire que la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k T^k x$ converge au sens usuel, dans H, pour que l'on obtienne cette proposition. Il suffit qu'elle soit sommable au sens d'Abel:

Proposition 14. *Soit $x\in E$, avec $x\neq 0$. Supposons que pour tout r, avec $0<r<1$, les séries $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k r^{|k|} T^k x$ soient convergentes (dans H), et notons $x'(r)$ leur somme. Si lorsque $r\to 1^-$, $x'(r)\to x'$ (dans H), la série de Fourier $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k e^{ik\theta}$ définit encore une fonction φ de $L^2\left(\check{\Lambda}_x\frac{d\theta}{2\pi}\right)$: si l'on pose, pour $0<r<1$,*

$$\varphi^{(r)}(\theta)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k r^{|k|}e^{ik\theta}$$

il existe une fonction $\varphi\in L^2\left(\check{\Lambda}_x\frac{d\theta}{2\pi}\right)$ telle que

$$\int|\varphi^{(r)}(\theta)-\varphi(\theta)|^2\check{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}\xrightarrow[r\to 1^-]{}0$$

et cette fonction vérifie en outre (22).

Démonstration. On a, si $0<r,\ r'<1$:

$$[\![x_r-x_{r'}]\!]^2=\int|\varphi^{(r)}(\theta)-\varphi^{(r')}(\theta)|^2\check{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi},$$

d'où notre première assertion. La seconde se démontre comme à la proposition précédente, en remplaçant $\varphi_{M,N}$ par $\varphi^{(r)}$.

Si la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k T^k x$ converge inconditionnellement (dans H), la proposition 13 peut être améliorée:

Proposition 15. *Si, pour un $x\in E$ avec $x\neq 0$ la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k T^k x$ converge inconditionnellement, la fonction φ_x définie ci-dessus est, pour tout $\tau\in\mathbf{T}$, dans l'espace $L^2\left(\check{\Lambda}_x(\theta+\tau)\frac{d\theta}{2\pi}\right)$. Cette fonction est aussi dans l'espace $L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$.*

Démonstration. Rappelons qu'une série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}x_k$ converge inconditionnellement dans un espace de Banach F si, pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de ± 1, la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varepsilon_k x_k$ converge. On en déduit la caractérisation suivante:

La série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}x_k$ converge inconditionnellement dans F si et seulement si, pour tout $\beta>0$, il existe un sous ensemble fini $A_\beta\subset\mathbf{Z}$, tel que pour tout sous-ensemble fini $B\subset\mathbf{Z}\setminus A_\beta$, on ait $\|\sum_{k\in B}x_k\|_F<\beta$.

Ceci implique immédiatement que, pour toute suite $(t_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes, avec $|t_k|\leqq 1$, $\forall k\in\mathbf{Z}$, la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}t_k x_k$ converge.

Fixons $\tau \in \mathbf{T}$ et appliquons ceci à $t_k = e^{-ik\tau}$, $x_k = \gamma_k T^k x$. Nous obtenons, d'après la proposition 13, $\varphi_x(\theta-\tau) \in L^2\left(\overset{v}{\Lambda}_x \frac{d\theta}{2\pi}\right)$, et donc, pour tout τ, $\varphi_x \in L^2\left(\overset{v}{\Lambda}_x(\theta+\tau)\frac{d\theta}{2\pi}\right)$.

Pour montrer que $\varphi \in L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$, nous utiliserons le lemme suivant, dû à Bessaga—Pelczynski [6]:

Lemme [6]. *Si une série $\sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k$ converge inconditionnellement dans un espace de Banach F, il existe un nombre M tel que, pour tout $N \in \mathbf{N}$, pour toute suite $(t_k)_{|k|\leqq N}$ de nombres complexes, avec $|t_k| \leqq 1$, on ait*

$$\left\|\sum_{-N}^{N} t_k x_k\right\|_F \leqq M,$$

Appliquons ceci à $F=H$. On obtient:

$$[[\sum_{-N}^{N} \gamma_k t_k T^k x]] \leqq M$$

et donc a fortiori

$$[[\sum_{-N}^{N} \gamma_k t_k U^k x]] \leqq M$$

c'est à dire

$$\int \left|\sum_{|k|\leqq N} \gamma_k t_k e^{ik\theta}\right|^2 \overset{v}{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} \leqq M^2.$$

