UN THÉOREME DE RÉALISATION DE GROUPES RÉTICULÉS

P. Ribenboim

En 1939, Lorenzen [4] a demontré que tout groupe réticulé est isomorphe à un sous-groupe sous-réticulé d'un produit direct de groupes totalement ordonnés. Pour le faire, il a utilisé la théorie des systèmes d'idéaux, introduite auparavant par Krull [2] dans l'arithmétique des anneaux d'intégrité commutatifs.

Dans cette note, nous démontrons ce même théorème par une methode distincte, qui utilise la notion de filet de Jaffard [1]. Notre démonstration semble plus transparente et met en relief certains aspects d'intérêt qui ne sont pas du tout apparents dans le travail de Lorenzen: (1) la réalisation qui nous obtenons est complètement régulière, de Hausdorff et fidèle (ces termes sont définis ci-dessous); (2) il y a une relation entre les ultrafiltres de l'ensemble des filets du groupe donné et les pré-ordres totaux plus fins, laquelle est utile pour exprimer l'ordre donné comme la conjonction d'ordres totaux plus fins (cf. Krull [3], Ribenboim [5, 6]).

1. Rappelons d'abord les définitions et résultats qui seront utilisés. Soit G un groupe (abélien additif) réticulé (selon l'ordre $\leqq$) et notons P l'ensemble des éléments positifs de G; G est un réticulé distributif. Si $f \in P$ soit $E(f) = \{g \in P \mid g \wedge f = 0\}$ l'ensemble des éléments de P étrangers à f. Posons $f \equiv g$ si et seulement si $E(f) = E(g)$. La classe d'équivalence $\bar{f}$ contenant l'élément $f \in P$ s'appelle le *filet* de f. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des filets du groupe G, determinés par les éléments $f \in P$. $\mathscr{F}$ est ordonné en posant $\bar{f} \leqq \bar{g}$ si et seulement si $E(f) \supseteq E(g)$; $\mathscr{F}$ possède un premier élément $\bar{0} = \{0\}$; si $f, g \in P, f \leqq g$ alors $\bar{f} \leqq \bar{g}$; $\mathscr{F}$ est un réticulé distributif:

$$\bar{f} \wedge \bar{g} = \overline{f \wedge g}, \bar{f} \vee \bar{g} = \overline{f \vee g} = \overline{f+g};$$

on a $\bar{f} \wedge \bar{g} = \bar{0}$ si et seulement si $f \wedge g = 0$; $\mathscr{F}$ est disjonctif: si $\bar{f}, \bar{g} \in \mathscr{F}$ $\bar{f}$ ne suit pas $\bar{g}$ dans $\mathscr{F}$, il existe $\bar{h} \in \mathscr{F}$ tel que $\bar{0} \neq \bar{h} \leqq \bar{g}, \bar{h} \wedge \bar{f} = \bar{0}$.

Si $f \in G$ (mais non nécessairement $f \in P$) posons par définition: $\bar{f} = \bar{f_+} \vee \bar{f_-}$, donc $\bar{f} = \overline{|f|}$, où $|f| = f_+ + f_- \in P$.

Soit $(G_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de groupes totalement ordonnés, $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ leur produit direct ordonné; un isomorphisme θ d'un groupe ordonné G dans $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ s'appelle une *réalisation* lorsque $pr_\iota \theta(G) = G_\iota$ quelque soit $\iota \in I$. Par un théoréme de Lorenzen-Dieudonné, un groupe ordonné G admet une réalisation si et seulement s'il vérifie la condition suivante: si $f \in G$

Received March 16, 1959.

et $nf \geqq 0$, où n est un entier strictement positif, alors $f \geqq 0$. En particulier, tout groupe réticulé satisfait cette condition et admet alors une réalisation.

La réalisation $\theta : G \to \theta(G) \subseteq \prod_{\iota \in I} G_\iota$ est dite *concordante* (ou propre) lorsque $\theta(G)$ est un sous-réticulé de $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ (la réalisation obtenue dans la démonstration du théorème de Lorenzen-Dieudonné n'est pas concordante).

