Rev. Mat. Iberoamericana **22** (2006), no. 2, 489–543

Poches de tourbillon singulières dans un fluide faiblement visqueux

Taoufik Hmidi

Abstract

In this paper, we study the singular vortex patches in the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. We show, in particular, that if the initial vortex patch is C^{1+s} outside a singular set Σ, so the velocity is, for all time, lipschitzian outside the image of Σ through the viscous flow. In addition, the correponding lipschitzian norm is independant of the viscosity. This allows us to prove some results related to the inviscid limit for the geometric structures of the vortex patch.

1. Introduction

Dans les pages suivantes, nous allons fournir quelques résultats concernant l'évolution d'une poche de tourbillon singulière dans le système de Navier-Stokes incompressible gouvernant le mouvement plan d'un fluide visqueux. Les équations décrivant l'évolution du champ de vitesse $v_\nu(t,x)$, avec $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, sont données par

$$(NS_\nu) \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla p_\nu \\ \operatorname{div} v_\nu = 0 \\ v_{\nu|t=0} = v^0, \end{cases}$$

où ν est un paramètre positif désignant la viscosité du fluide et p_ν un scalaire qui représente la pression. Signalons que le système d'Euler incompressible (E) correspondant à une viscosité nulle, et que l'on note parfois (NS_0), est régi par

$$(E) \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v^0. \end{cases}$$

2000 Mathematics Subject Classification : 35Q30, 35A20, 76C05.
Keywords : Navier-Stokes and Euler equations, singular vortex patches, inviscid limit, Littlewood-Paley theory.

Le tourbillon ω d'un champ de vecteurs $v = (v^1, v^2)$ est défini par $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$. Il vérifie dans le cas d'un fluide incompressible bidimensionnel l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t \omega_\nu + v_\nu \cdot \nabla \omega_\nu - \nu \Delta \omega_\nu = 0.$$

Nous savons depuis les travaux de M. Yudovich que si le tourbillon initial est dans $L^1 \cap L^\infty$, alors les systèmes (NS_ν) et (E) sont globalement bien posés. Comme conséquence, si le tourbillon initial est une poche de tourbillon, i.e., $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ avec Ω un domaine borné, alors le tourbillon eulérien est en tout temps l'indicatrice du transporté de Ω par le flot eulérien $\psi(t)$ que l'on définit par

$$\psi(t, x) = x + \int_0^t \psi(\tau, v(\tau, \psi(\tau, x)))d\tau.$$

La loi de Biot-Savart nous renseigne que la connaissance du tourbillon permet d'accéder au champ de vitesse. Dans le cas des poches de tourbillon à bord régulier, la vitesse est complètement déterminée par la dynamique du bord $\partial\Omega(t)$ comme l'indique la formule suivante

$$v(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |x - \gamma_t(\sigma)| \partial_\sigma \gamma_t(\sigma) d\sigma,$$

où γ_t est une paramétrisation régulière du bord $\partial\Omega(t)$. Ainsi, et motivé par plusieurs enjeux, la question de la régularité du bord est devenue d'actualité. C'est qu'à partir de la fin des années quatre-vingt que la question est de nouveau relancée avec le travail de Majda [13]. Il conjecture l'explosion en temps fini, dans certain cas, de la géométrie du bord. Cependant, J.-Y. Chemin met en défaut cette conjecture dans [3] où il démontre qu'un bord initial de classe C^{1+s}, avec $s \in]0, 1[$, préserve en tout temps cette régularité. Il obtient même un résultat plus précis en montrant que la partie régulière du bord initial Ω se propage avec la même régularité alors que la partie singulière reste tout le temps singulière et son nombre ne varie pas. Il prouve aussi que la vitesse est lipschitzienne en dehors des singularités et que son gradient a un comportement explosif près de cet ensemble. En fait, le taux d'explosion en un point x croît à l'approche d'un point singulier moins vite que le logarithme de la distance séparant les deux points. Ce résultat a été ensuite généralisé par R. Danchin à des poches de classe C^{k+s} (voir [10]).

La nature de la singularité est un facteur déterminant dans le comportement du champ de vitesse : si l'on prend par exemple un coin alors on sait que l'explosion logarithmique est inévitable. Par contre dans le cas d'un cusp la vitesse est lipschitzienne dans l'espace tout entier. D'ailleurs, il a été démontré dans [9] que cette information ne se dégrade pas dans le système d'Euler. La vitesse reste en effet lipschitzienne au cours du temps et partout dans l'espace. Certes, l'étude du comportement de l'ensemble singulier est d'un point de vue mathématique loin d'être bien élucidée, mais qu'en est il pour le système de Navier-Stokes incompressible. Comme le terme visqueux a tendance à étaler tout ce qui est confiné, aussi faut-il à ce propos donner une formulation intéressante. Il s'agit de décrire la régularité du transporté du bord initial par le flot visqueux et d'établir des résultats de convergence non visqueuse de cette structure géométrique. Pour réaliser un tel objectif, il apparaît qu'un contrôle uniforme par rapport à ν du gradient de la vitesse est fortement recommandé et effectivement c'est là toute la difficulté, et tous les problèmes sont quasiment centrés autour de ce point délicat.

Les premiers éléments de réponse élaborés dans cette direction sont dûs à R. Danchin. Il montre dans [9] que si la poche initiale est l'indicatrice d'un domaine borné de classe C^{1+s} alors le transporté du bord initial par le flot visqueux est de classe $C^{1+s'}$, pour tout $s' < s$. Il obtient le résultat d'uniformité requis pour la convergence non visqueuse. Mais la méthode qu'il utilise ne lui permet pas de prouver la persistance de la régularité. En fait, la perte de la régularité est artificielle : nous avons montré dans un travail récent [8] que le bord préserve la régularité initiale. Lorsque le bord de la poche est singulier alors il y aura des complications techniques supplémentaires dûes au fait que le champ de vitesses n'est pas en général lipschitzien.

Les premiers résultats de limite non visqueuse dans le cas des solutions de Yudovich remontent à J.-Y. Chemin. Il établit dans [4] la convergence de $v_\nu - v$ vers zéro dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^2))$, pour tout $2 \le p < +\infty$. Par contre, en ce qui concerne la convergence L^p du tourbillon visqueux ω_ν vers ω, on peut se référer à [6] où les auteurs montrent que sous l'hypothèse d'un tourbillon initial dans $L^1 \cap L^\infty \cap B^s_{2,\infty}$, pour un certain $s \in]0,1[$, alors on a la convergence, qui n'est assurée que sur un petit intervalle de temps. Dans un tavail récent [7], nous avons démontré, dans le cas des poches de tourbillon à bord de mesure nulle, la convergence L^p globalement en temps. Ceci nous permet dans ce contexte d'obtenir la convergence de v_ν vers v dans l'espace $W^{1,p}$ pour tout p fini et supérieur ou égal à 2.

Ici, nous nous occupons encore du cas où le bord initial est singulier et nous tâcherons de préciser la convergence non visqueuse du tourbillon : nous montrerons des résultats globaux de convergence des structures géométriques. Le point le plus important sur lequel reposent ces résultats est l'uniformité par rapport à ν du contrôle Lipschitz de la vitesse v_ν en dehors du transporté de l'ensemble singulier par le flot visqueux $\psi_\nu(t)$. Notre premier résultat est le suivant.

Théorème 1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et s un réel appartenant à $]0,1[$. On suppose que le bord $\partial\Omega$ est de classe C^{1+s} en dehors d'un ensemble fermé Σ. Posons $\omega^0 = \mathbf{1}_\Omega$ et désignons par v_ν la solution de Yudovich du système (NS_ν) correspondant à un champ de vecteurs v^0, de divergence nulle et dont le rotationnel vaut ω^0. Soit $\psi_\nu(t)$ le flot associé au champ de vecteurs $v_\nu(t)$. Notons pour $h > 0$,*

$$\begin{aligned} \Omega_\nu(t) &= \psi_\nu(t,\Omega),\ \Sigma_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Sigma) \text{ et} \\ \big(\Sigma_\nu(t)\big)_h^c &= \big\{x \in \mathbb{R}^2\ ; \mathrm{d}\big(x, \psi_\nu(t,\Sigma)\big) \geq h\big\}. \end{aligned}$$

Alors il existe une constante C dépendant seulement de s et de ω^0 telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sup_{h \in]0,e^{-1}]} \frac{\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty((\Sigma_\nu(t))_h^c)}}{-\log h} \leq C(1+\nu t)^{\frac{16}{s}} e^{e^{Ct}}.$$

Désignons par ψ le flot eulérien correspondant au tourbillon initial ω^0. Alors $\partial\Omega_\nu(t)\backslash\Sigma_\nu(t)$ est une courbe de classe $C^{1+s'}, \forall s' < s$. De plus, pour tout $h > 0$, $\partial\Omega_\nu(t) \cap (\Sigma_\nu(t))_h^c$ converge au sens de la distance de Hausdorff vers la courbe $\psi(t,\partial\Omega) \cap \psi(t,\Sigma)_h^c$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S^1}$. Nous signalons que nous avons identifié un point de la partie régulière de la courbe avec un point de $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{S^1}$, la deuxième composante donne la direction de la tangente à la courbe en ce point.

La preuve de ce résultat est basée sur le contrôle de la régularité tangentielle du tourbillon mesurée par rapport à une famille de champs de vecteurs adéquate. Nous utilisons également une version Besov de la théorie de Littlewood-Paley pseudo-locale qui exploite l'information d'un champ de vitesse qui est supposé logarithmiquement lipschitzien et lipschitzien en dehors d'un ensemble donné. Cependant, il y a deux principales informations clé qui nous permettront d'aboutir à des estimations uniformes en ν. La première est un effet régularisant dû à l'intégration en temps du tourbillon. Tandis que la seconde est un résultat de propagation de la régularité Besov dans les équations de transport-diffusion. D'abord, nous savons que le tourbillon visqueux

$$\omega_\nu \stackrel{déf}{=} \partial_1 v_\nu^2 - \partial_2 v_\nu^1$$

d'un fluide bidimensionnel satisfait l'équation de transport-diffusion suivante

$$\begin{cases} \partial_t \omega_\nu + v_\nu \cdot \nabla\omega_\nu - \nu\Delta\omega_\nu = 0 \\ \omega_{\nu|t=0} = \omega^0. \end{cases}$$

Nous montrerons, en particulier, que pour tout $\epsilon \in]0,1[$ et pour tout $t > 0$, on a

$$\nu \int_0^t \omega_\nu(\tau, x) d\tau \in C^{2-\epsilon}, \text{uniformément en } \nu, \tag{1.1}$$

où l'on désigne par C^r l'espace de Hölder défini, pour r non entier, à travers la décomposition de Littlewood-Paley, comme étant l'ensemble des distributions tempérées u vérifiant,

$$\|u\|_{C^r} \overset{déf}{=} \sup_q 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} < +\infty, \tag{1.2}$$

où Δ_q désigne l'opérateur de localisation en fréquences dont la construction repose sur une partition de l'unité : il existe deux fonctions positives et régulières χ et φ qui sont supportées respectivement dans une boule et une couronne telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\chi(\xi) + \sum_{q \geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q \geq 0} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1. \tag{1.3}$$

On pose alors pour toute distribution tempérée u

$$\Delta_{-1} u = \chi(\mathrm{D}) u, \ \Delta_q u = \varphi(2^{-q}\mathrm{D}) u, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad S_q u = \sum_{-1 \leq p \leq q-1} \Delta_p u$$

où $\mathrm{D} = \sqrt{-\Delta}$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|$.

Nous verrons plus de précision sur ces fonctions de troncatures dans la proposition 2.

Notation : Lorsque r est un entier alors l'espace défini par (1.2) sera noté C^r_*.

Voici maintenant le résultat précisant (1.1) et qui sera généralisée dans la proposition 4.

Proposition 1. *Soit ω_ν le tourbillon visqueux du système (NS_ν) correspondant à un tourbillon initial $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$. Alors il existe une constante absolue C telle que, pour tout $t > 0$, pour ν positif et pour tout $q \geq 0$*

$$\nu \frac{2^{2q}}{q+2} \int_0^t \|\Delta_q \omega_\nu(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C \|\omega^0\|_{L^\infty} \Big(1 + t \|\omega^0\|_{L^1 \cap L^\infty}\Big).$$

Nous avons établi dans un travail antérieur [8] que si la vitesse v_ν est lipschitzienne, qui est le cas par exemple lorsque le tourbillon initial est une poche régulière, alors nous n'avons pas une perte logarithmique de la fréquence. Manifestement cette perte est reliée à la faible régularité de la solution de Yudovich qui n'est pas mieux en général que C^1_*.

2. Autour de la théorie de Littlewood-Paley

Cette partie est consacrée à quelques rappels sur la théorie de Littlewood-Paley, essentiellement les opérateurs de localisation en fréquence. Nous donnons une description fréquencielle des fonctions quasi-lipschitziennes, dites aussi logarithmiquement lipschitziennes. L'introduction de ces espaces semble tout-à-fait naturel dans la mécanique des fluides bidimensionnels. En fait les solutions de type Yudovich sont dans cet espace.

Proposition 2. *Il existe deux fonctions χ et ϕ appartenant respectivement aux espaces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ telles que,*

$$\chi(\xi)+\sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi)=1,$$

$$\frac{1}{3}\leq\chi^2(\xi)+\sum_{q\geq 0}\varphi^2(2^{-q}\xi)\leq 1,$$

$$|p-q|\geq 2\Rightarrow \text{supp }\varphi(2^{-p}\cdot)\cap\text{supp }\varphi(2^{-q}\cdot)=\varnothing,$$

$$q\geq 1\Rightarrow \text{supp }\chi\cap\text{supp }\varphi(2^{-q})=\varnothing.$$

On note

$$\Delta_{-1}v=\mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{v}(\xi)),\quad \Delta_q v=\mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{v}(\xi))\text{ si } q\in\mathbb{N}.$$

$$\forall q\leq -2,\quad \Delta_q v=0\quad\text{ et pour tout } q\in\mathbb{Z},\ S_q v=\sum_{p\leq q-1}\Delta_p v.$$

Le calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony dans [1] est fondé sur la décomposition, dite de Bony, qui reconnaît dans un produit uv trois parties : deux termes de paraproduits correspondant à une domination fréquencielle de l'une par rapport à l'autre et un terme de reste où les fréquences sont de même taille. Plus précisément, nous avons la définition suivante.

Définition 1. *On appelle paraproduit de v par u et on note $T_u v$ l'opérateur*

$$T_u v=\sum_q S_{q-1}u\Delta_q v.$$

On appelle reste du produit uv et on note $R(u,v)$ l'opérateur bilinéaire symétrique suivant :

$$R(u,v)=\sum_{|q'-q|\leq 1}\Delta_q u\Delta_{q'}v.$$

Ainsi le produit uv s'écrit formellement

$$uv=T_u v+T_v u+R(u,v).$$

Nous définissons les espaces de Besov B^s_p, avec $p \in [1,+\infty]$ et $s \in \mathbb{R}$ comme étant l'ensemble des distributions tempérées u vérifiant

$$\|u\|_{B^s_p} \stackrel{déf}{=} \sup_q 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p} < +\infty.$$

Il est clair que pour s non entier $B^s_\infty = C^s$.

Définition 2. *Soit d un entier supérieur où égal à 2. Nous désignons par C_{LL} l'espace des fonctions log-lipschitziennes, c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions bornées v de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant*

$$\|v\|_{LL} \stackrel{déf}{=} \|v\|_{L^\infty} + \sup_{0<|x-x'|\le e^{-1}} \frac{\big|v(x)-v(x')\big|}{|x-x'|\log(\frac{1}{|x-x'|})} < +\infty.$$

La proposition qui va suivre est une caractérisation dyadique des éléments de l'espace C_{LL}. Pour la preuve, voir par exemple [2].

Proposition 3. *Il existe une constante $C>0$ telle que pour toute fonction $v \in C_{LL}$ on ait :*

$$C^{-1}\|v\|_{LL} \le \|\Delta_{-1}v\|_{L^\infty} + \sup_q \frac{\|\nabla S_q v\|_{L^\infty}}{2+q} \le C\|v\|_{LL},$$
$$\|\Delta_q v\|_{L^\infty} \le C\|v\|_{LL}(2+q)2^{-q}.$$

Nous savons grâce au lemme d'Osgood qu'un champ de vecteurs v appartenant à C_{LL} possède globalement un unique flot $\psi(t,x)$ dans la classe des fonctions continues dans les deux variables d'espace et de temps, voir par exemple [3]. En outre le flot possède une régularité höldérienne se dégradant avec le temps, essentiellement dans un espace $C^{e^{-\alpha t}}$. La question à laquelle on va répondre concerne la dynamique d'un ensemble donné à travers un flot correspondant à un champ logarithmiquement lipschitzien. Nous allons nous contenter de l'énoncé d'un tel résultat qui a été démontré dans [3].

Lemme 1. *Soit F_0 un ensemble de $\mathbb{R}^d$. On se donne un champ de vecteurs v appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ ; C_{LL})$. Désignons par $\psi(t)$ le flot associé à ce champ de vecteurs. Alors, en posant $F_t = \psi(t,F_0)$, on aura les inclusions*

$$\psi(t,F^c_h) \subset (F_t)^c_{\delta(t,h)}, \quad \text{avec} \quad \delta(t,h) = h^{\exp\left(\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau\right)}.$$

Pour tout $0 \le \tau \le t$,

$$\psi(\tau,\psi^{-1}(t,(F_t)^c_h)) \subset (F_\tau)^c_{\delta(\tau,t,h)}, \quad \text{avec} \quad \delta(\tau,t,h) = h^{\exp\left(\int_\tau^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau\right)}.$$

Voici maintenant un lemme qui sera d'un apport considérable dans notre travail. C'est une sorte d'inégalité de Poincaré. La preuve a été élaborée pour la première fois par R. Danchin dans [10] dans le cas où $p > 2$. Ensuite elle a été généralisée par le même auteur [11] pour le cas des $p \in]1, 2[$

Lemme 2. *Soit d un entier ≥ 2. Il existe une constante strictement positive C_d telle que, si a est une fonction dont le support de sa transformée de Fourier est inclus dans une couronne $\mathcal{C}$. Alors pour tout $p \in]1, +\infty[$, on a*

$$C_d \frac{1}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} |a(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla a|^2 |a|^{p-2} dx = -\frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} a|a(x)|^{p-2} \Delta a \, dx.$$

Le résultat ci-dessus est trivialement vérifié pour $p = 2$: c'est le lemme de Plancherel. Par contre, il n'y a rien d'évident dans le cas $p \neq 2$, vu qu'il y a un mélange de fréquences qui empèche la fonction $|\nabla a|^2 |a|^{p-2}$ d'être supportée dans une couronne. En fait il y a une démonstration simple suggérée par F. Planchon dans [12].
Il est bien connu que l'équation de la chaleur joue ponctuellement en temps un rôle régularisant de la donnée initiale dès qu'on décolle de l'instant $t = 0$. Cet aspect est décrit dans l'espace des phases par le lemme ci-après qui est démontré par exemple dans [5].

Lemme 3. *Soit $\mathcal{C}$ une couronne. Il existe deux constantes positives c et C telles que, pour tout couple (t, λ) de réels positifs, pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour tout $a \in L^p$, on aura l'implication :*

$$\text{Supp } \widehat{a} \subset \lambda\mathcal{C} \Rightarrow \|e^{t\Delta} a\|_{L^p} \leq C e^{-ct\lambda^2} \|a\|_{L^p}.$$

Rappelons maintenant un résultat très utile pour la preuve de l'effet régularisant et qui a été établi par M. Vishik dans [14].