Posant $t_k = e^{ik\tau}$, nous avons:

$$\int \left|\sum_{|k|\leqq N} \gamma_k e^{ik(\theta+\tau)}\right|^2 \overset{v}{\Lambda}_x(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} \leqq M^2 \text{ d'où}$$

$$\int \left|\sum_{|k|\leqq N} \gamma_k e^{ik\tau}\right|^2 \frac{d\tau}{2\pi} \leqq M^2 \quad \text{et donc} \quad \sum_{-N}^{N} |\gamma_k|^2 \leqq M^2 \quad \text{et}$$

$$\varphi_x \in L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right).$$

Nous avons donc obtenu la correspondance suivante entre la convergence d'une série $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k T^k x$ (dans H) et les propriétés de la fonction φ_x qu'elle définit:

a) Si $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k T^k x$ converge, $\varphi_x \in L^2\left(\overset{v}{\Lambda}_x \frac{d\theta}{2\pi}\right)$,

b) Si $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k T^k x$ converge inconditionnellement,

$$\varphi_x \in L^2\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right) \cap \bigcap_{\tau\in\mathbf{T}} L^2\left(\overset{v}{\Lambda}_x(\theta+\tau)\frac{d\theta}{2\pi}\right),$$

c) Si $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k T^k x$ converge normalement, $\varphi_x \in \mathscr{A}(\mathbf{T})$.

Nous allons en déduire un résultat de régularité concernant la suite des itérés $(T^k x)_{k\in\mathbf{Z}}$, dans le cas où les itérés inverses $(T^{-k}x)_{k\geqq 0}$ croissent vite:

Proposition 16. *Supposons que pour un* $x \in E$ *on puisse trouver* $\delta > 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *tels que, pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $\|T^{-n}x\| \geqq \delta(1+\varepsilon)^n$. *Alors la seule série* $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k T^k x$, *convergente dans H au sens d'Abel, telle que la fonction* $\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k e^{ik\theta}$ *définie ci-dessus, appartienne à la classe de Nevanlinna* $\mathcal{N}$ *(c'est-à-dire vérifie* $\sup_{0<r<1} \int \mathrm{Log}^+ |\varphi^{(r)}(\theta)| \cdot d\theta < +\infty$*) et dont la somme soit nulle est la série dont les coefficients* $(\gamma_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ *sont nuls.*

Remarques:

1. Ceci vaut en particulier pour les séries convergentes au sens usuel, puisqu'elles sont convergentes au sens d'Abel, et en particulier pour les séries convergentes dans E.

2. Si on se limite aux séries $\sum_{k\geqq 0} \gamma_k T^k x$, convergentes dans E au sens usuel, ce résultat a été démontré par Sz.-Nagy—Foiaş [7], sous l'hypothèse plus forte que $\varphi(\theta) = \sum_{k\geqq 0} \gamma_k e^{ik\theta} \in H^\infty(\mathbf{T})$. L'hypothèse selon laquelle φ est dans la classe $\mathcal{N}$ est beaucoup plus faible: il suffit qu'une puissance positive $\varphi^\alpha (\alpha > 0)$ soit intégrable pour qu'elle soit réalisée.

3. Si on se limite aux séries $\sum_{k\leqq 0} \gamma_k T^k x$, convergentes au sens usuel le résultat a été démontré par le premier auteur [3]. Dans ce cas, toute hypothèse sur φ est superflue, cette fonction étant dans $\mathscr{A}(\mathbf{T})$.