Si $f \in G$ notons $\sigma(f) = \{\iota \in I \mid pr_\iota \theta(f) \neq 0\}$. Alors $\sigma(f \vee g) = \sigma(f) \cup \sigma(g)$, $\sigma(f \wedge g) = \sigma(f) \cap \sigma(g)$ lorsque θ est une réalisation concordante.

La réalisation $\theta : G \to \theta(G) \subseteq \prod_{\iota \in I} G_\iota$ est dite *complètement régulière* lorsque: si $\iota \in I$, $f \in P$, $\iota \notin \sigma(f)$ alors il existe $g \in P$ tel que $\iota \in \sigma(g)$, $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \phi$.

La réalisation $\theta : G \to \theta(G) \subseteq \prod_{\iota \in I} G_\iota$ est dite *de Hausdorff* lorsque: si $\iota, \kappa \in I$, $\iota \neq \kappa$, il existe $f, g \in P$ tels que $\iota \in \sigma(f)$, $\kappa \in \sigma(g)$, $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \phi$.

La réalisation indiquée dans le théorème de Lorenzen-Dieudonné n'est pas complètement régulière, ni de Hausdorff.

LEMME 1. *Si θ est une réalisation concordante et complètement régulière alors θ est fidèle, c'est-à-dire: si $f, g \in P$ alors $\bar{f} = \bar{g}$ si et seulement si $\sigma(f) = \sigma(g)$; ainsi σ définit un isomorphisme du réticulé $\mathscr{F}$ des filets de G sur un sous-réticulé de celui de parties de l'ensemble I, en posant $\bar{\sigma}(f) = \sigma(\bar{f})$.*

En effet, soit $\bar{f} = \bar{g}$ et $\iota \in \sigma(g)$, $\iota \notin \sigma(f)$; alors il existe $h \in P$ tel que $\iota \in \sigma(h)$, $\sigma(h) \cap \sigma(f) = \phi$; donc $\sigma(h \wedge f) = \phi$ et $h \wedge f = 0$; or, θ étant concordante, $\iota \in \sigma(h) \cap \sigma(g) = \sigma(h \wedge g)$ donc $h \wedge g \neq 0$ et alors $\bar{f} \neq \bar{g}$, absurde! Ainsi, on a bien $\sigma(f) = \sigma(g)$.

Réciproquement, si $\sigma(f) = \sigma(g)$, si $h \in P$ est tel que $h \wedge f = 0$, alors

$$\phi = \sigma(h \wedge f) = \sigma(h) \cap \sigma(f) = \sigma(h) \cap \sigma(g) = \sigma(h \wedge g)$$

donc $h \wedge g = 0$, et vice-versa, donc $\bar{f} = \bar{g}$.

Par conséquent, si on pose $\bar{\sigma}(\bar{f}) = \sigma(f)$ alors $\bar{\sigma}(\bar{0}) = \phi$, $\bar{\sigma}(\bar{f} \vee \bar{g}) = \bar{\sigma}(\bar{f}) \cup \bar{\sigma}(\bar{g})$, $\bar{\sigma}(\bar{f} \wedge \bar{g}) = \bar{\sigma}(\bar{f}) \cap \bar{\sigma}(\bar{g})$ (où $f, g \in P$) et $\bar{\sigma}$ est bien un isomorphisme du réticulé $\mathscr{F}$ des filets de G dans celui des parties de I.

2. Thèoréme de réalisation. Tout groupe réticulé admet une réalisation concordante et complètement régulière.

Démonstration.