Lemme 4. *Soit d un entier supérieur ou égal à 2. Il existe une constante positive C ne dépendant que de d telle que, pour toute fonction a de la classe de Schwartz et pour tout difféomorphisme ψ de $\mathbb{R}^d$ préservant la mesure de Lebesgue, on aura pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tous les $j, q \geq -1$,*

$$\|\Delta_j(\Delta_q a \circ \psi(\cdot))\|_{L^p} \leq C^k 2^{-k|j-q|} \|\nabla^k \psi^{\alpha(j,q)}\|_{L^\infty} \|\Delta_q a\|_{L^p},$$

où l'on a posé

$$\alpha(j, q) = \begin{cases} \text{sign}(j - q), & \text{si} j \neq q, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous convenons que $\psi^0 = \text{Id}$.

Pour finir cette section nous allons donner, dans un cadre restreint, une sorte de réciproque de l'injection de Sobolev $B_p^s \hookrightarrow C^{s-2/p}$. Nous fournirons la preuve pour la commodité du lecteur.

Lemme 5. *Soient s un réel strictement positif, $p \in [1,+\infty]$ et K un compact de $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$. Alors il existe une constante C_K telle que, pour toute distribution tempérée u, supportée dans K et appartenant à B_∞^s, on a*

$$\|u\|_{B_p^s} \leq C_K \|u\|_{B_\infty^s}.$$

Preuve : Nous ferons usage de la décomposition de Bony. Soit ϕ une fonction de la classe de Schwartz, valant 1 dans un voisinage de K. Alors on a : $u = \phi u$. Ainsi on peut écrire

$$u = T_\phi u + T_u \phi + R(u,\phi).$$

Concernant le premier terme, il se majore facilement comme suit

$$\|\Delta_q(T_\phi u)\|_{L^p} \leq \sum_{|q'-q|\leq N_0} \|S_{q'-1}\phi\|_{L^p} \|\Delta_{q'} u\|_{L^\infty} \leq C 2^{-qs} \|\phi\|_{L^p} \|u\|_{C^s}.$$

De la même manière, on établit que

$$\|\Delta_q(T_u\phi)\|_{L^p} \leq C 2^{-qs} \|u\|_{L^\infty} \|\phi\|_{B_p^s}.$$

Pour le terme de reste, on écrit grâce à la stricte positivité de s

$$\|\Delta_q R(u,\phi)\|_{L^p} \leq \sum_{\substack{q'\geq q-N_0 \\ i\in\{\mp 1,0\}}} \|\Delta_{q'+i}\phi\|_{L^p} \|\Delta_{q'} u\|_{L^\infty} \leq C 2^{-qs} \|\phi_{L^p}\|u\|_{C^s}.$$

Ainsi la preuve du lemme est achevée.

3. Un effet régularisant

Il s'agit dans ce paragraphe de décrire un effet régularisant constaté dans les équations de transport-diffusion (TD_ν) correspondant à un champ de vecteurs logarithmiquement lipschitzien et de divergence nulle. Ce qui permet d'obtenir le cas particulier discuté dans la proposition 1. L'équation dont il s'agit est donnée par :

$$(TD_\nu) \begin{cases} \partial_t a + v \cdot \nabla a - \nu \Delta a = 0 \\ a_{|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Nous montrerons qu'en particulier si $a^0 \in L^\infty$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\nu \int_0^t a(\tau,x)d\tau \in C^1_{LL} \stackrel{déf}{=} \big\{u \in L^\infty \,;\, \nabla u \in C_{LL}\big\}.$$

En outre, son contrôle est indépendant de la viscosité lorsque cette dernière est bornée. D'une manière plus précise, nous obtenons ce qui suit.

Proposition 4. *Soit v est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ appartenant à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+\,;C_{LL})$ et à divergence nulle. Il existe une constante absolue C telle que, si a est une solution associée à la donnée initiale $a^0\in L^p$, avec $p\in[1,+\infty]$, alors, on aura pour tout $r\in[1,+\infty]$ et pour tout $T>0$*

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}}\|\Delta_q a\|_{L^r_T L^p}\leq C\|a^0\|_{L^p}\left(1+\nu T+(q+2)\int_0^T\|v(\tau)\|_{LL}d\tau\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Remarque : Le terme en νT figurant dans le membre de droite de l'inégalité ci-avant est dû au basses fréquences. Il disparaît quand $q\in\mathbb{N}$. D'un autre côté, cette proposition permet de retrouver le résultat mentionné dans la proposition 1. En effet, si $\omega^0\in L^1\cap L^\infty$, alors on a pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ l'estimation classique

$$\|v_\nu(t)\|_{LL}\leq C\|v_\nu(t)\|_{B^1_\infty}\leq C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}.$$

3.1. Démonstration de la proposition 4

La preuve ressemble à celle que nous avons utilisée dans [8] pour démontrer un résultat similaire pour les équations (TD_ν) mais avec un champ de vecteurs lipschitzien. Dans ce cas, nous n'avons pas cette perte logarithmique de la fréquence. L'idée qu'on va développer consiste à localiser l'équation (TD_ν) sur des couronnes dyadiques de taille 2^q et d'utiliser un changement de variables lagrangien. Alors, pour une fréquence fixée de taille 2^q nous parvenons à boucler nos estimations mais sur un intervalle de temps dont la taille est de l'ordre de l'inverse du logarithme de la fréquence, i.e., $\frac{1}{q}\cdot$ Donc nous serons amenés à utiliser un argument de proche en proche, mais ce qui est capital dans cette manœuvre est le fait que a est en tout temps borné (ce qui s'obtient via le principe du maximum). Ceci empèche heureusement d'autres pertes en q, qui peuvent avoir des répercussions néfastes. Dans la suite, on pose $a_q=\Delta_q a$. Alors en appliquant l'opérateur Δ_q à l'équation régissant a, on trouve

$$\begin{aligned}\partial_t a_q+S_{q-1}v\cdot\nabla a_q-\nu\Delta a_q &= S_{q-1}v\cdot\nabla a_q-\Delta_q(v\cdot\nabla a),\\ &\overset{déf}{=}\mathcal{R}_q(v,a)=\mathcal{R}_q.\end{aligned}\tag{3.1}$$

L'estimation du second membre $\mathcal{R}_q$ est l'objet du lemme suivant, qu'on démontrera à la fin de ce paragraphe.

Lemme 6. *Soit v un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, à divergence nulle et appartenant à C_{LL}. On se donne un élément a de L^p, avec $p \in [1, +\infty]$. Alors, il existe une constante absolue C telle que, pour tout $q \geq -1$*

$$\|\mathcal{R}_q\|_{L^p} \leq C\|v\|_{LL} \sum_{j\geq -1} 2^{-|j-q|}\big(\max\{j,q\}+2\big)\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

En particulier, pour tout $s \in]-1,1[$

$$\|\mathcal{R}_q\|_{L^p} \leq C\Big(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{(1+s)^2}\Big)\|v\|_{LL}(q+2)2^{-qs}\|a\|_{B^s_p}.$$

Dans le cas particulier où $d=2$ et $a = \mathrm{rot}\, v$, on aura pour tout $q \geq -1$

$$\|\mathcal{R}_q\|_{L^p} \leq C\|v\|_{LL} \sum_{j\geq -1} (j+2)2^{-|j-q|}\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

Désignons par $\psi_q(t)$ le flot correspondant à la vitesse régularisée $S_{q-1}v$. Il est défini par l'équation intégrale

$$\psi_q(t,x) = x + \int_0^t S_{q-1}v\big(\tau, \psi_q(\tau,x)\big)d\tau.$$

Nous avons par la proposition 3

$$\int_0^t \|\nabla S_{q-1}v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leq C(q+2)\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau \overset{déf}{=} V_q(t).$$

Ainsi un calcul classique montre que le flot et son inverse jouissent des estimations suivantes

$$\|\nabla\psi_q^{\pm 1}(t)\|_{L^\infty} \leq e^{V_q(t)} \quad \text{et} \quad \|\nabla^2\psi_q^{\pm 1}(t)\|_{L^\infty} \leq C2^q V_q(t)\, e^{V_q(t)}, \tag{3.2}$$

où l'on note $\psi_q^1(t,x) = \psi_q(t,x)$. Posons maintenant

$$\bar{a}_q(t,x) = a_q\big(t,\psi_q(t,x)\big) \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{R}}_q(t,x) = \mathcal{R}_q\big((t,\psi_q(t,x)\big).$$

En effectuant un calcul simple, nous parvenons à établir l'identité :

$$\begin{aligned}\Delta a_q(t)\circ\psi_q(t,x) &= \nabla\bar{a}_q(t,x)\cdot(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) + \\ &+ \sum_{i=1}^d \Big\langle \nabla^2\bar{a}_q(t,x)\cdot(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)), (\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x))\Big\rangle.\end{aligned} \tag{3.3}$$

D'une autre part, en dérivant l'équation intégrale vérifiée par l'inverse du flot et en recourant à quelques estimations élémentaires, nous parvenons à établir

$$(\partial^i\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)) = e_i + g_q^i(t,x), \tag{3.4}$$

avec g_q^i une fonction qui s'estime dans la classe des fonctions bornées de la manière suivante

$$\|g_q^i(t)\|_{L^\infty} \leq V_q(t)\, e^{V_q(t)} \overset{déf}{=} g_q(t). \tag{3.5}$$

Donc, on trouve grâce à (3.4) et (3.3) que $\bar{a}_q$ satisfait l'équation parabolique ci-après

$$(\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t,x) = \nu\sum_{i=1}^{d}\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)g_q^i, g_q^i(t,x)\rangle + \bar{\mathcal{R}}_q(t,x)+$$

$$+ 2\nu\sum_{i=1}^{d}\langle\nabla^2\bar{a}_q(t,x)e_i, g_q^i(t,x)\rangle + \nu\nabla\bar{a}_q(t,x)\cdot(\Delta\psi_q^{-1})(t,\psi_q(t,x)). \tag{3.6}$$

Comme le spectre fréquenciel de la fonction $\bar{a}_q$ n'est pas nécessairement localisé, alors pour qu'on puisse appliquer le lemme 3, nous devons relocaliser de nouveau sur des couronnes dyadiques à l'aide de l'opérateur Δ_j, avec $j \in \mathbb{N}$. Ainsi donc, en appliquant le lemme 3, on trouve

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p} &\leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} + C\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\Delta_j\bar{R}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau +\\ &+ C\nu\big(g_q + g_q^2(t)\big)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla^2\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau +\\ &+ C\nu 2^q g_q(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau.\end{aligned}$$

Pour majorer le dernier terme qui figure dans le second membre de l'inégalité ci-dessus, on applique l'inégalité de Bernstein qui entraîne

$$\|\Delta_j\bar{\mathcal{R}}_q(t)\|_{L^p} \leq C2^{-j}\|\nabla(\mathcal{R}_q\circ\psi_q(t))\|_{L^\infty}, \leq C2^{q-j}\|\nabla\psi_q(t)\|_{L^\infty}\|\mathcal{R}_q(t)\|_{L^p}.$$

Par conséquent, la combinaison du lemme 6 avec l'estimation (3.2) et l'inégalité

$$\|a(t)\|_{L^p} \leq \|a^0\|_{L^p},\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+$$

permet d'avoir

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq\ & Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p}+\\ & + C(q+2)\,2^{q-j}\,\|a^0\|_{L^p}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|v(\tau)\|_{LL}e^{V_q(\tau)}d\tau+\\ & + C\nu\big(g_q(t) + g_q^2(t)\big)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla^2\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau+\\ & + C\nu 2^q g_q(t)\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla\bar{a}_q(\tau)\|_{L^p}d\tau.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Prenons la norme L^r des deux côtés dans l'estimation (3.7) et utilisons les inégalités de convolution. Alors nous aboutissons, grâce à la monotonie de g_q, à

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar{a}_q(t)\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \leq\ & C(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}\|\Delta_j a_q(0)\|_{L^p} + C2^{q-j}\|a^0\|_{L^p}(\nu 2^{2j})^{\frac{-1}{r}}\big(e^{V_q(t)}-1\big)\\ & + C\big(g_q(t) + g_g^2(t)\big)2^{-2j}\|\nabla^2\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)}+\\ & + Cg_q(t)2^q 2^{-2j}\|\nabla\bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

D'une autre part, en se servant de (3.2), il vient, d'après la préservation de la mesure par le flot $\psi_q(t)$,

$$\|\nabla \bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq C2^q e^{V_q(t)} \|a_q(t)\|_{L^p}, \tag{3.9}$$

$$\|\nabla^2 \bar{a}_q(t)\|_{L^p} \leq C2^{2q} e^{CV_q(t)} \|a_q(t)\|_{L^p}. \tag{3.10}$$

Ainsi, en reportant ces estimations dans (3.8) et en sommant sur les j supérieur à $q - N_0$, on trouve

$$\begin{aligned}(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \sum_{j \geq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^r([0,t];\, L^p)} \leq & C\|a^0\|_{L^p} + 2^{2N_0} h_q(t) (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r_t L^p} + \\ & + C2^{N_0(1+\frac{2}{r})} \|a^0\|_{L^p} \big(e^{V_q(t)} - 1\big),\end{aligned} \tag{3.11}$$

où l'on a posé $h_q(t) = CV_q(t)\, e^{CV_q(t)}$. En ce qui concerne les basses fréquences, nous utilisons le lemme 4, qui implique

$$\sum_{j \leq q-N_0} \|\Delta_j \bar{a}_q\|_{L^r_t L^p} \leq C2^{-N_0} e^{V_q(t)} \|a_q\|_{L^r_t L^p}. \tag{3.12}$$

Donc, en combinant (3.11) et (3.12), on parvient à

$$\begin{aligned}(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\, L^p)} \leq & C\|a^0\|_{L^p} + 2^{2N_0} h_q(t) (\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\, L^p)} + \\ & + C(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\, L^p)} 2^{-N_0} e^{V_q(t)} + \\ & + C2^{3N_0} \big(e^{V_q(t)} - 1\big) \|a^0\|_{L^p}.\end{aligned}$$

En conséquence, si l'on impose à t et N_0 les deux conditions suivantes

$$2^{2N_0} h_q(t) \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad C2^{-N_0} e^{V_q(t)} \leq \frac{1}{4}, \tag{3.13}$$

alors nous aurons pour tout $q \geq N_0$

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\, L^p)} \leq C2^{4N_0} \|a^0\|_{L^p} \tag{3.14}$$

En fait, les conditions données par (3.13) sont satisfaites dès qu'on prend

$$(q+2) \int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau \leq C_0, \tag{3.15}$$

La constante C_0 est absolue, et *a fortiori* N_0, dont le choix ne dépend pas de q. Pour s'en rendre compte, on prend d'abord $V_q(t) \leq 1$ et on choisit N_0 pour que $2^{-N_0} \leq \frac{1}{4eC}$, puis quitte à diminuer encore $V_q(t)$, on trouve $C2^{2N_0} h_q(t) \leq \frac{1}{4}$, ce qui est faisable car la fonction xe^x tend vers zéro quand x tend vers zéro. Pour achever cet argument, il suffit d'utiliser la proposition 3. Enfin nous établissons l'existence d'un entier N_0 tel que, pour tout t vérifiant (3.15) et pour tout $q \geq N_0$, on ait

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,t];\,L^p)} \leq C\|a^0\|_{L^p}.$$

Nous allons dans ce qui suit étendre l'estimation du dessus à n'importe quel temps arbitraire T. Pour un tel objectif, on se donne un entier q supérieur à N_0 et on découpe l'intervalle de temps $[0, T]$ de la manière suivante :

$$T_0 < T_1 < \cdots < T_N \quad \text{et} \quad (q+2)\int_{T_i}^{T_{i+1}} \|v(\tau)\|_{LL} d\tau \simeq C_0, \ \forall\, i \in [\![0, N-1]\!].$$

Alors en reproduisant la démarche précédente et en adaptant le flot à la condition initiale à l'instant T_i, on parvient à établir que pour tout $q \geq N_0$

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([T_i,\,T_{i+1}];\,L^p)} \leq C\|a^0\|_{L^p}.$$

Ainsi en recollant les morceaux et en se servant du fait que

$$N \leq C\Big(1 + (q+2)\int_0^T \|v(\tau)\|_{LL} d\tau\Big),$$

on trouve pour tout $q \geq N_0$

$$\nu 2^{2q} \|a_q\|^r_{L^r([0,T];\,L^p)} \leq C^r N \|a^0\|^r_{L^p}. \tag{3.16}$$

Concernant les basses fréquences, on écrit

$$(\nu 2^{2q})^{\frac{1}{r}} \|a_q\|_{L^r([0,T];\,L^p)} \leq C(\nu T)^{\frac{1}{r}} \|a^0\|_{L^p}. \tag{3.17}$$

Finalement, en combinant (3.16) et (3.17) on trouve l'estimation énoncée dans le lemme.

3.2. Preuve du lemme de commutation

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le lemme 6. A cette fin, nous nous servons de la décomposition de Bony. Tout d'abord nous rappelons que le terme $\mathcal{R}_q(v,\, a)$ est donné par la relation

$$\Delta_q(v \cdot \nabla\, a) = S_{q-1} v \cdot \nabla a_q + \mathcal{R}_q(v,\, a). \tag{3.18}$$

D'une manière plus précise, il se décompose comme suit (voir [3])

$$\mathcal{R}_q(v,\, a) = \sum_{l=1}^{4} \mathcal{R}^l_q(v,\, a),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
R_q^1(v,\,a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q(T_{\partial_k a}v^k),\\
R_q^2(v,\,a) &= -\sum_{k=1}^{d}[T_{v^k}\partial_k,\,\Delta_q]a,\\
R_q^3(v,\,a) &= \sum_{k=1}^{d}T_{(v^k-S_{q-1}v^k)}\partial_k\Delta_q a,\\
R_q^4(v,\,a) &= \sum_{k=1}^{d}\Delta_q R(v^k,\,\partial_k a)-R(S_{q-1}v^k,\,\Delta_q\partial_k a).
\end{aligned}$$

Estimation de $R_q^1(v,\,a)$: comme la transformée de Fourier de la fonction $S_{q'-1}\partial_k a\Delta_{q'}v^k$ est supportée dans une couronne de taille $2^{q'}$ alors on ne tiendra compte dans la décomposition de $R_q^1(v,\,a)$ que d'un nombre fini de termes et l'on écrit

$$R_q^1(v,\,a)=\sum_{k=1}^{d}\sum_{|q'-q|\le M_0}\Delta_q\big(S_{q'-1}\partial_k a\,\Delta_{q'}v^k\big).$$

Nous signalons que cette somme porte sur les entiers q' positif, sinon $S_{q'-1}$ est nul. Ceci permet grâce au lemme de Bernstein et la proposition 3 d'avoir

$$\|S_{q'-1}\partial_k a\,\Delta_{q'}v^k\|_{L^p}\le C2^{-q'}(q'+2)\|v\|_{LL}\sum_{j\le q'-2}2^j\|\Delta_j a\|_{L^p}. \tag{3.19}$$

Ainsi, comme $|q-q'|\le M_0$, alors, on aura pour tout entier $q\ge -1$

$$\|R_q^1(v,\,a)\|_{L^p}\le C\|v\|_{LL}(q+2)\sum_{j\ge -1}2^{-|j-q|}\|\Delta_j a\|_{L^p}.$$

Estimation de $R_q^2(v,\,a)$: Nous avons par définition du paraproduit et grâce à la commutation des opérateurs Δ_q entre eux

$$R_q^2(v,\,a) \;=\; \sum_{k=1}^{d}\sum_{q'}[S_{q'-1}v^k\partial_k\Delta_{q'},\,\Delta_q]a=\sum_{k=1}^{d}\sum_{q'}[S_{q'-1}v^k\partial_k,\,\Delta_q]\Delta_{q'}a.$$

La somme est en fait finie. Elle ne concerne que les indices q' vérifiant $|q'-q|\le M_0$. Ceci est dû, d'une part, à la localisation du support de la transformée de Fourier de $S_{q'-1}v^k\Delta_{q'}\partial_k a$ dans une couronne de taille $2^{q'}$ et d'autre part au fait que $\Delta_q\Delta_{q'}\equiv 0$, si $|q'-q|\ge 2$.