Démonstration. Il résulte de la proposition 13 (avec $x' = 0$) que $|\varphi|^2 \overset{v}{\Lambda}_x = 0$ p.p. Mais si $\|T^{-n}x_0\| \geqq \delta(1+\varepsilon)^n$, on peut trouver un ε' avec $0 < \varepsilon' \leqq \varepsilon$ et une constante C telle que $|\gamma_{-k}| \leqq C/(1+\varepsilon')^k$, si $k \in \mathbf{N}$, la fonction $\tilde{\varphi}(z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k z^k$ est donc analytique dans la couronne $\frac{1}{1+\varepsilon'} < |z| < 1$. Si elle appartient à la classe $\mathcal{N}$, elle ne peut s'annuler sur un ensemble de mesure positive sans être identiquement nulle. Si elle n'était pas identiquement nulle, on aurait donc $\overset{v}{\Lambda}_x = 0$ p.p., ce qui est contradictoire, car:

$[\![x]\!]^2 = \lim_{m\to+\infty} \|T^m x\|^2 = \int \overset{v}{\Lambda}_x(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$ est strictement positif, puisque T est de classe C_1. Ceci prouve la proposition.

L'étude du cas où, pour tout $x \in E$, les itérés inverses $(T^{-k}x)_{k\geqq 0}$ croissent vite présente un intérêt car c'est le seul cas où l'existence de sous-espaces invariants est laissée ouverte dans [2]. Nous allons voir que le comportement de ces itérés est lié à la taille de l'ensemble des points $x \in E$ pour lesquels $\mathrm{Log}\, \Lambda_x$ est intégrable.

Proposition 17. *Supposons que pour un* $x \in E$, *on puisse trouver* $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, *tels que pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$\|T^{-n}x\| \geqq \delta(1+\varepsilon)^n.$$

Soit $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k T^k x$ *une série convergente dans E, de somme* $x' \neq 0$, *et telle que la fonction* $\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma_k e^{ik\theta}$ *soit de carré intégrable. Alors* $\mathrm{Log}\, \Lambda_{x'}$, *est intégrable si et seulement si* $\mathrm{Log}\, \Lambda_x$ *l'est.*

Démonstration. On sait que $\Lambda_{x'}=|\overset{v}{\varphi}|^2\Lambda_x$, et, comme précédemment, que φ est analytique dans la couronne $\{z, \frac{1}{1+\varepsilon}<|z|<1\}$. Si $\varphi\in L^2$ (ou, plus généralement, si, pour un $\alpha>0$, $\varphi^\alpha\in L^1$), on a $\int \operatorname{Log}|\varphi(\theta)|d\theta>-\infty$; le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.

Ce résultat signifie que l'on a rien à gagner, partant d'un point x, à le remplacer un autre point x', somme d'une série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k T^k x$, telle que $\varphi_x\in L^2$.

*

Les auteurs tiennent à remercier A. Atzmon dont les suggestions et remarques ont permis de simplifier notablement la démontration de plusieurs des résultats présentés ici.

Bibliographie

1. Atzmon, A., Operators which are annihilated by analytic functions. *Acta Math.* vol **144,** 1—2, p. 27—64.
2. Beauzamy, B., Sous-espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach. *Acta Math.* Vol **144,** 1—2, p. 65—82.
3. Beauzamy, B., Une propriété de régularité pour les itérés inverses des contractions de classe C_1. Note C.R.A.S. Paris, t. 290. 10 mars 1980, p. 467—469.
4. Beauzamy, B., Sous-espaces invariants pour les contractions de classe C_1. et vecteurs cycliques dans $C_0(\mathbf{Z})$. *J. of Op. Theory* **7,** (1982) p. 125—137.
5. Beauzamy, B., A weighted bilateral shift with no cyclic vector *J. of Op. Theory* **4.** (1980), p. 287—288.
6. Bessaga, C., A. Pelczynski, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. *Studia Math.* **17** (1958) p. 151—164.
7. Sz.-Nagy, B.—Foiaş, C., *Analyse Harmonique des Opérateurs dans l'Espace de Hilbert.* Akadémiai Kiadó. Budapest 1966.
8. Rome, M., Dilatations isométriques d'opérateurs et sous-espaces invariants. *J. of Op. Theory* **6,** (1981) p. 39—50.

Received February 1983

Bernard Beauzamy et Michel Rome
Université de Lyon 1
Département de Mathématiques
43, Bd du 11 Novembre 1918
69 622 Villeurbanne Cedex France