1°. Soit G le groupe réticulé donné, $\mathscr{F}$ le réticulé des filets de G, Ω l'ensemble des ultrafiltres de $\mathscr{F}$. Pour tout $U \in \Omega$ soit $P_U = \{f \in G \mid$ il existe $\alpha \in U$ tel que $\bar{f}_- \wedge \alpha = \bar{0}\}$. Alors $P_U + P_U \subseteq P_U$. En effet, si $f, g \in G$ et $\beta, \gamma \in U$ sont tels que $\bar{f}_- \wedge \beta = \bar{0}$, $\bar{g}_- \wedge \gamma = \bar{0}$ alors

$$\overline{(f+g)_-} \wedge (\beta \wedge \gamma) \leqq \overline{f_- + g_-} \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\overline{f_-} \vee \overline{g_-}) \wedge (\beta \wedge \gamma)$$
$$= (\overline{f_-} \wedge \beta \wedge \gamma) \vee (\overline{g_-} \wedge \beta \wedge \gamma) = \bar{0}$$

avec $\beta \wedge \gamma \in U$, donc $f + g \in P_U$. De même, $P_U \cap (-P_U) = \{f \in G \mid$ il existe $\alpha \in U$ tel que $\bar{f} \wedge \alpha = \bar{0}\}$. En effet, si $\bar{f} \wedge \alpha = \bar{0}$ alors de $\bar{f} = \bar{f}_+ \vee \bar{f}_-$ vient $\bar{0} = \bar{f} \wedge \alpha = (\bar{f}_+ \vee \bar{f}_-) \wedge \alpha = (\bar{f}_+ \wedge \alpha) \vee (\bar{f}_- \wedge \alpha)$ donc $\bar{f}_- \wedge \alpha = \bar{0}$, $\overline{(-f)_-} \wedge \alpha = \bar{f}_+ \wedge \alpha = \bar{0}$; réciproquement. Enfin, $G = P_U \cup (-P_U)$. En effet, si $f \notin P_U$ alors $\bar{f}_- \wedge \alpha \neq \bar{0}$ quelque soit $\alpha \in U$, donc $\bar{f}_+ \notin U$ (car $\bar{f}_- \wedge \bar{f}_+ = \bar{0}$) et alors il existe $\beta \in U$ tel que $\bar{0} = f_+ \wedge \beta = \overline{(-f)_-} \wedge \beta$, c'est-à-dire $-f \in P_U$.

2°. Nous venons de voir que P_U définit un pré-ordre total compatible sur G. Soit $G'_U = G/(P_U \cap (-P_U))$ et considérons $P'_U = P_U/(P_U \cap (-P_U))$ donc P'_U définit un ordre total compatible sur G'_U. Pour tout $f \in G$ soit f'_U son image canonique en G'_U. Si $f \in G$ posons $\theta(f) = (f'_U)_{U \in \Omega} \in \prod_{U \in \Omega} G'_U$ et montrons que θ est un isomorphisme de G dans le produit direct ordonné $\prod_{U \in \Omega} G'_U$. D'abord $\theta(f + g) = \theta(f) + \theta(g)$ car $(f + g)'_U = f'_U + g'_U$ quelque soit $U \in \Omega$. Si $f \neq 0$ il existe $U \in \Omega$ tel que $\bar{f} \in U$ donc $\bar{f} \wedge \alpha \neq \bar{0}$ quelque soit $\alpha \in U$ et $f \notin P_U \cap (-P_U)$, c'est-à-dire $f'_U \neq 0$ et alors $\theta(f) \neq 0$. Si $f \in P$ alors $f_- = 0$ donc $f \in P_U$ quelque soit $U \in \Omega$ et alors $\theta(f) = (f'_U)_{U \in \Omega}$ est positif dans $\prod_{U \in \Omega} G'_U$. Réciproquement, si $f \notin P$ alors $f_- \neq 0$ donc il existe $U \in \Omega$ tel que $\bar{f}_- \in U$ et alors $f \notin P_U$ car $\bar{f}_- \wedge \alpha \neq \bar{0}$ quelque soit $\alpha \in U$, donc $\theta(f)$ n'est pas positif, car $f'_U \notin P'_U$.