Maintenant occupons-nous de la majoration du commutateur. Pour cela, nous écrivons l'opérateur Δ_q comme une intégrale de convolution :

$$\begin{aligned}
&\big\|[S_{q'-1}v^k\partial_k,\, \Delta_q]\Delta_{q'}a\big\|_{L^p} = \\
&\quad = 2^{qd}\Big\|\int \tilde{h}(2^q(x-y))\big(S_{q'-1}v^k(x)-S_{q'-1}v^k(y)\big)\Delta_{q'}\partial_k a(y)dy\Big\|_{L^p}\\
&\quad \le C2^{-q}\|\nabla S_{q'-1}v\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}\partial_k a\|_{L^p},\\
&\quad \le C\|v\|_{LL}2^{q'-q}(q'+2)\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

En conséquence, nous aurons l'estimation

$$\|R_q^2(v,\,a)\|_{L^p}\le C\|v\|_{LL}(q+2)\sum_{|q'-q|\le M_0}2^{-|q'-q|}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.$$

Estimation de $R_q^3(v,\,a)$: Par définition du paraproduit, nous avons

$$R_q^3(v,\,a)=\sum_{k=1}^d\sum_{|q'-q|\le 1}S_{q'-1}(v^k-S_{q-1}v^k)\Delta_{q'}\partial_k\Delta_q a.$$

En revenant à la proposition 3 et en utilisant les inégalités de Bernstein, on aura

$$\begin{aligned}
\|S_{q'-1}(v^k-S_{q-1}v^k)\|_{L^\infty} \;&\le\; \sum_{j\ge q-1}\|\Delta_j v\|_{L^\infty},\\
&\le\; C\|v\|_{LL}\sum_{j\ge q-1}2^{-j}(j+2)\le C\|v\|_{LL}2^{-q}(q+2).
\end{aligned}$$

Ce qui nous assure dans ce cas la majoration souhaitée.

Estimation de $R_q^4(v,\,a)$: Nous commençons par décomposer ce terme de la manière suivante

$$R_q^4(v,\,a)=R_q^{4,1}(v,\,a)+R_q^{4,2}(v,\,a),$$

avec

$$\begin{aligned}
R_q^{4,1}(v,\,a) \;&=\; \sum_{k=1}^d\Delta_q R(v^k-S_{q-1}v^k,\,\partial_k a),\\
R_q^{4,2}(v,\,a) \;&=\; \sum_{k=1}^d\Delta_q R(S_{q-1}v^k,\,\partial_k a)-R(S_{q-1}v^k,\,\Delta_q\partial_k a).
\end{aligned}$$

Par définition du reste et grâce à la condition de divergence nulle du champ de vecteurs v, nous pouvons écrire

$$R_q^{4,1}(v,\,a)=\sum_{k=1}^d\Delta_q\partial_k\sum_{\substack{q'\ge q-M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\Delta_{q'}(\mathrm{Id}-S_{q-1})v^k\Delta_{q'+i}a. \tag{3.20}$$

En appliquant le lemme de Bernstein et la caractérisation dyadique des éléments de C_{LL}, nous en déduisons que

$$\|\Delta_{q'}(\mathrm{Id}-S_{q-1})v^k\|_{L^\infty} = \Big\|\sum_{\substack{|q'-j|\le 1\\ j\ge q-1}}\Delta_{q'}\Delta_j v^k\Big\|_{L^\infty}\le C\|v\|_{LL}2^{-q'}(q'+2).$$

En reportant cette inégalité dans (3.20), nous obtenons suite à une estimation L^p

$$\|R_q^{4,1}(v,\,a)\|_{L^p}\le C\|v\|_{LL}2^q\sum_{q'\ge q-M_0}2^{-q'}(q'+2)\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.$$

Concernant le terme $R_q^{4,2}(v,\,a)$, il sera traité comme le terme $R_q^2(v,\,a)$. Nous obtenons grâce à la condition div $S_{q-1}v=0$,

$$R_q^{4,2}(v,\,a)=\sum_{\substack{q'\ge q-M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\big[\Delta_q,\Delta_{q'}S_{q-1}v^k\big]\Delta_{q'+i}\partial_k a = R_{q,1}^{4,2}(v,\,a)+R_{q,2}^{4,2}(v,\,a),$$

$$=\sum_{\substack{|q'-q|\le M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\big[\Delta_q,\Delta_{q'}S_{q-1}v^k\big]\Delta_{q'+i}\partial_k a+\sum_{\substack{q'>q+M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\Delta_q\partial_k(\Delta_{q'}S_{q-1}v^k\Delta_{q'+i}a).$$

Soulignons que la condition $\Delta_q\Delta_{q'+i}a=0$ si $|q'-q|\ge 3$ justifie bien l'expression figurant dans la dernière somme. En utilisant une démarche analogue à celle qu'on a employée dans l'estimation de R_q^2, on obtient

$$\|R_{q,1}^{4,2}(v,\,a)\|_{L^p}\le C\|v\|_{LL}(q+2)\sum_{\substack{|q'-q|\le M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}2^{q'-q}\|\Delta_{q'+i}a\|_{L^p}.$$

La deuxième somme se majore comme suit

$$\begin{aligned}\|R_{q,2}^{4,2}(v,\,a)\|_{L^p} &\le C2^q\sum_{\substack{q'>q+M_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}\|\Delta_{q'}v\|_{L^p}\|\Delta_{q'+i}a\|_{L^p},\\ &\le C\|v\|_{LL}\sum_{q'\ge q+M_0-1}2^{q-q'}(q'+2)\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Ceci permet d'achever la preuve de la première partie du lemme 6. La deuxième est une simple déduction de la première tandis que dans le cas où $a=\mathrm{rot}v$, il suffit de montrer que le terme R_q^1 est majoré par la quantité souhaitable. Pour ce faire, on remplace l'estimation (3.19) par

$$\begin{aligned}\|S_{q'-1}\partial_k a\,\Delta_{q'}v^k\|_{L^p} &\le \|S_{q'-1}\partial_k a\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}v^k\|_{L^p}\\ &\le C2^{q'}\|S_{q'-1}\nabla v\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}v^k\|_{L^p}\\ &\le C(q'+2)\|v\|_{LL}\|\Delta_{q'}a\|_{L^p}.\end{aligned}$$

4. Propagation dans les espaces de Besov

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la régularité dans les équations de transport-diffusion avec un second membre, où l'on suppose que la vitesse est lipschitzienne dans le support de la solution. L'équation considérée est

$$(TD_\nu)\begin{cases} \partial_t a + v\cdot\nabla a - \nu\Delta a = f+\nu g \\ a_{|t=0} = a^0. \end{cases}$$

Le résultat de propagation que nous allons démontrer est seulement prouvé dans les espaces de Besov B^s_p, avec p fini. Il s'avère que les espaces de Hölder ne sont pas bien adaptés et la méthode qu'on a utilisée dans [8] pour propager la régularité höldérienne dans le cas d'un champ lipschitzien est difficile à mettre en œuvre lorsque le champ de vecteurs est seulement log-lipschitz. Avant de fournir le résultat en question, nous allons introduire quelques espaces fonctionnels qui s'avèrent commodes pour la description de nos résultats. Soit $t>0$, $s\in\mathbb{R}$ et $(r,p)\in[1,+\infty]^2$. Alors on note par $\widetilde{L^r_t}B^s_p$ l'espace des fonctions u vérifiant

$$\|u\|_{\widetilde{L^r_t}B^s_p} \overset{déf}{=} \sup_q 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^r([0,t];L^p)} < +\infty.$$

Définition 3. *Soit a un nombre réel ≥ 1. On note par L (pour alléger, on omet sa dépendance par rapport à a) l'espace des fonctions u satisfaisant*

$$\|u\|_L \overset{déf}{=} \sup_{b\geq a}\frac{\|u\|_{L^b}}{b} < +\infty.$$

Soit Σ un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. On note $L(\Sigma)$ l'espace des fonctions u vérifiant

$$\|u\|_{L(\Sigma)} \overset{déf}{=} \sup_{h\leq e^{-1}}\frac{\|u\|_{L^\infty(\Sigma^c_h)}}{-\log h} < +\infty.$$

On note aussi $LL(\Sigma)$ l'espace $L\cap L(\Sigma)$ muni de norme

$$\|u\|_{LL(\Sigma)} = \|u\|_L + \|u\|_{L(\Sigma)}.$$

Finalement, on définit l'espace $LL^0(\Sigma) = LL(\Sigma)\cap C^0_*$ que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{LL^0(\Sigma)} = \|u\|_{LL(\Sigma)} + \|u\|_{C^0_*}.$$

Remarque : Dans le cadre du système de Navier-Stokes bidimensionnel incompressible, si l'on part d'une donnée initiale à tourbillon ω^0 dans $L^1\cap L^\infty$, alors on a une unique solution globale v_ν vérifiant les estimations suivantes uniformément en ν.

$$\|v_\nu(t)\|_{LL} \leq C\|v_\nu(t)\|_{C^1_*} \leq C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}. \tag{4.1}$$

Nous avons aussi

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^p} \leq C\frac{p^2}{p-1}\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty} \tag{4.2}$$

En fait la première estimation de (4.1) n'est autre que l'inclusion continue de l'espace C^1_* dans C_{LL}, tandis que l'autre provient tout simplement du lemme de Bernstein et la loi de Biot-Savart décrivant la vitesse à partir du tourbillon. Par contre l'estimation (4.2) est plus délicate. L'une de ses preuves est fondée sur la décomposition de Caldéron-Zygmund et sur un lemme d'interpolation. Pour plus de détails, on peut consulter par exemple [3].

Nous présentons maintenant notre principal résultat de propagation :

Proposition 5. *Il existe une constante C telle qu'on ait la propriété suivante. Soient $s \in]-1,1[, r \in [1,+\infty]$ et $p > 1$. Soit v un champ de vecteurs infiniment dérivable et de divergence nulle. On se donne une solution $a(t)$ de (TD_ν) telle que son support est inclus dans l'ensemble $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$. On suppose que*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|a(t)\|_{B^s_p} < +\infty, \ \sup_{t\in[0,T]}\|f\|_{\widetilde{L^r_t}B_p^{s-2/\bar r}} \ \ \textit{et} \ \sup_{t\in[0,T]}\|g\|_{\widetilde{L^\infty_t}B_p^{s-2}} < +\infty.$$

Alors on aura pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\|a(t)\|_{B^s_p} \leq Ch^{-C_s\int_0^t W_1(\tau)d\tau}\Big(\|a^0\|_{B^s_p} \ &+ \ \big(\nu^{\frac{-1}{\bar r}} + t^{\frac{1}{\bar r}}\big)\|f\|_{\widetilde{L^r_t}B_p^{s-2/\bar r}} + \\ &+ \ \big(C_p + \nu t\big)\|g\|_{\widetilde{L^\infty_t}B_p^{s-2}}\Big).\end{aligned}$$

Si $\nu = 0$ et $g \equiv 0$, alors on aura

$$\|a(t)\|_{B^s_p} \leq Ch^{-C_s\int_0^t W_1(\tau)d\tau}\Big(\|a^0\|_{B^s_p} + \|f\|_{\widetilde{L^1_t}B^s_p}\Big),$$

où l'on a posé,

$$W_1(\tau) = \|\nabla v(t)\|_{LL^0(\Sigma_t)}e^{\int_0^t\|v(\tau)\|_{LL}d\tau}, \quad \delta(t,h) = h^{\exp(\int_0^t\|v(\tau)\|_{LL}d\tau)}$$

et $\bar r$ l'exposant conjugué de r.

Remarque : les constantes C_s et C_p figurant dans la proposition ci-dessus sont de la forme

$$C_s = \frac{C}{1-s^2} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{p^2}{p-1}\cdot$$

4.0.1. Preuve

La méthode qu'on adopte est de type énergie : elle est basée sur une régularisation de (TD_ν) et l'utilisation de l'incompressibilité du flot. Notre outil principal est le lemme 2 et le corollaire 1 de l'appendice. Nous commençons par localiser en fréquences l'équation en a. Alors en posant

$$a_q = \Delta_q a, \quad f_q = \Delta_q f \quad \text{et} \quad g_q = \Delta_q g$$

nous obtenons l'équation :

$$\big(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta\big)a_q = -[\Delta_q, v\cdot\nabla]a + f_q + \nu g_q \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{C}_q(v,a) + f_q + \nu g_q.$$

Soit $p > 1$. Multiplions cette équation par $a_q|a_q|^{p-2}$ et faisons quelques intégrations par parties utilisant la divergence nulle du champ de vecteurs $S_{q-1}v$. Alors le lemme 2 et l'inégalité de Hölder nous assurent que pour tout $q\in\mathbb{N}$

$$\frac{d}{dt}\|a_q(t)\|_{L^p}^p + c_p\nu 2^{2q}\,\|a_q(t)\|_{L^p}^p \leq \\ \leq p\Big(\|f_q\|_{L^p} + \nu\|g_q(t)\|_{L^p} + \|\mathcal{C}_q(t)\|_{L^p}\Big)\|a_q\|_{L^p}^{p-1}. \tag{4.3}$$

avec $c_p = c\frac{p-1}{p}\cdot$ Ainsi, nous en déduisons que

$$\|a_q(t)\|_{L^p} \leq e^{-c\frac{p-1}{p^2}\nu t 2^{2q}}\|a_q(0)\|_{L^p} + \\ + \int_0^t e^{-c\frac{p-1}{p^2}\nu(t-\tau)2^{2q}}\Big(\|f_q(\tau)\|_{L^p} + \nu\|g_q(\tau)\|_{L^p} + \|\mathcal{C}_q(t)\|_{L^p}\Big)d\tau.$$

Par conséquent, il vient, en vertu de l'inégalité de Young et du corollaire 1, que pour tout $q\in\mathbb{N}$,

$$\|a_q(t)\|_{L^p} \leq \|a_q(0)\|_{L^p} + C\frac{p^2}{p-1}2^{-2q}\sup_{0\leq\tau\leq t}\|g_q(\tau)\|_{L^p} + \\ + \nu^{\frac{-1}{\bar r}}2^{\frac{-2q}{\bar r}}\|f_q\|_{L_t^r L^p} + C2^{-qs}(-\log h)\int_0^t W_1(\tau)\|a(\tau)\|_{B_p^s}d\tau. \tag{4.4}$$

Concernant les basses fréquences, nous n'avons pas besoin de gagner deux dérivées par l'intermédiaire du laplacien. Nous avons uniquement besoin d'un signe positif qui est assuré aussi par le lemme 2. Ainsi nous trouvons

$$\begin{aligned} \|a_{-1}(t)\|_{L^p} &\leq \|a_{-1}^0\|_{L^p} + \int_0^t\big(\|f_{-1}(\tau)\|_{L^p} + \nu\|g_{-1}(\tau)\|_{L^p} + \|\mathcal{R}_{-1}(t)\|_{L^p}\big)d\tau \\ &\leq \|a_{-1}^0\|_{L^p} + \nu t\sup_{\tau\in[0,t]}\|g_{-1}(\tau)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{\bar r}}\|f_{-1}\|_{L_t^r L^p} + \\ &+ C(-\log h)\int_0^t W_1(\tau)\|a(\tau)\|_{B_p^s}d\tau. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Donc en combinant (4.4) et (4.5), nous parvenons, pour tout $q \geq -1$, à

$$\begin{aligned}\|a_q(t)\|_{L^p} \leq \|a_q(0)\|_{L^p} + C\Big(\frac{p^2}{p-1} + \nu t\Big) 2^{-2q} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|g_q(\tau)\|_{L^p} + \\ + \nu^{\frac{-1}{\bar r}}\big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{\bar r}}\big) 2^{\frac{-2q}{\bar r}} \|f_q\|_{L^r_t L^p} + \\ + C2^{-qs}(-\log\, h)\int_0^t W_1(\tau)\|a(\tau)\|_{B^s_p} d\tau. \end{aligned} \tag{4.6}$$

En multipliant des deux côtés par 2^{qs} et en prenant le suprémum en q, on trouve

$$\begin{aligned}\|a(t)\|_{B^s_p} \leq \|a^0\|_{B^s_p} + C\Big(\frac{p^2}{p-1} + \nu t\Big)\|g\|_{\widetilde{L^\infty_t} B^{s-2}_p} + \\ + \ \nu^{\frac{-1}{\bar r}}\big(1 + (\nu t)^{\frac{1}{\bar r}}\big)\|f\|_{\widetilde{L^r_t} B^{s-2/\bar r}_p} + C(-\log h)\int_0^t W_1(\tau)\|a(\tau)\|_{B^s_p} d\tau.\end{aligned}$$

Il suffit à ce stade d'appliquer le lemme de Gronwall pour obtenir le résultat désiré.

5. Etude des poches singulières

Dans cette dernière section nous allons généraliser le théorème 1 pour des poches de tourbillon dites généralisées. Mais avant de donner l'énoncé dans toute sa généralité, nous aurons besoin d'introduire quelques concepts fondamentaux.

5.1. Résultat principal

Afin d'énoncer notre principal résultat dans toute sa généralité, nous allons introduire quelques notations et définitions.

Notations. Pour un champ de vecteurs X régulier, nous définissons son action sur les fonctions bornées u par

$$X(x,D)u \overset{déf}{=} \mathrm{div}(Xu) - u\ \mathrm{div}X.$$

Soit F une partie de $\mathbb{R}^d$ et h un réel positif. Alors on définit les ensembles,

$$F^c_h = \big\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \mathrm{dist}\ (x,F) \geq h\big\} \quad \text{et} \quad F_h = \big\{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ \mathrm{dist}\ (x,F) \leq h\big\}\cdot$$

Définition 4. *Soit Σ un fermé de $\mathbb{R}^2$ et $\Xi = (\alpha,\beta,\gamma)$ un triplet de nombres réels. On considère une famille $\mathcal{X} = (X_{\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]}$ de champs de vecteurs appartenant avec leur divergence à B^s_p, avec $p \in [1,+\infty]$ et $s \in]-1,1[$. On définit $\mathcal{X}_h = (X_{\lambda,h})_{\lambda\in\Lambda}$.*

La famille $(\mathcal{X})$ est dite $\Sigma-$admissible d'ordre Ξ si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

$$\forall(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}],\ \mathrm{supp}X_{\lambda,h}\subset\Sigma^c_{h^\alpha},$$

$$\mathcal{I}_\gamma(\Sigma,\mathcal{X})\overset{déf}{=}\inf_{h\in]0,e^{-1}]}h^\gamma I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)>0,$$

$$\mathcal{N}_\epsilon(\mathcal{X})\overset{déf}{=}\sup_{h\in]0,e^{-1}]}h^{-\beta}N_\epsilon(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)<+\infty,\quad\text{avec}$$

$$I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)=\inf_{x\notin\Sigma_h}\sup_{\lambda\in\Lambda}|X_{\lambda,h}(x)|\quad\text{et}$$

$$N_\epsilon(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)=\frac{1}{\epsilon}\sup_{\lambda\in\Lambda}\frac{\|X_{\lambda,h}\|_{B^s_p}+\|\mathrm{div}X_{\lambda,h}\|_{B^s_p}}{I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)}\overset{déf}{=}\frac{1}{\epsilon}\sup_{\lambda\in\Lambda}\frac{\widetilde{\|X_{\lambda,h}\|}_{B^s_p}}{I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)}.$$

Remarque : Pour des raisons géométriques relatives à l'annulation de la famille de champs de vecteurs $\mathcal{X}$ près de l'ensemble singulier, le réel γ sera considéré strictement négatif.