3°. θ est une réalisation, car $pr_U\theta(G) = G'_U$ quelque soit $U \in \Omega$; en effet, si $f'_U \in G'_U$ avec $f \in G$ alors $\mathrm{pr}_U\theta(f) = f'_U$. L'isomorphisme θ est concordant, c'est-à-dire, $\theta(f \wedge g) = \inf\{\theta(f), \theta(g)\}$, $\theta(f \vee g) = \sup\{\theta(f), \theta(g)\}$ (inf et sup pris dans $\prod_{u \in \Omega} G'_U$); pour cela, on doit montrer que $pr_U\theta(f \wedge g) = \inf\{pr_U\theta(f), pr_U\theta(g)\}$ (inf pris dans G'_U) pour tout $U \in \Omega$ (analoguement pour le sup). Puisque G'_U est totalement ordonné, alors par exemple $f'_U \leqq g'_U$ dans $g'_U - f'_U = (g - f)'_U \in P'_U$ et alors $g - f \in P_U$, donc il existe $\beta \in U$ tel que $\overline{(g - f)_-} \wedge \beta = \bar{0}$; or, alors $f \wedge g$ et f sont quasi-égaux selon le pré-ordre défini par P_U, c'est-à-dire, $f \wedge g - f \in P_U \cap (-P_U)$; en effet, $\overline{f \wedge g - f} \wedge \beta = \overline{0 \wedge (g - f)} \wedge \beta = \overline{-(g - f)_-} \wedge \beta = \bar{0}$. Donc $pr_U\theta(f \wedge g) = (f \wedge g)'_U = f'_U = f'_U \wedge g'_U = \inf\{pr_U\theta(f), pr_U\theta(g)\}$.

4°. Montrons maintenant que la réalisation est complètement régulière. Soit $U \in \Omega$, $f \in P$ tel que $U \notin \sigma(f) = \{V \in \Omega \mid pr_V\theta(f) \neq 0\}$, donc $pr_U\theta(f) = 0$ et alors $f \in P_U \cap (P_U)$; ainsi, il existe $g \in P$, $\bar{g} \in U$, tel que $\bar{f} \wedge \bar{g} = \bar{0}$, donc $f \wedge g = 0$ et par conséquent $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \phi$; enfin $pr_U\theta(g) \neq 0$, c'est-à-dire $g \notin P_U \cap (-P_U)$, sinon il existe $\beta \in U$ tel que $\bar{g} \wedge \beta = \bar{0}$, absurde!

REMARQUE. On a $\sigma(f) = \{U \in \Omega \mid \bar{f} \in U\}$ quelque soit $f \in G$, et θ est une réalisation de Hausdorff. En effet, si $f \in G$, $\bar{f} \in U$, alors $pr_U\theta(f) \neq 0$, car sinon $f \in P_U \cap (-P_U)$ et il existe $\alpha \in U$ tel que $\bar{f} \wedge \alpha = \bar{0}$, absurde!

Réciproquement, si $\bar{f} \notin U$ il existe $\beta \in U$ tel que $\bar{f} \wedge \beta = \bar{0}$ donc $f \in P_U \cap (-P_U)$ et alors $pr_U \theta(f) = 0$. Il résulte que si $U, V \in \Omega$, $U \neq V$, il existe $f, g \in P$ tel que $\bar{f} \in U, \bar{f} \notin V, \bar{g} \in V, \bar{f} \wedge \bar{g} = \bar{0}$, donc $\bar{g} \notin U$ et alors $U \in \sigma(f)$, $V \in \sigma(g), f \wedge g = 0$, donc $\sigma(f) \cap \sigma(g) = \phi$.

REFERENCES

1. P. Jaffard, *Contribution à l'Etude des Groupes Ordonnés*, J. Math. Pures et Appl., **32** (1953), 203–280.
2. W. Krull, *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche* I, Math. Z., **41** (1936), 545–577.
3. W. Krull, *Uber geordnete Gruppen von reellen Funktionen*, Math. Z., **64** (1956), 10–40.
4. P. Lorenzen, *Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie*, Math. Z., **45** (1939), 533–553.
5. P. Ribenboim, *Conjonction d'Ordres dans les Groupes Abéliens Ordonnés* Anais Acad. Bras. Ci., **29** (1957), 201–224.
6. ———, *Sur quelques Construction de Groupes Réticulés et l'Equivalence Logique entre l'Affinement de Filtres et d'Ordres*, Summa Bras. Math., **4** (1958) 65-89.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA,
RIO DE JANEIRO, BRASIL