Introduisons maintenant les espaces de Besov anisotropes.

Définition 5. *Soit Σ un fermé de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{X}$ une famille $\Sigma-$admissible d'ordre $\Xi=(\alpha,\beta,\gamma)$. Alors on définit l'espace $B^{\epsilon,p,\beta}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ comme étant l'ensemble des fonctions bornées u satisfaisant*

$$\|u\|^{s,p,\beta}_{\Sigma,\mathcal{X}}\overset{déf}{=}\sup_{h\in]0,e^{-1}]}h^{-\beta}\|u\|^{s,p}_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}<+\infty,\quad\textit{avec}$$

$$\|u\|^{s,p}_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}=N_\epsilon(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)\|u\|_{L^\infty}+\sup_{\lambda\in\Lambda}\frac{\|X_{\lambda,h}(x,D)u\|_{B^{s-1}_p}}{I(\Sigma_h,\mathcal{X}_h)}.$$

Lorsque $\|u\|^{s,p}_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}<+\infty$, alors nous dirons que $u\in B^s_p(\Sigma_h)$

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 1.

Théorème 2. *Soient $s\in]0,1[$, $\epsilon\in]0,\frac{s}{2}[$ et $p>\frac{1}{\frac{s}{2}-\epsilon}\cdot$ Alors il existe une constante C vérifiant les propriétés suivantes. Soient Σ_0 un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$ et v^0 un champ de vecteurs de divergence nulle et dont le tourbillon ω^0 est borné et supporté dans un compact K. Désignons par v_ν la solution de Yudovich du système de Navier-Stokes et $\psi_\nu(t)$ son flot, et posons $\Sigma_\nu(t)=\psi_\nu(t,\Sigma_0)$. Considérons une famille $\mathcal{X}_0$ de champs de vecteurs tels qu'ils appartiennent avec leur divergence à B^s_p. On suppose que cette famille est Σ_0-admissible d'ordre $\Xi_0=(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$ et que*

$$\omega^0\in B^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.$$

Soit T un réel positif. On définit la quantité

$$\sigma_t = s\Big(1 - \frac{\epsilon t}{sT}\Big) - \epsilon - 1.$$

Alors il existe une famille $\mathcal{X}_\nu(t) = (X^\nu_{\lambda,h}(t))_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]}$ de champs de vecteurs appartenant avec leur divergence à $B_p^{1+\sigma_t}$, $\forall t \in [0,T]$. De plus, cette famille est $\Sigma_\nu(t)-$admissible et l'on a pour tout $\eta > 0$

$$\omega_\nu(t) \in B^{1+\sigma_t,p,\beta_0(t)-\eta}_{\Sigma_\nu(t),\mathcal{X}_\nu(t)},$$

où l'on a posé

$$\beta_0(t) = \Big(\beta_0 - C_1\, t\Big) e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}},$$

avec C_1 une constante dépendant de s, p, ϵ, α_0, β_0 et ω^0. De plus, la vitesse v_ν est lipschitzienne en dehors de $\Sigma_\nu(t)$. Plus précisément, pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sup_{h\in]0,e^{-1}]} \frac{\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty((\Sigma_\nu(t))^c_h)}}{-\log h} \le C(1+\nu t)^{\frac{16}{s}} e^{e^{Ct}}.$$

Enfin, en désignant par ψ le flot correspondant à la solution de Yudovich du système d'Euler, alors si

$$I^0(\Sigma_0,\mathcal{X}_0) \overset{déf}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} I\big((\Sigma_0)_h,(\mathcal{X}_0)_h\big) < +\infty, \tag{5.1}$$

on aura pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $(h,\lambda) \in]0,e^{-1}] \times \Lambda$,

$$\lim_{\nu\to 0^+} \Big(\|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t) - X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi(t)\|_{C^{1+\sigma_t-\frac{2}{p}-\eta}} + \\ + \|X^\nu_{t,\lambda,h} - \widetilde{X_{t,\lambda,h}}\|_{C^{1+\sigma_t-\frac{2}{p}-\eta}}\Big) = 0.$$

On a encore pour tout $(h,\lambda) \in]0,e^{-1}] \times \Lambda$,

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu - X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)} = 0.$$

La preuve de ce théorème est fondée essentiellement sur l'effet régularisant et la propagation de la régularité Besov dans les équations de transport-diffusion relativement à un champ de vecteurs lipschitzien dans le support de la solution , qui ont fait l'objet des sections antérieures. Ces résultats sont mis en place afin de contrôler convenablement la régularité conormale du tourbillon dans un espace de Besov d'indice strictement négatif. L'utilité d'une telle estimation apparaît sans doute dans l'estimation logarithmique du gradient d'un champ de vecteurs. Ce que nous allons fournir à ce propos est une version Besov du théorème 3.3.2 de [3]. Elle s'obtient à partir de ce théorème simplement à l'aide de l'injection $B_p^s \hookrightarrow C^{s-2/p}$.

Théorème 3. *Il existe une constante C telle que, pour tout réel $a \geq 1$, pour tout $s \in]\frac{2}{a}, 1[$ et pour tout ensemble fermé Σ de $\mathbb{R}^2$, nous aurons la propriété suivante.*

Soit $\mathcal{X} = (X_{\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]} = (\mathcal{X}_h)_{h\in]0,e^{-1}]}$ une famille de champs de vecteurs tels qu'ils sont ainsi que leur divergence dans B_p^s. Alors on considère une fonction $\omega \in B_p^s(\Sigma_h) \cap L^a$. Si v est un champ de vecteurs de divergence nulle tel que $\nabla v \in L^a$ et $\operatorname{rot} v = \omega$, alors le gradient de v est borné et nous avons

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma_h^c)} \leq Ca\|\omega\|_{L^a} + \frac{C}{s - 2/p}\|\omega\|_{L^\infty} \log\left(e + \frac{\|\omega\|^{s,p}_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\right)\cdot$$

5.2. Démonstration du théorème 1

Le bord de Ω peut s'écrire sous la forme

$$\partial\Omega = \big\{x \in V\ ; f_0(x) = 0\big\},$$

avec V un voisinage de $\partial\Omega$ et f_0 une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $C^{1+\epsilon}$ et à support compact. L'ensemble singulier du bord n'est autre que

$$\Sigma = \big\{x \in V; f_0(x) = \nabla f_0(x) = 0\big\}\cdot$$

Pour faciliter le raisonnement nous supposons que le bord est connexe. Nous supposons également qu'il existe un nombre négatif γ_0 tel que pour tout $x \in V$,

$$|\nabla f_0(x)| \geq \operatorname{dist}(x, \Sigma)^{-\gamma_0}.$$

Cette hypothèse veut dire que les parties régulières du bord ne s'intersectent pas avec un ordre infini. Soit $(\theta_h)_{h\in]0,e^{-1}]}$ une famille de fonctions infiniment dérivables, valant 1 dans Σ_h^c, supportées dans $\Sigma_{h^{\alpha_0}}^c$, et vérifiant pour tout réel strictement positif r

$$\|\theta_h\|_{C^r} \leq C_r h^{-r}.$$

Considérons une fonction $\tilde{\theta}$ infiniment dérivable, valant 1 dans V. Posons

$$X_{0,-1,h} = \theta_h(1 - \tilde{\theta})e_1 \quad \text{et} \quad X_{0,0,h} = \nabla^\perp(\theta_h f_0).$$

Alors nous avons par le lemme 5 que $X_{0,0,h} \in B_p^s$. Par contre le champ de vecteurs $X_{0,-1,h}$ appartient à C^s, $\forall s \in \mathbb{R}$ mais il n'est pas dans B_p^s, pour tout $s > 0$. Donc nous allons faire usage de la partition de l'unité pour construire à partir de ces champs une famille $\Sigma-$admissible.

Lemme 7. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une partition $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^d$ et une suite de fonctions régulières positives $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telles que :*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp} \psi_n \subset O_n \ ; \ |O_n| \leq 1\\
&\forall x \in \mathbb{R}^d, \sum_{n\mathbb{N}^*} \psi_n(x) = 1 \quad \text{et}\\
&\exists N_d \in \mathbb{N}, \text{ tel que}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \sharp\big\{n \in \mathbb{N}^* \ ; x \in O_n\big\} \leq N_d.
\end{aligned}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_{0,n,h}(x) = \psi_n(x) X_{0,-1,h}(x).$$

Alors d'après le lemme 5, il est clair que ces champs sont dans B^s_p. De plus, le lemme ci-dessus nous assure que la famille $\mathcal{X}_0 = (X_{0,n,h})_{(n,h)\in\mathbb{N}\times]0,e^{-1}]}$ est $\Sigma-$admissible. Un calcul simple montre aussi que la quantité définie par (5.1) est finie. Ainsi les hypothèse du théorème 2 sont satisfaites. Posons

$$\Omega_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Omega), \ \Sigma_\nu(t) = \psi_\nu(t,\Sigma), \ \Omega(t) = \psi(t,\Omega) \quad \text{et} \quad \Sigma(t) = \psi(t,\Sigma).$$

Soit $h \in]0, e^{-1}]$. Comme le champ de vecteurs $X_{0,0,\delta(t,h)}$ est non nul dans $V \cap \Sigma^c_{\delta(t,h)}$, alors nous déduisons à partir de l'identité (5.36) qu'l existe un voisinage $V(t)$ de $\Omega(t)$ tel que,

$$\forall\, x \in V(t) \cap (\Sigma(t))^c_h, \ X_{t,0,h}(x) \neq 0.$$

Or la divergence de $X_{t,0,h}$ (noté aussi $X_{t,h}$) est nulle, car elle vérifie une équation de transport linéaire. Donc, il existe une fonction $f_{t,h} \ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\nabla^\perp f_{t,h} = X_{t,h}.$$

Le support de $X_{t,h}$ est un compact, ce qui entraîne que $f_{t,h} \in C^{1+s'}$, $\forall s' < s$. Nous n'avons pas en fait une perte de la régularité du bord dans le cas eulérien, d'après [3]. L'ensemble $\partial\Omega(t)$ est une ligne de niveau pour $f_{t,h}$. Donc, quitte à retrancher la constante correspondante on peut supposer que c'est un ensemble de zéros de cette fonction. Considérons un point $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$ de l'ensemble $\partial\Omega(t)\backslash\Sigma(t)_h$. Alors le champ $X_{t,h}$, et a fortiori le gradient de $f_{t,h}$, ne dégénère pas dans un voisinage V_{x_0} de ce point. On peut alors supposer que la première composante de $X_{t,h}$ est non nulle. Ainsi ceci permet d'assurer, d'après le théorème des fonctions implicites, l'existence d'un intervalle $I_{x_{0,1}}$ contenant $x_{0,1}$ et une fonction $\phi \ : I_{x_{0,1}} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1+s'}$ tels que l'ensemble $\{(x_1, \phi(x_1)) \ ; x_1 \in I_{x_{0,1}}\}$ soit le graphe de l'unique branche du bord contenue dans un petit voisinage de x_0, noté encore V_{x_0}. Maintenant nous allons montrer que pour ν assez petit il n'y a dans ce voisinage de x_0 qu'une seule branche connexe du bord de $\partial\Omega_\nu(t)$ et qui soit le graphe d'une fonction définie sur le même intervalle $I_{x_{0,1}}$, même plus petit mais dont la taille est indépendante de ν. D'abord nous allons comme dans le cas eulérien donner une équation cartésienne de $\Omega_\nu(t)$. La description est la même : on construit une fonction $f^\nu_{t,h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\nabla^\perp f^\nu_{t,h} = X^\nu_{t,h}.$$

D'après le théorème 2, le champ de vecteurs $X^\nu_{t,h}$ converge vers $X_{t,h}$ dans C^1, quand ν tend vers zéro. Donc cela permet de déduire l'existence d'un réel ν_0 tel que pour tout $\nu \leq \nu_0$, le champ de vecteurs $X^\nu_{t,h}$ ne s'annule pas dans V_{x_0}. D'un autre côté, il s'ensuit grâce à la convergence uniforme du flot $\psi_\nu(t)$ vers $\psi(t)$ qu'il existe au moins une branche connexe de $\partial\Omega_\nu(t)$, confinée dans V_{x_0} et dont la projection sur l'axe des abscisses est l'intervalle $I_{x_{0,1}}$. En fait c'est la seule branche connexe se trouvant dans le voisinage de x_0, car sinon, il y aura aussi une autre branche eulérienne. En se servant du fait que la composante $X^{\nu,1}_{t,h}$ est d'un module strictement positif dans V_{x_0} alors on peut déduire, d'une manière strictement analogue au cas d'Euler, l'existence d'une paramétrisation cartésienne de cette branche $\phi_\nu \;: I_{x_{0,1}} \to \mathbb{R}$, qui est de classe $C^{1+\sigma_t-2/p}$. Le premier résultat qu'on va discuter est que ϕ_ν converge uniformément vers ϕ. En effet, la convergence uniforme du flot visqueux vers ψ nous informe que le graphe de ϕ_ν se trouve dans une surface tubulaire dressée autour du graphe de ϕ et dont le rayon ρ_ν tend vers zéro. Donc en désignat par $\alpha(x_1)$ l'angle que fait la droite verticale passant par le point $(x_1, 0)$ avec la tangente à la courbe $\Omega(t)$ au point $(x_1, \phi(x_1))$, on trouve que

$$|\phi_\nu(x_1) - \phi(x_1)| \leq \frac{\rho_\nu}{\sin\alpha(x_1)}.$$

Or la minoration uniforme $|X^2_{t,h}(x)| \geq c > 0$, sur V_{x_0} permet d'assurer la minoration uniforme du sinus. Ce qui permet de montrer la convergence uniforme de ϕ_ν vers ϕ. Comme conséquence on a la convergence au sens de la distance de Hausdorff. Il reste à vérifier la convergence pour les tangentes unitaires. Posons

$$\tau_\nu(x_1) = \frac{X^\nu_{t,h}}{|X^\nu_{t,h}|}\big(x_1, \phi_\nu(x_1)\big) \quad \text{et} \quad \tau(x_1) = \frac{X_{t,h}}{|X_{t,h}|}\big(x_1, \phi_\nu(x_1)\big).$$

Alors un calcul élémentaire, utilisant les inégalités triangulaires, permet d'avoir

$$|\tau_\nu(x_1) - \tau(x_1)| \leq 2\, \frac{\big|X^\nu_{t,h}(x_1, \phi_\nu(x_1)) - X_{t,h}(x_1, \phi(x_1))\big|}{\big|X^\nu_{t,h}(x_1, \phi_\nu(x_1))\big|}.$$

Or le champ $X^\nu_{t,h}$ est de module uniformément minoré sur V_{x_0} par une constante strictement positive. Il s'ensuit alors que

$$|\tau_\nu(x_1)-\tau(x_1)| \leq C\Big(\|X^\nu_{t,h}-X_{t,h}\|_{L^\infty(V_{x_0})}+\|X_{t,h}(\cdot,\phi_\nu)-X_{t,h}(\cdot,\phi)\|_{L^\infty(I_{x_{0,1}})}\Big).$$

Ainsi le théorème 2 et la convergence uniforme de ϕ_ν vers ϕ donnent le résultat désiré.

5.3. Dynamique des poches singulières

Cette section est dévolue à l'étude de la régularité stratifiée du tourbillon ω relativement à une famille donnée de champs de vecteurs. Nous partons d'abord d'un modèle de champs de vecteurs et nous verrons à la fin une application pour une famille adéquate de champs de vecteurs $\mathcal{X}_t = (X_{t,\lambda,h})$ qui tient compte de la structure singulière de la poche initiale.

5.3.1. Etude d'un modèle

Soit $v(t,x)$ un champ de vitesse infiniment différentiable et de divergence nulle. On se donne dans le plan un ensemble fermé Σ_0 suffisamment régulier et supporté dans $(\Sigma_0)^c_h$, où h est un paramètre appartenant à $]0,e^{-1}]$. Considérons l'équation

$$(TG)\begin{cases} \partial_t X + v\cdot\nabla X = X(x,D)v \\ X_{|t=0} = X_0. \end{cases}$$

Une telle équation possède une unique solution X_t qui satisfait en outre l'identité

$$X_t(\psi(t,x)) = X_0(x,D)\psi(t,x) \tag{5.2}$$

avec $\psi(t)$ le flot associé au champ de vecteurs v. Nous remarquons qu'il découle du système (TG) que les champs de vecteurs $\partial_t + v\cdot\nabla$ et $X_t(x,D)$ commutent et par conséquent l'équation vérifiée par $X_t(x,D)\omega(t)$ prend la forme suivante

$$\big(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta\big)X_t(x,\, D)\omega = -\nu[\Delta,\, X_t(x,\, D)]\,\omega. \tag{5.3}$$

Remarque : Désormais, nous omettons, par souci de notation, d'indexer par ν les quantités relatives au système de Navier-Stokes.

Nous allons décrire par le biais de la proposition suivante quelques estimations des solutions de (TG) et (5.3). Elles sont utiles pour contrôler le gradient de la vitesse en dehors du transporté de l'ensemble singulier Σ_0 par le flot.

Proposition 6. *Soient $p>1$, $s\in]0,1[,\epsilon\in]0,\frac{s}{2}[$ et $r\in]1,\frac{1}{1+\epsilon-\frac{s}{2}}[$. Il existe une constante C telle que l'on ait la propriété suivante : soit v une solution régulière du système de Navier-Stokes correspondant à un tourbillon initial ω^0 appartenant à $L^1\cap L^\infty$. On se donne un champ de vecteurs X_0 régulier et supporté dans $(\Sigma_0)_h^c$, avec Σ_0 un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. On définit la quantité*

$$E_1 \;=\; C\Big(\|X_0(x,D)\omega^0\|_{B_p^s}+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big(\|X_0\|_{B_p^s}+\|\mathrm{div}X_0\|_{B_p^s}\big)\Big).$$

Soit T un réel positif. On se donne un entier $N_0\in\mathbb{N}^*$ et un réel $C_0\geq 2$ et l'on impose la condition

$$C\Big(1+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big)T\Big)N_0^{\frac{1}{r}-1}\leq C_0^{-1}. \tag{5.4}$$

Alors en posant pour tout $t\in[0,T]$;

$$\begin{aligned}\sigma_t &= s\Big(1-\frac{\epsilon t}{sT}\Big)-\epsilon-1 \quad \textit{et pour tout} \quad 0\leq\tau\leq t\,;\\ g_t(\tau) &= C\widetilde{W}(\tau)+C_0^{-1}\widetilde{W}(t)+C\|\omega^0\|_{L^\infty}\big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})t\big),\end{aligned}$$

on aura pour tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\|X_t(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_t}} &+ \|\omega(t)\|_{L^\infty}\|X_t\tilde{\|}_{B_p^{1+\sigma_t}}\leq 2^{N_0}E_1\Bigg(1+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty}\big)t+\\ &+ \frac{C_0^{-1}\widetilde{W}(t)}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Bigg)\times(-\log h)\,h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Si $p>\frac{1}{\frac{s}{2}-\epsilon}$, alors nous aurons

$$\|X_t(\psi_t)\|_{C^{1+\sigma_t-2/p}}\leq\frac{2^{N_0}E_1}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\big(h/2\big)^{-1-\int_0^t g_t(\tau)d\tau}.$$

Si de plus il existe un compact K tel que supp $X_0\subset K$, alors pour tout $p>\frac{1}{\frac{s}{2}-\epsilon}$, il existe une constante C_K telle que,

$$\|X_t(\psi_t)\|_{B_p^{1+\sigma_t-2/p}}\leq\frac{C_K2^{N_0}E_1}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\big(h/2\big)^{-1-\int_0^t g_t(\tau)d\tau},$$

où l'on a posé

$$W(t)=\big(\|\nabla v(t)\|_{L(\Sigma_t)}+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big)e^{t\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \quad \textit{et} \quad \widetilde{W}(t)=\sup_{0\leq\tau\leq t}W(\tau).$$

Démonstration : L'estimation de $\mathrm{div} X_t$ s'avère la plus facile à prouver. Elle est basée sur le corollaire 1, figurant dans l'appendice, mais pour pouvoir l'appliquer nous devrons localiser le support de X_t. Nous allons montrer de façon précise que, pour t positif,

$$\text{supp } X_t \subset (\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}. \tag{5.6}$$

Pour ce faire, on prend $\eta \in]0, h[$ et une fonction $\phi_0 \ : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable, supportée dans $(\Sigma_0)^c_{h-\eta}$ et valant 1 dans $(\Sigma_0)^c_h$. Considérons alors son transporté par le flot ψ_t qu'on défini par $\phi_t(x) = \phi_0(\psi^{-1}(t, x))$. Il est facile de voir que ϕ_t satisfait l'équation de transport suivante

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)\phi_t = 0.$$

Ainsi un calcul simple utilisant l'équation (TG) montre

$$\begin{cases} \big(\partial_t X + v \cdot \nabla\big)(\phi_t X_t) = (\phi_t X_t)(x, D)v \\ \phi_t X_{t|t=0} = X_0. \end{cases}$$

Ainsi nous en déduisons par unicité que $\phi_t X_t = X_t$. Or, d'après le lemme 1, nous avons

$$\text{supp } \phi_t \subset \psi\big(t, (\Sigma_0)^c_{h-\eta}\big) \subset (\Sigma_t)^c_{\delta(t,h-\eta)}.$$

Ainsi en faisant tendre η vers zéro nous récupérons l'inclusion mentionnée dans (5.6). Pour décrire l'évolution de la quantité $\mathrm{div} X_t$, nous appliquons l'opérateur de divergence à (TG) et l'on obtient grâce à l'incompressibilité du flot,

$$(\mathrm{T}) \quad (\partial_t + v \cdot \nabla)\mathrm{div} X_t = 0. \tag{5.7}$$

Sachant que $\mathrm{div} X_t$ est supporté dans $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$, alors nous aurons grâce à la proposition 5 l'estimation suivante

$$\|\mathrm{div} X_t\|_{B^s_p} \leq \|\mathrm{div} X_0\|_{B^s_p} h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}. \tag{5.8}$$

En ce qui concerne les quantités $\|X(t)\|_{B^{\sigma_t}_p}$ et $\|X_t(x, D)\omega\|_{B^{\sigma_t}_p}$, elles s'estiment de façon couplée. En appliquant l'opérateur de filtrage en fréquences Δ_q à (TG) et en faisant des estimations L^p, on aboutit à

$$\begin{aligned} \|\Delta_q X(t)\|_{L^p} \leq \|\Delta_q X_0\|_{L^p} + \int_0^t \|\Delta_q X_\tau(x,\, D)v\|_{L^p} d\tau \\ + C(-\log h) \int_0^t 2^{-q(1+\sigma_\tau)} W(\tau) \|X(\tau)\|_{B^{1+\sigma_\tau}_p} d\tau. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Or, par définition de σ_t, nous avons l'inégalité $-\sigma_t \geq 1-s$. Donc nous aurons en vertu du lemme 12 de l'appendice que

$$\begin{aligned}\|\Delta_q X_t(x,\,D)v\|_{L^p} &\leq C\Big(\|\omega^0\|_{L^\infty}2^{-qs}\|\mathrm{div}X(t)\|_{B^s_p} + 2^{-q}\|\Delta_q X_t(x,\,D)\omega\|_{L^p}\Big)\\ &\qquad + C(-\log\,h)W(t)2^{-q(1+\sigma_t)}\|X(t)\|_{B^{1+\sigma_t}_p}.\end{aligned}$$

Quitte à insérer cette estimation dans (5.9), on trouve alors

$$\begin{aligned}\|\Delta_q X(t)\|_{L^p} &\leq \|\Delta_q X_0\|_{L^p} + C(-\log\,h)\int_0^t 2^{-q(1+\sigma_\tau)}W(\tau)\|X(\tau)\|_{B^{1+\sigma_\tau}_p}d\tau\\ &\qquad + C\|\omega^0\|_{L^\infty}2^{-qs}\int_0^t \|\,\mathrm{div}X(\tau)\|_{B^s_p}d\tau\\ &\qquad + C\int_0^t 2^{-q(1+\sigma_\tau)}\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p}d\tau. \qquad (5.10)\end{aligned}$$

En multipliant des deux côtés par $2^{q(1+\sigma_t)}$ et en se servant de la décroissance de σ_t, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|X(t)\|_{B^{1+\sigma_t}_p} &\leq \|X_0\|_{B^s_p} + C(-\log\,h)\int_0^t W(\tau)\|X(\tau)\|_{B^{1+\sigma_\tau}_p}d\tau\\ &+ C\|\omega^0\|_{L^\infty}\int_0^t \|\,\mathrm{div}X(\tau)\|_{B^{1+\sigma_\tau}_p}d\tau + C\int_0^t \|X_\tau(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p}d\tau.\end{aligned}$$

Sachant que

$$\|\omega^0\|_{L^\infty}t \leq e^{-C(\log h)\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}t} \leq h^{-C\int_0^t \widetilde{W}(\tau)d\tau}, \qquad (5.11)$$

alors l'inégalité (5.8) et le lemme de Gronwall permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}\|X(t)\|_{B^{1+\sigma_t}_p} &\leq h^{-C\int_0^t \widetilde{W}(\tau)d\tau}\Big(\|X_0\widetilde{\|}_{B^s_p} +\\ &\qquad + \int_0^t h^{C\int_0^\tau \widetilde{W}(\tau')d\tau'}\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p}d\tau\Big). \qquad (5.12)\end{aligned}$$

Dans l'étape suivante nous allons contrôler $\|X_t(x,D)\omega\|_{B^{\sigma_t}_p}$. Pour cela, nous allons appliquer la formulation fréquencielle de la proposition 5 avec l'équation (5.3). C'est dans l'estimation du commutateur $[\Delta, X_t(x,D)]\omega$ que l'on utilise l'effet régularisant décrit par la proposition 4. D'abord, on va étudier le commutateur en se basant sur le calcul paradifférentiel. Alors on aboutit à la décomposition suivante :

$$\nu[\Delta,\,X_t(x,\,D)]\,\omega = f + \nu\,g,$$

où l'on a posé

$$f = 2\nu \sum_{1\le i,j\le 2} R(\partial_j X_t^i,\, \partial_i\partial_j\omega) + \sum_{i=1}^{2} \nu R(\Delta X_t^i, \partial_i\omega), \quad \text{et} \tag{5.13}$$

$$g = \sum_{i=1}^{2} \Big(2T_{\nabla X_t^i}\partial_i\nabla\omega + 2T_{\partial_i\nabla\omega}\nabla X_t^i + T_{\Delta X_t^i}\partial_i\omega + T_{\partial_i\omega}\Delta X_t^i \Big). \tag{5.14}$$

Le lemme suivant fournit une estimation de la régularité tangentielle du tourbillon dans un espace de Besov d'indice négatif.

Lemme 8. *Soient $s \in]0,1[$ et $p > 1$. Alors il existe une constante C, telle que pour toute fonction décroissante σ_t, vérifiant $0 < C_1 \le 1+\sigma_t \le s$ et pour tout $r \in [1,+\infty]$, on aura*

$$\begin{aligned} 2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(\cdot,D)\omega\|_{L^p} \;\le\;& \|X_0(x,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + C\big(1+\nu t\big)\|\omega^0\|_{L^\infty}\|X_\cdot\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}} \\ &+ CC_1^{-1}(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,\,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau + \\ &+ C\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big)t\Big)2^{q(\sigma_t+1-\frac{2}{\bar r})}\times \\ &\times \sum_{j\ge q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{\bar r}}\Big(\|\Delta_j X\|_{L_t^\infty L^p} + \|\Delta_j \mathrm{div} X\|_{L_t^\infty L^p}\Big), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\|X_\cdot\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}} = \sup_{0\le\tau\le t}\|X_\tau\|_{B_p^{1+\sigma_\tau}}.$$

Admettons pour le moment ce lemme. Vu le choix de σ_t, on peut déduire grâce à (5.8) que

$$2^{j(1+\sigma_t)}\|\Delta_j\ \mathrm{div} X_t\|_{L^p} \le 2^{-j\epsilon}\|\ \mathrm{div} X_0\|_{B_p^s} h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}. \tag{5.15}$$

Ainsi la décroissance de σ_t et la croissance de l'intégrale $\int_0^t W(\tau)d\tau$ permettent d'avoir (vu que $0 < h \le 1$,)

$$2^{j(1+\sigma_t)}\|\Delta_j\ \mathrm{div} X_\tau\|_{L_t^\infty L^p} \le 2^{-j\epsilon}\|\ \mathrm{div} X_0\|_{B_p^s} h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}.$$

En conséquence, nous aurons suite à l'inégalité $1+\sigma_t \ge \frac{2}{\bar r}$,

$$\begin{aligned} 2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{\bar r})}\sum_{j\ge q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{\bar r}}\,\|\Delta_j\ \mathrm{div} X\|_{L_t^\infty L^p} \le& \\ \le C\|\ \mathrm{div} X_0\|_{B_p^s}\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}.& \end{aligned} \tag{5.16}$$

Il vient alors que l'estimation donnée par le lemme 8 peut être réécrite sous la forme

$$
\begin{aligned}
2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(\,\cdot,\,D)\omega\|_{L^p} &\le \|X_0(\cdot,\,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + C\big(1+\nu t\big)\|\omega^0\|_{L^\infty}\|X.\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma.}}\\
&\quad + C\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})t\Big)\|\omega^0\|_{L^\infty}\|\operatorname{div}X_0\|_{B_p^s}\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}\\
&\quad + C\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big)t\Big)2^{q(\sigma_t+1-\frac{2}{\bar r})}\times\\
&\qquad \times\sum_{j\ge q-5}(j+2)^{\frac1r}2^{\frac{2j}{\bar r}}\|\Delta_j X\|_{L_t^\infty L^p}+\\
&\quad + C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,\,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Maintenant, nous allons essayer d'estimer la somme figurant dans le second membre. Nous signalons au départ que l'appartenance de X_0 à l'espace B_p^s implique

$$2^{j(1+\sigma_t)}\|\Delta_j X_0\|_{L^p}\le 2^{-j\epsilon}\|X_0\|_{B_p^s}.$$

Suite à cette estimation et quitte à sommer sur les $j\ge q-5$, alors on trouve grâce à l'inégalité $1+\sigma_t\ge\frac{2}{\bar r}$

$$2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{\bar r})}\sum_{j\ge q-5}(j+2)^{\frac1r}2^{\frac{2j}{\bar r}}\|\Delta_j X_0\|_{L^p}\le C\|X_0\|_{B_p^s}. \qquad (5.18)$$

D'une autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\ge q-5}(j+2)^{\frac1r}2^{\frac{2j}{\bar r}}\int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)}W(\tau)\|X(\tau)\|_{B_p^{1+\sigma_\tau}}d\tau \quad &\le\quad \widetilde W(t)\|X.\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma.}}\\
&\times\sum_{j\ge q-5}(j+2)^{\frac1r}2^{\frac{2j}{\bar r}}\int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)}d\tau. \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

Or, un simple calcul montre que, pour tout $j\ge 1$,

$$\int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)}d\tau\le C\,Tj^{-1}2^{-j(1+\sigma_t)}.$$

Soit $N_0\ge 5$ un entier qui sera fixé à la fin. Comme $1+\sigma_T>\frac{2}{\bar r}$, alors nous en déduisons à partir de (5.19) que pour tout $q>N_0$

$$
\begin{aligned}
2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{\bar r})}\sum_{j\ge q-5}(j+2)^{\frac1r}2^{\frac{2j}{\bar r}}\int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)}W(\tau)\|X(\tau)\|_{B_p^{1+\sigma_\tau}}d\tau &\le\\
\le C{N_0}^{\frac1r-1}T\,\widetilde W(t)\|X.\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma.}}. \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

D'un autre côté, un calcul similaire donne pour tout $q > N_0$,

$$2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{\bar r})}\sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{\bar r}}\int_0^t 2^{-j(1+\sigma_\tau)}\|X_\tau(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau$$
$$\leq CT\|X(x,D)\omega(\cdot)\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot}}\sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}-1}2^{(q-j)(1+\sigma_t-\frac{2}{\bar r})}$$
$$\leq CTN_0^{\frac{1}{r}-1}\|X(x,D)\omega(\cdot)\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot}}. \tag{5.21}$$

Ainsi en reportant cette inégalité, ainsi que (5.16), (5.18) et (5.20), dans (5.10) et en sommant sur les indices j on trouve pour tout $q \geq N_0+2$,

$$2^{q(1+\sigma_t-\frac{2}{\bar r})}\sum_{j\geq q-5}(j+2)^{\frac{1}{r}}2^{\frac{2j}{\bar r}}\|\Delta_j X\|_{L_t^\infty L^p}\leq C\|X_0\|_{B_p^s}+$$
$$+C\|\mathrm{div}X_0\|_{B_p^s}\|\omega^0\|_{L^\infty}\,t\,h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}+$$
$$+CTN_0^{\frac{1}{r}-1}(-\log h)\widetilde{W}(t)\|X(\cdot)\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}}+$$
$$+\ CTN_0^{\frac{1}{r}-1}\|X(x,D)\omega(\cdot)\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot}}. \tag{5.22}$$

Posons

$$E_0^\nu(t)=C\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty})t\Big).$$

Donc, en combinant les inégalités (5.22), (5.11) et (5.17) et en prenant le supremum en q, on aboutit alors à l'estimation

$$2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(x,\,D)\omega\|_{L^p}\leq\|X_0(x,\,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}}+$$
$$+C(-\log\,h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,\,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau+$$
$$+E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}\Bigg(\|\widetilde{X_0}\|_{B_p^s}\,h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}+TN_0^{\frac{1}{r}-1}\|X(x,D)\omega\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_t}}+$$
$$+\Big(1+(-\log h)TN_0^{\frac{1}{r}-1}\widetilde{W}(t)\Big)\|X_\cdot\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}}\Bigg). \tag{5.23}$$

Soit C_0 une constante suffisamment grande. On impose à N_0 la condition

$$\|\omega^0\|_{L^\infty}TE_0^\nu(T)N_0^{\frac{1}{r}-1}\leq C_0^{-1}\leq\frac{1}{2}. \tag{5.24}$$

Alors, on trouve que pour tout $q > N_0$,

$$2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(x,\,D)\omega\|_{L^p}\leq\|X_0(x,\,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}}+E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}\times$$
$$\times\Big(\|\widetilde{X_0}\|_{B_p^s}\,h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}\big(1+(-\log h)TN_0^{\frac{1}{r}-1}\widetilde{W}(t)\big)\|X_\cdot\|_{L_t^\infty B_p^{1+\sigma_\cdot}}\Big)+$$
$$+\ C(-\log h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,\,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau+\frac{1}{2}\|X(x,D)\omega\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot}}. \tag{5.25}$$

Pour estimer les basses fréquences, i.e., $q \leq N_0$, on écrit

$$\begin{aligned} 2^{q\sigma_t}\|\Delta_q X_t(x,D)\omega\|_{L^p} &\leq 2^{q(1+\sigma_t)}\|X_t\omega(t)\|_{L^p} + 2^{q\sigma_t}\|\omega(t)\mathrm{div}X_t\|_{L^p} \\ &\leq C2^{N_0}\Big(\|X_t\|_{L^p} + \|\mathrm{div}X_t\|_{L^p}\Big)\|\omega^0\|_{L^\infty} \end{aligned} \tag{5.26}$$

L'estimation L^p du champ de vecteurs X_t et de sa divergence est classique. Le fait que le champ de vecteurs est supporté dans $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$ permet d'avoir

$$\begin{aligned} \|X_t\|_{L^p} &\leq \|X_0\|_{L^p}\, h^{-C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma_\tau)}d\tau} \\ &\leq \|X_0\|_{L^p}\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}. \end{aligned}$$

La même méthode appliquée à l'équation (5.7) donne

$$\|\mathrm{div}X_t\|_{L^p} \leq \|\mathrm{div}X_0\|_{L^p}.$$

En reportant ces estimations dans (5.26), que l'on associe à (5.25), on trouve

$$\begin{aligned} \|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_t B_p^{1+\sigma_t}} \leq{}& 2\|X_0(x,\,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + \\ &+ C(-\log\,h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,\,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau + \\ &+ E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}\bigg(2^{N_0}\|X_0\widetilde{\|}_{B_p^s}\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} + \\ &+ \big(1+(-\log h)TN_0{}^{\frac{1}{r}-1}\widetilde{W}(t)\big)\|X_\cdot\|_{L^\infty_t B_p^{1+\sigma_\cdot}}\bigg). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Posons

$$E_1 \stackrel{déf}{=} C\bigg(\|X_0(x,\,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + \|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(\|X_0\|_{B_p^s} + \|\,\mathrm{div}X_0\|_{B_p^s}\Big)\bigg).$$

Alors l'inégalité (5.27) se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \|X(x,D)\omega\,\|_{L^\infty_t B_p^{1+\sigma_t}} \leq{}& 2^{N_0}E_1\,E_0^\nu(t)\,h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} + \\ &+ C(-\log\,h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,\,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau + \\ &+ E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+(-\log h)TN_0{}^{\frac{1}{r}-1}\widetilde{W}(t)\Big)\|X_\cdot\|_{L^\infty_t B_p^{1+\sigma_\cdot}}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Par suite en reportant (5.12) dans (5.28) et en se servant de la condition (5.24), on parvient à

$$\begin{aligned}\|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma_t}_p} \le{}& E_1\Big(2^{N_0}E_0^\nu(t)+\\ &+C_0^{-1}(-\log h)\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big)\, h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}+\\ &+C(-\log\, h)\int_0^t W(\tau)\|X_\tau(x,\, D)\omega\|_{B^{\sigma_\tau}_p}d\tau\\ &+\Big(E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}+C_0^{-1}(-\log h)\widetilde{W}(t)\Big)\times\\ &\times\; h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}\int_0^t h^{C\int_0^\tau W(\tau')d\tau'}\|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_\tau B^{1+\sigma_\tau}_p}d\tau.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Posons

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma_t}_p} h^{C\int_0^t W(\tau)d\tau} \quad \text{et pour tout } 0\le\tau\le t\\ g_t(\tau) &= C\widetilde{W}(\tau)+E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty}+C_0^{-1}\widetilde{W}(t).\end{aligned}$$

Alors l'inégalité (5.29) devient

$$f_1(t)\le E_1\Big(2^{N_0}E_0^\nu(t)+C_0^{-1}\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big)(-\log h)+(-\log h)\int_0^t g_t(\tau)f_1(\tau)d\tau.$$

En appliquant le lemme de Gronwall et en utilisant la croissance de $\widetilde{W}$ et g_t, on trouve

$$\begin{aligned}\|X(x,D)\omega\|_{L^\infty_t B^{1+\sigma_t}_p} \le \frac{2^{N_0}E_1}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big(E_0^\nu(t)\|\omega^0\|_{L^\infty} \;&+\; C_0^{-1}\widetilde{W}(t)\Big)\times\\ \times\;& (-\log h)h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau}.\end{aligned}\tag{5.30}$$

En reportant cette estimation dans (5.12) et en se servant de l'inégalité

$$(-\log h)\int_0^t\Big(E_0^\nu(\tau)\|\omega^0\|_{L^\infty}+C_0^{-1}\widetilde{W}(\tau)\Big)h^{-\int_0^\tau g_\tau(\tau')d\tau'}d\tau\le h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau},$$

on montre que

$$\|X_t\|_{B^{1+\sigma_t}_p}\le\frac{2^{N_0}E_1}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau}.$$

Pour fournir une estimation de $X_0(x,D)\,\psi(t,x)$, nous écrivons tout d'abord que

$$X_0(x,D)\psi(t,x)=X_t(\psi(t,x)).\tag{5.31}$$

Soient x, $y \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x-y| \leq h/4$. Alors, on a deux possibilités : soit x et $y \in (\Sigma_0)_h$, auquel cas la valeur du champ X_0 en ces points est nulle ; soit x et $y \in (\Sigma_0)^c_{3h/4}$. Alors dans ce cas le segment $[x,y]$ n'intersecte pas l'ensemble $(\Sigma_0)_{h/4}$. Donc cela nous permet d'écrire via la formule de la moyenne que pour tout $0 < \epsilon' < 1$

$$\begin{aligned}\big|X_t(\psi(t,x)) - X_t(\psi(t,y))\big| &\leq \frac{C}{\epsilon}\|X_t\|_{C^{\epsilon'}}\big|\psi(t,x)-\psi(t,y)\big|^{\epsilon'}\\ &\leq \frac{C}{\epsilon'}\|X_t\|_{C^{\epsilon'}}\|\nabla\psi(t)\|^{\epsilon'}_{L^\infty((\Sigma_0)^c_{h/4})}|x-y|^{\epsilon'}. \qquad (5.32)\end{aligned}$$

D'un autre côté, en dérivant l'équation régissant le flot et en se servant de la première partie du lemme 1, on trouve

$$\|\nabla\psi(t)\|_{L^\infty((\Sigma_0)^c_{h/4})} \leq \exp\Big(\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty((\Sigma_\tau)^c_{\delta(t,h/4)})} \leq \big(h/4\big)^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau}.$$

Ainsi en reportant cette estimation dans (5.32), on obtient pour $|x-y| \leq h/4$,

$$\big|X_t(\psi(t,x)) - X_t(\psi(t,y))\big| \leq \frac{C}{\epsilon'}\|X(t)\|_{C^{\epsilon'}}\big(h/4\big)^{-C\epsilon'\int_0^t W(\tau)d\tau}|x-y|^{\epsilon'}$$

Lorsque $|x-y| \geq h/4$, alors on écrit simplement

$$\big|X_t(\psi(t,x)) - X_t(\psi(t,y))\big| \leq 2\|X_t\|_{L^\infty}(h/4)^{-\epsilon'}|x-y|^{\epsilon'}.$$

Par conséquent, on parvient à montrer que $X_t(\psi(t))$ est un élément de $C^{\epsilon'}$, avec

$$\begin{aligned}\|X_t(\psi_t)\|_{C^{\epsilon'}} &\leq \frac{C}{\epsilon'}\|X_t\|_{C^{\epsilon'}}\big(h/4\big)^{-\epsilon'(1+C\int_0^t W(\tau)d\tau)}\\ &\leq \frac{C}{\epsilon'}\|X_t\|_{B_p^{\epsilon'+2/p}}\big(h/4\big)^{-\epsilon'(1+C\int_0^t W(\tau)d\tau)}. \qquad (5.33)\end{aligned}$$

Donc, en prenant $\epsilon' = 1+\sigma_t-2/p$ et en utilisant l'estimation (5.5) on trouve le résultat.

En ce qui concerne l'estimation dans les espaces de Besov, nous ferons l'hypothèse que le support de X_0 est un compact K. Il s'ensuit d'après la définition du champ X_t que le support de $X_t(\psi_t)$ est inclus dans K. Alors on obtient en vertu du lemme 5

$$\|X_t(\psi_t)\|_{B_p^{\epsilon'}} \leq C_K\|X_t(\psi_t)\|_{C^{\epsilon'}}.$$

Ainsi nous obtenons à l'aide de l'injection de Sobolev et de l'estimation (5.33)

$$\|X_t(\psi_t)\|_{B_p^{1+\sigma_t-2/p}} \leq \frac{C_K}{1+\sigma_t-2/p}\|X_t\|_{B_p^{1+\sigma_t}}\big(h/4\big)^{-(1+C\int_0^t W(\tau)d\tau)}$$

Ainsi en combinant cette majoration avec (5.5) on parvient au résultat souhaité.

5.3.2. Démonstration du lemme 8

La preuve est intimement liée , d'une part à la formulation fréquencielle de la proposition 5 et d'autre part à l'effet régularisant qu'on a déjà établi sur le tourbillon ω. D'abord, l'inégalité (4.6) permet d'avoir pour tout entier $q \geq -1$

$$\begin{aligned}\|\Delta_q X_t(x,\, D)\omega\|_{L^p} \leq \|X_0(x,\, D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} &+ C\Big(\frac{p^2}{p-1}+\nu t\Big)2^{-2q}\|g_q\|_{L_t^\infty L^p}\\ &+ C(-\log h)\int_0^t \frac{2^{-q\sigma_\tau}}{1-\sigma_\tau^2}W(\tau)\|X_\tau(x,\, D)\omega\|_{B_p^{\sigma_\tau}}d\tau+\\ &+ \big(\nu^{\frac{-1}{\bar r}}+t^{\frac{1}{\bar r}}\big)2^{\frac{-2q}{\bar r}}\|f_q\|_{l_t^r L^p}.\end{aligned}\tag{5.34}$$

C'est dans l'estimation de f que l'effet régularisant décrit par la proposition 4 est d'une grande importance. Pour s'en rendre compte, nous allons faire une légère modification de l'expression de f :

$$\sum_{i=1}^{2} R(\Delta X_t^i, \partial_i\omega) = \sum_{i=1}^{2}\partial_i R(\Delta X_t^i,\omega) - R(\Delta \mathrm{div} X_t,\omega)\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{2} R(\nabla X_t^i, \nabla\partial_i\omega) = \sum_{i=1}^{2}\partial_i R(\nabla X_t^i,\nabla\omega) - R(\nabla \mathrm{div} X_t,\nabla\omega).$$

Ainsi on aboutit, suite à une utilisation de l'inégalité triangulaire et du lemme de Bernstein

$$\begin{aligned}\|\Delta_q f\|_{L_t^r L^p} &\leq C2^q \sum_{\substack{j\geq q-N_0\\ i\in\{\mp1,0\}}} \nu 2^{2j}\|\Delta_{j+i}X\|_{L_t^\infty L^p}\|\Delta_j\omega\|_{L_t^r L^\infty}\\ &+ C\sum_{\substack{j\geq q-N_0\\ i\in\{\mp1,0\}}} \nu 2^{2j}\|\Delta_{j+i}\mathrm{div}X\|_{L_t^\infty L^p}\|\Delta_j\omega\|_{L_t^r L^\infty}.\end{aligned}$$

En se servant de la proposition 4 et de l'estimation (4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}2^{q(\sigma_t-\frac{2}{\bar r})}\|\Delta_q f\|_{L_t^r L^p} &\leq C\nu^{\frac{1}{\bar r}}\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big(1+\big(\nu+\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big)t\Big)^{\frac{1}{\bar r}}2^{q(\sigma_t+1-\frac{2}{\bar r})}\\ &\times \sum_{j\geq q-N_0}(j+2)^{\frac{1}{\bar r}}\Big(\|\Delta_j X\|_{L_t^\infty L^p}+\|\Delta_j\mathrm{div}X\|_{L_t^\infty L^p}\Big).\end{aligned}$$

D'un autre côté, pour estimer g il suffit de développer les paraproduits et l'on trouve grâce à la condition $-\sigma_t > 1-s$

$$\|g\|_{\widetilde{L_t^\infty} B_p^{\sigma_t-2}} \leq \frac{C}{-\sigma_t}\|X\|_{\widetilde{L_t^\infty} B_p^{\sigma_t+1}}\|\omega\|_{L_{t,x}^\infty} \leq \frac{C}{1-s}\|X_\cdot\|_{L_t^\infty B_p^{\sigma_\cdot+1}}\|\omega^0\|_{L^\infty}.$$

En fait la dernière inégalité est assurée par le principe du maximum. Ainsi la preuve du lemme 8 est achevée.

5.3.3. Définition de la famille $\mathcal{X}_t$

Soit $\mathcal{X}_0$ une famille $\Sigma-$admissible et v un champ de vecteurs infiniment dérivable. Alors, on définit le champ de vecteurs $\widetilde{X}_{t,\lambda,h}$ comme l'unique solution du système

$$(TG')\begin{cases} \big(\partial_\tau + v(\tau,x)\cdot\nabla\big)\widetilde{X}_{t,\lambda,h}(\tau) = \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(\tau,x,D)v(\tau,x) \\ \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(0,x) = X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x). \end{cases}$$

Ainsi on définit la famille $\mathcal{X}_t$ comme suit

$$X_{t,\lambda,h} = \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(t,x) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_t = (X_{t,\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]} \tag{5.35}$$

Faisons remarquer que nous pouvons déduire à partir de l'équation (TG') que pour tout réel positif τ

$$\widetilde{X}_{t,\lambda,h}(\tau,\,\psi(\tau,x)) = X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,\,D)\psi(\tau,x). \tag{5.36}$$

La proposition suivante précise le théorème 2.

Proposition 7. *Soientt* $s\in]0,1[$, $\epsilon\in]0,\frac{s}{2}[$, $p>\frac{2}{s-2\epsilon}$ *et* $r\in]1,\frac{1}{1+\epsilon-\frac{s}{2}}[$. *Alors il existe une constante positive* C *telle qu'on ait les assertions suivantes. On se donne un champ de vecteurs* v^0 *de divergence nulle dont le rotationnel* $\omega^0\in L^1\cap L^\infty$. *Soient* Σ_0 *un ensemble fermé de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathcal{X}_0$ *une famille* Σ_0-*admissible d'ordre* $\Xi=(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$. *On suppose que*

$$\omega^0\in B^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.$$

Soit T *un réel positif. On pose pour tout* $0\le t\le T$

$$\sigma_t = s\Big(1-\frac{\epsilon t}{sT}\Big)-\epsilon-1.$$

Alors nous aurons :

1) *Le champ de vecteurs défini par* (5.35) *appartient pour tout* $0\le t\le T$ *à l'espace* $B^{1+\sigma_t}_p$.

2) *La solution du système de Navier-Stokes, notée* v, *est lipschitzienne en dehors dehors du transporté de* Σ_0 *par le flot visqueux* $\psi(t)$, *ceci étant localement uniformément par rapport à* ν. *En d'autres termes, nous avons*

$$\sup_{h\in]0,e^{-1}]}\frac{\|\nabla v(t)\|_{L^\infty(\psi(t,\Sigma_0)^c_h)}}{-\log h}\le K_{0,\nu}(1+\nu t)^{\frac{2r-1}{r-1}}e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}},$$

avec

$$K_{0,\nu}\overset{déf}{=}C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\bigg(-\beta_0+\log\bigg(e+\alpha_0\frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\bigg)\bigg).$$

3) *Pour tout* $t \in [0,T]$ *et pour tout* $\eta > 0$ *la famille* $\mathcal{X}$ *est* $\Sigma(t)-$*admissible d'ordre* $\Xi(t) = (\alpha_0(t), \beta_0(t) - \eta, \gamma_0(t))$, *avec*

$$\alpha_0 \overset{déf}{=} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}},\ \beta_0(t) \overset{déf}{=} \big(\beta_0 - t\,K_{0,\nu}(t)\big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \ \text{et}$$
$$\gamma_0(t) \overset{déf}{=} \big(\gamma_0 - \alpha_0 t\,K_{0,\nu}(t)\big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}},$$

où l'on a posé

$$K_{0,\nu}(t) \overset{déf}{=} K_{0,\nu}\, e^{C(1+\nu t)^{\frac{2r-1}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}.$$

4) *Pour tout* $t \in [0,T]$, *on a*

$$\omega(t) \in B^{1+\sigma_t,p,\beta_0(t)-\eta}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)},\ \forall \eta > 0.$$

De façon plus précise, on a l'estimation

$$\|\omega(t)\|^{1+\sigma(t),p}_{(\Sigma(t))h,(\mathcal{X}(t))_h} \le \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}} K_{0,\nu}(t) h^{\beta_0(t)} \log\big(\frac{1}{h}\big),$$

5) *On suppose que*

$$I^0(\Sigma_0,\mathcal{X}_0) \overset{déf}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} I((\Sigma_0)_h,(\mathcal{X}_0)_h) < +\infty, \tag{5.37}$$

alors, on aura

$$\|X_{t,\lambda,h}(\psi_t)\|_{C^{1+\sigma_t-2/p}} \le e^{C(1+\nu t)^{\frac{r}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} I^0_1(\Sigma_0,\mathcal{X}_0)\big(h/4\big)^{\beta_0(t)-\alpha_0(t)},$$

avec,

$$I^0_1(\Sigma_0,\mathcal{X}_0) = \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}} I^0(\Sigma_0,\mathcal{X}_0).$$

Démonstration : Les estimations suivantes sont démontrées dans [3, pp. 174-175] :

$$\inf_{x\in(\Sigma_0)^c_{\delta(t,h)}} \sup_{\lambda\in\Lambda} \big|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\big| \le I(\Sigma(t)_h,\mathcal{X}(t)_h)\big(\delta(t,h)\big)^{-\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL(\Sigma_\tau)}d\tau} \tag{5.38}$$

et en posant

$$\gamma_1(t) = \Big(\gamma_0 - \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{LL(\Sigma_\tau)} d\tau\Big) e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}, \tag{5.39}$$

nous aurons

$$I_{\gamma_0}(\Sigma_0,\mathcal{X}_0) \le I_{\gamma_1(t)}\big(\Sigma(t),\mathcal{X}(t)\big). \tag{5.40}$$

Pour contrôler les normes de $X_{t,\lambda,h}$ et $X_{t,\lambda,h}(x,D)\omega$, nous allons appliquer la proposition 6. Nous obtenons en particulier l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\|X_{t,\lambda,h}(x,D)\omega\|_{B_p^{\sigma_t}} + \|\omega(t)\|_{L^\infty}\|X_{t,\lambda,h}\widetilde{\|}_{B_p^{1+\sigma_t}} \leq 2^{N_0}E_{0,\lambda,h}\Big(1+\\ +(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})t + C_0^{-1}\frac{\widetilde{W}(t)}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\Big)(-\log h)\, h^{-\int_0^t g_t(\tau)d\tau},\end{aligned} \tag{5.41}$$

où l'on a posé

$$E_{0,\lambda,h} \;=\; C\Big(\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,\,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} + \|\omega^0\|_{L^\infty}\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\widetilde{\|}_{B_p^s}\Big),$$

Or, par définition et par l'estimation (5.38), nous avons

$$\begin{aligned}\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,\,D)\omega^0\|_{B_p^{s-1}} \;+\; \|\omega^0\|_{L^\infty}\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\widetilde{\|}_{B_p^s} &\leq\; \delta_t(h)^{\beta_0}\times\\ &\times I\big((\Sigma_0)_{\delta_t(h)},(\mathcal{X}_0)_{\delta_t(h)}\big)\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}\\ &\leq I((\Sigma(t))_h,(\mathcal{X}(t))_h)h^{(\beta_0-\int_0^t\|v(\tau)\|_{LL(\Sigma_\tau)}d\tau)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.\end{aligned} \tag{5.42}$$

En combinant cette estimation avec (5.41), on aboutit à

$$\begin{aligned}\|\omega(t)\|^{1+\sigma(t),p}_{(\Sigma(t))h,(\mathcal{X}(t))_h} \;&\leq\; 2^{N_0}\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}\alpha_0(t)(-\log h)h^{\beta_1(t)}\\ &\times\;\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})t + C_0^{-1}\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big),\end{aligned} \tag{5.43}$$

avec

$$\beta_1(t) = \Big(\beta_0 - \alpha_0\int_0^t g_t(\tau)d\tau\Big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}. \tag{5.44}$$

Nous allons maintenant donner un contrôle Lipschitz en dehors du transporté de l'ensemble singulier par le flot. Pour ce faire, on combine le théorème 3 avec l'estimation (5.43) et l'on trouve sous la condition $1+\sigma_T > \frac{2}{p}$,

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty((\Sigma_t)_h^c)} \;&\leq\; C\|\omega^0\|_{L^1} + C\|\omega^0\|_{L^\infty}\log\left(e + 2^{N_0}\frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\alpha_0(t)\times\right.\\ &\left.\times(-\log h)h^{\beta_1(t)}\Big(1+(\nu+\|\omega^0\|_{L^\infty})t + C_0^{-1}\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big)\right).\end{aligned} \tag{5.45}$$

En se servant de l'inégalité

$$\forall\, a\geq 1,\quad \forall\, b\geq 0,\quad \log\,(1+ab)\leq\;\log\, a + \log\,(1+b),$$

alors la définition de $\widetilde{W}(t)$ et de $\beta_1(t)$ permettent d'avoir

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(t) &\leq K_{1,\nu}(t) + C\|\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \log\Big(1 + C_0^{-1}\widetilde{W}(t)/\|\omega^0\|_{L^\infty}\Big)\\ &+ \|\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \int_0^t g_t(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

où l'on a posé

(5.46)

$$K_{1,\nu}(t) = C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}(1+\nu t)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}\Bigg(-\beta_0 + \log\bigg(e + 2^{N_0}\alpha_0 \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\bigg)\Bigg).$$

En utilisant l'inégalité $\log(1+x) \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, alors en imposant à C_0 la condition

$$CC_0^{-1} e^{CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \leq \frac{1}{2}, \tag{5.47}$$

l'inégalité précédente devient

$$\widetilde{W}(t) \leq K_{1,\nu}(t) + C\|\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \int_0^t g_t(\tau)d\tau.$$

En remplaçant dans cette inégalité la fonction g_t par son expression, on aboutit à

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(t) &\leq K_{1,\nu}(t) + C\|\omega^0\|_{L^\infty}(1+\nu t)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} + CC_0^{-1}e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}\widetilde{W}(t)\\ &+ C\|\omega^0\|_{L^\infty} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \int_0^t \widetilde{W}(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (5.47) et le lemme de Gronwall permettent d'avoir

$$\widetilde{W}(t) \leq K_{1,\nu}(t) e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}. \tag{5.48}$$

Ceci permet d'avoir

$$\int_0^t g_t(\tau)d\tau \leq K_{1,\nu}(t)\, t\, e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}.$$

Ainsi en reportant l'estimation (5.48) dans (5.39) et (5.44), on trouve

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) &\overset{déf}{=} \Big(\gamma_0 - \alpha_0 K_{1,\nu}(t) t\, e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\Big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \leq \gamma_1(t),\\ \beta_0(t) &\overset{déf}{=} \Big(\beta_0 - K_{1,\nu}(t) t\, e^{e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}}\Big)e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \leq \beta_1(t).\end{aligned}$$

Retournons aux conditions (5.4) et (5.47) définissant les constantes C_0 et N_0. Alors un calcul élémentaire montre que ces conditions sont satisfaites dès que

$$\begin{array}{rcl} C_0 & \simeq & Ce^{CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \quad \text{et} \\ N_0 & \simeq & (1+\nu T)^{\frac{r}{r-1}} e^{CT\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}. \end{array}$$

Ainsi l'estimation (5.46) peut être remplaçée par

$$K_{2,\nu}(t) \overset{déf}{=} C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}(1+\nu t)^{\frac{2r-1}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}} \left(-\beta_0 + \log\left(e+\alpha_0 \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\right)\right).$$

Par conséquent, l'estimation (5.43) devient

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|^{1+\sigma(t),p}_{(\Sigma(t))h,(\mathcal{X}(t))_h} &\leq C\, e^{C(1+\nu t)^{\frac{r}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}} K_{2,\nu}(t) h^{\beta_0(t)} \log\left(\frac{1}{h}\right) \\ &\leq \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}} K_{0,\nu}(t) h^{\beta_0(t)} \log\left(\frac{1}{h}\right), \end{aligned}$$

avec

$$K_{0,\nu}(t) \overset{déf}{=} C\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty} e^{C(1+\nu t)^{\frac{2r-1}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} \left(-\beta_0 + \log\left(e+\alpha_0 \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}}\right)\right).$$

En ce qui concerne l'estimation de $X_{t,\lambda,h}(\psi_t)$, nous signalons d'abord que l'hypothèse (5.37) donne, grâce à (5.42)

$$E_{0,\lambda,h} \leq Ch^{\beta_0 e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} \|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0} I^0(\Sigma_0,\chi_0).$$

Donc, la proposition (6) nous permet enfin de trouver,

$$\begin{aligned} \|X_{t,\lambda,h}(\psi_t)\,\|_{C^{1+\sigma_t-2/p}} &\leq \\ &\leq e^{C(1+\nu t)^{\frac{r}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} \frac{E_{0,\lambda,h}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}} \left(\frac{1}{4}\delta(t,h)\right)^{-\alpha_0(1+\int_0^t g_t(\tau)d\tau)}, \\ &\leq e^{C(1+\nu t)^{\frac{r}{r-1}} e^{Ct\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}}} \frac{\|\omega^0\|^{s,p,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega^0\|_{L^\infty}} I^0(\Sigma_0,\mathcal{X}_0)\,\big(h/4\big)^{\beta_1(t)-\alpha_0(t)}. \end{aligned}$$

Il suffit à ce stade d'utiliser l'inégalité $\beta_0(t) \leq \beta_1(t) < 0$, pour que l'estimation énoncée devienne alors plausible.

5.4. Démonstration du théorème 2

La preuve de la première partie est une application directe de la proposition 7 : pour obtenir l'estimation du gradient de la vitesse, on fait le choix suivant $r = \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{2}-\frac{s}{4}}$ et $\epsilon = \frac{s}{4}$. Il reste alors à vérifier la convergence non visqueuse. Choisissons ν par exemple dans $[0,1]$. Alors nous avons par la proposition 7 que pour tout h fixé dans $]0,e^{-1}]$ et pour tout $t \in [0,T]$

$$\sup_{\nu\in[0,1]} \|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t)\|_{C^{1+\sigma_t-2/p}} < +\infty. \tag{5.49}$$

D'un autre côté, on a

$$X_{0,\lambda,h}(x,D)\psi_\nu(t) - X_{0,\lambda,h}(x,D)\psi(t) = \mathrm{div}\Big(X_{0,\lambda,h}\psi_\nu(t) - X_{0,\lambda,h}\psi(t)\Big) - \big(\psi_\nu(t,x)-\psi(t,x)\big)\mathrm{div}X_{0,\lambda,h}.$$

Ce qui implique que

$$\|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t) - X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi(t)\|_{C^{-1}} \leq \widetilde{\|X_{0,\lambda,h}\|}_{L^\infty}\|\psi_\nu(t)-\psi(t)\|_{L^\infty}.$$

Or, on sait que dans le cas des solutions de Yudovich le flot visqueux converge uniformément vers le flot eulérien. De façon plus précise, on a pour tout $T \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|\psi_\nu - \psi\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)} = 0.$$

La preuve de ce résultat est basée sur le résultat de convergence L^2 de $v_\nu - v$ vers zéro, établi dans [4]. Ceci implique par interpolation la convergence L^∞. Ensuite on applique le lemme d'Osgood profitant de l'uniformité par rapport à ν de la norme de v_ν dans C_{LL}.

En conséquence de la convergence uniforme du flot visqueux, nous déduisons alors la convergence non visqueuse de $X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t)$ dans l'espace C^{-1} Ainsi par un argument d'interpolation, on déduit, ponctuellement en temps, la convergence forte dans l'espace $C^{1+\sigma_t-2/p-\eta}$, pour tout η strictement positif. Nous obtenons encore

$$\lim_{\nu\to 0^+} \|X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi_\nu(t) - X_{0,\lambda,h}(\cdot,D)\psi(t)\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)} = 0.$$

Concernant la convergence de $X^\nu_{t,\lambda,h}$ vers $X_{t,\lambda,h}$, nous procédons comme suit. Nous avons, d'après la proposition 6, l'uniformité par rapport à ν du contrôle de $X^\nu_{t,\lambda,h}$ dans $C^{1+\sigma_t-2/p}$ et d'un autre côté, nous avons par (5.36)

$$\begin{aligned}
&\| X^\nu_{t,\lambda,h} - X_{t,\lambda,h}\|_{L^\infty} \leq \\
&\quad\leq \|X^\nu_{t,\lambda,h}(\psi_\nu) - X_{t,\lambda,h}(\psi)\|_{L^\infty} + \|X_{t,\lambda,h}(\psi_\nu) - X_{t,\lambda,h}(\psi)\|_{L^\infty},\\
&\quad\leq \|X^\nu_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi_\nu - X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi\|_{L^\infty} + \|X_{t,\lambda,h}(\psi_\nu) - X_{t,\lambda,h}(\psi)\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons alors la convergence à l'aide de la première partie et de la convergence uniforme du flot visqueux. Par interpolation nous trouvons la convergence dans $C^{1+\sigma_t-2/p-\eta}$, pour tout réel $\eta>0$. Nous avons encore la convergence dans $\mathcal{C}^0$ localement en temps. Par contre la convergence de $\mathrm{div}X^{\nu}_{t,\lambda,h}$ vers $\mathrm{div}X_{t,\lambda,h}$ se déduit à partir du résultat précédent interpolé avec l'uniformité par rapport à ν du contrôle dans $C^{1+\sigma_t-2/p}$,

Remarque : Nous avons supposé implicitement le long du calcul qu'on a effectué dans les sections précédentes que la vitesse est suffisamment régulière. Ainsi en toute rigueur, il conviendrait de régulariser la donnée initiale et de montrer que les estimations correspondant à la solution régulière sont aussi valables pour la solution limite. Ce travail a été en fait déjà fait dans le chapitre 9 de [3] ou encore dans [10].

6. Appendice

6.1. Autour de la théorie pseudo-locale de Littlewood-Paley

Ce paragraphe est consacré à l'élaboration de quelques lemmes techniques abordant certains aspects pseudo-locaux de la théorie de Littlewood-Paley. Ils constituent, comme nous l'avons constaté, un ingrédient fondamental dans la preuve du théorème 2. Ils ont été démontrés dans les espaces de Hölder [3] et que nous allons généraliser par les mêmes techniques dans les espaces de Besov. Le premier lemme qu'on va donner n'est autre que le lemme 9.2.1 de [3].

Lemme 9. *Il existe une constante C telle que, si K est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ et si u est une fonction valant zéro en dehors de K, alors pour tout $h\in(0,e^{-1}]$ et pour tout $q\in\mathbb{N}$*

$$\|S_{q-1}u\|_{L^\infty}\le C(q+2)\|u\|_L \quad \textit{et} \quad \|S_{q-1}u\|_{L^\infty(K^c_h)}\le C\|u\|_L(-\log h).$$

Le lemme que nous allons énoncer généralise le lemme 9.2.2 abordé dans [3] et qui traite le cas $p=+\infty$. La preuve est une légère adaptation de la méthode utilisée par J.-Y. Chemin.

Lemme 10. *Pour tout entier N et pour tout réel s, il existe une constante C telle que, pour tout $p\in[1,+\infty]$, pour tout fermé K et pour toute distribution u supportée dans K et appartenant à $u\in B^r_p$, on a*

$$\|S_{q-1}u\|_{L^p(K^c_h)}\le C\,2^{-qs}(2^qh)^{-N}\|u\|_{B^s_p}.$$

Ceci étant pour tout couple (q,h) tel que $2^qh\ge 1$.

Démonstration : Soit ρ une fonction appartenant à $\mathcal{D}(B(0,1))$ valant 1 dans $B(0,\frac{1}{2})$. Comme pour tout $x \in K_h^c$ et pour tout $y \in K$ on a $\rho\big(\frac{x-y}{h}\big) = 0$, alors

$$S_{q-1}u(x) = 2^{qd} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(2^q(x-y))(1-\rho)\Big(\frac{2^q(x-y)}{2^q h}\Big)u(y)dy.$$

Posons

$$\mu = 2^q h, \quad h^\mu(x) = \tilde{h}(x)(1-\rho)(\frac{x}{\mu}) \quad \text{et} \quad h_q^\mu(x) = 2^{qd} h^\mu(2^q x).$$

La fonction h^μ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et son support est inclus dans $\{|x| \geq \frac{\mu}{2}\}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et pour tout couple (N,M), il existe une constante $C_{N,M,\alpha}$ telle que,

$$\||\cdot|^M \partial^\alpha h^\mu\|_{L^1} \leq C_{N,M,\alpha}\, \mu^{-N}. \tag{6.1}$$

L'égalité de convolution ci-dessus se réécrit

$$S_{q-1}u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h_q^\mu(x-y)u(y)dy. \tag{6.2}$$

Nous pouvons écrire grâce à (6.2) que pour tout élément x n'appartenant pas à K

$$S_{q-1}u(x) = 2^{qd} \int_{\mathbb{R}^d} h^\mu(2^q(x-y))(u(y)-u(x))dy. \tag{6.3}$$

En décomposant u en basses et en hautes fréquences, alors on trouve que pour tout $x \notin K$

$$\begin{aligned} S_{q-1}u(x) &= \sum_{j=1}^{3} I_q^j(x) \quad \text{avec,} \\ I_q^1(x) &= \ (h_q^\mu \star (\mathrm{Id} - S_q)u)(x) \\ I_q^2(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} h_q^\mu(y)\big(S_q u(x-y) - S_q u(x)\big)dy \\ I_q^3(x) &= -(\mathrm{Id} - S_q)u(x) \int_{\mathbb{R}^d} h^\mu(y)dy. \end{aligned}$$

Occupons-nous dans un premier temps de l'estimation de I_q^1. Alors en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley, on trouve

$$I_q^1(x) = \Big(\sum_{\substack{p \geq q \\ i \in \{\mp 1, 0\}}} \Delta_p h_q^\mu \star \Delta_{p-i}(\mathrm{Id} - S_q)u\Big)(x).$$

Ainsi l'inégalité de convolution donne

$$\|I_q^1\|_{L^p} \leq C\|u\|_{B_p^s} \sum_{p\geq q} 2^{-ps}\|\Delta_p h_q^\mu\|_{L^1}.$$

Comme q est positif, alors le lemme de Bernstein nous assure que

$$\|I_q^1\|_{L^p} \leq C\|u\|_{B_p^s} \sum_{\substack{p\geq q\\ |\alpha'|=|\alpha|}} 2^{-ps}2^{-p|\alpha|}\|\Delta_p \partial^{\alpha'} h_q^\mu\|_{L^1}.$$

Or, par l'inégalité (6.1), nous aurons

$$\|\partial^{\alpha'} h_q^\mu\|_{L^1} = 2^{q|\alpha|}\|\partial^{\alpha'} h^\mu\|_{L^1} \leq C_{N,\alpha}\mu^{-N}2^{q|\alpha|}. \tag{6.4}$$

Par suite

$$\|I_q^1\|_{L^p} \leq C_{N,\alpha}\mu^{-N}2^{-qs}\|u\|_{B_p^s} \sum_{p\geq q} 2^{(q-p)(s+|\alpha|)}.$$

Alors il suffit de prendre α de façon à ce que $|\alpha| + s > 0$.

Si s est strictement négatif alors la majoration de la somme $I_q^2 + I_q^3$ est immédiate. En effet pour $x \notin K$, on a

$$I_q^2(x) + I_q^3(x) = h_q^\mu \star S_q u(x).$$

En conséquence, on trouve grâce à (6.4), avec $\alpha = 0$,

$$\|I_q^2 + I_q^3\|_{L^p(K^c)} \leq C_{N,s}\mu^{-N}2^{-qs}\|u\|_{B_p^s}.$$

Ainsi nous obtenons pour tout $s < 0$

$$\|S_{q-1}u\|_{L^p(K_h^c)} = \|h_q^\mu \star u\|_{L^p(K_h^c)} \leq C_{N,s}\mu^{-N}2^{-qs}\|u\|_{B_p^s}. \tag{6.5}$$

Quant aux indices positifs s, nous allons commencer par l'identité

$$|\xi|^{2([s]+1)} = \sum_{|\alpha|=[s]+1} (i\xi)^\alpha (i\xi)^\alpha.$$

Donc il existe des fonctions g_α appartenant à $\mathcal{S}$ telles que pour $q \in \mathbb{N}$

$$\Delta_q u = 2^{-q|\alpha|} \sum_{|\alpha|=[s]+1} 2^{qd} g_\alpha(2^q\cdot) \star \partial^\alpha u.$$

Or le support de $\partial^\alpha u$ est inclus dans K. Par conséquent, en réappliquant le résultat de (6.5) avec $s - [s] - 1$ nous trouvons

$$\|\Delta_q u\|_{L^p(K_h^c)} \leq C_{N,s}2^{-qs}\big(2^q h\big)^{-N}\|u\|_{B_p^s}. \tag{6.6}$$

Ainsi nous en déduisons que pour s positif

$$\|I_q^3\|_{L^p(K_h^c)} \leq C_{N,s}\|h^\mu\|_{L^1}h^{-N}\|u\|_{B_p^s}\sum_{p\geq q}2^{-p(s+N)} \leq C_{N,s}2^{-qs}\mu^{-N}\|u\|_{B_p^s}.$$

Le dernier passage est vrai pour tout N strictement positif. Il reste à prouver une estimation similaire pour I_q^2 dans le cas où $s \in \mathbb{R}_+$. Pour ce faire, on écrit pour tout $x \notin K$

$$S_q\partial^\alpha u(x) \quad = \quad S_q\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x) = \sum_{p\geq q}\partial^\alpha \Delta_p u.$$

Il s'ensuit alors grâce à (6.6)

$$\|S_q\partial^\alpha u\|_{L^p(K_h^c)} \leq C_{N,\alpha}2^{q(|\alpha|-s)}(2^q h)^{-N}\|u\|_{B_p^s}. \tag{6.7}$$

La formule de Taylor à l'ordre $[s]+1$ donne

$$\begin{aligned}S_qu(y) - S_qu(x) = &\sum_{|\alpha|\leq[s]}\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha S_q u(x)+\\ &+([s]+1)\sum_{|\alpha|=[s]+1}\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{[s]}\partial^\alpha S_q u(x+t(y-x))dt.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|I_q^2(x)| \leq \sum_{|\alpha|\leq[s]}C_\alpha 2^{-q|\alpha|}\big\||\cdot|h^\mu\big\|_{L^1}|\partial^\alpha S_q u(x)| + J_q^2(x), \tag{6.8}$$

avec

$$J_q^2(x)=2^{qd}\sum_{|\alpha|=[s]+1}C_\alpha\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}|x-y|^{|\alpha|}|h^\mu|(2^q(x-y))|\partial^\alpha S_q u|(x+t(y-x))dydt.$$

En faisant le changement de variables $z=y-x$ et en prenant la norme L^p, alors on trouve par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\|J_q^2\|_{L^p} \quad &\leq \quad C_\alpha 2^{qd}\sup_{|\alpha|=[s]+1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}|z|^{|\alpha|}|h^\mu|(2^q z)\|\partial^\alpha S_q u(\cdot+tz)\|_{L^p}dzdt\\ &\leq \quad C_\alpha 2^{-q|\alpha|}\||\cdot|^\alpha h^\mu\|_{L^1}\|\partial^\alpha S_q u\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Par suite, en se servant des inégalités (6.1) et (6.6), on trouve l'estimation voulue.

Lemme 11. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $s \in \mathbb{R}$. On se donne un ensemble fermé Σ et une distribution tempérée $f \in B_p^s$ tels que $h = \text{dist}\,(\text{supp} f, \Sigma)$ appartient à $(0, e^{-1}]$. Alors il existe une constante absolue C telle qu'on ait*

$$\begin{aligned} \|T_u f\|_{B_p^s} &\leq C(-\log h)\|u\|_{LL(\Sigma)}\|f\|_{B_p^s} \\ \|[\Delta_q, T_u]f\|_{L^p} &\leq C(-\log h)2^{-q(s+1)}\|\nabla u\|_{LL^0(\Sigma)}\|f\|_{B_p^s}. \end{aligned}$$

Démonstration : La preuve de la première estimation est fondée sur une estimation L^p de $S_{q-1}u\,\Delta_q f$. Pour ce faire, nous distinguons tout d'abord un cas simple, celui des basses fréquences. Si $q \leq -\log_2 h$, alors nous aurons par le biais du lemme 9

$$\|S_{q-1}u\|_{L^\infty} \leq C(q+2)\|u\|_L \leq C(-\log h)\|u\|_L.$$

En conséquence, nous aurons

$$\|S_{q-1}u\Delta_q f\|_{L^p} \leq C(-\log h)2^{-qs}\|u\|_L\|f\|_{B_p^s}.$$

Dans le cas $2^q h \geq 1$, nous faisons la décomposition suivante

$$S_{q-1}u\Delta_q f = \sum_{j=1}^{3} T_{q,h}^j(u,\, f), \tag{6.9}$$

avec

$$\begin{aligned} T_{q,h}^1(u,\, f) &= S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}^c}u)\Delta_q f, \\ T_{q,h}^2(u,\, h) &= S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\mathbf{1}_{\Sigma_{3h/4}^c}\Delta_q f \quad \text{et} \\ T_{q,h}^3(u\, f) &= S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\mathbf{1}_{\Sigma_{3h/4}}\Delta_q f. \end{aligned}$$

Pour l'estimation du premier terme, on utilise le fait que $u \in L(\Sigma)$ et l'uniformité en q de la norme de S_{q-1} comme étant un opérateur de $\mathcal{L}(L^\infty)$, et l'on trouve

$$\|S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}^c}u)\|_{L^\infty} \leq C\|\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}^c}u\|_{L^\infty} \leq C(-\log h)\|u\|_{L(\Sigma)}.$$

Concernant l'estimation de $T_{q,h}^2(u,\, f)$, nous nous servons du lemme 9, qui implique

$$\|S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\|_{L^\infty(\Sigma_{3h/4}^c)} \leq C(-\log h)\|\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u\|_L \leq C(-\log h)\|u\|_L.$$

L'estimation de $T_{q,h}^3(u,\, f)$ est plus délicate et c'est justement dans cet endroit que nous ferons appel à l'hypothèse sur le support de f. En utilisant l'inégalité de Bernstein, on trouve pour tout $b \geq a$,

$$\|S_{q-1}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\|_{L^\infty} \leq Cb2^{\frac{qd}{b}}\|\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u\|_L \leq Cb2^{\frac{qd}{b}}\|u\|_L.$$

D'un autre côté, comme supp $f \subset \Sigma^c_{3h/4}$, alors le lemme 10 nous assure que

$$\forall N,\ \exists\, C_N / \ \|\Delta_q f\|_{L^p(\Sigma_{3h/4})} \leq C_N 2^{-qs}(2^q h)^{-N}\|f\|_{B^s_p}.$$

Ainsi nous montrons que

$$\begin{aligned}\|T^3_{q,h}(u,\, f)\|_{L^p} &\leq C_N b 2^{\frac{qd}{b}} 2^{-qs}(2^q h)^{-N}\|u\|_L\|f\|_{B^s_p}\\ &\leq C_N b 2^{-qs} h^{-\frac{d}{b}}(2^q h)^{\frac{d}{b}-N}\|u\|_L\|f\|_{B^s_p}.\end{aligned}$$

En choisissant $b = -a \log h$, alors on trouve

$$\|T^3_{q,h}(u,\, f)\|_{L^p} \leq C_N(-\log\, h)2^{-qs}(2^q h)^{-\frac{d}{a\log\, h}-N}\|u\|_L\|f\|_{B^s_p}.$$

Or $h \in (0, e^{-1}]$ et $a \geq 1$. Donc il s'ensuit

$$-\frac{d}{a\log\, h} \leq d.$$

Ainsi il suffit de prendre $N = d$, pour déduire dans le cas $2^q h \geq 1$ que

$$\|T^3_{q,h}(u,\, f)\|_{L^p} \leq C(-\log\, h)2^{-qs}\|u\|_L\|f\|_{B^s_p}.$$

Par suite la preuve de la première partie du lemme est achevée.

Pour la seconde partie, nous écrivons

$$[\Delta_q,\, T_u]f = \sum_{|q-q'|\leq N_0}[\Delta_q,\, S_{q'-1}(u)]\Delta_{q'}f.$$

Or en écrivant l'opérateur Δ_q comme une convolution, on trouve

$$\begin{aligned}C_{q,q'}(u,f) &\overset{déf}{=} [\Delta_q,\, S_{q'-1}(u)]\Delta_{q'}f\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\big((S_{q'-1}u)(x-2^{-q}y) - S_{q'-1}u(x)\big)\tilde{h}_1(y)\big(\Delta_{q'}f\big)(x-2^{-q}y)dy.\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned}C_{q,q'}(u,f) &= -2^{-q}\sum_{j=1}^{d} S_{q'-1}\partial_j u(x)\int_{\mathbb{R}^d} y_j\tilde{h}_1(y)\big(\Delta_{q'}f\big)(x-2^{-q}y)dy\, +\\ &+\ 2^{-2q}\sum_{|\alpha|=2}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} y^\alpha\tilde{h}_1(y)\big(\partial^\alpha S_{q'-1}u\big)(x-t2^{-q}y)\big(\Delta_{q'}f\big)(x-2^{-q}y)dydt\\ &\overset{déf}{=} C^1_{q,q'}(u,f) + C^2_{q,q'}(u,f).\end{aligned}$$

Posons $\varphi_j = -i\partial_j\varphi$. On rappelle que φ est la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ définissant l'opérateur Δ_q par $\Delta_q = \varphi(2^{-q}D)$. En conséquence

$$S_{q'-1}\partial_j u(x)\int_{\mathbb{R}^d} y_j\tilde{h}_1(y)\big(\Delta_{q'}f\big)(x-2^{-q}y)dy = S_{q'-1}\partial_j u(x)\varphi_j(2^{-q}D)\Delta_{q'}f.$$

Or en appliquant le résultat fourni par la première partie du lemme modulo une légère modification de la preuve : on remplace dans (6.9) la quantité $\Delta_{q'}f$ par $\varphi_j(2^{-q}D)\Delta_{q'}$. Alors on trouve

$$\|S_{q'-1}\partial_j u(x)\varphi_j(2^{-q}D)\Delta_{q'}f\|_{L^p} \leq C(-\log\, h)2^{-q's}\|\nabla u\|_{L(\Sigma)}\|f\|_{B^s_p}.$$

En conséquence, on aura

$$\|C^1_{q,q'}(u,f)\|_{L^p} \leq C(-\log\, h)2^{-q(s+1)}\|\nabla u\|_{L(\Sigma)}\|f\|_{B^s_p}. \tag{6.10}$$

pour le second terme, on utilise une simple inégalité de convolution qui donne

$$\|C^2_{q,q'}(u,f)\|_{L^p} \leq C2^{-2q}\sum_{|\alpha|=2}\|S_{q'-1}\partial^\alpha u\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}f\|_{L^p}.$$

Or, il est facile de voir que pour $|\alpha| = 2$ on a

$$\|S_{q'-1}\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C2^q\|\nabla u\|_{C^0_*}.$$

Par suite

$$\Big\|\sum_{|q'-q|\leq 4} C^2_{q,q'}\Big\|_{L^p} \leq C2^{-q(1+s)}\|\nabla u\|_{C^0_*}\|f\|_{B^s_p}. \tag{6.11}$$

Nous déduisons alors à l'aide de (6.10) et (6.11) le résultat souhaité. ∎

Nous allons déduire de ce lemme une estimation sur le commutateur.

Corollaire 1. *Soient $p \in [1,+\infty]$, $s \in]-1,1[$ et u un champ de vecteurs de divergence nulle. On se donne un ensemble fermé Σ et une distribution tempérée $f \in B^s_p$ tels que $h = \operatorname{dist}\,(\operatorname{supp} f, \Sigma)$ appartient à $]0, e^{-1}]$. Alors il existe une constante universelle C telle qu'on ait*

$$\|[\Delta_q, u\cdot\nabla]f\|_{L^p} \leq \frac{C}{1-s^2}(-\,\log\, h)\,2^{-qs}\|\nabla u\|_{LL^0(\Sigma)}\|f\|_{B^s_p}.$$

Preuve : Il suffit d'après le lemme (11) de montrer que

$$\big\|[\Delta_q, u\cdot\nabla]f - [\Delta_q, T_u\cdot\nabla]f\big\|_{L^p} \leq \frac{C}{1-s^2}2^{-qs}\|\nabla u\|_{C^0_*}\|f\|_{B^s_p}. \tag{6.12}$$

Pour démontrer cette estimation nous allons faire usage du calcul para-différentiel. Alors on peut écrire

$$[\Delta_q, u\cdot\nabla]f - [\Delta_q, T_u\cdot\nabla]f = [\Delta_q, T_{\nabla\cdot}\cdot u]f - [\Delta_q, R(u,\nabla\cdot)]f.$$

Pour estimer le premier terme, on écrit par définition du paraproduit

$$[\Delta_q, T_{\nabla}.u]f = \sum_{|q'-q|\leq 4}[\Delta_q, \Delta_{q'}u\cdot S_{q'-1}\nabla]f.$$

Comme dans cette somme $q'\in\mathbb{N}$, alors on peut déduire en vertu du lemme de Bernstein que,

$$\begin{aligned}\|S_{q'-1}u\cdot\nabla f\,\Delta_{q'}u\|_{L^p} &\leq C2^{-q'}\|S_{q'-1}\nabla f\|_{L^p}\|\Delta_{q'}\nabla u\|_{L^\infty}\\ &\leq C\|\nabla u\|_{C^0_*}\|f\|_{B^s_p}2^{-q}\sum_{p\leq q}2^{p(1-s)}\\ &\leq \frac{C}{1-s}\|\nabla u\|_{C^0_*}2^{-qs}\|f\|_{B^s_p}.\end{aligned}$$

Ceci permet de retrouver pour $s<1$

$$\big\|[\Delta_q, T_{\nabla}.u]f\big\|_{L^p} \leq \frac{C}{1-s}2^{-qs}\|\nabla u\|_{C^0_*}\|u\|_{B^s_p}. \tag{6.13}$$

En ce qui concerne le terme de reste, nous allons utiliser la condition de divergence nulle qui implique

$$[\Delta_q, R(u^j,\partial_j)]f = \sum_{\substack{q'\geq q-N_0\\ i\in\{\mp1,0\}}}[\partial_j\Delta_q, \Delta_{q'}u]\Delta_{q'-i}f.$$

Or en développant le commutateur et en procédant à un simple calcul utilisant le lemme de Bernstein on trouve pour tout $q'\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\big\|[\partial_j\Delta_q, \Delta_{q'}u]\Delta_{q'-i}f\|_{L^p} &\leq C2^q\|\Delta_{q'}u\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'-i}f\|_{L^p}\\ &\leq C2^{-q'(1+s)}2^{-q}\|\nabla u\|_{C^0_*}\|f\|_{B^s_p}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Si $q'=-1$ et $i\in\{\mp1,0\}$ alors on utilise l'estimation

$$\big\|[\Delta_q, \Delta_{-1}u]\partial_j\Delta_i f\big\|_{L^p} \leq C2^{-q}\|\Delta_{-1}\nabla u\|_{L^\infty}\|\Delta_i f\|_{L^p}. \tag{6.15}$$

Ainsi en combinant (6.14) et (6.15) on trouve que pour tout $s>-1$

$$\big\|[\Delta_q, R(u^j,\partial_j)]f\big\|_{L^p} \leq \frac{C}{1+s}2^{-qs}\|\nabla u\|_{C^0_*}\|f\|_{B^s_p}. \tag{6.16}$$

Donc en combinant (6.13) et (6.16) on parvient alors à l'estimation (6.12).

6.2. Application

Comme application des résultats du paragraphe précédent, on a

Lemme 12. *Il existe une constante C vérifiant les propriétés suivantes. Soient $s, r \in]0,1[$, $p \in [1,+\infty]$ et Σ un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$. On se donne un champ de vecteurs X qui appartient, ainsi que sa divergence, à B_p^s et supporté dans Σ_h^c. Soit v un champ de vecteurs tel que son rotationnel est borné et son gradient est dans $LL(\Sigma)$. Alors pour tout $q \geq -1$*

$$\begin{aligned}\|\Delta_q X(x,D)v\|_{L^p} &\leq C2^{-q}\|\Delta_q X(x,D)\omega\|_{L^p} + \frac{C}{r}2^{-qr}\|\mathrm{div}X\|_{B_p^r}\|\omega\|_{C_*^0}\\ &\quad + \frac{C}{1-s}2^{-qs}\|X\|_{B_p^s}\Big(\|\omega\|_{C_*^0} + \|\nabla v\|_{LL(\Sigma)}(-\log\, h)\Big).\end{aligned}$$

Démonstration : La preuve suit de près celle du corollaire 9.2.1 du [3]. Elle est basée sur la décomposition suivante qu'on trouve dans le lemme 3.3.2 du même ouvrage

$$X(x,D)v = \sum_{i=1}^{5} V_i$$

avec

$$\begin{aligned} V_1 &= (\mathrm{Id} - \Delta_{-1})\nabla^\perp \Delta^{-1} X(x,D)\omega,\\ V_2 &= \sum_{j=1}^{2}[T_{X^j}, \nabla^\perp\Delta^{-1}]\partial_j\omega,\\ V_3 &= (\mathrm{Id} - \Delta_{-1})\nabla^\perp\Delta^{-1}R(\omega,\ \mathrm{div}X),\\ V_4 &= = -(\mathrm{Id} - \Delta_{-1})\nabla^\perp\Delta^{-1}\sum_{j=1}^{2}\big(T_{\partial_j\omega}X^j + \partial_j R(\omega, X^j)\big) \quad \text{et}\\ V_5 &= \sum_{j=1}^{2}\big(T_{\partial_j v}X^j + R(\partial_j v, X^j)\big). \end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire

$$X(x,D)v = \sum_{i=1}^{3} W_i(X,v) + \sum_{j=1}^{2} T_{\partial_j v}X^j. \tag{6.17}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} W_1(X,v) &= V_1\\ W_2(X,v) &= V_2 + V_4 + V_5 - \sum_{j=1}^{2} T_{\partial_j v}X^j \quad \text{et}\\ W_3(X,v) &= V_3. \end{aligned}$$

Pour estimer W_1, il suffit d'utiliser le lemme de Bernstein qui implique l'existence d'une constante C telle que pour tout $p \geq 1$ et pour tout $q \geq -1$

$$\|\Delta_q V_1\|_{L^p} \leq C 2^{-q} \|\Delta_q X(x,D)\omega\|_{L^p}. \tag{6.18}$$

Le terme W_3 s'estime comme suit

$$\begin{aligned} \|\Delta_q V_3\|_{L^p} &\leq C\|\mathrm{div} X\|_{B^r_p} 2^{-q} \sum_{q' \geq q - N_0} 2^{-q'r} \\ &\leq \frac{C}{r} 2^{-qr} \|\mathrm{div}\ X\|_{B^r_p}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Un calcul analogue montre que

$$\|W_2(X,v) - V_2\|_{B^s_p} \leq \frac{C}{s} \|X\|_{B^s_p}. \tag{6.20}$$

Par contre l'estimation de V_2 est plus délicate. Nous avons

$$V_2 = \sum_{\substack{q' \in \mathbb{N} \\ j \in \{1,2\}}} [S_{q'-1} X^j, \nabla^\perp \Delta^{-1}] \Delta_{q'} \partial_j \omega \overset{déf}{=} \sum_{\substack{q' \in \mathbb{N} \\ j \in \{1,2\}}} T_{j,q'}. \tag{6.21}$$

Or le fait que le spectre fréquenciel de $T_{j,q'}$ est supporté dans une couronne de taille $2^{q'}$ nous assure l'existence d'une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ supportée dans une couronne fixe telle qu'on ait

$$T_{j,q'} = 2^{-q'} [S_{q'-1} X^j, \psi(2^{-q'} D)] \Delta_{q'} \partial_j \omega.$$

Soit ϕ l'élément de $\mathcal{S}$ correspondant à la transformée de Fourier inverse de ψ. Alors en écrivant l'opérateur $\psi(2^{-q'}D)$ comme une convolution, on parvient à l'expression

$$2^{q'} T_{j,q'}(x) = 2^{2q'} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(2^{q'} y) \Delta_{q'} \partial_j \omega(x-y) \big(S_{q'-1} X^j(x) - S_{q'-1} X^j(x-y) \big) dy.$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 on trouve

$$2^{q'} T_{j,q'}(x) = -2^{2q'} \sum_{i=1}^{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \phi(2^{q'} y) \Delta_{q'} \partial_j \omega(x-y) y^i \partial_i S_{q'-1} X^j(x-ty) dy dt.$$

Par suite, il vient

$$\begin{aligned} &2^{q'} |T_{j,q'}(x)| \leq \\ &\leq C \|\nabla \Delta_{q'} \omega\|_{L^\infty} 2^{2q'} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \big| y \phi(2^{q'} y) \nabla S_{q'-1} X^j(x-ty) \big| dy dt. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Ainsi en utilisant l'inégalité triangulaire et l'invariance par translation des normes L^p, on trouve

$$\begin{aligned} \|T_{j,q'}\|_{L^p} &\leq C\||\cdot|\phi\|_{L^1}2^{-2q'}\|\nabla\Delta_{q'}\omega\|_{L^\infty}\|\nabla S_{q'-1}X^j\|_{L^p} \\ &\leq C2^{-q'}\|\omega\|_{C^0_*}\|\nabla S_{q'-1}X^j\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Donc en reportant (6.23) dans (6.21) on trouve, vu que $s<1$

$$\begin{aligned} \|\Delta_q V_1\|_{L^p} &\leq \sum_{|q'-q|\leq 4}\|T_{j,q'}\|_{L^p} \\ &\leq C\|\omega\|_{C^0_*}\|X\|_{B^s_p}\sum_{\substack{|q'-q|\leq 4 \\ p\leq q-2}} 2^{-q}2^{p(1-s)} \\ &\leq \frac{C}{1-s}2^{-qs}\|\omega\|_{C^0_*}\|X\|_{B^s_p}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Ceci achève les estimations des $W_i(X,v)$. Concernant le terme $T_{\partial_j v}X^j$ nous utilisons tout simplement le lemme 11, qui implique

$$\|T_{\partial_j v}X^j\|_{B^s_p} \leq -C(\log h)\|\nabla v\|_{LL(\Sigma)}\|X\|_{B^s_p}.$$

Ainsi la preuve du lemme 12 est achevée.

Références

[1] Bony, J.-M. : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **14** (1981), 209–246.

[2] Bahouri, H. and Chemin, J.-Y. : Equations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides. *Arch. Rational Mech. Anal.* **127** (1994), 159–181.

[3] Chemin, J.-Y. : *Perfect incompressible fluids.* Translated from the 1995 french original by Isabelle Gallagher and Dragos Iftimie. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **14**. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[4] Chemin, J.-Y. : A remark on the inviscid limit for two-dimensional incompressible fluids. *Comm. Partial Differential Equations* **21** (1996), 1771–1779.

[5] Chemin, J.-Y. : Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel. *J. Anal. Math.* **77** (1999), 27–50.

[6] Constantin, P. and Wu, J. : The inviscid limit for non-smooth vorticity. *Indiana Univ. Math. J.* **45** (1996), 67–81.

[7] Hmidi, T. : Transport-diffusion et viscosité évanescente. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **337** (2003), 309–312.

[8] Hmidi, T. : Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses. *J. Math. Pures Appl. (9)* **84** (2005), 1455–1495.

[9] Danchin, R. : Poches de tourbillon visqueuses. *J. Math. Pures Appl. (9)* **76** (1997), 609–647.

[10] Danchin, R. : Évolution temporelle d'une poche de tourbillon singulière. *Comm. Partial Differential Equations* **22** (1997), 685–721.

[11] Danchin, R. : Évolution d'une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon. *Rev. Mat. Iberoamericana* **16** (2000), 281–329.

[12] Planchon, F. : Sur une inégalité de type Poincaré. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math* **330** (2000), 21–23.

[13] Majda, A. : Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow. *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), no. S, suppl., S187–S220.

[14] Vishik, M. : Hydrodynamics in Besov Spaces. *Arch. Ration. Mech. Anal* **145** (1998), 197–214.

[15] Yudovich, V.I. : Non-stationnary flows of an ideal incompressible fluid. *Zh. Vychisl. Mat. Fiz.* (1963), no. 3, 1032-1066.

Recibido: 9 de marzo de 2004

Taoufik Hmidi
Campus de Beaulieu
263, Avenue du Général Leclerc
CS 74205
35042 Rennes Cedex, France
thmidi@univ-rennes1.fr